



HAL
open science

Travaux dirigés de physique mécanique

Bruno Bêche

► **To cite this version:**

| Bruno Bêche. Travaux dirigés de physique mécanique. CUPGE 1A ESIR, pp.18, 2022. hal-04512743

HAL Id: hal-04512743

<https://hal.science/hal-04512743>

Submitted on 20 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Physique Mécanique

Travaux Dirigés

TD Chapitre I

Exercice 1 :

Pour chacune des situations envisagées, justifier votre choix.

1.1) Un mobile ponctuel possède un vecteur vitesse \vec{v} constant.

- 1 - sa trajectoire est forcément rectiligne
- 2 - sa trajectoire est forcément circulaire
- 3 - sa trajectoire est forcément parabolique
- 4 - sa trajectoire peut être quelconque

1.2) Un mobile ponctuel possède une vitesse de norme $\|\vec{v}\|$ constante.

- 1 - sa trajectoire est forcément rectiligne
- 2 - sa trajectoire est forcément circulaire
- 3 - sa trajectoire est forcément parabolique
- 4 - sa trajectoire peut être quelconque

1.3) Un mobile ponctuel, initialement au repos, possède un vecteur accélération \vec{a} constant.

- 1 - sa trajectoire est forcément rectiligne
- 2 - sa trajectoire est forcément circulaire
- 3 - sa trajectoire est forcément parabolique
- 4 - sa trajectoire peut être quelconque

1.4) Un mobile ponctuel, initialement au repos, possède une accélération de norme $\|\vec{a}\|$ constante.

- 1 - sa trajectoire est forcément rectiligne
- 2 - sa trajectoire est forcément circulaire
- 3 - sa trajectoire est forcément parabolique
- 4 - sa trajectoire peut être quelconque

Exercice 2 :

Un point matériel M se déplace dans un repère cartésien orthonormé (O, x, y) selon :

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = bt^2 \end{cases} \quad (a \text{ et } b \text{ étant des constantes positives})$$

- 2.1) Donner les dimensions et les unités des constantes a et b .
- 2.2) Déterminer l'équation de la trajectoire $y = f(x)$ du point M et sa nature ?
- 2.3) Exprimer le vecteur vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} du point M .
- 2.4) Représenter schématiquement la trajectoire de M et reporter les vecteurs vitesse puis accélération à un instant donné.

2.5) A partir de l'origine O , on reporte l'ensemble des vecteur $\overrightarrow{OP}(t) = \vec{v}(t)$. La trajectoire de P (de coordonnées v_x et v_y) est l'hodographe du mouvement qui constitue un diagramme donnant la représentation vectorielle des vitesses relatives instantanées. Quelle est sa nature ? A quelle vitesse le point P décrit-il cette trajectoire et que représente cette vitesse ?

Exercice 3 :

Un mobile décrit une trajectoire dans le plan (P). On définit le demi-axe polaire (Ox) dans ce plan. L'équation horaire de la trajectoire est la suivante :

$$\begin{cases} \rho(t) = 2t \\ \theta(t) = \frac{\pi}{6}t \end{cases} \quad (\rho \text{ s'exprime en mètre, } \theta \text{ en radian et } t \text{ en seconde})$$

Rappel : les expressions des vecteurs *position*, *vitesse* et *accélération* dans le repère polaire s'expriment par:

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho, \quad \vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

3.1) Complétez le tableau ci-dessous :

t (s)	ρ	θ	$\dot{\rho}$	$\dot{\theta}$	$\ddot{\rho}$	$\ddot{\theta}$	\overrightarrow{OM}	\vec{v}	\vec{a}
1									
4									

3.2) Placer sur une feuille, pour les deux instants $t = 1s$ et $t = 4s$, la position correspondant du point M , les vecteurs unitaires (\vec{u}_ρ et \vec{u}_θ), ainsi que les vecteurs vitesse et accélération (on pourra prendre une échelle : 1/100).

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ un référentiel d'origine O , muni d'une base cylindrique orthonormée directe ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$). Le point matériel M décrit la trajectoire définie par :

$$\begin{cases} \rho(t) = \alpha \cdot \theta(t) \\ \theta(t) = \beta \cdot t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes positives})$$

4.1) Donner les dimensions et les unités des constantes α et β .

4.2) Etablir l'expression des coordonnées de la vitesse \vec{v} , dans la base cylindrique, pour le cas général. En déduire celles de M pour cette trajectoire. On les exprimera en fonction de t et des constantes α, β . Déterminer la norme de la vitesse $v = \|\vec{v}\|$.

4.3) Reprendre la question précédente pour l'accélération \vec{a} de M .

4.4) Représenter l'allure de la trajectoire de M en utilisant votre feuille comme plan $z = 0$. Quelle est sa nature ? On indiquera sur le dessin, \vec{v} et \vec{a} pour l'instant origine $t = 0$ et pour un instant quelconque

Exercice 5 :

On étudie le mouvement hélicoïdal d'un point matériel P dans un référentiel (\mathcal{R}) fixe d'origine O . Soit $Oxyz$ le repère cartésien de base orthonormée directe ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) associé à (\mathcal{R}). L'équation paramétrique de la trajectoire à l'instant t est :

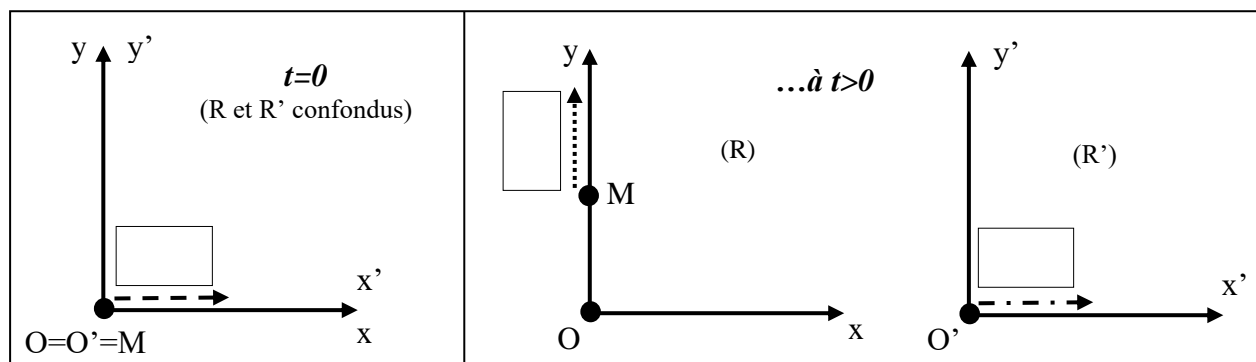
$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = a \sin(\omega t) \\ z(t) = h\omega t \end{cases} \quad (a, h, \omega \text{ désignent des constantes positives}).$$

- 5.1) Donner les dimensions de a, h et ω .
- 5.2) Ecrire les équations cartésiennes de la trajectoire sous la forme $x = f(z), y = g(z)$.
- 5.3) Soit H la projection de M dans le plan (xOy) . Etablir la relation entre x et y définissant la trajectoire de H .
Quel type de mouvement effectue le point H dans le plan (xOy) ?
- 5.4) Calculer les composantes cartésiennes (sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$), et cylindriques (sur la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$) du vecteur vitesse \vec{v} de P ainsi que sa norme $v = \|\vec{v}\|$. Quelle remarque peut-on faire ?
- 5.5) Calculer les composantes cartésiennes respectivement sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, puis cylindriques sur la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ du vecteur accélération \vec{a} de P .
- 5.6) Indiquez dans ces conditions, sur un dessin, le support et le sens de l'accélération \vec{a} de P .

