



HAL
open science

Rapport technique du projet KEEP

Antonin Bavoil

► **To cite this version:**

| Antonin Bavoil. Rapport technique du projet KEEP. Université Côte d'Azur. 2024. hal-04513387v2

HAL Id: hal-04513387

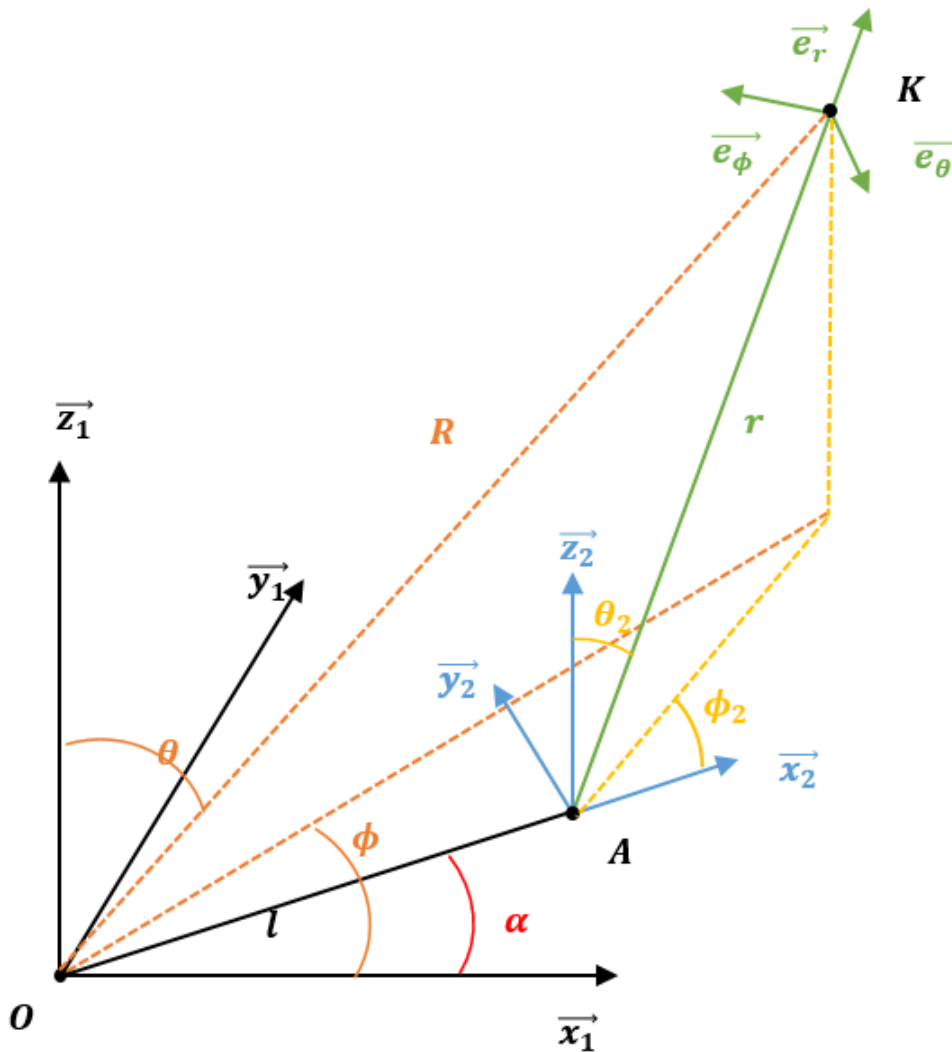
<https://hal.science/hal-04513387v2>

Submitted on 17 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

lignes r (fixe), l'angle de colatitude (co-élévation) locale θ_2 et l'angle de longitude (azimut) locale φ_2 . Enfin, on définit un repère sphérique local $R_s = (K, \hat{r}, \hat{\theta}_2, \hat{\varphi}_2)$. Pour la suite, on note $\hat{z} = \hat{z}_1 = \hat{z}_2$.



Source : [KEEP presentation_confidentielle_v2.pdf](#).

Simplifications

On suppose que les quatre lignes sont rigides et de longueur constante. Le kite est ponctuel, on ne connaît pas son attitude, et il se déplace sur un cône en forme de 8.

Le 8 est décrit par

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \Delta\theta \sin(2\tau) \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \sin(\tau) \end{cases}, \tau \in [0, 2\pi]$$

On note $\hat{\alpha}$ le vecteur unitaire de l'origine vers le bout du bras

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{\tau}$ le vecteur unitaire de l'origine vers le kite

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\hat{\tau}$ le vecteur unitaire du bout du bras vers le kite

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ \cos(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Modélisation

Dix variables d'état :

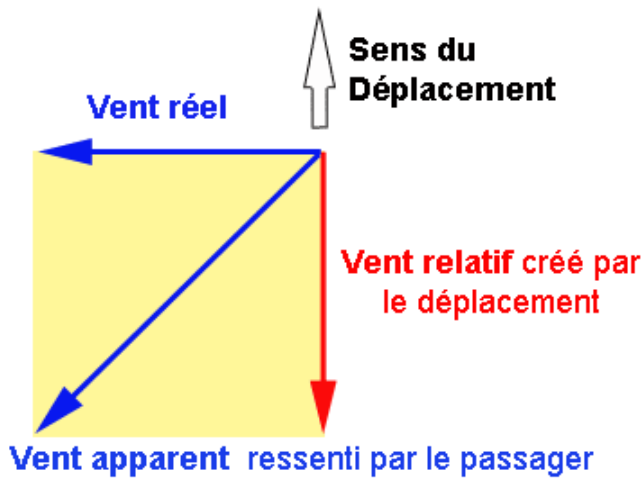
- R : distance du kite à l'origine
- τ : paramètre de la courbe de Lissajous donnant θ et φ , la direction de la génératrice du cône
- α : angle entre le bras et l'axe Ox
- θ_2 : colatitude de K dans R_2
- φ_2 : longitude de K dans R_2
- et leurs dérivées temporelles.

Les paramètres du modèle sont :

- r la longueur des lignes
- l la longueur du bras de levier
- g l'accélération de la pesanteur
- h_{ref} la hauteur de référence du vent
- v_{ref} la vitesse du vent à l'altitude de référence
- ρ_{air} la masse volumique de l'air
- n_{wind} paramètre du modèle de la vitesse du vent
- m la masse du kite
- S la surface du kite
- C_L le coefficient de portance du kite
- C_D le coefficient de trainée du kite
- n_b le nombre de lignes
- d_l le diamètre des lignes
- C_{Dl} le coefficient de trainée des lignes
- ρ_l la masse volumique des lignes
- θ_0 la colatitude du centre du 8 (dans le repère R_1)
- φ_0 la longitude du centre du 8
- $\Delta\theta$ l'amplitude de colatitude du 8
- $\Delta\varphi$ l'amplitude de longitude du 8
- I_{eq} l'inertie du bras
- Ω_{min} la vitesse de rotation du bras à partir de laquelle la génératrice fournit un couple
- Ω_{max} la vitesse de rotation du bras à partir de laquelle la génératrice ne peut plus fournir un couple de manière prolongée sans risque d'endommagement
- Ω_{lim} la vitesse de rotation du bras à partir de laquelle la génératrice ne fourni plus de couple pour se préserver
- C_{max} le couple maximal que la génératrice peut fournir.

Forces

Forces aérodynamiques



Vent réel, vent relatif, vent apparent. Source : [Wikipedia](#).

Les forces aérodynamiques dépendent du vent apparent \mathbf{W}_{app} . Le vent réel \mathbf{W} est donné, à l'altitude z , par :

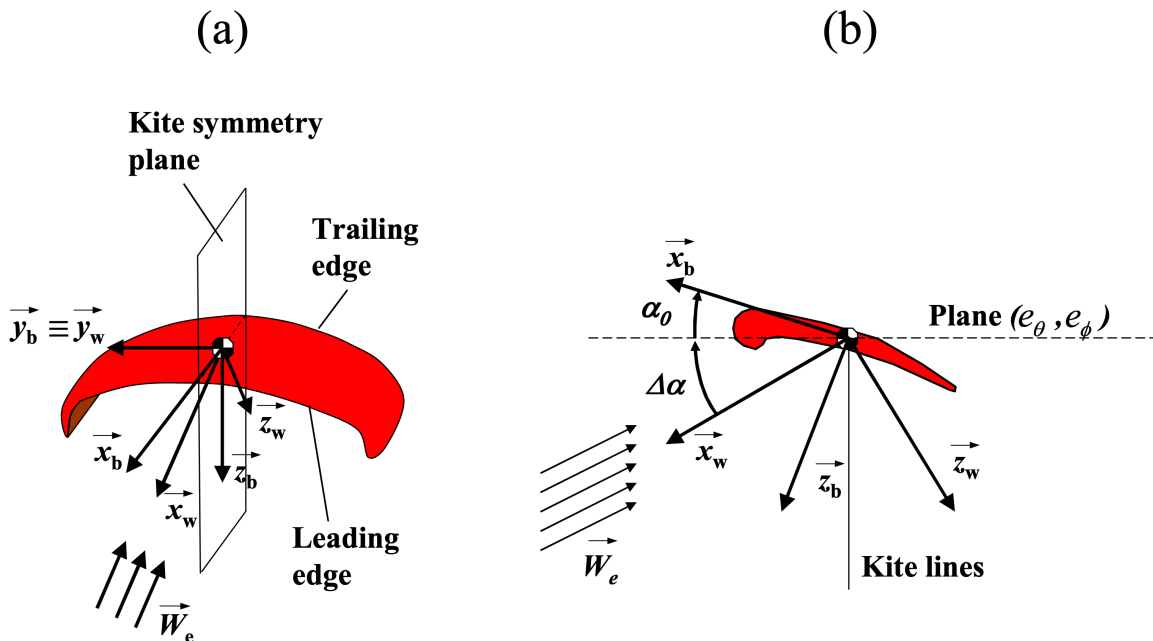
$$\mathbf{W}(z) = v_{\text{ref}} \left(\frac{z}{h_{\text{ref}}} \right)^{\frac{1}{n_{\text{wind}}}} \hat{x}_1$$

Et le vent apparent est donné par $\mathbf{W}_{\text{app}} = \mathbf{W} - \mathbf{V}$ où \mathbf{V} est la vitesse du kite (calculée avec (R, τ) ou $(\alpha, \theta_2, \varphi_2)$).

