



**HAL**  
open science

## Séminaire national des jeunes chercheurs de l'ARDM

Christophe Hache, Christian Spitalas, Nathalie Auxire, Raquel Isabel Barrera-Curin<sup>1</sup>, Mathias Front, Katalin Gosztonyi, Dominique Laval, Karine Millon Faure, Edith Petitfour

► **To cite this version:**

Christophe Hache, Christian Spitalas, Nathalie Auxire, Raquel Isabel Barrera-Curin<sup>1</sup>, Mathias Front, et al.. Séminaire national des jeunes chercheurs de l'ARDM. Wejch 2013, IREM de Paris, 2014, 978-2-86612-356-7. hal-04506837

**HAL Id: hal-04506837**

**<https://hal.science/hal-04506837v1>**

Submitted on 15 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License



ARDM

Association pour la  
recherche en didactique  
des mathématiques

Institut de  
recherche pour  
l'enseignement des  
mathématiques



# Séminaire national des jeunes chercheurs de l'ARDM

## *Wejch 2013*

Recueil de textes coordonné par :

Christophe Hache

Christian Spitalas

en collaboration avec la revue *Petit x* et le LDAR

Cette brochure regroupe les textes des communications du séminaire national des jeunes chercheurs de l'ARDM pour l'année 2013 (pour les doctorants ayant souhaité une publication). Le séminaire national des jeunes chercheurs est aussi appelé « week-end jeunes chercheurs », ou « Wejch ».

Le recueil des textes a été organisé par Christian Spitalas et le comité de rédaction de la revue *Petit x*, qu'ils en soient ici remerciés.

Une relecture (par des chercheurs membres du LDAR volontaires) et une réécriture a eu lieu. La coordination de la relecture, la mise en page et l'édition ont été assurées par l'IREM de Paris sous le contrôle de Christophe Hache.

8 juillet 2014  
Ch. Hache

# VII<sup>ème</sup> séminaire national des jeunes chercheurs en didactique des mathématiques

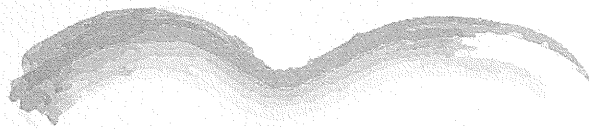
Palavas-les-Flots, du 17 au 19 mai 2013

EMERGENCE ET EVOLUTION DES CONCEPTS  
MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUES

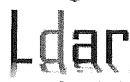
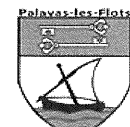


# Wejch2013

Palavas-les-Flots



DÉPARTEMENT  
D'ENSEIGNEMENT  
MATHÉMATIQUES



## Table des matières

Introduction, présentation du séminaire 2013.....	5
Conditions d'apparition et indicateurs de la présence des langages disciplinaires Nathalie Auxire.....	11
Médiation sémiotique et la rencontre d'objets mathématiques dans un contexte de collaboration Raquel Barrera.....	21
Quel savoir de référence pour les situations de recherche en classe de mathématiques ? Mathias Front.....	27
Résolution des problèmes et séries de problèmes dans Jeux avec l'infini de Rózsa Péter Katalin Gosztonyi.....	35
Modélisation et approche algorithmique d'une situation aléatoire : une aide à la compréhension des élèves Dominique Laval.....	43
Les LéA : un espace pour le développement d'une nouvelle forme d'ingénieries didactiques ? Karine Millon-Fauré.....	51
Étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques Édith Petitfour.....	57
Émergence du concept de groupe un point de vue historique et épistémologique Christian Spitalas.....	63

# INTRODUCTION, PRÉSENTATION DU SÉMINAIRE 2013

*VII<sup>e</sup> séminaire national des jeunes chercheurs de l'ARDM*

*Palavas-les-Flots, du 17 au 19 Mai 2013*

## **Thème du week-end : émergence et évolution des concepts mathématiques et didactiques.**

Équipe locale d'organisation : Raquel Isabel Barrera, Hussein Sabra, Christian Spitalas.

### **Présentation générale**

Comme chaque année depuis 2007, l'équipe des jeunes chercheurs de l'ARDM organise un moment de rencontre et de travail entre jeunes chercheurs en didactique des mathématiques dans le but de mieux nous connaître, d'échanger sur nos travaux de recherche et de nous permettre d'enrichir nos pratiques grâce à la présence d'un ou plusieurs « chercheurs experts ». L'objectif général du séminaire « jeunes chercheurs » que nous organisons chaque année est de donner l'occasion à des jeunes chercheurs de rendre visible leur travail et de bénéficier d'un moment d'échanges sur les recherches en cours. La rencontre s'articule généralement autour de deux axes :

- quelques jeunes chercheurs présentent leur recherche au groupe, en articulant leur exposé avec le thème retenu pour la rencontre. Ces communications sont suivies d'un moment de discussion sur les travaux présentés ;
- nous avons voulu faire de cette rencontre une occasion de travailler ensemble et bénéficier de l'expérience de chercheurs « experts ». Chaque année, nous invitons donc un chercheur de la communauté qui nous propose une session de travail en commun autour du thème choisi.

### **Présentation du thème**

Le chercheur en didactique est amené à concevoir, développer et préciser des concepts, qu'ils soient purement mathématiques, ou bien didactiques. Ce thème concerne à la fois des aspects épistémologiques en mathématiques, et méthodologiques en didactique des mathématiques. Les objectifs du WEJCH 2013 sont les suivants :

- échanger autour de travaux de jeunes chercheurs qui mettront en avant dans leurs présentations les processus du choix, appréhension et adaptation des concepts théoriques en didactique des mathématiques ;
- réfléchir ensemble sur les conditions et contraintes de recherche en didactique des mathématiques qui incitent à revisiter la définition des concepts mathématiques et didactiques ;
- s'interroger, d'une part sur le développement des conceptions en distinguant processus d'émergence et processus d'évolution, et d'autre part sur le rôle de la médiation entre les concepts et le sujet ;
- traiter la question des définitions des objets mathématiques, entre mathématiciens et/ou didacticiens des mathématiques (écarts ? Ressemblance ?).

## Organisation et programme du Week-end.

Programme - WEJCH 2013					
	Jeudi 16 mai 2013	Vendredi 17 mai 2013	Samedi 18 mai 2013	Dimanche 19 mai 2013	
07:00			Petit déjeuner	Petit déjeuner	07:00
08:00		Accueil et Petit déjeuner	Atelier 2 : J. & M. Rogaleki	Atelier méthodologique 2	08:00
09:00		Ouverture : 9h30 "présentons-nous"		Pause	09:00
10:00		Introduction du thème par les chercheurs experts		Conclusion du thème par les chercheurs experts	10:00
11:00		Pause	Pause	Plage jeunes chercheurs	11:00
12:00		Communications - Session 1 : 3 communicants	Communications - Session 3 : 3 communicants	Déjeuner = Panier repas	12:00
13:00		Déjeuner	Déjeuner		13:00
14:00		Atelier 1: G. Vergnaud	Atelier Méthodologique 1	Activités libres (plage, marche, visites...)	14:00
15:00			Pause		15:00
16:00		Communications - Session 4 2 communicants	Communications - Session 2 : 3 communicants		16:00
17:00	Accueil des participants	Pause – café/thé/jus d'orange	Pause – Plage		17:00
18:00		Pause	Apéritif		18:00
19:00		Conclusion G. Vergnaud			19:00
20:00		Dîner et soirée festive	Dîner et soirée à thème		20:00
21:00					21:00
22:00	Dîner et soirée				22:00
23:00					23:00

**Atelier 1 :**

- Psychologie cognitive et didactique des mathématiques Gérard Vergnaud – Université Paris 8

**Atelier 2 :**

- Psychologie ergonomique et didactique des mathématiques Janine Rogalski – Université Paris 8
- Mathématiques et épistémologie des mathématiques Marc Rogalski – Université Paris 6

**Communication – Session 1**

- Edith Petitfour – LDAR (Paris 7), Etude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques
- Nathalie Auxire – I3DL (Nice), Notion de langage disciplinaire
- Mathias Front – S2HEP (Lyon), Quel savoir de référence pour les situations de recherche en classe de mathématiques ?