Exercice 6 : Changement de référentiels

Soit un référentiel $R(O, x, y)$ muni d'une origine O et d'une base cartésienne (\vec{i}, \vec{j}) . On considère un point M , initialement ($t=0$) immobile en O , se déplaçant sur l'axe $[Oy]$ à accélération constante de norme a . Un observateur est lié à un autre référentiel $R'(O', x', y')$ qui parcourt l'axe $[Ox]$ à accélération constante de norme a_0 . Ce référentiel R' est animé initialement ($t=0$) d'une vitesse de norme v_0 par rapport à R (toujours selon l'axe $[Ox]$).

- 6.1) Sur les deux schémas ci-dessous, représentant les référentiels à l'instant initial ($t=0$) puis à un instant ultérieur ($t>0$), écrire dans les trois cases les trois vecteurs correspondants à l'énoncé, à savoir : \vec{a} , \vec{a}_0 et \vec{v}_0 .



- 6.2) Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}(M)_{/R}$ du mobile M par rapport au référentiel R dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , et en déduire l'expression de son vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$.
- 6.3) Donner l'expression du vecteur accélération d'entraînement $\vec{a}_{R'/R}^e$ représentant le mouvement relatif de R' par rapport à R . En tenant compte des conditions initiales, en déduire l'expression du vecteur vitesse d'entraînement $\vec{v}_{R'/R}^e$ représentant le mouvement relatif de R' par rapport à R .
- 6.4) Ecrire la loi de composition des vitesses et en déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{/R'}$ du mobile M dans le référentiel R' .

Exercice 7 : Changement de référentiels

Soit deux référentiels S et S' en mouvement relatif. S sera le référentiel considéré fixe d'origine O . Le référentiel S' , d'origine O' , est en mouvement rectiligne de translation uniformément accéléré par rapport à S avec une accélération notée \vec{a}_0 .

On étudie le mouvement d'un point M dans ces deux référentiels ; on appelle \vec{a}_r l'accélération relative (dans S') et \vec{a} l'accélération absolue (dans S).

7.1) Donner dans ce cas, directement sans démonstration, l'expression de l'accélération d'entraînement \vec{a}_e .

7.2) Que vaut l'accélération de Coriolis \vec{a}_c ? En déduire la relation entre l'accélération absolue \vec{a} et l'accélération relative \vec{a}_r .

TD Chapitre II

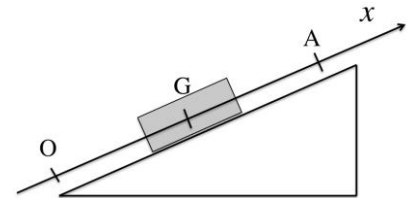
Exercice 1 : Mouvement dans le champ de pesanteur, PFD

Dans le champ de pesanteur terrestre, un objet assimilable à un point matériel M de masse m est lancé d'un point O , à la surface du sol, pris pour l'origine de l'espace. La vitesse initiale \vec{v}_0 du point M fait un angle $\alpha > 0$ avec l'horizontale. On négligera le frottement de l'air sur le mobile.

- 1.1) En prenant un repère Oxz dans le plan de la trajectoire, donner l'expression des coordonnées $x(t)$ et $z(t)$. Décrire le mouvement des projections de M sur les axes.
- 1.2) Trouver l'équation de la trajectoire. En déduire la forme de cette courbe.
- 1.3) A partir de l'équation de la trajectoire, déterminer les coordonnées du sommet S . En déduire le temps t_S nécessaire pour atteindre le sommet. Quelles sont les composantes du vecteur vitesse en S et son module ?
- 1.4) Par une autre méthode, établir en premier le temps t_S , puis en déduire ensuite les quantités établies dans la question précédente (coordonnées et vitesse au point S)
- 1.5) Le point M retombe sur le sol en B à l'instant t_B . Exprimer les coordonnées du point B et le temps t_B . Comparer le vecteur vitesse au point B à celui au point O (module et direction).
- 1.6) La norme v_0 du vecteur vitesse étant fixée, exprimer la portée $x_B = OB$ en fonction de α . Exprimer la portée pour $\alpha = 30^\circ$ et pour $\alpha = 60^\circ$. Pour quelle valeur de α la portée est-elle maximum ? Représenter les trois trajectoires sur un schéma.
- 1.7) Pour les trois valeurs précédentes de l'angle α quelles sont les durées respectives de vol ?

Exercice 2 : Mouvement sur un plan incliné, PFD, frottements

Un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, un mobile de masse m peut glisser sans frottement. Sa position est repérée sur l'axe Ox par l'abscisse x de son centre d'inertie G .

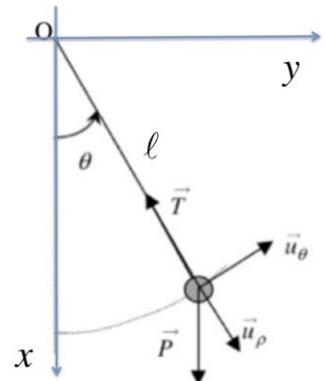


- 3.1) A $t = 0$, le mobile part de la position $x = 0$ vers le haut avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . Pour quelle valeur de v_0 la vitesse du mobile s'annule-t-elle au point A d'abscisse x_A ?
- 3.2) Considérons maintenant que le mobile est soumis à un frottement solide avec le plan. On note μ_S et μ_D les coefficients de frottement statique ou dynamique. A $t = 0$, le mobile est lâché du point A , sans vitesse initiale. Quelle doit être la valeur de α pour que le mobile se mette à glisser. Quelle sera alors la nature du mouvement ?

Exercice 3 : Le pendule, PFD

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen, un point matériel M de masse m soumis au champ de pesanteur \vec{g} ($\vec{g} = g\vec{i}$) est relié au point O par l'intermédiaire d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ .

A l'instant initial, le pendule écarté d'un angle θ_0 dans le plan (xOy) est lâché sans vitesse initiale. On néglige la force de frottement de l'air sur le pendule. On utilise comme repère de projection le repère polaire d'origine O et de vecteurs de base \vec{u}_ρ et \vec{u}_θ .



- 2.1) Exprimer le vecteur position \overline{OM} dans la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, en fonction de la longueur ℓ de la tige.
- 2.2) A partir de l'expression de \overline{OM} obtenue précédemment, déterminer directement l'expression du vecteur vitesse \vec{v} dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, puis celle de l'accélération \vec{a} .
- 2.3) Identifier et représenter sur une figure les forces agissant sur le point matériel M .

- 2.4) Appliquer le principe fondamental de la dynamique. Projeter la relation vectorielle sur \vec{u}_ρ et \vec{u}_θ .
- 2.5) En déduire l'équation différentielle de l'angle polaire $\theta(t)$.
- 2.6) On se place dans le cas des petits angles θ .
- Montrer que dans ce cas l'équation devient celle d'un oscillateur harmonique et rappeler l'expression générale de la solution. En déduire l'expression de la période propre T_0 du mouvement.
 - A partir des conditions initiales, établir l'expression de $\theta(t)$.
 - Que vaut la vitesse \vec{v} au premier passage en $\theta = 0$?

Exercice 4 : Chute d'une goutte d'eau, PFD

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à l'action de l'air. En négligeant la poussée d'Archimède, on suppose que cette action de l'air se réduit à une force de résistance, proportionnelle à la vitesse, soit $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$. On introduit un axe Oz orienté vers le bas. A $t = 0$ la goutte d'eau, sans vitesse initiale, démarre de l'origine O .

- Ecrire le principe fondamental de la dynamique. En déduire l'existence d'une vitesse limite v_ℓ que l'on exprimera en fonction de m , β et g .
- Ecrire l'équation différentielle satisfaite par la vitesse $v(t)$.
- La solution de l'équation est de la forme: $v = A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. En déduire l'expression de l'accélération $a(t)$.
- Trouver les valeurs de A et de τ
 - En raisonnant sur des valeurs particulières prises par les deux fonctions $v(t)$ et $a(t)$.
 - A partir de l'équation différentielle en injectant la forme générale de la solution.
- Exprimer τ en fonction de v_ℓ et vérifier sa dimension.
- A.N. : $m = 1.10^{-6} \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $v_\ell = 5.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$. Calculer τ .
- Représenter sur des schémas les fonctions $a(t)$ et $v(t)$.