La portance et la trainée du kite sont respectivement :

$$L = \frac{1}{2} S \rho_{\text{air}} C_L \|\mathbf{W}_{\text{app}}\|^2$$

$$D = \frac{1}{2} S \rho_{\text{air}} C_D \|\mathbf{W}_{\text{app}}\|^2$$



Repère local du vent. Source : [Fagiano 2009a](#)

Pour connaître la direction des forces, on doit déterminer le repère local du vent $(\hat{x}_w, \hat{y}_w, \hat{z}_w)$. \hat{x}_w est le vecteur unitaire opposé au vent apparent, e_w est le vent projeté sur le plan vectoriel orthogonal à \hat{r} normalisé, y_w est un vecteur unitaire orthogonal à \hat{r} et au vent apparent :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_w &= -\frac{\mathbf{W}_{\text{app}}}{\|\mathbf{W}_{\text{app}}\|} = -\hat{\mathbf{W}}_e \\ \mathbf{e}_w &= \frac{\mathbf{W}_e - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}_e)\hat{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{W}_e - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}_e)\hat{\mathbf{r}}\|} \\ \mathbf{y}_w &= \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_w \\ \mathbf{z}_w &= \hat{\mathbf{x}}_w \times \hat{\mathbf{y}}_w\end{aligned}$$

Alors $\mathbf{F}_{\text{aero,kite}} = -L\hat{\mathbf{z}}_w - D\hat{\mathbf{x}}_w$.

On note \mathbf{V}_A la vitesse de A (bout du bras). Grâce à l'hypothèse des lignes rigides, on a l'approximation

$$D_l = \int_{\lambda=0}^{\lambda=r} \frac{1}{2} \text{nb}_l d_l \rho_{\text{air}} C_{Dl} \left\| v_{\text{ref}} \left(\frac{z}{h_{\text{ref}}} \frac{\lambda}{r} \right)^{\frac{1}{n_{\text{wind}}}} \hat{\mathbf{x}}_1 - \frac{\lambda}{r} \mathbf{V} + \left(1 - \frac{\lambda}{r} \right) \mathbf{V}_A \right\|^2 d\lambda$$

Soit $\xi = \lambda/r$, alors $d\lambda = r d\xi$ et

$$D_l = \frac{1}{2} r \text{nb}_l d_l \rho_{\text{air}} C_{Dl} \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left\| v_{\text{ref}} \left(\frac{z}{h_{\text{ref}}} \xi \right)^{\frac{1}{n_{\text{wind}}}} \hat{\mathbf{x}}_1 - \xi \mathbf{V} + (1 - \xi) \mathbf{V}_A \right\|^2 d\xi$$

On simplifie les calculs en remplaçant

$$\int_{\xi=0}^{\xi=1} \left\| v_{\text{ref}} \left(\frac{z}{h_{\text{ref}}} \xi \right)^{\frac{1}{n_{\text{wind}}}} \hat{\mathbf{x}}_1 - \xi \mathbf{V} + (1 - \xi) \mathbf{V}_A \right\|^2 d\xi$$

par

$$\begin{aligned}& \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left\| \xi \left(v_{\text{ref}} \left(\frac{z}{h_{\text{ref}}} \right)^{\frac{1}{n_{\text{wind}}}} \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{V} \right) \right\|^2 d\xi \\ &= \|\mathbf{W}_{\text{app}}\|^2 \int_{\xi=0}^{\xi=1} \xi^2 d\xi \\ &= \frac{1}{3} \|\mathbf{W}_{\text{app}}\|^2\end{aligned}$$

Avec cela, on obtient

$$D_l = \frac{1}{6} \cdot r \cdot \text{nb}_l \cdot d_l \cdot \rho_{\text{air}} \cdot C_{Dl} \cdot \|\mathbf{W}_{\text{app}}\|^2$$

La force aérodynamique des lignes est finalement

$$\mathbf{F}_{\text{aero,lines}} = -D_l \hat{\mathbf{x}}_w$$

Forces de pesanteur

Le poids du kite est $\mathbf{F}_{\text{grav,kite}} = -mg\mathbf{z}_1$. On suppose que le kite ne supporte que la moitié des ligne, l'autre moitié étant "portée" par le bras, donc le poids des lignes est $\mathbf{F}_{\text{grav,lines}} = -\rho_l \cdot \text{nb}_l \cdot r \cdot \pi \cdot d_l^2 \cdot g \cdot \mathbf{z}_1 / 8$.

Tension des lignes

On note $C : \omega \mapsto C(\omega)$ le couple de la génératrice. Le théorème du moment cinétique appliqué au bras donne

$$I_{\text{eq}}\ddot{\alpha} = -C(\dot{\alpha}) - l \sin(\varphi_2) \sin(\theta_2) F_{\text{tension}}$$

où l'on isole F_{tension} pour obtenir

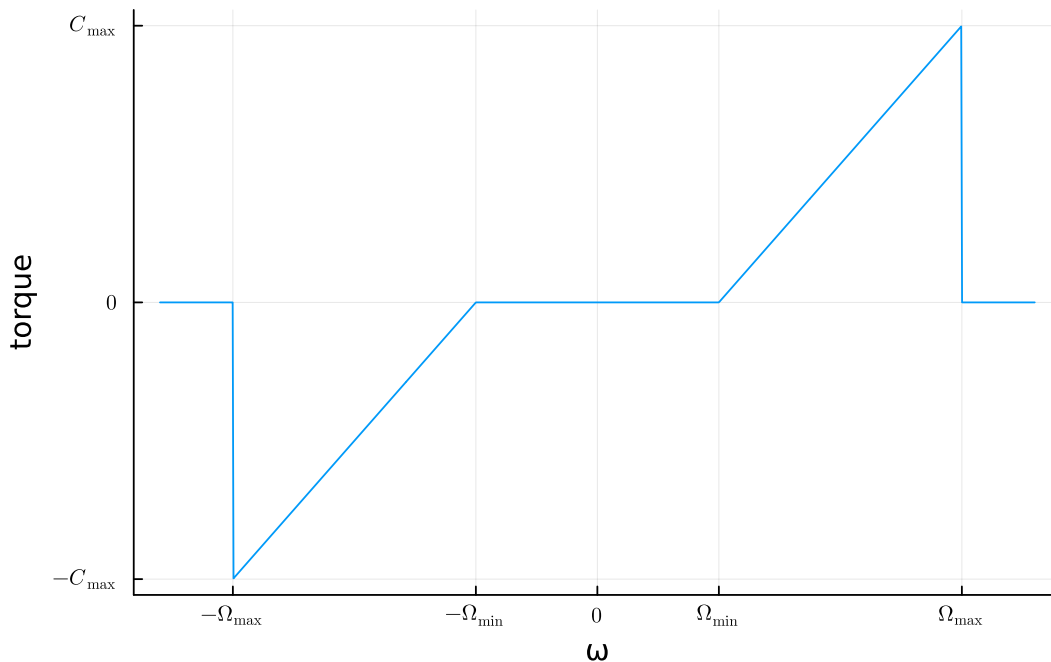
$$\mathbf{F}_{\text{tension}} = -\frac{I_{\text{eq}}\ddot{\alpha} + C(\dot{\alpha})}{l \sin(\varphi_2) \sin(\theta_2)} \hat{r} = F_{\text{tension}} \hat{r}$$

Couple de la génératrice

Le couple de la génératrice utilisé ci-dessus est donné par

$$C(\omega) = \begin{cases} C_{\text{max}} \frac{\omega + \Omega_{\text{min}}}{\Omega_{\text{max}} - \Omega_{\text{min}}} & \text{si } -\Omega_{\text{max}} < \omega < -\Omega_{\text{min}} (< 0) \\ C_{\text{max}} \frac{\omega - \Omega_{\text{min}}}{\Omega_{\text{max}} - \Omega_{\text{min}}} & \text{si } (0 <) \Omega_{\text{min}} < \omega < \Omega_{\text{max}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Torque from arm to generator



Source : [TestKiteFunctions.jl](https://github.com/jeffrey13/TestKiteFunctions.jl).

Glisser sur le cône

Ce premier modèle remplace un contrôle du kite avec les lignes par un glissement sans frottements sur un cône. On peut faire l'analogie avec un train : le chauffeur du train ne dirige pas le train, c'est le rail qui exerce une force horizontale et normale au rail pour maintenir le train sur le chemin de fer. Dans le cadre du kite, ce glissement se traduit par une force supplémentaire sur le kite normale au cône, notée \mathbf{F}_{cone} .