**Communications – Session 2**

- Laetitia Rousson – S2HEP (Lyon), Un mixte de jeu et de situation : le jeu-situation
- Alain Jameau – CREAD (Rennes), La formation de l'expérience chez les enseignants – une étude de cas en mécanique au collège
- Christian Spitalas – I3M (Montpellier), Emergence et évolution du concept de groupe

**Communications -Session 3**

- Romain Mario – ADEF (Marseille), Conversion et influence des assujettissements au milieu scolaire dans l'étude autonome des mathématiques : comment les très bons élèves de lycée étudient les mathématiques après la classe. Observation anthropologique et suivi biographique de quelques cas exemplaires
- Katalin Gosztonyi – LDAR (Paris 7), Résolution des problèmes et séries de problèmes dans Jeux avec l'infini de Rózsa Péter
- Dominique Laval – LDAR (Paris 7), Modélisation et approche algorithmique d'une situation aléatoire : une aide à la compréhension des élèves

**Communications – Session 4**

- Karine Millon-Faure – ADEF (Marseille), Les LéA : un nouvel espace pour le développement des ingénieries didactiques ?
- Raquel Barrera – LDAR (Paris 7), Médiation sémiotique et construction sociale de connaissances mathématiques



## Ateliers méthodologiques

- Hussein Sabra – I3M (Montpellier), Des pistes pour un enseignement des mathématiques employant Mathbridge
- Suzane El-Hage – ICAR (Lyon), Audacity – logiciel pour le traitement des données audios
- Raquel Barrera (LDAR, Paris 7) et Christian Spitalas (I3M, Montpellier), Méthodologie de la recherche et recherche bibliographique

## Participants

### Les chercheurs expérimentés invités

Nom	Prénom	Courriel
ROGALSKI	Janine	<a href="mailto:Janine.Rogalski@univ-paris8.fr">Janine.Rogalski@univ-paris8.fr</a>
ROGALSKI	Marc	<a href="mailto:marc.rogalski@upmc.fr">marc.rogalski@upmc.fr</a>
VERGNAUD	Gérard	<a href="mailto:vergnaud99@gmail.com">vergnaud99@gmail.com</a>

### Les jeunes Chercheurs

Nom	Prénom	Courriel
AUXIRE	Nathalie	<a href="mailto:auxire@unice.fr">auxire@unice.fr</a>
BARRERA	Raquel	<a href="mailto:quellita@gmail.com">quellita@gmail.com</a>
BATTEAU	Valérie	<a href="mailto:valerie.batteau@hepl.ch">valerie.batteau@hepl.ch</a>
CHESNAIS	Aurélié	<a href="mailto:aureliechesnais@yahoo.fr">aureliechesnais@yahoo.fr</a>
DERONNE	Mélanie	<a href="mailto:Melanie.deronne@umons.ac.be">Melanie.deronne@umons.ac.be</a>
EL HAGE	Suzane	<a href="mailto:suzan_hj@hotmail.com">suzan_hj@hotmail.com</a>
FARAH	Lynn	<a href="mailto:lgf00@mail.aub.edu">lgf00@mail.aub.edu</a>
FRONT	Matthias	<a href="mailto:mathias.front@univ-lyon1.fr">mathias.front@univ-lyon1.fr</a>
GARDES	Marie-Line	<a href="mailto:gardes.marie-line@wanadoo.fr">gardes.marie-line@wanadoo.fr</a>
GOSZTONYI	Katalin	<a href="mailto:katalin.gosztonyi@gmail.com">katalin.gosztonyi@gmail.com</a>
JAMEAU	Alain	<a href="mailto:alain.jameau@wanadoo.fr">alain.jameau@wanadoo.fr</a>
LAVAL	Dominique	<a href="mailto:dominique.laval@gmail.com">dominique.laval@gmail.com</a>
MARIO	Romain	<a href="mailto:rmario_rmario@hotmail.com">rmario_rmario@hotmail.com</a>
MESNIL	Zoé	<a href="mailto:zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr">zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr</a>
MILLON-FAURE	Karine	<a href="mailto:kmmf@hotmail.fr">kmmf@hotmail.fr</a>
NECHACHE	Assia	<a href="mailto:assia.nechache@hotmail.fr">assia.nechache@hotmail.fr</a>
PELAY	Nicolas	<a href="mailto:npelay@gmail.com">npelay@gmail.com</a>
PETITFOUR	Edith	<a href="mailto:edith.petitfour@univ-lorraine.fr">edith.petitfour@univ-lorraine.fr</a>
ROUSSON	Laetitia	<a href="mailto:laeti.rou@hotmail.fr">laeti.rou@hotmail.fr</a>
SABRA	Hussein	<a href="mailto:hussein.sabra@univ-montp2.fr">hussein.sabra@univ-montp2.fr</a>
SPITALAS	Christian	<a href="mailto:christian.spitalas@gmail.com">christian.spitalas@gmail.com</a>
TANG	Minh Dung	<a href="mailto:minhdung2012@yahoo.com">minhdung2012@yahoo.com</a>

### Le comité d'organisation

Nom	Prénom	Courriel
BARRERA	Raquel	<a href="mailto:quellita@gmail.com">quellita@gmail.com</a>
SABRA	Hussein	<a href="mailto:hussein.sabra@univ-montp2.fr">hussein.sabra@univ-montp2.fr</a>
SPITALAS	Christian	<a href="mailto:christian.spitalas@gmail.com">christian.spitalas@gmail.com</a>

Contact : [wejch2013@gmail.com](mailto:wejch2013@gmail.com)

(adresses mails en mai 2013)



# CONDITIONS D'APPARITION ET INDICATEURS DE LA PRÉSENCE DES LANGAGES DISCIPLINAIRES

Nathalie AUXIRE

EA 6308 I3DL, Université de Nice-Sophia Antipolis

**Résumé :** cette communication s'intéresse à la notion de langage disciplinaire dans une perspective comparatiste des disciplines contribuant à l'enseignement de concepts mathématiques. Après avoir justifié les enjeux de la notion de langage disciplinaire, une revue de littérature donne un aperçu des phénomènes langagiers objets de recherches dans les processus d'enseignement-apprentissage. La dernière partie s'essaie à circonscrire la notion de langage disciplinaire : les conditions donnant un sens à cette notion et des indicateurs possibles pour aborder ce en quoi un langage peut être propre à une discipline. Il semble que la notion de langage disciplinaire prenne du sens relativement à la communauté de pratiques des enseignants de ladite discipline et à la relation entre les moyens langagiers mobilisés par la discipline et les significations produites. Pour une discipline donnée, les fonctions épistémologiques des objets enseignés, les modes de transposition, les fonctions de l'écrit, les marques de la communauté disciplinaire sont proposés comme indicateurs de son langage.