Exercice 5 : Mouvement d'une bactérie, PFD

Une bactérie constituée essentiellement d'eau est assimilée à une sphère de rayon r . Lorsque la bactérie évolue en milieu aqueux à une vitesse \vec{v} selon un axe, les forces de frottements \vec{f} exercées par l'eau ont pour expression $\vec{f} = -6\pi r\eta\vec{v}$ (loi de Stokes), où η positif est le coefficient de viscosité du fluide. Le référentiel terrestre est considéré galiléen.

Les données sont : densité de l'eau $d=1$, $\eta=1.0.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $v(t=0)=v_0=25 \text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ et $r=1.0 \text{ }\mu\text{m}$.

- Calculer la masse m de la bactérie.
- En utilisant la seconde loi de Newton (PFD), et en considérant cette dernière (projection) selon l'axe du mouvement de la bactérie, établir l'équation différentielle qui régit la vitesse $v(t)$ de la bactérie. En l'écrivant sous une forme caractéristique de type $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$, en déduire l'expression du temps caractéristique τ en fonction de m , η et r .
- Résoudre et trouver $v(t)$ en utilisant la seule condition initiale sur la vitesse.
- Par intégration, avec une condition initiale $x(t=0\text{s})=x_0=0\text{m}$, en déduire l'expression de $x(t)$ (solution de l'équation différentielle sur la position de la bactérie).
- Lorsque le temps $t \rightarrow +\infty$, que prévoit ce modèle d'équation sur la solution vitesse $v(t \rightarrow +\infty)$? La bactérie s'arrête t'elle ? En déduire l'expression de la distance d parcourue par la bactérie, calculer sa valeur.

Solution : $m = 4,2.10^{-15} \text{ kg}$, $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$, $\forall t \geq 0 \quad v(t) = v_0.e^{-t/\tau}$, $x(t) = v_0.\tau(1 - e^{-t/\tau})$, $d = \frac{v_0 m}{6\pi\eta r} = 5,6.10^{-11} \text{ m}$.

Remarque : l'exercice pourrait être traité pour une bactérie en forme de cylindre de longueur l , alors la loi de Stokes relative aux frottements s'écrirait $\vec{f} = -8\pi l \eta \vec{v}$...

Exercice 6 : Mouvement d'un navire

Un navire de masse m se déplaçant selon un axe rectiligne change de vitesse de la valeur v_1 à la valeur v_2 (par exemple après arrêt des moteurs, $v_2 < v_1$). Pour des vitesses de l'ordre de 5 et 25 km.h⁻¹, on considère que la force de résistance \vec{F} exercée par l'eau sur ce type de bateau a pour module $F = k.v^3$, avec k une constante positive.

Les données sont : densité de l'eau 1, $m = 1,20 \cdot 10^4$ tonnes, $v_1 = 16$ km.h⁻¹, $v_2 = 13$ km.h⁻¹, $k = 6,4 \cdot 10^3$ SI (ou kg.m⁻².s).

6.1) Montrer que l'équation différentielle du système peut s'écrire sous la forme $k.v dt = -m.v dv$.

6.2) En intégrant convenablement cette relation, déterminer l'expression du temps caractéristique τ en fonction de m , k , v_1 et v_2 . Calculer sa valeur.

Solution : On intégrera entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = \tau$, $\tau = \frac{m}{2k} \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} \right) = 24.4$ s.

Exercice 7 : Mouvement d'un train, mouvement rectiligne uniformément 'décéléré'

L'ensemble du mouvement se faisant selon un seul axe, il ne sera donc pas nécessaire d'utiliser les notations vectorielles par simplicité.

A.N. : $v_0 = 120$ km/h ; $K = 3.35 \cdot 10^{-4}$ m⁻¹.

Un train roule selon une direction, ou axe [Ox), avec une vitesse constante de norme v_0 . Après avoir coupé le moteur à l'instant $t_0 = 0$ s, le véhicule sera freiné essentiellement par la résistance à l'air et son accélération suivra une loi de type $a(t) = -K.v^2(t)$, pour les instants $t > t_0$.

Le but est de déterminer à quel instant t_1 le train atteindra une vitesse $v(t_1) = v_1 = v_0/2$.

7.1) Ecrire la définition générale de l'accélération en fonction de la vitesse. Comment varie la norme de l'accélération en fonction de la vitesse ?

7.2) A partir de cette définition, en l'appliquant à l'exercice et donc à la forme de l'accélération de l'énoncé, intégrer cette expression de l'instant $t_0 = 0$ à t . En déduire de cette équation (dite différentielle du 1^{er} ordre en vitesse) que :

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v(t)} = -K.t$$

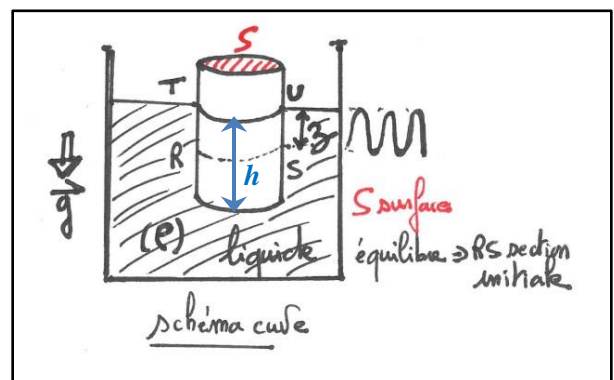
7.3) A partir du précédent résultat à savoir cette loi d'évolution de la vitesse $v(t)$ du train en fonction du temps t , calculer t_1 connaissant v_0 et K .

Exercice 8 : Poussée d'Archimède, PFD, oscillation d'un bouchon

Un cylindre (bouchon de masse volumique $\rho_b = 0.6$ kg/l) de hauteur $H = 4$ cm et d'axe vertical flotte dans un liquide de masse volumique $\rho_e = 1$ kg/l (voir schéma) sous champ gravifique de module g . La viscosité sera négligée.

8.1) En appliquant le PFD à l'équilibre, calculer la hauteur h du bouchon sous l'eau.

8.2) On le pousse légèrement et on le lâche de manière à ce qu'il oscille proprement selon la fonction $z(t)$. En écrivant le



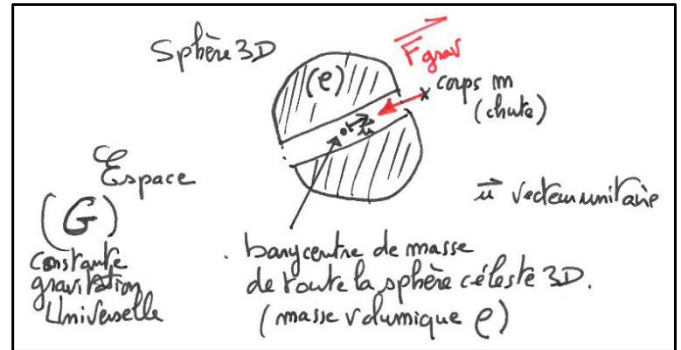
PFD en dynamique (avec second membre, $m \cdot \vec{a}$), en déduire l'équation différentielle du mouvement, calculer la solution $z(t)$ et en déduire la période des oscillations ; la calculer.

Solution : PFD équilibre sur poids P et Archimède $\Pi \Rightarrow h = \frac{\rho_b}{\rho_e} H$; $\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{g \cdot \rho_e}{H \cdot \rho_b} z = 0$ $z(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g \cdot \rho_e}{H \cdot \rho_b}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g \cdot \rho_e}{H \cdot \rho_b}} t\right)$.