On note \mathbf{F}_{res} la force résultante qui s'applique sur le kite ($\mathbf{F}_{\text{res}} = \mathbf{F}_{\text{aero,kite}} + \mathbf{F}_{\text{aero,lines}} + \mathbf{F}_{\text{grav,kite}} + \mathbf{F}_{\text{grav,lines}} + \mathbf{F}_{\text{tension}} + \mathbf{F}_{\text{cone}}$).

Donc $\mathbf{F}_{\text{cone}} = \mathbf{F}_{\text{res}} - \mathbf{F}_{\text{aero,kite}} - \mathbf{F}_{\text{aero,lines}} - \mathbf{F}_{\text{grav,kite}} - \mathbf{F}_{\text{grav,lines}} - \mathbf{F}_{\text{tension}}$.

Le cône a deux vecteurs tangents $\partial_R \mathbf{OK}$ et $\partial_\tau \mathbf{OK}$, donc

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_R \mathbf{OK} = 0 \\ \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_\tau \mathbf{OK} = 0 \end{cases}$$

Or, d'après la seconde loi de Newton

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = m \begin{pmatrix} \ddot{\text{OK}}_x \\ \ddot{\text{OK}}_y \\ \ddot{\text{OK}}_z \end{pmatrix} = m \ddot{\text{OK}}$$

On calcule $\ddot{\text{OK}}$ comme suit

$$\mathbf{OK} = \begin{pmatrix} l \cos \alpha + r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ l \sin \alpha + r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ r \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{OK}} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} l \sin \alpha + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) - (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ \dot{\alpha} l \cos \alpha + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) + (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ -\dot{\theta}_2 r \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\text{OK}}_x = -\dot{\alpha} l \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 l \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} & + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) - \dot{\theta}_2^2 r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) - \dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ & - (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\alpha}) r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) - \dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) - (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha})^2 r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ = & - \dot{\alpha} l \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 l \cos \alpha \\ & + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) - \left(\dot{\theta}_2^2 + (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha})^2 \right) r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ & - (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\alpha}) r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) - 2\dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \end{aligned}$$

$$\ddot{\text{OK}}_y = \dot{\alpha} l \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 l \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} & + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) - \dot{\theta}_2^2 r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) + \dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ & + (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\alpha}) r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) + \dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) - (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha})^2 r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ = & \dot{\alpha} l \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 l \sin \alpha \\ & + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) - \left(\dot{\theta}_2^2 + (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha})^2 \right) r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ & + (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\alpha}) r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) + 2\dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \end{aligned}$$

$$\ddot{\text{OK}}_z = -\ddot{\theta}_2 r \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 r \cos \theta_2$$

Contraintes géométriques

Pour l'instant, on a deux équations ($\mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_R \mathbf{OK} = 0$ et $\mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_\tau \mathbf{OK} = 0$) pour cinq inconnues ($\ddot{R}, \ddot{\tau}, \ddot{\alpha}, \ddot{\theta}_2, \ddot{\varphi}_2$). On peut trouver les trois équations manquantes en reliant les coordonnées du kite en (R, τ) et celles en $(\alpha, \theta_2, \varphi_2)$. On note $\theta = \theta_0 + \Delta\theta \sin 2\tau$ et $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \sin \tau$.

$$\begin{aligned} R \sin(\theta) \cos(\varphi) &= l \cos(\alpha) + r \sin(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) && \text{projection sur } x \\ R \sin(\theta) \sin(\varphi) &= l \sin(\alpha) + r \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) && \text{projection sur } y \\ R \cos(\theta) &= r \cos(\theta_2) && \text{projection sur } z \end{aligned}$$

On a besoin de faire apparaître les dérivées secondes des variables d'état, donc on dérive deux fois ces équations.

En x

Dérivée première :

$$\begin{aligned} & \dot{R} \sin(\theta) \cos(\varphi) + \dot{\theta} R \cos(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\varphi} R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ & = \\ & -\dot{\alpha} l \sin(\alpha) + \dot{\theta}_2 r \cos(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) - (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) \end{aligned}$$

Dérivée seconde :

$$\begin{aligned} & \ddot{R} \sin(\theta) \cos(\varphi) + 2\dot{R}\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\varphi) - 2\dot{R}\dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ & + \ddot{\theta} R \cos(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\theta}^2 R \sin(\theta) \cos(\varphi) - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} R \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ & - \ddot{\varphi} R \sin(\theta) \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 R \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ & = \\ & -\ddot{\alpha} l \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 l \cos \alpha \\ & + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) - \left(\dot{\theta}_2^2 + (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha})^2 \right) r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ & - (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\alpha}) r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) - 2\dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \end{aligned}$$

En y :

Dérivée première :

$$\begin{aligned} & \dot{R} \sin(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\theta} R \cos(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\varphi} R \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ & = \\ & \dot{\alpha} l \cos(\alpha) + \dot{\theta}_2 r \cos(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) + (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \sin(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) \end{aligned}$$

Dérivée seconde :

$$\begin{aligned} & \ddot{R} \sin(\theta) \sin(\varphi) + 2\dot{R}\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\varphi) + 2\dot{R}\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ & + \ddot{\theta} R \cos(\theta) \sin(\varphi) - \dot{\theta}^2 R \sin(\theta) \sin(\varphi) + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} R \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ & + \ddot{\varphi} R \sin(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ & = \\ & \ddot{\alpha} l \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 l \sin \alpha \\ & + \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) - \left(\dot{\theta}_2^2 + (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha})^2 \right) r \sin \theta_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ & + (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\alpha}) r \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) + 2\dot{\theta}_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) r \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) \end{aligned}$$

En z :

Dérivée première :

$$\dot{R} \cos(\theta) - \dot{\theta} R \sin(\theta) = -\dot{\theta}_2 r \sin(\theta_2)$$

Dérivée seconde :

$$\ddot{R} \cos(\theta) - 2\dot{R}\dot{\theta} \sin(\theta) - \ddot{\theta} R \sin(\theta) - \dot{\theta}^2 R \cos(\theta) = -\ddot{\theta}_2 r \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_2^2 r \cos(\theta_2)$$

Dynamique :

On forme un système linéaire en $(\ddot{R}, \ddot{\tau}, \ddot{\alpha}, \ddot{\theta}_2, \ddot{\varphi}_2)$ à partir des deux équations du cône et des trois dérivées secondes des équations géométriques. On a cinq équations pour cinq inconnues, donc on peut le résoudre pour obtenir la dynamique du système.

Initialisation

Initialisation de l'état

Pour initialiser l'état, τ est libre et α est fixé à 0. On calcule d'abord R puis θ_2 et φ_2 .

Pour trouver R , on calcule l'intersection entre la demi-droite (ensemble des positions du kite pour un τ donné)

$$\{R\hat{\tau}, R \in \mathbb{R}_+\}$$

et la sphère de centre $(l, 0, 0)$ de rayon r (ensemble des positions du kite avec le bras à $\alpha = 0$)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - l)^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

On cherche R tel que :

$$(Rx_\tau - l)^2 + (Ry_\tau)^2 + (Rz_\tau)^2 = r^2$$

soit

$$R^2 \underbrace{(x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2)}_{=\|\hat{\tau}\|^2=1} - 2Rlx_\tau + l^2 - r^2 = 0$$

On résout ce polynôme du second degré en R . Son discriminant réduit $\Delta' = l^2x_\tau^2 + r^2 - l^2 = r^2 + (x_\tau^2 - 1)l^2$ est strictement positif pour $r > l$ (condition suffisante) ce qui est le cas pour l'installation réelle. Les deux solutions sont

$$R_\pm = lx_\tau \pm \sqrt{\Delta'}$$

On prend la solution R_+ car c'est celle qui est la plus sous le vent.

Ensuite on trouve θ_2 avec $R \cos(\theta) = r \cos(\theta_2)$ et enfin φ_2 avec $R \sin(\theta) \sin(\varphi) = r \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2)$, qui vient de $R \sin(\theta) \sin(\varphi) = l \sin(\alpha) + r \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha)$ avec $\alpha = 0$.

Étant donné $\tau = \tau_0$, on a un état $(R, \alpha, \tau, \theta_2, \varphi_2)$ géométriquement cohérent avec :

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 \\ \alpha = 0 \\ R^2 - 2Rl \sin(\theta) \cos(\varphi) + l^2 - r^2 = 0 \\ R \cos(\theta) = r \cos(\theta_2) \\ R \sin(\theta) \sin(\varphi) = l \sin(\alpha) + r \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) \end{cases}$$

Initialisation des vitesses

$\dot{\tau}$ et $\dot{\alpha}$ sont laissés libres et on cherche $(\dot{R}, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi}_2)$. On n'a pas besoin de l'équation du second degré en R uniquement puisque le système est linéaire, contrairement au précédent. On peut utiliser la dernière loi de vitesse (selon x) pour avoir

$$\begin{cases} \dot{\tau} = \dot{\tau}_0 \\ \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \\ \dot{R} \sin(\theta) \cos(\varphi) + R \cos(\theta) \cos(\varphi) \frac{d\theta}{d\tau} \dot{\tau} - R \sin(\theta) \sin(\varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} \dot{\tau} = \dots \\ \quad - l \sin(\alpha) \dot{\alpha} + r \cos(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) \dot{\theta}_2 - r \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) \\ \dot{R} \sin(\theta) \sin(\varphi) + R \cos(\theta) \sin(\varphi) \frac{d\theta}{d\tau} \dot{\tau} + R \sin(\theta) \cos(\varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} \dot{\tau} = \dots \\ \quad l \cos(\alpha) \dot{\alpha} + r \cos(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) \dot{\theta}_2 + r \sin(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha}) \\ \dot{R} \cos(\theta) - R \sin(\theta) \frac{d\theta}{d\tau} \dot{\tau} = -r \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

On obtient un système linéaire en $(\dot{R}, \dot{\tau}, \dot{\alpha}, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi}_2)$ que l'on résout pour trouver les vitesses initiales.