**Mots clés :** langage disciplinaire, communauté de pratiques, discipline, fonctions du langage

**Abstract :** this paper focuses on the notion of disciplinary language into comparative perspective of curricular disciplines involved in teaching mathematical concepts. First, we give a glimpse on challenges of this notion. Then, a literature review reminds several aspects of language in which researches about language activity in educational process are interested. Finally, we try to draw on a methodical approach of the notion of disciplinary language : prerequisites for this notion and some possible criterions to highlight specific characteristics related to a scholar discipline. The notion of disciplinary language seems to be relevant regarding to (1)the community of practice of teachers in the scholar discipline (2)the link between communication means and meaning produced by the stakeholders. Ways of didactic transposition, the epistemology of taught objects, scholar writing genders, signs of belonging to a disciplinary community could be possible criterions to characterize a disciplinary language,

**Key-words :** disciplinary language, community of practice, curricular discipline, functions of language

Cette communication présente un point de réflexion méthodologique de ma recherche de thèse, laquelle est consacrée à l'étude des variations du concept de *solide usuel*, à travers certaines disciplines scolaires mathématisées, c'est-à-dire les disciplines dont les objets d'étude ne sont pas des objets mathématiques mais sont cependant décrits mathématiquement. Notre but est de justifier la notion de *langage disciplinaire* et de proposer des indicateurs d'observation dans une perspective de didactique comparatiste.

Dans les années 2000, le français est qualifié de *discipline transversale*, signifiant par là que certains aspects du fonctionnement de la langue naturelle, dans le cadre d'une discipline autre que le français, peuvent à l'occasion devenir objet d'enseignement. Les observations en classe montrent alors que, dans le glissement d'une représentation primaire d'un concept enseigné par une discipline vers une représentation scientifique, les jeux langagiers « cristallisent » le lien entre la situation d'apprentissage, la discipline et la situation d'énonciation. La notion de *communauté discursive disciplinaire* apparaît (Jaubert & Rebierre 2003) et conduit finalement, une partie de la communauté des chercheurs à invalider la notion de transversalité pour la raison que le fonctionnement de la langue occasionné par un objet d'enseignement dans une discipline autre que le français ne saurait devenir objet d'enseignement du français lui-même sans être mis en relation avec les raisons sociales et scientifiques ayant placé, à un instant donné, cet objet dans le curriculum de ladite discipline (Bernié 2004).

De manière analogue au français des années 2000, la réforme du lycée professionnel de 2009 a institué un dispositif de liaison de l'enseignement des mathématiques aux enseignements de spécialité des disciplines professionnelles et technologiques. C'est dans le contexte de cette préconisation de recouvrements didactiques par les disciplines que la notion de langage disciplinaire nous est apparue comme nécessaire et plausible outil d'analyse des difficultés ou de la faisabilité de la coopération disciplinaire. S'intéresser aux langages disciplinaires pour enseigner les mathématiques, c'est du même coup questionner la notion de discipline scolaire (Perrenoud 1996 ;

Reuter 2010) et les relations entre les disciplines (Biagioli 2010). Nous indiquons tout d'abord les enjeux de la notion de langage disciplinaire. Ensuite, par des revues de littérature successives, nous montrons que la notion de langage est très utilisée dans la recherche didactique mais dans des niveaux d'observation divers non comparables. Enfin, nous proposons des conditions et quelques indicateurs d'existence de ce que nous pensons être un *langage disciplinaire*.

### **Quel est l'enjeu de la notion de langage disciplinaire ?**

A l'origine de la démarche de comparaison didactique des disciplines, on peut interroger ce qui justifie que la société et l'institution scolaire instaurent telle ou telle discipline scolaire. Par ailleurs, l'étude des programmes montre qu'au cours du temps les savoirs, en tant que discours sur un même concept, sont dispensés par l'une ou l'autre des disciplines, supprimés ou « inaugurés ». Il y a donc une variabilité dans la carte des disciplines, dans la répartition des savoirs entre les disciplines et dans la configuration des savoirs à l'intérieur d'une discipline. La notion de discipline recouvre ces niveaux de variabilité ou de cohérence. Qu'apporte alors la notion de langage disciplinaire ?

Cette notion apporte la relation nécessaire entre les moyens langagiers mis en œuvre par une discipline et les significations produites par ses acteurs en relation avec ses objectifs d'éducation et de formation. Voici un exemple tiré d'un entretien mené dans le cadre de ma thèse, entre un enseignant (En) de productique usinage et le chercheur (Ch). La séquence conversationnelle porte sur un document numérique contenant une représentation figurale d'un prisme et ses spécifications géométriques notées en texte, nombres et graphique. Les élèves apprennent à interpréter ce type de document en termes de choix d'outils d'usinage et de réglage de machine :

307 Ch : mm / oui / d'accord / bien euh / alors / est-ce que / eux / ils produisent des documents papiers ? Est-ce qu'ils produisent que des documents à l'aide de l'ordinateur ou est-ce qu'ils produisent/

308 En : oui / on fait plus rien à la main

309 Ch : plus rien à la main ? d'accord / c'est pas le lieu quoi

310 En : on a éradiqué ça / au début des années 90

311 Ch : d'accord

312 En : on travaille exclusivement en informatique depuis l'milieu des années 90 / on a plus jamais sorti un document à la main

Nous constatons que la question inachevée du chercheur (307) est interprétée par l'enseignant en relation avec l'acte graphique manuel et que les mots qu'il utilise renforcent la rupture entre des moyens manuels et des moyens logiciels de communication (308 : *plus rien* ; 310 : *éradiqué* ; 312 : *exclusivement, plus jamais*). Le *on* désigne la discipline et le mot *éradiqué* connote le changement d'outil graphique. L'enseignement de géométrie dispensé par la discipline de productique usinage ne peut être dissocié ni des moyens de communication ni du regard que l'enseignant porte sur ces moyens.

Dans le contexte d'un enseignement disciplinaire, le langage, vu comme ensemble de procédés de production de significations et de communication, porte l'histoire de la discipline scolaire, l'histoire du champ théorique auquel la discipline réfère et aussi, de façon plus temporelle, les marques de la situation d'énonciation (le milieu didactique, les acteurs). Le langage permet de transposer symboliquement les objets étudiés ou utilisés. L'activité langagière, elle, matérialise l'effort d'explicitation ou de recherche de significations d'une

*communauté discursive* (Jaubert 2004) partageant, dans un espace-temps délimité, un ensemble plus ou moins implicite de règles, d'usages et de références.

Dans le cas de notre recherche, si on la suppose robuste, la notion de *langage disciplinaire* permet de caractériser une discipline scolaire mathématisée par deux composantes. Une première composante, externe aux acteurs de la discipline, décrit la relation de la discipline au champ des mathématiques à travers l'épistémologie et la sémiotique des objets enseignés. Cette première composante est définie selon les points de vue comparés de l'histoire des sciences et des techniques et de l'histoire de l'enseignement institutionnel. Une deuxième composante décrit les représentations que les acteurs ont de leur discipline et est définie à partir des discours des acteurs sur leur discipline et sur les mathématiques.

Dans le cas général, la notion de langage disciplinaire scolaire rejoint celle de *genre de discours*, définie par Bakhtine comme « *forme d'énoncés relativement stables et normatives élaborée par chaque sphère de l'activité humaine* » (cité par Petit, 2007), présentant éventuellement des hiatus entre les énoncés écrits, donc socialisés, les énoncés déclarés non écrits et ce qui n'est pas énoncé mais peut néanmoins nourrir une attitude dans une situation donnée (Oudart *et alii* 2011; Petit 2007 ; Pastré *et alii* 2006 ; Bucheton *et alii* 2009).

L'enjeu de la notion de langage disciplinaire est de constituer un outil de structuration de la démarche de comparaison selon trois aspects.