$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g \cdot S \cdot \rho_e}} = 0.31s$.

Exercice 9 : Ascenseur gravitationnel, chute, PFD, et oscillations

On considère dans l'espace céleste de constante Gravitationnelle $G=6.67 \times 10^{-11}$ SI) une sphère de rayon r , faite d'un matériau de masse volumique ρ . Cette sphère présente un cylindre libre partant d'un pôle à l'autre passant par son barycentre de masse permettant ainsi la chute d'un corps plus petit de masse m en direction du centre. Le corps de masse m chutera jusqu'à ce barycentre, le dépassera, puis rechutera vers ce centre et ainsi de suite. Le mouvement sera une forme d'oscillation localisée 'autour' du barycentre de la sphère 3D.



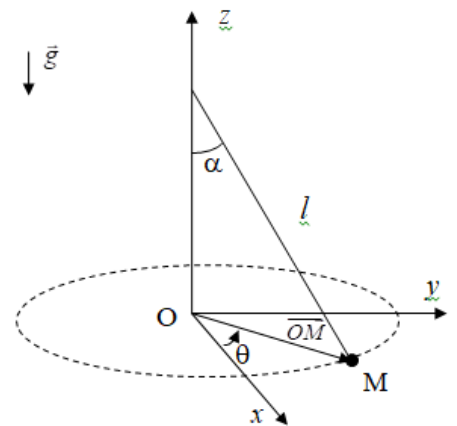
9.1) Ecrire la force d'origine gravitationnelle à laquelle est soumise le corps m à une distance r du centre de masse.

9.2) En appliquant le PFD sur cette unique force, en déduire l'équation différentielle gégrant ce mouvement d'oscillations et la période de celles-ci.

Solution : $\vec{F} = -G \frac{m \cdot (\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)}{r^2} \vec{u}$. $\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{4}{3}\pi G \rho \cdot r = 0$; $T_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$

Exercice 10 : PFD, pendule en rotation

On considère, dans un référentiel d'étude supposé Galiléen, un objet assimilable à un point matériel M de masse m relié à une tige rigide de masse négligeable et de longueur égale à l . La tige tourne uniformément autour de l'axe vertical z et forme un angle constant α avec celui-ci. Le point matériel M décrit alors une trajectoire circulaire de centre O dans un plan horizontal. On définit un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) en prenant O comme origine et l'axe Ox comme axe polaire. La base orthonormée cylindrique associée est notée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On pose $\omega = \dot{\theta} > 0$ la vitesse angulaire constante du point M . Tout frottement sera négligé et le champ de pesanteur sera supposé uniforme et dans la direction Oz .



10.1) Donner l'expression du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique au cours du mouvement de M . On exprimera \vec{r} en faisant figurer l et α .

10.2) Exprimer les vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} dans la base cylindrique pour le mouvement du point M . De quel type d'accélération s'agit-il ?

10.3) Refaire le schéma en faisant figurer le vecteur vitesse, le vecteur accélération, ainsi que le vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}$.

10.4) Faire le bilan des forces s'exerçant sur M et les représenter sur votre schéma. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) au point M . En utilisant la projection sur les vecteurs unitaires \vec{u}_ρ et \vec{u}_z déduire la relation entre la vitesse angulaire ω et l'angle de déviation α .

Exercice 11 : Forces d'inerties

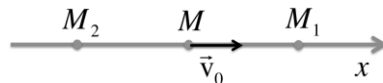
Soit un référentiel fixe R d'origine O supposé galiléen et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère cartésien associé à R . Soit R' un référentiel mobile d'origine O' et $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ le repère cartésien associé à R' . Les deux origines O et O' sont confondues ainsi que les axes $[Oz]$ et $[O'z']$. D'autre part le référentiel $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ tourne avec une vitesse angulaire uniforme de norme ω_e par rapport à $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur $\vec{\omega}_e$ est colinéaire à \vec{k} et de même sens.

On observe le mouvement d'un mobile M , de masse m , se déplaçant selon l'axe $[O'x']$ dans la direction de O' avec une vitesse que l'on notera : $\vec{v}' = \vec{v}_r$. Faire un schéma. Ensuite préciser la direction et le sens de chacune des forces d'inertie auxquelles est soumis le point matériel M dans R' ainsi que leurs normes.

Exercice 12 : Quantité de mouvement et conservation, choc élastique

On considère deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 , initialement immobiles sur un axe \overrightarrow{Ox} horizontal. Un troisième point matériel M de masse m est lancé avec une vitesse v_0 algébriquement positive depuis une position située entre les points M_1 et M_2 telles que :

$$x_{M_2}(t = 0) < x_M(t = 0) < x_{M_1}(t = 0)$$

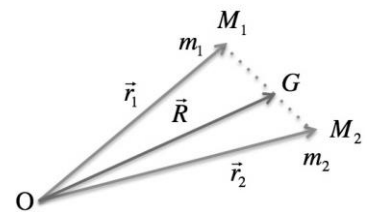


L'ensemble est isolé, et on néglige tout frottement durant les déplacements qui s'effectuent suivant l'axe \overrightarrow{Ox} .

- 12.1) La particule M heurte la particule M_1 , dans une collision élastique (*choc 1*). Si v'_0 est la vitesse algébrique de M après le choc et v'_1 celle de M_1 après le choc, calculer v'_0 et v'_1 en fonction de m_1 , m , et v_0 .
- 12.2) Quelle est la condition sur m_1 pour que la particule M heurte ensuite la particule M_2 ?
- 12.3) La particule M heurte la particule M_2 dans un choc élastique (*choc 2*). Si v''_0 est la vitesse algébrique de M après le choc et v''_2 celle de M_2 après le choc, calculer v''_0 et v''_2 en fonction de m_1 , m_2 , m , et v_0 .
- 12.4) On suppose maintenant que : $m_1 = m_2 = \alpha m$. Écrire la condition sur α pour qu'après le deuxième choc, il y ait encore au moins un autre choc de M avec M_1 .

Exercice 13 (Facultatif) : Quantité de mouvement et conservation, choc élastique

Soit un système isolé, constitué de deux particules M_1 et M_2 en mouvement dont les masses sont respectivement m_1 et m_2 . La position de chaque particule est définie par les vecteurs \overrightarrow{OM}_1 et \overrightarrow{OM}_2 dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .

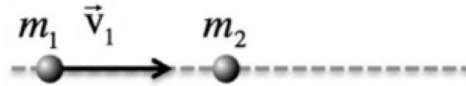


- 13.1) Exprimer la quantité de mouvement \vec{p} du système dans \mathcal{R} .
- 13.2) Exprimer \overrightarrow{OG} la position du centre de masse du système, puis \vec{v}_G sa vitesse.
- 13.3) Soit \mathcal{R}_G le référentiel du centre de masse. Ce référentiel est-il galiléen ?
- 13.4) Exprimer la quantité de mouvement \vec{p}_G du système, dans \mathcal{R}_G .
- 13.5) Soit \vec{v}_{G1} et \vec{v}_{G2} les vitesses des particules dans le référentiel \mathcal{R}_G . Exprimer ces vitesses en fonction de $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, vitesse relative des deux particules.
- 13.6) Soit E_c^* l'énergie cinétique du système dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}_G . Exprimer E_c^* en fonction de μ (masse réduite) et de la vitesse relative des deux particules.

On rappelle que la masse réduite μ est définie par la relation suivante : $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Exercice 14 : Quantité de mouvement et conservation, choc inélastique

Dans un référentiel \mathcal{R} , galiléen, on étudie la collision de deux particules, assimilables à deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 . En dehors du choc, on considère qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux particules. Le système des deux particules étant isolé, la particule M_1 se déplace à une vitesse \vec{v}_1 et vient heurter la particule cible M_2 , initialement au repos.