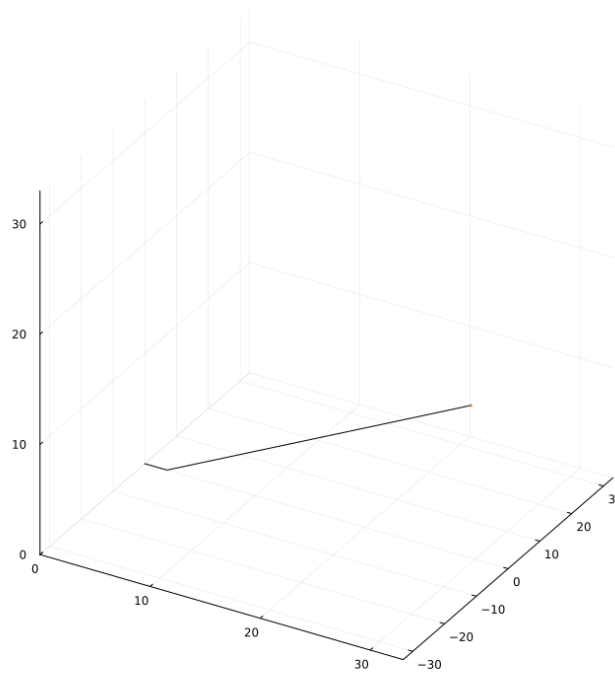
Implémentation

Dans cette première version du code, qui a été écrite avant mars 2023, les systèmes linéaires étaient inversés sur Maple, puis la solution était copiée-collée dans le code. Ça donne un code rapide mais impossible à modifier si l'on venait à modifier le modèle.

On note $q = (R, \tau, \alpha, \theta_2, \varphi_2)$. L'état du système est $y = (q, \dot{q})$ et la fonction qui calcule la dynamique donne $\dot{y} = (\dot{q}, \ddot{q})$ pour un y donné.

Une première inspection est satisfaisante, le kite (en orange) effectue des 8 et le bras de la génératrice (en vert) fait des aller-retours :

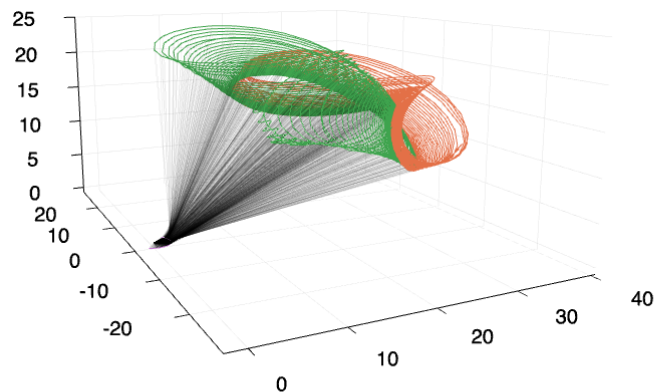
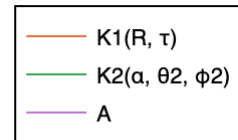
t = 0.00 s / 5.00 s



Mais sur un temps d'intégration long, une dérive numérique apparaît. Les contraintes géométriques ne sont pas inscrites en dur dans l'implémentation. On initialise les résidus de ces contraintes à 0 (voir la partie [Initialisation](#)) puis on cherche à annuler les dérivées secondes de ces résidus dans la dynamique. Théoriquement c'est équivalent à avoir des résidus nuls, mais des erreurs machine s'accumulent et les résidus ne sont plus parfaitement nuls.

On passe d'une équation différentielle algébrique (DAE) d'indice **2** (équation où les contraintes ne seraient pas dérivées) à une équation différentielle ordinaire en dérivant **2** fois les contraintes.

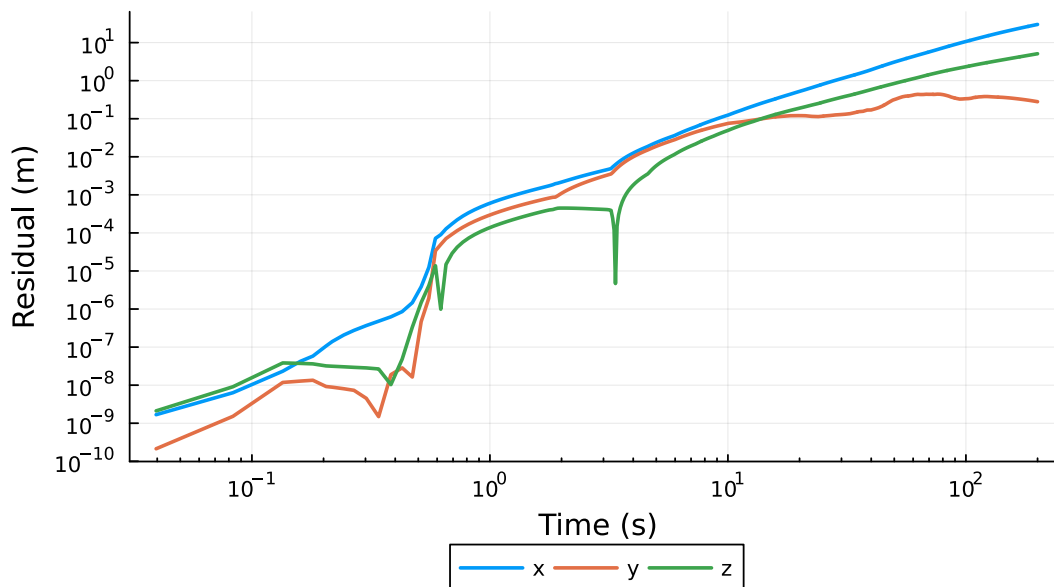
Voici le résultat de la simulation sur un temps long (200 secondes). La position K_1 donnée par (R, τ) ne concorde plus avec la position K_2 donnée par $(\alpha, \theta_2, \varphi_2)$, et les calculs s'en trouvent faussés.



Source : [TestSolutionAnalysis.jl](#)

On voit aussi ce problème dans les résidus des équations géométriques :

Geometric constraints residuals



Source : [TestSolutionAnalysis.jl](#)

Correction par projection sur variété

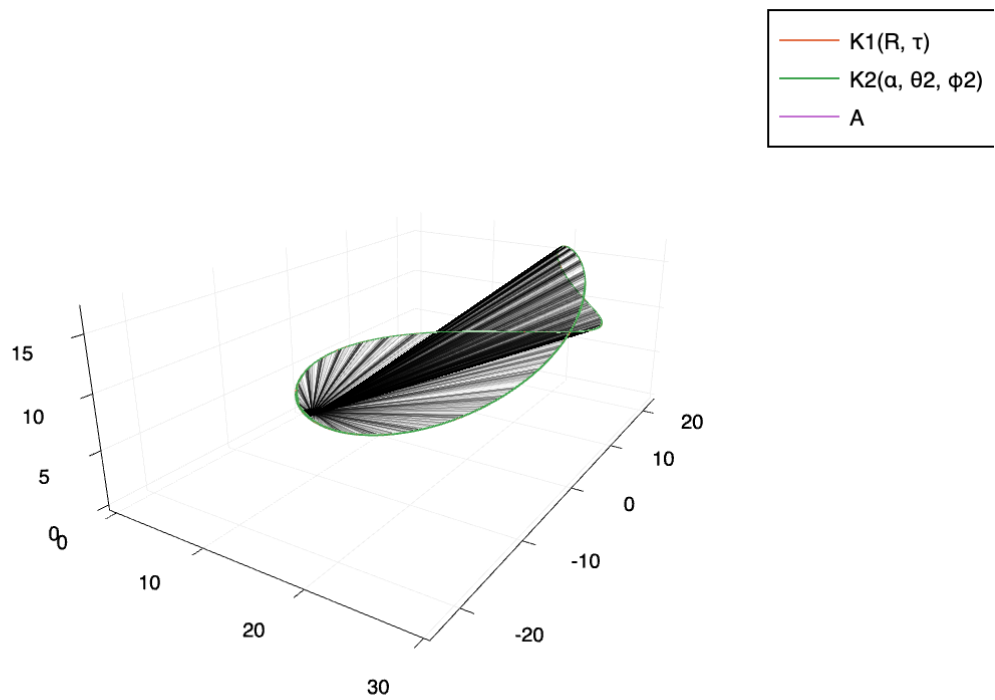
La librairie `DiffEqCallbacks.jl` permet de projeter l'état sur la variété des états géométriquement possibles à chaque pas de simulation. Non seulement les positions en x , y et z doivent correspondre entre la formulation en (R, τ) et en $(\alpha, \theta_2, \varphi_2)$ qui se calculent avec q , mais aussi les vitesses qui se calculent avec q et \dot{q} . La librairie a besoin d'une fonction qui s'annule sur la variété, on choisit la