### **Le langage disciplinaire et l'articulation des discours, des tâches et des activités.**

Parmi les outils langagiers mobilisés par les acteurs d'une discipline, la langue naturelle tient un rôle particulier. Par son biais, des reformulations descriptives, explicatives ou préventives permettent d'articuler les formes langagières spécifiques (lexicale, notationnelle, figurale, ...), les contenus et les activités génériques d'une discipline.

Par ailleurs, l'activité linguistique naturelle donne à voir la dualité oral/ écrit spécifique à la discipline. Les interactions orales sont-elles collectives, restreintes à deux acteurs ? Sont-elles associées à des documents ? Concomitantes à des productions écrites, à des actions sur les objets matériels ? Comment l'oral parle-t-il de l'écrit ? Quelles sont les fonctions accordées à la langue écrite ? Par exemple, en atelier de productique usinage, il n'y a pas de tableau. Des documents techniques sont pourtant présents presque partout : notice de machine, protocole d'usinage, abaque, schéma...

Par ces deux aspects, la langue naturelle devient en situation spécifique à une discipline.

### **Le langage disciplinaire et les stéréotypes sur les relations entre les disciplines.**

Lorsque les acteurs d'une discipline s'expriment sur une autre discipline et, par ricochet, sur les enseignants de cette autre discipline, l'analyse du discours peut révéler une représentation récurrente qui constitue alors une représentation stéréotypée : la nature *abstraite* des mathématiques, la nature nécessairement discursive de l'enseignement des mathématiques, la fonction socialement discriminante des évaluations en mathématiques, l'écart des attentes en mathématiques entre le lycée général et le lycée professionnel sont des exemples de stéréotypes relatifs à la discipline des mathématiques. Un stéréotype est une ressource culturelle dont l'effet est paradoxal : à la fois structurant et cloisonnant. Ainsi, les représentations stéréotypées relatives aux mathématiques (en tant que discipline ou champ théorique) permettent aux acteurs des autres disciplines de se décrire par différence /

ressemblance. Elles peuvent influencer la faisabilité des liaisons d'enseignements disciplinaires.

### **Le langage disciplinaire et les modalités de la transposition didactique.**

L'utilisation de formes langagières stables et spécifiques pour référer à une situation ou à un concept montre l'effort de la discipline pour accommoder ce concept (Rogalski 2007). La notion de langage disciplinaire permet de suivre la constitution d'une discipline à travers l'ergonomie de son langage, c'est-à-dire l'adaptation qu'opère la discipline à l'attention des élèves sur les notations, le vocabulaire, les situations de référence pour désigner les objets qu'elle enseigne. L'analyse épistémologique d'un même concept est nécessaire pour considérer la variété des situations embrassées par ce concept et appréhender les changements de configurations du rapport savoir / savoir-faire /compétence, induites par un changement de discipline enseignant ce concept. D'un point de vue pratique, l'analyse épistémologique outille la discussion sur les dispositifs institutionnels de liaison des enseignements disciplinaires.

### **Les recherches didactiques sur le langage et l'activité langagière dans les processus d'enseignement-apprentissage.**

#### **Champ de recherche.**

Le langage est à la fois un outil (il permet d'agir) et un artefact (il est un produit de l'activité humaine associé à un ensemble de symboles, des règles de fonctionnement). En conséquence, le langage a différentes fonctions interactives : agir et penser, communiquer et normaliser ; intégrer des sujets dans une communauté en adhérant à une pratique énonciative spécifique, marquer un territoire d'activité, créer de la cohésion entre des tâches... Les études portant sur les phénomènes langagiers (principalement linguistiques) dans les processus d'enseignement-apprentissage s'intéressent aux formes langagières, aux fonctions langagières, et, moins souvent, à la relation entre ces fonctions et les ressources langagières dans une situation d'énonciation donnée.

Les typologies de fonctions du langage élaborées dépendent des objets d'étude : la cognition du sujet (Duval 1995), la médiation au savoir par l'enseignant (Saillot 2012), l'interaction enseignant-élève pour l'entrée dans l'activité (Salin *et alii* 2002; Chappet-Parriès 2002, 2004 ; Boré 2007), la génération de savoir et savoir-faire non écrits par une communauté (Castela 2010 ; Vergnaud 2006), l'épistémologie de l'écrit (Chartrand *et alii* 2006).

D'autres approches envisagent le langage au cours des processus enseignement-apprentissage comme vecteur de phénomènes de concurrence culturelle lorsqu'une langue ou une discipline sont confrontées à une langue ou une discipline autres, désignées comme normes ou références. Les classes d'accueil d'élèves migrants, les formations professionnalisées (Rogalski 2007 ; Bazile *et alii*, 2002) sont des contextes où la confrontation de deux cultures est reconnue. L'appui sur des représentations sémiotiques « importées », les phénomènes d'oubli, les choix ergonomiques d'expression ou de non-expression sont observables dans l'activité langagière.

D'une façon générale, l'interdidactique (Biagioli 2010, 2011) couvre l'étude des phénomènes de coexistence de cultures à travers l'activité langagière à l'occasion de l'enseignement soit d'un même objet par plusieurs disciplines, soit d'un objet auquel s'attachent des représentations tacites d'une langue naturelle ou d'un champ professionnel. Plus précisément,

l'interdidactique étudie la langue naturelle dans ses fonctions d'articulation entre (1) la tâche prescrite et l'activité, (2) les différentes significations d'un concept d'une discipline à l'autre, (3) les conceptions véhiculées par la langue naturelle et les conceptions scientifiques visées par les enseignements disciplinaires.

C'est dans le cadre de l'interdidactique que se situe la notion de langage disciplinaire.

### **Notion de communauté.**

Notre propos étant de justifier la notion de langage disciplinaire, nous avons cherché à délimiter quelle pouvait être la communauté pratiquant ce langage : s'agit-il d'une classe et d'un enseignant ? des enseignants de la discipline ? Les formateurs disciplinaires, les inspecteurs disciplinaires font-ils partie de cette communauté ? Où ne trouve-t-on plus les marques du langage disciplinaire ?

Pour cela, nous sommes revenue sur la définition de *communauté*. La notion de communauté discursive, scolaire ou non, relève de la sociolinguistique. À l'origine du concept de communauté discursive, se trouve un concept différent mais connexe, celui de communauté de pratiques. Dans la théorie sociale de l'*apprentissage organisationnel* développée par Wenger en 1998, le concept de communauté de pratiques articule la cognition individuelle et la cognition collective sous certaines conditions. Selon Wenger, une communauté de pratiques se caractérise ainsi :

- Des relations mutuelles soutenues (qu'elles soient harmonieuses ou conflictuelles).
- Des manières communes de s'engager à faire des choses ensemble.
- L'absence de préambules introductifs dans les conversations, comme si les interactions formaient un processus continu dans le temps.
- Savoir ce que les autres savent, ce qu'ils peuvent faire, et comment ils peuvent contribuer à l'action collective.
- Un jargon, des raccourcis dans la communication, des histoires partagées, des plaisanteries internes au groupe.
- Un discours partagé qui reflète une certaine façon de voir le monde (cité par Chanal 2000),

Les quatre dernières caractéristiques sont définies ou observables dans l'activité langagière. Par sa pratique, la communauté développe des savoirs (des significations) et une identité d'appartenance qui lui sont propres. En quoi consistent ces savoirs communautaires ? Ce sont « *des cadres d'interprétation, des mots de vocabulaire nécessaires à l'accomplissement des tâches, la continuité des significations à travers le temps et l'espace* » (*ibid.*). Les savoirs générés par une communauté sont évolutifs et mis en forme de façon explicite (expressions linguistiques, outils, documents, procédures) ou non (conventions tacites, attitudes, valeurs).