Le choc est frontal et au cours de leur mouvement, les points M_1 et M_2 se déplacent le long d'un axe \vec{Ox} . \vec{v}_1 et \vec{v}'_1 étant respectivement les vitesses de M_1 avant et après le choc, et \vec{v}'_2 la vitesse de M_2 après le choc, on notera les projections correspondantes de ces vecteurs sur l'axe \vec{Ox} : v_1 , v'_1 et v'_2

14.1) Le choc est mou et les particules restent soudées après le choc.

- Calculer dans ce cas la vitesse $v'_1 = v'_2 = v_G$.
- Exprimer l'énergie $Q = \Delta E_c$ (variation d'énergie cinétique au cours du choc). Montrer que celle-ci peut s'exprimer sous une forme simple en fonction de la masse réduite μ du système. En déduire l'énergie cinétique E_c^* du système, dans le référentiel barycentrique avant le choc.
- Montrer que E_c , l'énergie cinétique du système dans \mathcal{R} , peut s'écrire sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \frac{1}{2}\mu v_1^2$$

14.2) Le choc est inélastique, on définit un coefficient de restitution e ($0 \leq e < 1$) tel que : $v'_2 - v'_1 = ev_1$.

- Exprimer les vitesses v'_1 et v'_2 en fonction de v_1 et de e .
- Montrer que l'on retrouve le cas du choc mou lorsque $e = 0$.
- À quoi correspondrait le cas : $e = 1$?

Exercice 15 : Quantité de mouvement et conservation, choc inélastique

On abandonne une bille sans vitesse initiale à une hauteur h_0 au-dessus d'un plan horizontal. La bille touche le plan avec une vitesse de module v_0 , rebondit et repart vers le haut avec une vitesse de module v_1 , avec $v_1 = ev_0$ ($e < 1$).

15.1) A l'aide d'un bilan d'énergie, calculer la vitesse v_0 avant le premier choc.

15.2) Quelle est la perte d'énergie lors du premier choc ?

15.3) Jusqu'à quelle hauteur h_1 la bille remonte-elle lors du premier rebond ? Quelle est la hauteur h_n d'élévation de la bille lors du $n^{\text{ième}}$ rebond ?

15.4) Au bout de combien de temps la bille s'arrête-t-elle ?

On rappelle que : $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

TD Chapitre III

Exercice 1 : Travail d'une force et détermination d'une Energie Potentielle

On considère une particule qui se déplace dans un champ de forces :

$$\vec{F} = \alpha((4x - ay)\vec{i} + (y - 3x)\vec{j})$$

où \vec{i} et \vec{j} sont les vecteurs unitaires du repère cartésien plan Oxy et α une constante égale à 1 en unité du Système International ($\alpha = 1$ en SI).

- 1.1) Donner les dimensions et les unités de α et de a .
- 1.2) Exprimer le travail élémentaire δW de la force \vec{F} , pour un déplacement $d\vec{r}$.
- 1.3) Calculer le travail reçu par la particule quand elle se déplace du point $O(0,0)$ au point $A(2,4)$:
 - a) si elle se déplace de O en A suivant le trajet $OA'A$ (A' = projection de A sur Ox).
 - b) si elle se déplace de O en A suivant le trajet $OA''A$ (A'' = projection de A sur Oy).
 - c) si elle se déplace en ligne droite de O à A .
- 1.4) Pour quelle valeur de a ces travaux sont-ils identiques ? Si cette condition est réalisée, peut-on en conclure alors que le champ de forces dérive d'une énergie potentielle ?
- 1.5) On rappelle que la force est conservative si et seulement si les égalités de H.A. Schwarz sont établies :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x}$$

En déduire une condition sur des dérivées partielles des composantes de la force. Quelle valeur de a correspond à cette situation ?

- 1.6) Rappeler la relation reliant la force \vec{F} et l'énergie potentielle E_p . Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x, y)$, on simplifiera l'expression en fixant $E_p(0,0) = 0$.
- 1.7) Calculer $E_p(2,4)$. Vérifier que $W_{OA} = -\Delta E_p$

Exercice 2 : Champs de gravité

Au voisinage de la surface de la terre, un objet de masse m est soumis à son poids \vec{P} .

- 2.1) Montrez que le poids \vec{P} dérive d'une énergie potentielle, dont on déterminera l'expression générale.
- 2.2) Que devient cette expression si on prend comme origine $E_p = 0$ au sol ($z = 0$).

Exercice 3 : Interaction gravitationnelle

La force d'interaction gravitationnelle qui s'exerce sur un corps de masse m situé à une distance r de la terre est donné par :

$$\vec{F} = \frac{-GmM}{r^2} \vec{u}_r$$

avec, G est la constante de gravitation universelle, M la masse de la terre et \vec{u}_r le vecteur unitaire de même direction que le vecteur position \vec{r}

- 3.1) Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on exprimera.
- 3.2) Calculer le travail exercé par la force de gravitation sur un satellite arrivant à la surface de la terre depuis une altitude h .
- 3.3) Que vaut ce travail dans le cas où $h \ll R_T$. R_T étant le rayon de la terre ?

Exercice 4 : Travail d'une force de frottement solide

Un solide de masse m , assimilé à un point matériel M , est lancé avec une vitesse \vec{v}_0 dirigée selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné formant un angle α par rapport à l'horizontale. Il est soumis à un frottement solide de coefficient dynamique μ_D avec le plan.

- 4.1) Déterminer le travail de la force de pesanteur et de la force de frottement solide quand M s'élève d'une hauteur h au dessus du point de lancement.
- 4.2) Quelle vitesse minimum v_0 doit-on donner à M pour qu'il atteigne cette hauteur h ?

Exercice 5 : Particule, puit de potentiel et équilibre

Une particule assimilée à un point matériel M de masse m , est repérée par $\overline{OM} = r \cdot \vec{u}_r$ dans un référentiel galiléen d'origine O , \vec{u}_r est le vecteur unitaire colinéaire à \overline{OM} . Cette particule est soumise à l'action simultanée de deux champs de force :

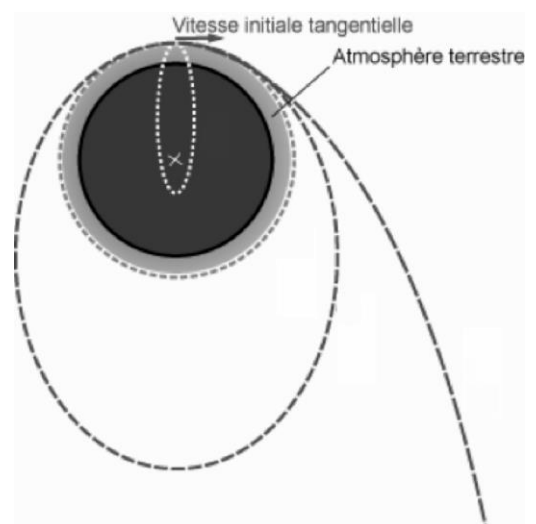
$$\vec{F}_1 = -\alpha \cdot r \cdot \vec{u}_r \text{ puis } \vec{F}_2 = \frac{\beta}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux constantes positives})$$

- 5.1) Déterminer les dimensions de α et β .
- 5.2) Caractériser, en quelques mots, l'action des deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sur la particule M .
- 5.3) La particule M est lâchée, sans aucune vitesse initiale, d'un point quelconque.
 - a) Déterminer la nature de sa trajectoire.
 - b) Déterminer la distance r_0 correspondant à l'équilibre de M .
 - c) Montrer que la force résultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ dérive d'un potentiel $E_p(r)$ que l'on déterminera pour qu'il prenne la valeur $E_p(r_0) = \frac{3}{2}(\alpha \cdot \beta^2)^{1/3}$ à la distance r_0 .
 - d) Représenter graphiquement l'évolution du potentiel. En déduire la nature de l'équilibre.
 - e) La position initiale de la particule étant $r_i > r_0$ telle que son énergie potentielle: $E_p(r_i) = 2(\alpha \cdot \beta^2)^{1/3}$ Déterminer sa vitesse de passage à la position d'équilibre, puis préciser la nature de son mouvement à partir du graphique tracé pour $E_p(r)$.