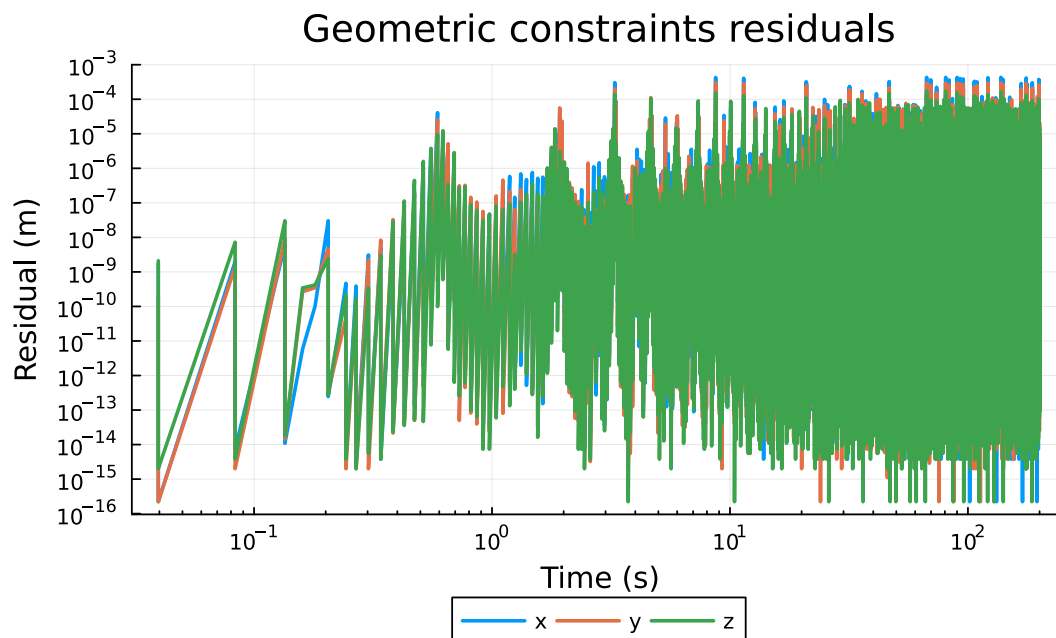
fonction qui calcule les différence de position et de vitesse entre les deux formulations :

$$g(x) = \begin{pmatrix} R \sin(\theta) \cos(\varphi) - l \cos(\alpha) - r \sin(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ R \sin(\theta) \sin(\varphi) - l \sin(\alpha) - r \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ R \cos(\theta) - r \cos(\theta_2) \\ \dot{R} \sin(\theta) \cos(\varphi) + \dot{\theta} R \cos(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\varphi} R \sin(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\alpha} l \sin(\alpha) - \dot{\theta}_2 r \cos(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ \dot{R} \sin(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\theta} R \cos(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\varphi} R \sin(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\alpha} l \cos(\alpha) - \dot{\theta}_2 r \cos(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ \dot{R} \cos(\theta) - \dot{\theta} R \sin(\theta) + \dot{\theta}_2 r \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

Un pas de projection à chaque pas de simulation suffit à ne plus avoir de dérive. Une étude simple sur les effets secondaires de la projection a été faite dans [02_DiffEqCallbacks.ipynb](#) et montre qu'on peut avoir une dérive temporelle en échange d'un état sur la variété. Pour avoir une trajectoire lisse, on peut ne pas projeter selon la variable τ . On ne s'attarde pas trop sur cet aspect car l'objectif est de ne plus en avoir besoin.

Voici les mêmes graphique qu'au paravant en appliquant cette correction :





Source : [TestSolutionAnalysis.jl](#)

Le problème a disparu, les deux positions concordent, et les résidus restent inférieurs à un millimètre.

Différentiation automatique

On a vu de nombreuses formules à rallonge issues de la dérivation d'autres formules. Au départ, tout était écrit dans le code à la main, voir `systeme2!` dans [src/julia/kite_function.ipynb](#). C'est long, les risques de bugs sont élevés, et si on change quoi que ce soit, il faut recommencer tous les calculs. Les bibliothèques de différentiation automatique donnent accès à des fonctions qui calculent les dérivées (ou gradient, jacobien, hessienne...) de fonction définies par l'utilisateur : pas besoin de calculer à la main la dérivée puis de la recopier dans le code. La différentiation automatique est, entre autres, très utilisée pour entraîner les réseaux de neurones.

Une première étape a été de retrouver les mêmes résultats avec un code de différentiation symbolique (`Symbolics.jl`) pour mieux comprendre les calculs faits par l'ordinateur, puisqu'on a accès à la formule de la dérivée. Ensuite, il a fallu retrouver les mêmes résultats par différentiation automatique (`ForwardDiff.jl`, voir [AD step by step](#)) où l'on n'a plus accès qu'à des valeurs suite à la différentiation. Enfin, le code en différentiation automatique a dû être intégré à la simulation.

Le temps d'exécution est environ deux fois plus grand, mais le code est beaucoup plus court et lisible, et on pourra plus facilement modifier le modèle plus tard.

Passer de dix variables à six

On veut se séparer des variables θ_2 et φ_2 . Elles ne servent qu'à calculer \hat{r} (qui intervient dans le calcul des forces aérodynamiques) et $\mathbf{F}_{\text{tension}}$.

Calculer \hat{r}

On peut calculer \hat{r} à partir de \mathbf{OK} et de \mathbf{OA}

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{OK} - \mathbf{OA}}{\|\mathbf{OK} - \mathbf{OA}\|} = \frac{R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}}{\|R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}\|}$$

où \hat{r} se calcule avec τ , et $\hat{\alpha}$ se calcule avec α .

Calculer la tension des lignes

Soit une force \mathbf{F} qui s'applique en un point A . Alors le moment de \mathbf{F} en un point O est le vecteur

$$\mathcal{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{OA} \times \mathbf{F}.$$

Soit la droite Δ passant par O portée par le vecteur unitaire \hat{z} . Alors le moment de \mathbf{F} par rapport à l'axe Δ est le scalaire

$$\mathcal{M}_\Delta(\mathbf{F}) = \mathcal{M}_O(\mathbf{F}) \cdot \hat{z}.$$

Dans notre cas, l'axe de rotation du bras Δ passe par O et est porté par \hat{z} , et la force de tension des lignes $\mathbf{F}_{\text{tension}}$ s'applique en A le bout de bras. Auparavant, on calculait $\mathcal{M}_\Delta(\mathbf{F}_{\text{tension}})$ en utilisant la base attachée au kite, mais on peut faire sans pour se débarrasser de la dépendance en Θ_2 et φ_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\mathbf{F}_{\text{tension}}) &= \mathcal{M}_O(\mathbf{F}_{\text{tension}}) \cdot \hat{z} \\ &= (\mathbf{OA} \times \mathbf{F}_{\text{tension}}) \cdot \hat{z} \\ &= (\mathbf{OA} \times F_{\text{tension}} \hat{r}) \cdot \hat{z} \\ &= (l\hat{x}_2 \times F_{\text{tension}}((\hat{r} \cdot \hat{x}_2)\hat{x}_2 + (\hat{r} \cdot \hat{y}_2)\hat{y}_2 + (\hat{r} \cdot \hat{z})\hat{z})) \cdot \hat{z} \\ &= {}^* lF_{\text{tension}} \hat{r} \cdot \hat{y}_2 \\ &= lF_{\text{tension}} \frac{R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}}{\|R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}\|} \cdot (\hat{z} \times \hat{\alpha}) \end{aligned}$$

R , τ et α sont les variables d'état donc on peut calculer cette expression. On injecte maintenant ceci dans le résultat du théorème du moment cinétique appliqué à la génératrice pour obtenir :

$$I_{\text{eq}}\ddot{\alpha} = -C(\dot{\alpha}) - lF_{\text{tension}} \frac{R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}}{\|R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}\|} \cdot (\hat{z} \times \hat{\alpha})$$

où l'on isole $\mathbf{F}_{\text{tension}}$:

$$\mathbf{F}_{\text{tension}} = - \frac{I_{\text{eq}}\ddot{\alpha} + C(\dot{\alpha})}{l \frac{R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}}{\|R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}\|} \cdot (\hat{z} \times \hat{\alpha})} \hat{r}.$$

| * : $\hat{x}_2 \times \hat{x}_2 = \mathbf{0}$ et $(\hat{x}_2 \times \hat{z}) \cdot \hat{z} = 0$, donc il ne reste plus que la composante en \hat{y}_2 .

Une troisième équation pour trois inconnues

Comme on n'a plus que trois inconnues dans la dynamique (\ddot{R} , $\ddot{\tau}$, $\ddot{\alpha}$), on n'a plus besoin que d'une équation en plus des deux produits scalaires pour déterminer la dynamique. La distance \mathbf{AK} entre le bout du bras et le kite est constante (égale à r).

On a trois inconnues (\ddot{R} , $\ddot{\tau}$, $\ddot{\alpha}$) dans la dynamique et les deux produits scalaires pour les déterminer. On a donc besoin d'une troisième équation. La distance \mathbf{AK} entre le bout du bras et le kite est constante (égale à r).