### **Activités langagières du point de vue cognitif dans la discipline des mathématiques.**

En didactique des mathématiques, nombre de recherches portent sur les interactions verbales entre les élèves, entre la classe et l'enseignant de mathématiques, en situation d'appréhender et de définir un concept (Matheron 2001; Mariotti *et alii* 1997), en situation d'apprendre à définir un concept (Ouvrier-Buffet 2009). L'observation d'élèves de collège en situation de résolution de problèmes de géométrie énoncés à l'aide de deux registres sémiotiques (langue naturelle et figure) conduit Duval (1995) à conclure que c'est le jeu des interactions entre une

pratique discursive en langue naturelle, mobilisant un réseau de savoirs d'un référentiel théorique, et des opérations figurales spécifiques qui confère à la figure un pouvoir heuristique. Les éléments de dexis et de modalisation du discours de l'apprenant sont des indicateurs pertinents l'évolution des représentations. Les travaux cités ici fournissent des outils pour distinguer les fonctions méta-discursives (communiquer, transformer, objectiver l'information) et les fonctions discursives (référer, désigner, décrire, expliquer, argumenter, réfléchir) et discutent la répartition, au cours de l'apprentissage, de ces fonctions en relation avec le registre de la figure et du registre verbal.

### **Activités langagières du point de vue didactique dans la discipline des mathématiques.**

D'autres recherches étudient l'exposition, enseignée ou non, d'objets mathématiques hors de la classe de mathématiques (Romo-Vasquez *et alii* 2011) ou bien s'intéressent à l'effet des interfaces logicielles sur la représentation de techniques mathématiques (Bruillard 2003 ; Ken *et alii* 2003).

Castela (*ibid.*) propose un modèle faisant une place aux savoirs, non répertoriés, non écrits, générés par une communauté de pratiques concernant une technique donnée pour le traitement d'une tâche générique donnée. Selon ce modèle, deux technologies<sup>1</sup> coexistent. La première technologie est épistémique : fondée sur le champ de résultats théoriques, reconnus comme vrais par une communauté scientifique, elle permet de justifier, *a priori*, le choix de la technique en relation avec la tâche. Une deuxième technologie est formée après que la technique a été sélectionnée pour résoudre la tâche : cette technologie est générée au sein d'une communauté de pratique, que celle-ci soit scolaire ou professionnelle, et ne se réfère pas à la théorie épistémique. Cela étant, l'effet de cette technologie est de créer des savoirs, c'est-à-dire des faits tenus pour des vérités, organisées entre elles, robustes aux différentes situations et traduisant *l'agir et le penser* de la communauté. Castela propose un modèle d'analyse des technologies selon leurs fonctions : décrire, faciliter, expliquer, motiver, évaluer ou prouver.

Les travaux cités ici s'intéressent aux discours produits relativement aux techniques mathématiques. Ils fournissent des outils pour suivre la répartition des fonctions en relation avec la culture de la communauté de pratiques usant de ces techniques.

### **Points de vue croisés sur l'activité langagière dans la discipline des mathématiques.**

D'autres recherches montrent, à partir de l'étude des activités langagières, la relation de dépendance entre les points de vue didactique et cognitif. Salin (1999) interprète le glissement fréquemment observé entre une prévision par l'enseignant d'une démarche de construction des savoirs vers des pratiques ostensives lors de la mise en œuvre, comme un indice de représentation empirique des savoirs de la part de l'enseignant. Mais, qu'elles soient contrôlées ou non par l'enseignant, les pratiques ostensives constituent une alternative à la pratique de l'écrit dans l'activité langagière<sup>2</sup> disciplinaire et traduisent une représentation productive du processus enseignement-apprentissage en lien avec le type d'évaluation normative de la discipline.

1 Le mot *technologie* désigne, selon Y.Chevallard, le discours faisant référence aux savoirs pour justifier le recours à une technique en relation avec une tâche.

2 « *Rendre bavards les ostensifs* », Aline Robert, séminaire de Lens, 21 novembre 2013.



Adoptant un point de vue général et disciplinaire, Reuter (2010) considère les activités métalangagières comme spécifiques aux disciplines car elles signalent les objets spécifiquement référés, les modes d'objectivation des concepts (comment ils sont analysés et reliés les uns aux autres) ainsi que le rapport de la discipline aux pratiques scripturales de texte, de figure, de graphique.

## **Conditions et indicateurs d'un langage disciplinaire ?**

### **Prérequis au langage disciplinaire : la communauté disciplinaire.**

En supposant acquis les critères sociétaux, réglementaires et scientifiques permettant de définir, à un moment donné, une discipline scolaire, il s'agit d'identifier l'échelle de la communauté disciplinaire susceptible de générer *son langage disciplinaire*, c'est-à-dire un langage propre reconnaissable à une échelle d'observation *en classe* mais indépendante des faits particuliers observables dans *une* classe, un langage porteur de l'épistémologie et de l'ergonomie de la discipline, un langage intégré par ses acteurs, suffisamment marqué pour devenir un langage partiellement étranger aux acteurs d'autres disciplines.

Notre démarche de comparaison de l'enseignement des mathématiques par plusieurs disciplines<sup>3</sup> nous a conduite à mettre en relation les dires enseignants et les documents pédagogiques produits par les enseignants pour leurs élèves. Il apparaît que l'échelle de la communauté des enseignants d'une discipline comme une communauté de pratiques convient pour aborder la notion de langage disciplinaire. En effet, les enseignants d'une même discipline partagent en acte :

(1) des conditions et des objectifs de travail (type d'établissement, programme, horaire disciplinaire, modalités d'évaluation, manuels, logiciels, filière d'enseignement, formation continue, supérieurs hiérarchiques, certains aspects de leur formation scientifique initiale) ;

(2) le cadre d'interprétation des prescriptions officielles, un répertoire commun de pratiques et une mémoire collective leur permettant de donner une continuité à la discipline sans que chaque enseignant ait à maîtriser tous les aspects de cette continuité. Le cadre d'interprétation commun se construit via la production de documents (co-rédaction de référentiels de compétences ou de devoirs d'évaluation commune), via des actions spontanées parfois informelles grâce (mutualisation d'activités en ligne, intégration des nouveaux enseignants) ou encore par l'utilisation de ressources communes (annales d'examen, document d'accompagnement) ;

(3) des modes de communication spontanés ou informels (tutoiement, discussion sur le vif sur les ressources locales, sur les résultats des élèves communs, sur des adaptations personnelles, ...). Les enseignants-formateurs de la discipline sont des intermédiaires entre la communauté disciplinaire et d'autres acteurs (enseignants, inspecteurs, universitaires, ...).

### **Indicateurs de la présence d'un langage disciplinaire.**

La notion de *langage disciplinaire* prétend décrire la posture épistémologique des acteurs d'une discipline à travers les pratiques langagières observables. Pour proposer des indicateurs stables de l'existence d'un langage disciplinaire, nous avons procédé de la façon suivante : pour un même concept mathématique (par exemple le concept de vecteur ou le concept de

<sup>3</sup> Nous avons comparé trois disciplines de lycée professionnel : les mathématiques, la construction mécanique, la productique-usinage.

solide géométrique), dans une discipline donnée (voir note 3), nous avons décrit le concept par ses fonctions épistémologiques à partir des situations génériques modélisées, par les discours qu'en donnent les enseignants dans la même langue naturelle (dans notre cas, le français) et par leurs variations sémiotiques. Nous avons finalement retenu sept indicateurs interdépendants.