Exercice 6 (Facultatif): Gravitation planétaire

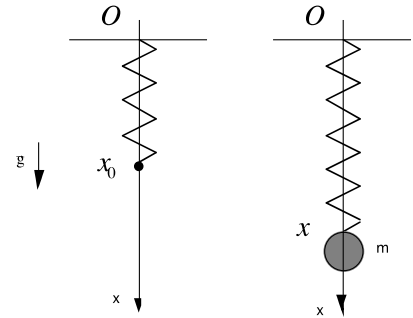
A une altitude h , au voisinage de la surface de la terre, on lance à tangentielle, un projectile de masse m avec une vitesse initiale v_0 tangentielle. On négligera h devant le rayon de la terre R_T ($h \ll R_T$).

- 6.1) Quelle vitesse initiale minimale v_s faut-il communiquer au projectile pour qu'il soit satellisé par la terre ? Quelle sera la trajectoire pour v_s ?
- 6.2) Quelle vitesse initiale minimale v_ℓ faut-il au projectile pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle terrestre ? Comparer v_ℓ et v_s . Quelle sera la trajectoire pour $v_0 = v_\ell$?



Exercice 7 : Le ressort, oscillateur harmonique, énergie

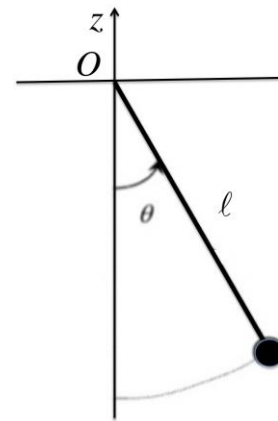
Un ressort de masse négligeable et de longueur x_0 est suspendu à un point fixe O que l'on prendra comme origine d'un axe Ox vertical. On accroche un solide ponctuel M de masse m à son extrémité



- 7.1) Exprimer l'énergie potentielle U_R , associée à la force de rappel du ressort sur M en fonction de sa position x .
- 7.2) Exprimer l'énergie potentielle U_P , associée à la force de pesanteur qui s'exerce sur M en fonction de sa position x .
- 7.3) Montrer que l'énergie potentielle totale $E_p = U_R + U_P$, associée à M , présente un minimum pour une position x_m . A quoi correspond ce minimum ?
- 7.4) Exprimer l'énergie mécanique, E_m de M lorsque le système est en mouvement. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
- 7.5) Montrer en effectuant un changement de variable approprié que cette équation est celle d'un oscillateur harmonique dont on donnera la pulsation ω et la période T .

Exercice 8 : Le Pendule, oscillateur harmonique, énergie

Un corps M de masse m , est relié à un point fixe O par un fil rigide sans masse de longueur ℓ . Il est soumis au champ de pesanteur, uniforme, vertical dirigé vers le bas. Sa position est repérée par l'angle θ compté positivement dans le sens trigonométrique. A l'instant $t = 0$, on écarte le fil de sa position initiale d'un angle θ_0 et on le lâche avec une vitesse nulle (voir figure). Le mouvement a lieu dans le plan vertical contenant O et $M_0 = M(t = 0)$.



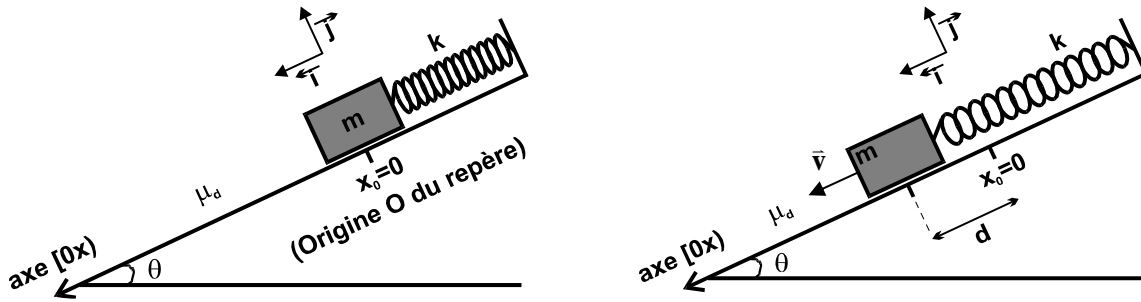
On désire établir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$.

- 8.1) Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du corps de masse m .
- 8.2) Justifier le fait que l'énergie mécanique se conserve.
- 8.3) Calculer la vitesse maximale v_m du pendule.
- 8.4) A partir de l'équation de conservation de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle satisfaite par $\theta(t)$. La résoudre quand θ reste petit. Donner alors la période du mouvement. Retrouver la valeur de v_m .
- 8.5) Représenter sur un même graphique la fonction $E_p(\theta)$ dans l'approximation harmonique, l'énergie mécanique et l'énergie cinétique pour une position particulière. Montrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

Exercice 9 : Travaux des forces, plan incliné, frottements

On considère, dans un référentiel d'étude supposé Galiléen, un bloc de masse m attaché à un ressort de constante de raideur k et disposé sur un plan incliné d'angle θ . L'origine du repère $x_0=0$ correspond à un allongement nul du ressort. Concernant les conditions initiales, on considère que le bloc est lâché de x_0 sans vitesse initiale. Le bloc glisse alors d'une distance d vers le bas du plan incliné. Le coefficient de frottement dynamique entre le bloc et le plan est noté μ_d .

L'objectif final de l'exercice est de calculer le module v de la vitesse du bloc ayant parcouru la distance d , puis d'en déduire l'allongement maximal du ressort.



À gauche, le bloc est au repos lorsque le ressort présente un allongement nul ; à droite le bloc a glissé d'une distance d sur le plan incliné, le module de sa vitesse est alors noté v .

- 9.1) Sur votre feuille, représenter la figure 1b avec l'ensemble des forces intervenantes. Décrire le bilan des forces, expliquer leurs origines, puis déterminer l'expression de chacune d'entre-elles.
- 9.2) Exprimer le module de la force de frottement en fonction de θ , m , g et μ_d .
- 9.3) Calculer les travaux de chacune de ces forces ; préciser l'attribut moteur ou résistant de chacun.
- 9.4) En énonçant précisément un théorème fondamental de la mécanique, déterminer l'expression analytique du module v de la vitesse du bloc en fonction des paramètres de l'exercice, lorsque le bloc s'est déplacé d'une distance $d=0.5\text{m}$ selon l'axe $[Ox]$. Calculer ce module dans le cas numérique $m = 2 \text{ kg}$, $k = 8 \text{ N/m}$, $\mu_d = 0.125$ et $\theta = 37^\circ$ avec $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.
- 9.5) Déterminer l'expression de l'allongement maximal L du ressort ; calculer sa valeur avec les applications numériques précédentes.

Exercice 10 (Facultatif) : Travail d'un champ de force

Soit un champ de force défini par $\vec{F} = \left(\frac{3}{2}y^2 - x^2\right)\vec{i} + 3xy\vec{j}$, avec \vec{i} et \vec{j} les vecteurs unitaires du repère cartésien plan (Oxy) . Une particule se déplace dans ce champ de force suivant deux chemins différents joignant l'origine du repère $O(0,0)$ et le point $P(x_0, y_0)$, x_0 et y_0 étant fixés. Le premier chemin est donné par OHP (avec H la projection de P sur l'axe $[Ox]$), le deuxième par OGP (avec G la projection de P sur l'axe $[Oy]$).