Soit $\tilde{f} : (R, \tau, \alpha) \mapsto \|R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}\|^2$ et soit $f : t \mapsto f(R(t), \tau(t), \alpha(t))$. On souhaite que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = r^2$. On doit parvenir à faire respecter cette condition tout en faisant apparaître au moins une des trois inconnues de la dynamique. Pour cela, on choisit l'état initial (R_0, τ_0, α_0) tel que

$f(0) = r^2$, les vitesses initiales $(\dot{R}_0, \dot{\tau}_0, \dot{\alpha}_0)$ telles que $\dot{f}(0) = 0$ et ajouter aux deux produits scalaires de la dynamique l'équation $\ddot{f}(t) = 0$.

Les dérivées de la fonction f sont :

$$\dot{f}(t) = 2(R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}) \cdot (\dot{R}\hat{\tau} + R\dot{\hat{\tau}} - l\dot{\hat{\alpha}})$$

et

$$\ddot{f}(t) = 2(\dot{R}\hat{\tau} + R\dot{\hat{\tau}} - l\dot{\hat{\alpha}})^2 + 2(R\hat{\tau} - l\hat{\alpha}) \cdot (\ddot{R}\hat{\tau} + 2\dot{R}\dot{\hat{\tau}} + R\ddot{\hat{\tau}} - l\ddot{\hat{\alpha}}),$$

donc on a bien fait apparaître des dérivées secondes de l'état qui sont les inconnues de la dynamique, et en fixant $\dot{\alpha}_0$ et $\dot{\tau}_0$ on déduit \dot{R}_0 . On peut calculer la dynamique du kite avec un état à six dimensions $(R, \tau, \alpha, \dot{R}, \dot{\tau}, \dot{\alpha})$, les équations

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_R \mathbf{OK} = 0 \\ \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_\tau \mathbf{OK} = 0 \\ \ddot{f}(t) = 0 \end{cases}$$

et en initialisant correctement R et \dot{R} avec $f(0) = r^2$, $\dot{f}(0) = 0$ et les valeurs choisies de $\alpha_0, \tau_0, \dot{\alpha}_0, \dot{\tau}_0$.

Passer de six à quatre variables

Une première tentative pour passer de six variables à quatre variables a été d'éliminer α , mais il y a presque tout le temps une indécision entre deux valeurs de α , on aurait rendu le problème plus compliqué.

Par contre on peut éliminer R avec un calcul similaire à l'initialisation de l'état. Voir [Issue #30](#).

Étant donné τ et α , peut-on déterminer la position du kite ? On cherche l'intersection entre

- la droite \mathcal{D} passant par O portée par $\hat{\tau}$, $\{R\hat{\tau}, R \in \mathbb{R}\}$, les positions possibles du kite pour un τ donné, et
- la sphère \mathcal{S} centrée en $A = (lx_\alpha, ly_\alpha, 0)$ de rayon r , $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + z^2 = r^2\}$, les positions possibles du kite pour un α donné.

Soient $R \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \tau) \in [0, 2\pi[$.

$$\begin{aligned} R\hat{\tau} &\in \mathcal{S} \\ \iff (Rx_\tau - lx_\alpha)^2 + (Ry_\tau - ly_\alpha)^2 + R^2z_\tau^2 &= r^2 \\ \iff R^2 \underbrace{(x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2)}_{=\|\hat{\tau}\|=1} - 2Rl \underbrace{(x_\tau x_\alpha + y_\tau y_\alpha)}_{=\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}} + l \underbrace{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)}_{=\|\hat{\alpha}\|=1} &= r^2 \\ \iff R^2 - 2Rl(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}) - (r^2 - l^2) &= 0 \end{aligned}$$

On cherche les racines d'un polynôme du second degré en R . Son discriminant réduit est $\Delta' = r^2 - l^2(1 - (\hat{\alpha} \cdot \hat{\tau})^2)$. Le système physique aura un bras de longueur $l = 2$ m et des lignes de longueurs $r = 31$ m, donc $(0 <) l < r$.

$$0 < l < r \implies r^2 > l^2 \implies \forall \xi \leq 1, r^2 > l^2 \xi \implies \forall \xi \leq 1, r^2 - l^2 \xi > 0$$

Or $(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2 \geq 0$, donc $1 - (\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2 \leq 1$. Avec $\xi = 1 - (\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2$, on a bien $\xi \leq 1$, donc $\Delta' = r^2 - l^2(1 - (\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2) > 0$. Ce polynôme a donc deux racines distinctes :

$$R_{\pm} = l(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}) \pm \sqrt{\Delta'}$$

On étudie la racine R_- :

$$R_- = l(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}) - \sqrt{l^2(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2 + r^2 - l^2} \underset{r^2 - l^2 > 0}{\leq} l(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}) - \sqrt{l^2(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2} = l(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha} - |\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}|) \leq 0$$

La racine R_- est négative, ce qui donne un kite souterrain. La valeur de R recherchée est

$$\begin{aligned} R_+ &= l(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}) + \sqrt{l^2(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2 + r^2 - l^2} \\ &= l(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}) + \sqrt{r^2 - l^2(1 - (\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2)} \\ &= \hat{\tau} \cdot \mathbf{OA} + \sqrt{(\hat{\tau} \cdot \mathbf{OA})^2 + r^2 - l^2} \end{aligned}$$

Pour conclure, à partir de (τ, α) , on peut calculer R , et à partir de $(\tau, \alpha, \dot{\tau}, \dot{\alpha})$ on peut calculer \dot{R} et \ddot{R} à l'aide de la différentiation automatique. On a déjà montré qu'en connaissant (R, τ, α) et $(\dot{R}, \dot{\tau}, \dot{\alpha})$ on peut déterminer la dynamique, donc l'état (τ, α) (et $(\dot{\tau}, \dot{\alpha})$) suffit à déterminer la dynamique.

On choisit de garder $\alpha_0 = 0$ pour simplifier les calculs de l'initialisation, on est libre sur le choix de τ_0 , $\dot{\alpha}_0$ et de $\dot{\tau}_0$. Pour calculer la dynamique étant donnés (α, τ) et $(\dot{\alpha}, \dot{\tau})$, on calcule dans un premier temps R , \dot{R} et \ddot{R} puis on cherche $(\ddot{\alpha}, \ddot{\tau})$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_R \mathbf{OK} = 0 \\ \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \partial_{\tau} \mathbf{OK} = 0 \end{cases}$$

On remarque qu'en utilisant $\mathbf{OK} = R\hat{\tau}$ pour les calculs de $\dot{\mathbf{OK}}$ et $\ddot{\mathbf{OK}}$ intervenant dans \mathbf{F}_{cone} , on n'a plus besoin de faire intervenir de contrainte géométrique pour satisfaire la dimensionnalité du système dynamique.

Modèle adimensionnel

Pour optimiser le design du système, on doit se débarrasser de toute redondance dans les paramètres. Le théorème de Vaschy-Buckingham dit qu'un problème à n variables physiques (les paramètres) qui dépendent de k unités fondamentales (kg , m et s) peut être reformulé en un problème à $n - k$ variables sans dimension équivalent. Dans cette partie, on note x la variable sans dimension associée à \bar{x} la variable dimensionnée, si x_{ref} est la grandeur de référence de \bar{x} , alors $x = \bar{x}/x_{\text{ref}}$. En particulier, $m = l = v_{\text{ref}} = 1$.

Les dimensions physiques mises en jeu sont la masse $[M]$, le temps $[T]$ et la longueur $[L]$. Il est donc nécessaire de choisir trois paramètres dimensionnellement indépendants qui serviront de support à la construction des variables et paramètres adimensionnels. On utilise en général des constantes du système dynamique. On peut raisonnablement proposer ici la masse du kite \bar{m} $[M]$, la vitesse du vent à l'altitude de référence \bar{v}_{ref} $[LT^{-1}]$ et la longueur du bras \bar{l} $[L]$.

Les nouveaux paramètres sont :

- $g = \bar{g} \times \frac{\bar{l}}{\bar{v}_{\text{ref}}^2}$
- $r = \bar{r} \times \frac{1}{\bar{l}}$
- $h_{\text{ref}} = \bar{h}_{\text{ref}} \times \frac{1}{\bar{l}}$
- n_{wind}

- $c_L = \frac{\bar{S} \bar{\rho}_{\text{air}} C_L}{2} \times \frac{\bar{l}}{\bar{m}}$
- $f = \frac{C_L}{C_D}$ coefficient de finesse du kite
- $c_{Dl} = \frac{\bar{d}_l \text{nb}_l \bar{\rho}_{\text{air}} C_{Dl}}{6} \times \frac{\bar{l}^2}{\bar{m}} \sim$ trainée linéique des lignes
- $m_l = \frac{\pi \bar{d}_l^2 \text{nb}_l \bar{\rho}_l \bar{g}}{8} \times \frac{\bar{m}}{\bar{l}^2} \sim$ poids linéique des lignes
- $I_{\text{eq}} = \bar{I}_{\text{eq}} \times \frac{1}{\bar{l}^2 \bar{m}}$
- $C_{\text{max}} = \bar{C}_{\text{max}} \times \frac{1}{\bar{m} \bar{v}_{\text{ref}}^2}$
- $\Omega_{\text{min}} = \bar{\Omega}_{\text{min}} \times \frac{\bar{l}}{\bar{v}_{\text{ref}}}$
- $\Omega_{\text{max}} = \bar{\Omega}_{\text{max}} \times \frac{\bar{l}}{\bar{v}_{\text{ref}}}$
- $\Omega_{\text{lim}} = \bar{\Omega}_{\text{lim}} \times \frac{\bar{l}}{\bar{v}_{\text{ref}}}$.