(1) L'étrangeté pour un acteur d'une autre discipline : le mode d'énonciation fait qu'un concept n'est reconnu sans un certain effort de conversion des signes, un énoncé difficile à comprendre (façon de commencer, choix des mots, modalisateurs, prédilection pour l'objectivité ou la subjectivité, tournures, sémiotique spécifique associée à une situation).

(2) La répartition des fonctions langagières selon les registres sémiotiques : comment désigne-t-on ? Quel est le registre de prédilection des descriptions, des explications ? Les productions langagières visant à motiver ou justifier sont-elles associées à l'oral ou à l'écrit ? Par exemple, Boré (2007) montre que, dans le registre linguistique, la fonction de dénomination (une chose ayant telle propriété est appelée par tel mot) est plus fréquente en grammaire qu'en géométrie et que cette fonction présente des difficultés spécifiques dues au fait que les *choses* de la grammaire sont constituées de mots.

(3) Les modes d'introduction des définitions ou notations indiquent la place de l'ostension non linguistique comme alternative à l'activité métalinguistique.

(4) Le contrat de parole entre l'enseignant, la classe et l'élève indique comment les « savoirs » qui ne sont pas écrits diffusent (usage, attitude, valeur). L'enseignant crée un système transposant pour reconstruire les objets du curriculum et ce faisant, il crée d'autres pratiques, d'autres savoirs non déclarés car l'organisation didactique dépend de la population des élèves et de la représentation que l'enseignant en a. Par exemple, l'économie des ressources est une valeur au cœur de la productique usinage imprégnant les conversations duales entre l'enseignant et l'élève en situation de pré-réglage de machine (coordination de plusieurs repères sur la machine).

(5) Les fonctions sociales des objets du curriculum (activité technologique, savoir-faire, savoir conceptuel) sont révélées par les déclarations spécifiques qui leur sont relatives. Les discours projettent une façon d'utiliser socialement ces objets et de se référer au champ scientifique ou professionnel, l'enjeu étant soit d'acquérir une compétence générale, soit d'être initié à *l'agir-penser-parler* dans un champ d'expertise. De ce fait, la stratégie pédagogique par induction ou par construction peut aussi être un marqueur disciplinaire.

(6) Les prototypes d'enseignement : il s'agit d'objets initiaux d'enseignement qui servent de référence et sont transformés pour soutenir l'enseignement d'autres objets. Par exemple, le cube est un prototype en mathématiques convoqué pour initier l'enseignement de différents objets (polyèdre, conversion de mesure de volume, orthogonalité, repérage...) alors que le cylindre s'impose en productique usinage en vis-à-vis du barreau d'acier dont les transformations sont au cœur de ce métier.

(7) Les stéréotypes servent de repère autant que de limite dans les relations entre disciplines. Ils mettent en relation les modes d'évaluation par les disciplines et les modes de recrutement des enseignants ou des élèves.

## **Conclusion.**

Notre question initiale porte sur l'enseignement de concepts mathématiques par des disciplines de lycée autres que celle des mathématiques. En se tournant vers des disciplines

dont les objets sont modélisés mathématiquement, nous constatons que, pour une même filière, ces disciplines ont effectivement en commun l'enseignement de concepts mathématiques mais que les significations qu'elles construisent, par leurs discours, sont plus ou moins différentes. La convocation d'un concept mathématique par l'une de ces disciplines est modulée par les fonctions épistémologiques du concept et les modes de transposition faits par la discipline, mais pas seulement : l'image sociale de la discipline, la représentation des mathématiques, les fonctions de l'écrit en lien avec les pratiques sociales auxquelles se réfère la discipline sont aussi des paramètres de la construction de significations.

Cherchant à structurer la démarche de comparaison de deux discours disciplinaires d'une même filière, proches par leur référence à certains concepts et l'usage de certaines techniques mais éloignés par leurs intentions et leurs pratiques d'ostension de ce concept, nous proposons la notion de langage disciplinaire. En effet, le langage disciplinaire répond à la nécessité de mettre en relation les significations mises en avant par une discipline et les moyens de production de significations mis en œuvre par celle-ci. L'enjeu de la notion de langage disciplinaire est d'interroger le réseau des significations d'un concept que proposent, par leurs discours respectifs, les disciplines d'une même filière et d'analyser comment ces disciplines contribuent ou non à une représentation unitaire de la culture scientifique du point de vue de l'élève.

La notion de langage disciplinaire, inscrite dans une démarche didactique comparatiste, nécessite des données représentatives de la communauté disciplinaire (entretiens, ressources pédagogiques, productions d'élèves, énoncés d'examen, curriculum officiel, documents de formations, etc.).

Les méthodes nécessairement associées à l'étude d'un langage disciplinaire sont l'analyse épistémologique et l'analyse de discours. Nous avons essayé de proposer des conditions et des indicateurs d'existence de langage disciplinaire pour appréhender la coexistence de différents contextes d'enseignement-apprentissage eux-mêmes complexes et évolutifs.

## Références

BAZILE J., MAYEN P. (2002). Le développement des concepts scientifiques à partir des conceptualisations dans l'action proposition de didactique professionnelle. *ASTER Sciences, techniques et pratiques professionnelles* 34, 75-96.

BERNIÉ J.-P. (2004). Pour un ensemble co-disciplinaire. *9<sup>e</sup> Colloque de l'AIRDF*, Quebec.

BIAGIOLI N. (2010). Entre didactiques des langues et didactique des disciplines. *Le langage et l'Homme*, XXXV 2.

BORÉ C. (2007). Dénommer, désigner en classe : aspects du métalangage et des interactions. *Journée InterGAP « Interactions et apprentissages »*, France.

BRUILLARD E. (2003). Les TIC : moyens et objets d'enseignement, instrument de travail. Quelle évolution des pratiques et des contenus? Dans *Le Collège unique en question*. Presses Universitaires de F, 235-249.

BUCHETON D., SOULÉ Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Education & Didactique*, 3 (3)29-48.

CASTELA C., ELGUERO C. (2013). Praxéologie et institution, deux organisateurs pour les recherches socio épistémologiques. Actes de colloque. IV<sup>e</sup> congrès international sur la TAD.

- CHANAL V. (2000) Communautés de pratique et management par projet: à propos de l'ouvrage de Wenger (1998) *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. *M@n@gement* 3(1),1-30.
- CHAPPET-PARRIÈS M. (2004) Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24 (2-3), 251-284.
- CHARTRAND S-G., BLASER Ch.(2006). Fonctions épistémiques des genres disciplinaires scolaires. Québec :*Presses de l'Université de Laval*.
- DUVAL R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Ed P.Lang.
- JAUBERT M., REBIERRE M, BERNIÉ J.-P. (2003) L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? où va-t-elle ? *Les cahiers THÉODILE* 4, 51– 80.
- KEN PH., NOSS R. (2003) Mathematics in the University Education of Engineers. *Final Report to the Ove Arup Foundation*.
- MARIOTTI A., FISCHBEIN E.(1997) Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34.
- MATHERON Y. (2001) Exemples de relation entre l'usage d'images et de métaphores et la production de la mémoire pour enseigner les mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques* 21 (3), 207-246.
- OUVRIER-BUFFET C. (2006) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics* 63, 259-289.
- LOUDART A.-C., PETIT L. (2009) Communications Internationales avec actes (ACT), 1<sup>er</sup> colloque international de l'ARCD « Où va la didactique comparée ; Didactiques disciplinaires et approches comparatistes des pratiques d'enseignement et d'apprentissage », Université de Genève
- PASTRÉ P., MAYEN P., VERGNAUD G.(2006). La didactique professionnelle. *Note de synthèse. Revue française de pédagogie*, 154.
- PERRENOUD Ph. (1996). Le rôle de la formation des enseignants dans la construction d'une discipline : transposition et alternance. *Revue Education physique et sportive*, 27 : 49-60.
- PETIT L. (2007). Genre du discours, genèse instrumentale et didactique du français. *Actes du colloque international : Didactique du français, le socioculturel en question*, Lille.
- REUTER Y. & al. Métalangage – Activités métalinguistiques Dans *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques* (pp127-132).
- ROMO-VAZQUEZ A., CASTELA, C. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31 (1),79-130.
- SAILLOT E. (2012) Analyse descriptive des ressources langagières des enseignants : quelles perspectives pour la formation ? *2e Colloque International Apprentissage et Développement professionnel*, RPDP et CREN, 7 et 8 juin 2012 à Nantes.
- SALIN M.-H. (1999). *Pratiques ostensives des enseignants*. Dans in *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp 327-352).