- 10.1) Faire un schéma du plan (Oxy) en représentant l'ensemble de ces informations (repère, points, chemins).
- 10.2) Déterminer les composantes F_x et F_y du champ de force donné. Définir le travail δW accompli par cette force lors d'un déplacement élémentaire $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ dans le plan. Exprimer δW en fonction de F_x , F_y , dx et dy .
- 10.3) Calculer les travaux notés W_1 et W_2 reçus par la particule quand elle se déplace de O à P par les deux chemins précédemment décrits, en fonction de x_0 et y_0 .
- 10.4) Ce champ de force est-il susceptible d'être conservatif ? Expliquer.
- 10.5) Démontrer si le champ de force considéré est conservatif à l'aide d'une relation simple (égalité de Schwarz) sur les dérivées partielles des composantes F_x et F_y .

Exercice 1 (Facultatif):

Dans un référentiel galiléen d'origine O , on considère deux points fixes O_1 et O_2 de position quelconques dans l'espace. Un point matériel M de masse m est soumis simultanément à deux forces de rappel : $\vec{F}_1 = -k_1 \overrightarrow{O_1M}$ et $\vec{F}_2 = -k_2 \overrightarrow{O_2M}$ (k_1 et k_2 étant deux constantes positives).

- 1.1) Montrer par des considérations de simple bon sens que le point matériel M admet une position d'équilibre P que l'on placera sur une figure.
- 1.2) Calculer la position de P .
- 1.3) Montrer que le mouvement de M peut être décrit par une force unique : $\vec{F} = -k \overrightarrow{PM}$. Déterminer k .
- 1.4) Sachant que la trajectoire de M est plane, on choisit un repère orthonormé centré sur P et dont les axes \overrightarrow{Px} et \overrightarrow{Py} sont dans le plan de cette trajectoire en position quelconque par rapport à O_1 et O_2 . Ecrire les composantes de \vec{F} dans ce repère et sans démonstration la solution générale pour $x(t)$ et $y(t)$. On posera : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- 1.5) Montrer que la trajectoire est bornée.
- 1.6) On choisit comme conditions initiales :

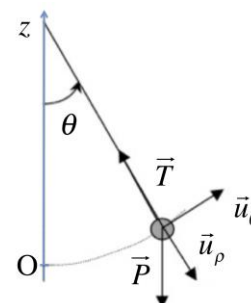
$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x}(t=0) = 0 \\ \dot{y}(t=0) = \omega_0 y_0 \end{cases}$$

Déterminer l'équation de la trajectoire. De quelle conique s'agit-il ? la représenter dans le repère Pxy .

- 1.7) Montrer que la force \vec{F} dérive d'une énergie potentielle $E_p(x, y)$ et que l'équilibre en P est stable.
- 1.8) Représenter graphiquement les variations d'énergie cinétique, d'énergie potentielle et d'énergie mécanique de la particule en fonction du temps.

Exercice 2 : Oscillateurs harmoniques, frottements, pendule

Un pendule est constitué d'une sphère de masse m , et d'un fil de longueur ℓ et de masse négligeable. On écarte, le pendule d'un angle θ_0 , de la verticale, et à $t = 0$, on le lâche sans vitesse initiale. À chaque instant, sa position peut être définie soit par l'angle θ qu'il fait avec la verticale, soit par son altitude z , repérée par un axe vertical, dont l'origine $z = 0$ correspond à $\theta = 0$.



I - On suppose que le coefficient de viscosité dans l'air est négligeable, de sorte qu'on puisse considérer le pendule dans l'air comme un oscillateur libre de période T_0 .

- I.2.1) Montrer que le poids dérive d'une énergie potentielle $E_p(z)$. Donner son expression en prenant comme origine $E_p(z = 0) = 0$.
- I.2.2) Calculer le travail élémentaire $\delta W(\vec{T})$, de la tension du fil au cours du mouvement.
- I.2.3) Exprimer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire que l'énergie mécanique se conserve.
- I.2.4) Exprimer l'énergie potentielle E_p en fonction de θ . Que devient cette expression si on fait l'approximation des petits angles. *Dans tout le reste du problème, on restera dans le cadre de cette approximation.*
- I.2.5) Montrer que $\theta = 0$ correspond à un équilibre stable. Quelle courbe décrit la fonction $E_p(\theta)$? Déduire, (sans démonstration) des observations précédentes, que le mouvement peut être décrit par une équation de la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.
- I.2.6) À partir de la conservation de l'énergie mécanique, établir cette équation et en déduire la valeur de ω_0 . À partir d'arguments simples, en déduire la durée du mouvement du pendule de sa position initiale ($\theta = \theta_0$) à la position verticale ($\theta = 0$).
- I.2.7) Calculer $\dot{\theta}_m$ la vitesse angulaire du pendule à son arrivée à la verticale.

I.2.8) En utilisant les conditions initiales résoudre l'équation différentielle et exprimer la solution $\theta(t)$. En déduire $\dot{\theta}(t)$, puis retrouver l'expression de $\dot{\theta}_m$ précédente.

II - On désire utiliser le pendule pour mesurer le coefficient de viscosité η d'un fluide visqueux. Pour cela on plonge le pendule dans le fluide de viscosité à déterminer et on lui donne les mêmes conditions initiales que précédemment. On suppose que la masse volumique du liquide est petite devant celle de la bille de façon à négliger les effets dus à la poussée d'Archimède (*on prendra le module du poids apparent de la bille dans le fluide égal à mg*). L'expression de la force de frottement visqueux pour une sphère de rayon r , animée d'une vitesse \vec{v} dans un fluide de viscosité η est : $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$, avec, $\beta = 6\pi\eta r$ (*loi de Stokes*).

II.2.1) Donner l'expression de la puissance dissipée par la force de frottement.

II.2.2) En déduire que l'équation différentielle du mouvement du pendule est de la forme :

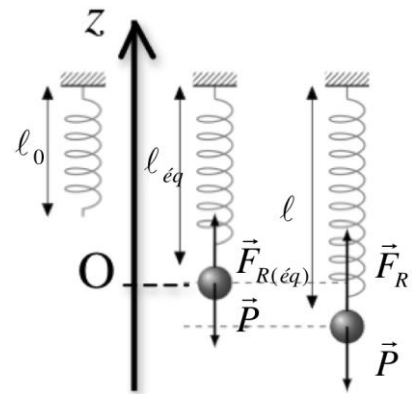
$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

II.2.3) Établir les conditions sur λ et ω_0 d'observation des différents types de mouvements possibles du pendule.

II.2.4) Pour quelles valeurs de la viscosité le mouvement est-il oscillatoire amorti ? On mesure alors la pseudo-période T du mouvement. Donner l'expression de la η en fonction de T et T_0 .

Exercice 3 : Oscillateurs harmoniques, frottements, ressort

Un objet ponctuel M de masse m est suspendu à un ressort vertical de constante de raideur ou de rappel k et de masse négligeable.



3.1) Faire le bilan des forces appliquées au point M lorsqu'il est au repos, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

3.2) On choisit l'origine sur l'axe vertical \vec{Oz} à cette position d'équilibre. En déduire la coordonnée z_0 de l'extrémité du ressort lorsque M n'y est pas suspendu, en fonction de m, k et g , accélération de la pesanteur.

3.3) On donne une impulsion verticale à l'objet M puis on le laisse osciller librement. On suppose que son mouvement n'est freiné par aucune force de frottement. Etablir à partir du principe fondamental de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement suivant \vec{Oz} , et montrer qu'elle se ramène exactement à celle d'un oscillateur harmonique à une dimension. Exprimer la pulsation ω_0 et la période T_0 du mouvement.