Et on a notamment que :

- $t = \bar{t} \times \bar{v}_{\text{ref}} / \bar{l}$ est le nouveau temps de référence
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ est la dérivée de la variable x par rapport au temps **normalisé** t
- $R = \bar{R} \times \frac{1}{\bar{l}}$
- $V = \bar{V} \times \frac{1}{\bar{v}_{\text{ref}}}$ la vitesse du kite
- $C_r = \frac{\bar{C}_r}{\bar{m} \bar{v}_{\text{ref}}^2}$
- $F_{\text{tension}} = \bar{F}_{\text{tension}} \times \frac{\bar{l}}{\bar{m} \bar{v}_{\text{ref}}^2}$
- $\omega = \bar{\omega} \times \frac{\bar{l}}{\bar{v}_{\text{ref}}}$

Attention ! Dans toute cette section, la notation \dot{x} ne représente plus la dérivée par rapport au temps \bar{t} mais au temps normalisé t :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\bar{l}}{\bar{v}_{\text{ref}}} \frac{dx}{d\bar{t}} = \frac{1}{\bar{v}_{\text{ref}}} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$$

Le modèle du couple adimensionnel de la génératrice est :

$$C(\omega) = \begin{cases} C_{\text{max}} \frac{\omega + \Omega_{\text{min}}}{\Omega_{\text{max}} - \Omega_{\text{min}}} & \text{si } -\Omega_{\text{max}} < \omega < -\Omega_{\text{min}} (< 0) \\ C_{\text{max}} \frac{\omega - \Omega_{\text{min}}}{\Omega_{\text{max}} - \Omega_{\text{min}}} & \text{si } (0 <) \Omega_{\text{min}} < \omega < \Omega_{\text{max}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $z = R \cos(\theta)$, le modèle de la vitesse adimensionnelle du vent est :

$$\mathbf{W}(z) = \left(\frac{z}{h_{\text{ref}}} \right)^n \hat{x}.$$

La vitesse du kite est :

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{d\overline{\mathbf{OK}}}{d\bar{t}} = \bar{v}_{\text{ref}} \mathbf{V}$$

où :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{R} \sin(\theta) \cos(\varphi) + R \cos(\theta) \cos(\varphi) \dot{\theta} - R \sin(\theta) \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{R} \sin(\theta) \sin(\varphi) + R \cos(\theta) \sin(\varphi) \dot{\theta} + R \sin(\theta) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{R} \cos(\theta) - R \sin(\theta) \dot{\theta} \end{pmatrix},$$

$$\dot{\theta} = 2\Delta\theta \cos(2\tau) \dot{\tau}$$

$$\dot{\varphi} = \Delta\varphi \cos(\tau) \dot{\tau}$$

et le vent est :

$$\bar{\mathbf{W}} = \bar{v}_{\text{ref}} \mathbf{W}.$$

Le vent apparent du kite est :

$$\bar{\mathbf{W}}_{\text{app}} = \bar{v}_{\text{ref}} (\mathbf{W} - \mathbf{V}) = \bar{v}_{\text{ref}} \mathbf{W}_{\text{app}}$$

On trouve ainsi la force aérodynamique du kite :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{aero,kite}} = \frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} c_L \|\mathbf{W}_{\text{app}}\| \left(-\hat{z}_w - \frac{1}{f} \hat{x}_w\right) = \frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} \mathbf{F}_{\text{aero,kite}}$$

et la force aérodynamique des lignes :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{aero,lines}} = \frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} r c_{Dl} \|\mathbf{W}_{\text{app}} - (\hat{r} \cdot \mathbf{W}_{\text{app}}) \hat{r}\| \hat{e}_w = \frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} \mathbf{F}_{\text{aero,lines}}.$$

La force de gravité du kite est :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{grav,kite}} = -\frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} g \hat{z} = \frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} \mathbf{F}_{\text{grav,kite}}$$

et la force de gravité des lignes est :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{grav,lines}} = -\frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} r m_l \hat{z} = \frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} \mathbf{F}_{\text{grav,lines}}.$$

La force de tension des lignes est (on rappelle que $l = 1$ n'apparaît plus) :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{tension}} = \frac{\bar{m}\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} \mathbf{F}_{\text{tension}}.$$

avec

$$\mathbf{F}_{\text{tension}} = -\frac{I_{\text{eq}} \ddot{\alpha} + C(\dot{\alpha})}{\frac{R\hat{r} - \hat{\alpha}}{\|R\hat{r} - \hat{\alpha}\|} \cdot (\hat{z} \times \hat{\alpha})} \hat{r}.$$

La seconde loi de Newton donne :

$$\bar{m} \frac{d^2 \overline{\mathbf{OK}}}{dt^2} = \bar{\mathbf{F}}_{\text{res}}$$

$$= \bar{m} \frac{\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} \dot{\mathbf{V}} = \bar{m} \frac{\bar{v}_{\text{ref}}^2}{\bar{l}} \mathbf{F}_{\text{res}}.$$

donc

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}_{\text{res}}.$$

La force résultante adimensionnée qui s'applique sur le kite est

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \mathbf{F}_{\text{aero,kite}} + \mathbf{F}_{\text{aero,lines}} + \mathbf{F}_{\text{grav,kite}} + \mathbf{F}_{\text{grav,lines}} + \mathbf{F}_{\text{tension}} + \mathbf{F}_{\text{cone}},$$

donc

$$\mathbf{F}_{\text{cône}} = \mathbf{F}_{\text{res}} - \mathbf{F}_{\text{aero,kite}} - \mathbf{F}_{\text{aero,lines}} - \mathbf{F}_{\text{grav,kite}} - \mathbf{F}_{\text{grav,lines}} - \mathbf{F}_{\text{tension}}$$

Enfin, on peut calculer la dynamique en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{cône}} \cdot \partial_R \mathbf{OK} = 0 \\ \mathbf{F}_{\text{cône}} \cdot \partial_\tau \mathbf{OK} = 0 \end{cases}$$

Réécriture explicite du modèle

Jusqu'à maintenant, la dynamique du système est donnée par un système d'équation qu'il reste à résoudre, et ce n'est même pas évident qu'il y ait une unique solution. On va donc rendre la dynamique explicite.

Plus précisément, on veut réécrire le système

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{cône}} \cdot \partial_R \mathbf{OK} = 0 \\ \mathbf{F}_{\text{cône}} \cdot \partial_\tau \mathbf{OK} = 0 \end{cases}$$

sous la forme $A \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix} + b = 0$.

La force du cône $\mathbf{F}_{\text{cône}}$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{cône}} = m\ddot{\mathbf{OK}} - \mathbf{F}_{\text{tension}} - \mathbf{F}_{\text{stat}}$$

où $\mathbf{F}_{\text{stat}} = \mathbf{F}_{\text{aero}} + \mathbf{F}_{\text{grav}}$ ne dépend pas de $(\ddot{\alpha}, \ddot{\tau})$. On veut faire apparaître explicitement tous les $(\ddot{\alpha}, \ddot{\tau})$ qui sont implicites dans cette expression, d'abord dans $\ddot{\mathbf{OK}}$ puis dans $\mathbf{F}_{\text{tension}}$.

On note $q = \begin{pmatrix} \alpha \\ \tau \end{pmatrix}$, $\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}$, et $\ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$.

Dans un premier temps, on cherche à exprimer \ddot{R} en fonction de $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$, puis on exprimera $\ddot{\mathbf{OK}}$ en fonction de $\begin{pmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$, et enfin on combinera les deux relations pour obtenir $\ddot{\mathbf{OK}}$ en fonction de $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$.

Expression de \ddot{R} en fonction de $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$

La longueur R est donnée par $R(\alpha, \tau) = l(\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha}) + \sqrt{r^2 - l^2(1 - (\hat{\tau} \cdot \hat{\alpha})^2)}$. Par différenciation automatique, on peut en calculer ses dérivées. Sa dérivée temporelle est $\dot{R}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}) = \mathbf{J}_R(\alpha, \tau) \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}$: elle est calculable. Sa dérivée seconde temporelle est

$$\ddot{R}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}, \ddot{\alpha}, \ddot{\tau}) = \mathbf{J}_{\dot{R}}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}) \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse aux coefficients de $\mathbf{J}_{\dot{R}}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau})$:

- $\partial_\alpha \dot{R}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}) = \partial_\alpha \left(\mathbf{J}_R(\alpha, \tau) \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right) = \left(\partial_{\alpha,\alpha}^2 R(\alpha, \tau) \quad \partial_{\alpha,\tau}^2 R(\alpha, \tau) \right) \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}$

- $\partial_\tau \dot{R}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}) = (\partial_{\tau, \alpha}^2 R(\alpha, \tau) \quad \partial_{\tau, \tau}^2 R(\alpha, \tau)) \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}$
- $\partial_{\dot{\alpha}} \dot{R}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}) = \partial_{\dot{\alpha}} \left(\mathbf{J}_R(\alpha, \tau) \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right) = (\partial_\alpha R(\alpha, \tau) \quad \partial_\tau R(\alpha, \tau)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_\alpha R(\alpha, \tau)$
- $\partial_{\dot{\tau}} \dot{R}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}) = \partial_\tau R(\alpha, \tau)$.