# MÉDIATION SÉMIOTIQUE ET LA RENCONTRE D'*OBJETS* MATHÉMATIQUES DANS UN CONTEXTE DE COLLABORATION

Raquel Isabel Barrera Curin

Université du Québec à Montréal

**Résumé :** comment pourrait se produire la rencontre des objets mathématiques ? Quel rôle peut jouer la médiation sémiotique et la mise en place des conditions favorisant un travail mathématique collaboratif entre élèves et enseignant ? J'ai observé le travail mathématique des élèves lorsqu'ils cherchaient l'établissement des relations entre nombres et géométrie dans un contexte de médiation sémiotique et sociale. Les résultats de mon observation m'ont conduit à des réflexions portant sur l'organisation d'un espace de travail mathématique, sur l'imprévisibilité des cheminements des élèves au cœur du travail mathématique approprié et sur le rôle de l'enseignant comme médiateur culturel faisant partie active du travail des élèves, favorisant ainsi le développement de leur discours mathématique.

**Mots-clés :** Espace de Travail Mathématique, médiation sémiotique, travail collaboratif, rencontre des objets mathématiques.

**Abstract :** How can students be brought to encounter mathematical objects? What role could be played by semiotic mediation and the creation of conditions favoring collaboration between students and teachers? I observed the mathematical work of students looking for relationships between numbers and geometry in a context of semiotic and social mediation. The results of this observation led me to reflections on the organization of a mathematical work space, the unpredictability of the paths chosen by students in their work, and the role of the teacher as a cultural mediator actively taking part in students' work, thus encouraging the development of students' mathematical discourse.

**Key words :** Mathematical Working Space, semiotic mediation, collaborative work, encountering mathematical objects.

## Introduction

Dans cette communication, j'aimerais partager certaines de mes réflexions et de mes questions associées au processus de *rencontre* d'*objets* mathématiques dans un contexte de collaboration et de médiation sémiotique. Tout au début, j'introduis brièvement le processus d'objectivation (Radford, 2004) – étroitement lié à la rencontre d'objets mathématiques – pour ensuite rendre compte de comment la rencontre d'une signification géométrique de la multiplication de deux nombres complexes pourrait se produire au cœur d'une situation d'apprentissage. Cette situation ne sera pas présentée de façon exhaustive mais juste évoquée pour contextualiser le travail mathématique des élèves. Elle a été conçue et analysée en profondeur dans le cadre de ma thèse (Barrera Curin, 2012) sous le regard de l'approche théorique sur les Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) ainsi que de certaines approches ou théories sémiotiques qui complètent ce premier regard (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008 ; Radford, 2004). Je parle donc du travail mathématique des élèves, et je décris un espace de travail mathématique dans lequel intervient la médiation sémiotique et le travail collaboratif entre élèves et enseignant dans la recherche d'une mise en relation entre multiplication et géométrie.

## L'objectivation de notions mathématiques

Le processus d'objectivation est, d'une part, directement associé à la production et *compréhension* d'une notion mathématique et, d'autre part, intrinsèquement lié à un contexte de médiation et de réflexion. De ce fait, pour que l'objectivation se produise, il faut nécessairement concevoir l'apprentissage-enseignement des mathématiques dans un contexte qui ne peut exclure la présence de médiateurs (Radford, 2003b) mais qui ne se limite pas non plus à la seule intervention des représentations sémiotiques. Radford (2003b) le souligne en se référant aux remarques faites par Kant (1781-1996) par rapport au rôle des représentations, « the only way that an object can be given to us is by the mind being affected in a certain manner – in a sensible manner, by representations of the object (see [Kant, 1781-1996, p.71-72]) » (Radford, 2003b, p. 40).

Pour insister sur le fait que la seule présence de représentations ne suffit pas à l'apprentissage, Radford met en valeur la richesse et la complexité du processus qu'il appelle la *rencontre des*

*mathématiques*. Ce processus implique non seulement la présence d'une variété de représentations sémiotiques mais aussi la présence d'interactions entre individus, et entre individus et représentations, au cœur d'une activité. Tout cela fait partie du *comment connaître*, i.e. du comment rencontrer les notions mathématiques en jeu :

“[...] processes of knowledge production are embedded in systems of activity that include other physical and sensual means of objectivation than writing (like tools and speech) and that give a corporeal and tangible form to knowledge as well. [...] the objectivation of mathematical objects appears linked to the individuals' mediated and reflexive efforts aimed at the attainment of the goal of their activity.” (Radford, 2003b, p. 41).

Tel que Radford l'a exprimé, la rencontre des objets mathématiques est un processus social de prise de conscience du système de pensée scientifique, une prise de conscience médiatisée par des signes, des symboles et même du corps. La sémiotique est insérée dans les principes de l'objectivation et l'apprentissage est donc un jeu médiatisé (Radford, 2013). Pouvons-nous identifier des éléments qui se manifesteraient comme des évidences de cette rencontre ? D'après Radford (2013), la manière dont la connaissance va apparaître n'est pas prévisible car c'est un événement spatial, temporel, qui va prendre un chemin ou un autre et l'apprentissage aura lieu quand l'enseignant et l'élève partageront un certain regard sur l'objet. Ce partage se produirait au cœur d'une activité conjointe entre élève et enseignant ; une activité que Radford considère asymétrique, dans laquelle l'élève s'embarquerait de façon volontaire.

Dans la section suivante je présente brièvement une situation d'apprentissage dont je parle en termes d'un Espace de Travail Mathématique proposé à des élèves de Terminale S (TS, dernière année du secondaire scientifique en France) visant la rencontre de la multiplication comme une transformation dans le plan. À partir de cette mise en contexte, j'aimerais illustrer la richesse du travail mathématique des élèves et la complexité propre à la mise en relation des différentes composantes d'un espace de travail mathématique.

## **Un espace de travail mathématique pour la rencontre d'une signification géométrique de la multiplication de deux nombres complexes**

Dans le cadre de ma thèse j'ai étudié la géométrisation de la multiplication pour différents ensembles de nombres (Barrera Curin, 2012). Ce processus se produirait dans un Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), ce qui serait l'endroit où nous pouvons voir en action le travail de celui qui fait des mathématiques.