3.4) On ajoute maintenant un dispositif d'amortissement, le point matériel est alors soumis à une force \vec{F}_f proportionnelle à sa vitesse \vec{v} : $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement et montrer qu'on peut la ramener à la forme :

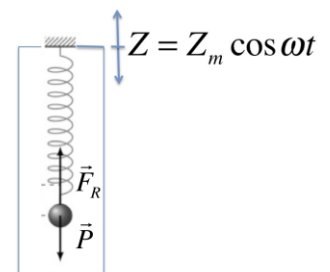
$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2z = 0$$

b) Rappeler brièvement les différents régimes possibles.

3.5) Le laboratoire est maintenant soumis à une secousse sismique assimilable à une oscillation verticale d'amplitude Z_m , par rapport à un référentiel galiléen.

a) Le référentiel du laboratoire est-il toujours galiléen ? Pourquoi ?

b) L'action de la secousse sismique revient à considérer une force d'inertie : $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$, où \vec{a}_e est l'accélération verticale de la secousse. Établir l'équation du mouvement dans le référentiel du laboratoire et sa solution en régime permanent.



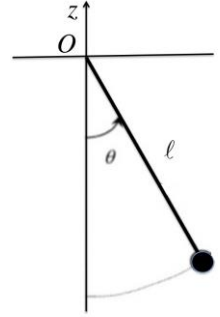
TD Chapitre V

Exercice 1 : Moment cinétique, pendule, frottement

Un pendule est constitué d'une bille de masse m et de rayon r , assimilable à un point matériel M , accrochée à une tige de longueur ℓ , de masse négligeable et libre de pivoter autour de son extrémité supérieure.

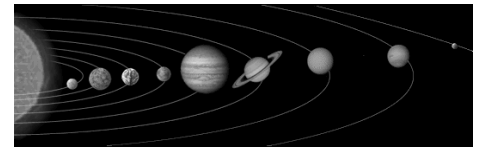
On traitera l'ensemble du problème à l'aide d'un système de coordonnées cylindriques, le plan polaire coïncidant avec le plan de la trajectoire du point M .

Rappeler la direction du vecteur de base \vec{u}_z pour que le trièdre $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit direct.



- 1.1) Donner les expressions du vecteur position $\vec{r} = \overline{OM}$ et du vecteur vitesse \vec{v} dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$
- 1.2) Rappeler la définition de \vec{J} moment cinétique de M par rapport à O . Donner son expression dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- 1.3) En l'absence de force de frottement :
 - a) Faire le bilan des forces appliquées à M , les représenter sur un schéma.
 - b) Calculer le moment $\vec{M}(\vec{F})$ de la résultante de ces forces par rapport au point O .
 - c) Écrire le théorème du moment cinétique et retrouver l'équation différentielle du pendule établi dans l'exercice précédent (on se placera dans le cadre des petites oscillations).
- 1.4) Mouvement amorti dans un fluide : on suppose maintenant que l'objet est plongé dans un liquide qui freine son mouvement par une force proportionnelle à sa vitesse \vec{v} : $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$. (on néglige la poussée d'Archimède). Calculer le moment de la force de frottement et retrouver l'équation différentielle du mouvement amorti.

Exercice 2 : Moment cinétique, gravitation planétaire et loi des aires



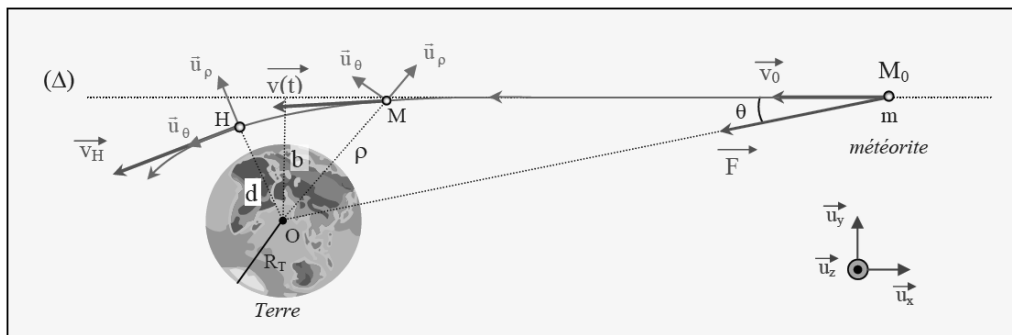
On considère une planète de masse m en mouvement circulaire uniforme autour du soleil (rayon R , période de révolution T).

L'énergie potentielle de la planète dans le champ de force s'écrit : $E_p(r) = -(km)/r$;

k est une constante et r la distance au soleil.

- 2.1) À partir du principe fondamental de la dynamique, démontrer la relation : $E_c = -E_p/2$
- 2.2) En utilisant la loi des aires, démontrer la relation : $v = (2\pi R)/T$; où v est le module de la vitesse de la planète ($v = \|\vec{v}\|$). Retrouver cette relation en raisonnant à partir de la circonférence de la trajectoire
- 2.3) Établir la relation : $T^2/R^3 = C$; C est une constante (indépendante de la masse M de la planète).

Exercice 3 : Moment cinétique, gravitation planétaire et loi des aires



Une météorite, de masse m , a très loin de la Terre, une vitesse constante \vec{v}_0 portée par un axe Δ situé à une distance b du centre T de la Terre. La trajectoire de cette météorite est déviée par le champ gravitationnel terrestre. Elle passe au point H , à une distance minimale de T , notée d . On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel d'inertie. On veut déterminer à partir de quelle valeur de b , la météorite s'écrasera sur la terre (ou se volatiliserà dans l'atmosphère terrestre).

- 3.1) Citer, en justifiant la réponse, les quantités conservées.
- 3.2) Déterminer le moment cinétique de la météorite par rapport à T , puis exprimer sa norme en fonction de m, b , et $v_0 = \|\vec{v}_0\|$.
- 3.3) Montrer que lorsque la météorite passe en H , sa vitesse \vec{v}_H est orthogonale à \overline{TH} .
- 3.4) Exprimer la norme du moment cinétique en fonction de m, d et $v_H = \|\vec{v}_H\|$.
- 3.5) En explicitant les lois de conservation citées à la question 1, établir l'expression de b en fonction de d et des données de l'exercice, à savoir : v_0, m, G, M , où G est la constante gravitationnelle et où M est la masse de la Terre.
- 3.6) Les météorites les plus fréquemment observées ont des célérités initiales comprises entre 10 km.s^{-1} et 50 km.s^{-1} . Pour $v_0 = 30 \text{ km.s}^{-1}$, calculer la valeur de b en dessous de laquelle la météorite rentrera en contact avec l'atmosphère. AN : $G \approx 7.10^{-11} \text{ SI}$; $M \approx 6.10^{24} \text{ kg}$; $R_T \approx 6,4.10^6 \text{ m}$. R_T est le rayon de la Terre. On néglige l'épaisseur de l'atmosphère.

Le Meteor Crater (Arizona) : Cratère mesurant 1,2 km de diamètre, résultat de l'impact terrestre d'une météorite, il y a environ 50 000 ans



Exercice 4 : Moment cinétique, gravitation planétaire et loi des aires

Dans un repère galiléen, une masse m est soumise à une force $\vec{F} = -k\vec{r}$, où \vec{r} est le vecteur position et k une constante positive. Le système constitue donc un oscillateur harmonique tridimensionnel isotrope de pulsation : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

- 4.1) Montrer que la trajectoire est plane.
- 4.2) On choisit un repère (O, x, y) dans ce plan. Vérifier par l'application du théorème du moment cinétique que l'ellipse (E) , d'équation ci-dessous, est une trajectoire possible pour m :

$$(E) \begin{cases} x = a \cos \omega_0 t \\ y = b \sin \omega_0 t \end{cases}$$

- 4.3) Calculer l'aire de (E) en s'aidant des propriétés du moment cinétique.