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \ddot{R}(\alpha, \tau, \dot{\alpha}, \dot{\tau}) &= (\dot{\alpha} \quad \dot{\tau}) \mathbf{H}_R(\alpha, \tau) \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} + \mathbf{J}_R(\alpha, \tau) \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{D}^2 R(\alpha, \tau) \left(\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right) + \mathbf{J}_R(\alpha, \tau) \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

où $\mathbf{D} f(x) : v \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$ désigne la dérivée directionnelle de f au point x , et $\mathbf{D}^2 f(x)(v_1, v_2)$ est la dérivée seconde au point x suivant les vecteurs v_1 et v_2 .

Donc on sait calculer \ddot{R} à partir de $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$.

Pour la suite, on aura besoin d'exprimer $\begin{pmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$. En définissant $\mathbf{R}\tau(q) = \begin{pmatrix} R(\alpha, \tau) \\ \tau \end{pmatrix}$, on a :

$$\ddot{\mathbf{R}}\tau(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \mathbf{D}^2 \mathbf{R}\tau(q)(\dot{q}, \dot{q}) + \mathbf{J}_{\mathbf{R}\tau}(q)\ddot{q}$$

Expression de $\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{K}$ en fonction de $\begin{pmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$

De la même manière, on a $\mathbf{O}\mathbf{K}(R, \tau) = R\hat{\tau}$, donc :

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{K}(R, t, \dot{R}, \dot{\tau}) = \mathbf{J}_{\mathbf{O}\mathbf{K}}(R, \tau) \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix},$$

puis :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{K}(R, t, \dot{R}, \dot{\tau}, \ddot{R}, \ddot{\tau}) &= \mathbf{J}_{\mathbf{O}\mathbf{K}}(R, \tau, \dot{R}, \dot{\tau}) \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\tau} \\ \ddot{R} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{D}^2 \mathbf{O}\mathbf{K}(R, \tau) \left(\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right) + \mathbf{J}_{\mathbf{O}\mathbf{K}}(R, \tau) \begin{pmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dérivée seconde directionnelle de $\mathbf{O}\mathbf{K}$ ainsi que sa jacobienne sont calculables par différentiation automatique.

Expression de $\mathbf{F}_{\text{tension}}$ en fonction de \ddot{q}

La tension dans les lignes s'écrit $\mathbf{F}_{\text{tension}} = -\frac{I_{\text{eq}} \ddot{\alpha} + C(\dot{\alpha})}{\hat{r} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{O}\mathbf{A})} \hat{r}$, et on veut l'écrire sous la forme

$\mathbf{F}_{\text{tension}} = \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) + A_{\text{tension}} \ddot{q}$. On note :

$$\begin{aligned}
l_{\text{tension}} &= \hat{r} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{OA}) \in \mathbb{R}, \\
\mathbf{b}_{\text{tension}} &= -\frac{C(\hat{\alpha})}{l_{\text{tension}}} \hat{r} \in \mathbb{R}^3, \\
A_{\text{tension}} &= \frac{I_{\text{eq}}}{l_{\text{tension}}} \hat{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Système dynamique explicite en $\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix}$

On peut maintenant remplacer $\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{K}$ et $\mathbf{F}_{\text{tension}}$ dans l'expression de \mathbf{F}_{cone} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{cone}} &= m D^2 \mathbf{OK}(R, \tau) \left(\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \right) \\
&\quad + m \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(R, \tau) \begin{pmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix} \\
&\quad - \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) - A_{\text{tension}}(q) \ddot{q} \\
&\quad - \mathbf{F}_{\text{stat}}(q, \dot{q}) \\
&= m D^2 \mathbf{OK}(\mathbf{R}\tau(q)) (\dot{\mathbf{R}}\tau(q, \dot{q}), \dot{\mathbf{R}}\tau(q, \dot{q})) \\
&\quad + m \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(\mathbf{R}\tau(q)) (D^2 \mathbf{R}\tau(q)(\dot{q}, \dot{q}) + \mathbf{J}_{\mathbf{R}\tau}(q) \ddot{q}) \\
&\quad - \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) - A_{\text{tension}} \ddot{q} \\
&\quad - \mathbf{F}_{\text{stat}}(q, \dot{q}) \\
&= [m \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(\mathbf{R}\tau(q)) \mathbf{J}_{\mathbf{R}\tau}(q) - A_{\text{tension}}] \ddot{q} \\
&\quad + m D^2 \mathbf{OK}(\mathbf{R}\tau(q)) (\dot{\mathbf{R}}\tau(q, \dot{q}), \dot{\mathbf{R}}\tau(q, \dot{q})) \\
&\quad + m \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(\mathbf{R}\tau(q)) D^2 \mathbf{R}\tau(q)(\dot{q}, \dot{q}) \\
&\quad - \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) \\
&\quad - \mathbf{F}_{\text{stat}}(q, \dot{q})
\end{aligned}$$

On note :

- $A = m \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(\mathbf{R}\tau(q)) \mathbf{J}_{\mathbf{R}\tau}(q) - A_{\text{tension}} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$,
- $\mathbf{b} = m D^2 \mathbf{OK}(\mathbf{R}\tau(q)) (\dot{\mathbf{R}}\tau(q, \dot{q}), \dot{\mathbf{R}}\tau(q, \dot{q})) + m \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(\mathbf{R}\tau(q)) D^2 \mathbf{R}\tau(q)(\dot{q}, \dot{q}) - \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) - \mathbf{F}_{\text{stat}}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^3$,
- $x = \ddot{q}$,
- $\mathbf{d}_1 = \partial_R \mathbf{OK}(\mathbf{R}\tau(q)) \in \mathbb{R}^3$,
- $\mathbf{d}_2 = \partial_\tau \mathbf{OK}(\mathbf{R}\tau(q)) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $\mathbf{d} \in \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$, alors

$$\mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \mathbf{d} = (Ax + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}^\top (Ax + \mathbf{b}) = \mathbf{d}^\top Ax + \mathbf{d}^\top \mathbf{b},$$

donc $\mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \mathbf{d} = 0 \iff \mathbf{d}^\top Ax = -\mathbf{d}^\top \mathbf{b}$. We want this to hold for \mathbf{d}_1 and \mathbf{d}_2 , and since $\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(\mathbf{R}\tau(q))$:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \mathbf{d}_1 = 0 \\ \mathbf{F}_{\text{cone}} \cdot \mathbf{d}_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{d}_1^\top Ax = -\mathbf{d}_1^\top \mathbf{b} \\ \mathbf{d}_2^\top Ax = -\mathbf{d}_2^\top \mathbf{b} \end{cases} \iff \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}^\top Ax = -\mathbf{J}_{\mathbf{OK}}^\top \mathbf{b}$$

On résout ce système pour trouver $\ddot{q} = x$ de manière explicite.

Système contrôlé à 6 dimensions

On souhaite maintenant contrôler le kite en s'affranchissant de la contrainte "le kite se déplace sur le

cône en huit". Pour représenter tous les états possibles, on choisit les variables d'état α , θ_2 et φ_2 , et on contrôle le kite en appliquant une force aérodynamique arbitraire $u = \mathbf{F}_{\text{aero,kite}}$ arbitraire. Plus tard, cette force pourra être le résultat d'un modèle aérodynamique ayant pour entrées les longueurs des lignes gauche et droite par exemple (objectif final).

On a :

$$q = \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{r} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_2) \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ \sin(\theta_2) \sin(\varphi_2 + \alpha) \\ \cos(\theta_2) \end{pmatrix},$$

les positions du bout du bras A et du kite K sont données respectivement par :

$$\mathbf{OA} = l\hat{\alpha}, \mathbf{OK} = l\hat{\alpha} + r\hat{r}.$$

On explicite la dynamique de l'état de la même manière que dans la section précédente. La seconde loi de Newton nous donne :

$$m\ddot{\mathbf{OK}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \mathbf{F}_{\text{tension}}(\dot{q}, \ddot{q}) + \sum \mathbf{F}_{\text{stat}}(q, \dot{q}, u).$$

L'accélération du kite est $\ddot{\mathbf{OK}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \mathbf{D}^2 \mathbf{OK}(q)(\dot{q}, \dot{q}) + \mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(q)(\ddot{q})$, et la tension des lignes s'écrit $\mathbf{F}_{\text{tension}} = \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) + A_{\text{tension}}\ddot{q}$ avec :

$$\begin{aligned} l_{\text{tension}} &= \hat{r} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{OA}) \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{b}_{\text{tension}} &= -\frac{C(\dot{\alpha})}{l_{\text{tension}}} \hat{r} \in \mathbb{R}^3, \\ A_{\text{tension}} &= \frac{I_{\text{eq}}}{l_{\text{tension}}} \hat{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

On remplace dans la seconde loi de Newton pour obtenir :

$$[m\mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(q) - A_{\text{tension}}(q)] \ddot{q} = -m \mathbf{D}^2 \mathbf{OK}(q)(\dot{q}, \dot{q}) - \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) - \mathbf{F}_{\text{stat}}(q, \dot{q}, u).$$

On note :

$$\begin{aligned} A &= m\mathbf{J}_{\mathbf{OK}}(q) - A_{\text{tension}}(q) \\ b &= -m \mathbf{D}^2 \mathbf{OK}(q)(\dot{q}, \dot{q}) - \mathbf{b}_{\text{tension}}(q, \dot{q}) - \mathbf{F}_{\text{stat}}(q, \dot{q}, u), \end{aligned}$$

pour réécrire le système linéaire comme suit :

$$A\ddot{q} = b.$$

Il suffit de le résoudre pour obtenir la dynamique \ddot{q} de l'état.

Références

Production d'électricité par voile de kite, Kelvin Desenclos