Je me suis particulièrement intéressée aux interactions entre certaines des composantes de cet Espace (voir figure 1), censées agir dans le processus visant la rencontre d'une signification géométrique de la multiplication. Un élément clé favorisant l'interaction entre les composantes d'un espace de travail mathématique – proposé par l'enseignant et approprié par les élèves – serait la médiation sémiotique (Barrera Curin, 2012). Pour en rendre compte, j'ai regardé l'Espace de Travail Mathématique en le situant dans un contexte socioculturel de l'apprentissage. Dans ce contexte, des médiateurs (Vygotsky, 1931/1978, p.52), des signes, notamment des signes-artefacts (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), sont censés pouvoir *conduire* le travail mathématique au milieu d'un processus de collaboration social entre élèves et enseignant. En conséquence, un espace de travail mathématique a été organisé *a priori* par moi et des enseignantes pour ensuite être proposé à des élèves de TS de différents lycées de l'Île-de-France.

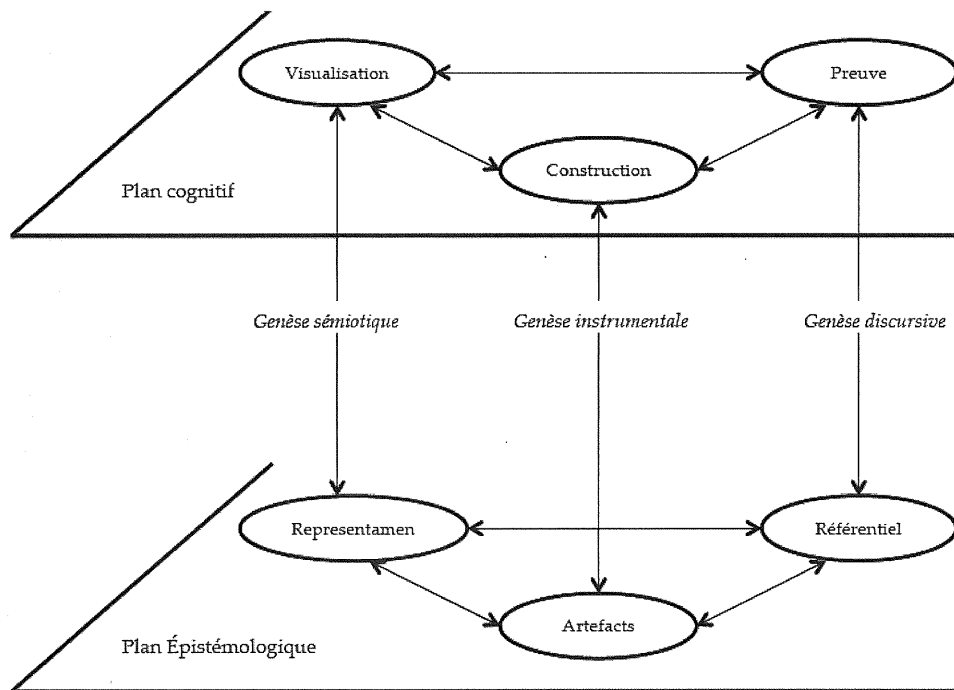


Figure 1. L'Espace de Travail Mathématique, ses composantes et genèses

Les élèves ont travaillé pendant une séance non-traditionnelle d'apprentissage sur la résolution d'une séquence d'activités qui visait l'établissement des relations entre multiplication et géométrie. Le travail mathématique des élèves a été analysé tout au long de la séance. J'ai étudié leurs productions écrites ainsi que des extraits de vidéos.

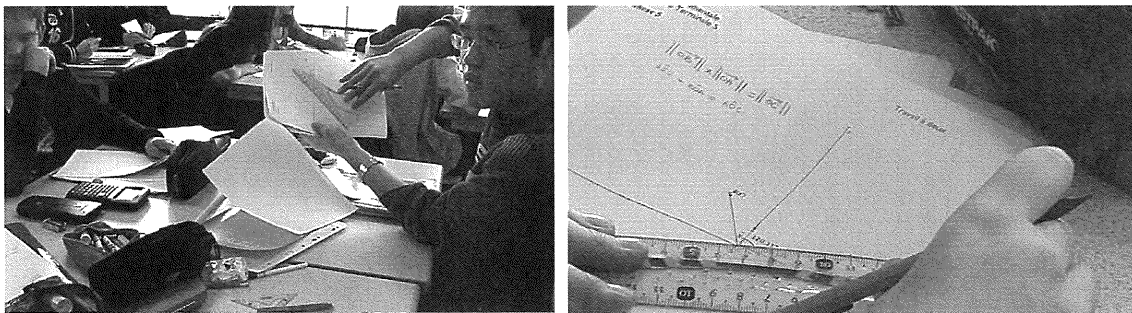


Figure 2. Les élèves du groupe 9 au travail

Un moment que je considère clé dans mes analyses s'est produit quand les élèves commençaient à étudier une représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes dans la recherche d'une mise en relation entre facteurs et produit. Cette mise en relation aurait permis par la suite de déterminer les propriétés géométriques du produit complexe, le construire géométriquement et terminer en donnant une signification géométrique de la multiplication. Les élèves recevaient de temps en temps quelques informations de la part de l'enseignante, des interventions qui cherchaient à éclairer certaines questions qui pourraient « bloquer » le travail des élèves. Dans ce contexte, le travail mathématique des élèves rendait compte de plusieurs interactions par lesquelles différentes idées mathématiques se mélangeaient, se combinaient ou semblaient même s'opposer. Les élèves essayaient d'articuler la représentation géométrique de la multiplication de deux

nombre complexes et les propriétés – connues ou dégagées d'une représentation numérique ou algébrique – exprimant des relations entre les facteurs et le produit. Cette recherche d'articulation permettait aux élèves de proposer différentes façons de faire, toujours en se questionnant et en discutant. *Ce faire* (pour reprendre le langage utilisé par Maturana et Varela [1987]) se déroule autour des allers-retours entre l'énoncé de la question, une figure (la représentation géométrique de deux nombres complexes), les représentations numériques ou algébriques des propriétés du produit des nombres complexes et les éléments de base sur lesquels ils font leur construction (la représentation géométrique de deux nombres complexes).

L'appropriation de l'ETM par les élèves se traduit par leur engagement dans le travail mathématique et leur conduit vers la construction recherchée, mettant en évidence des gestes qui articulent le numérique et le géométrique comme dans une sorte de bricolage. Les outils sont pris en main et les élèves expriment des conjectures par rapport à la position du produit, ils essaient aussi de reprendre le travail réalisé pour répondre aux questions précédentes. Dans le petit extrait suivant – du groupe 9 – nous pouvons clairement observer la complexité de la tâche proposée et nous pouvons aussi constater la complexité inhérente à la recherche des mises en relation entre les composantes d'un ETM où des objets mathématiques sont représentés dans différents registres de représentations sémiotiques

*Extrait*

- A: En fait, il faut construire le... produit de ça.  
 A: En multipliant l'un et en ajoutant l'autre (rires).  
 B: En fait, c'est simple... Ah, mais je sais, j'ai trouvé. (Ils lisent et relisent la question, puis ils reviennent en arrière pour regarder leur réponse à la question précédente sans aboutir pendant longtemps à la construction demandée).  
 C : Attendez, dans quel sens déjà on donne les [...]  
 B: On représente sur le graphique, alors... Il faut construire la représentation, tu vois ?  
 A: (C fait une construction où le produit ne correspond pas au produit de modules car la longueur est trop courte. La position n'est pas correcte non plus car la droite où le produit a été placé ne correspond pas à une addition des angles des facteurs. Cette droite correspond à celle qui a été placée par B et que nous décrivons par la suite.) Mais c'est tout petit !  
 B: Déjà voilà, c'est ça (B trace une droite qui correspond à un élargissement dans le sens négatif du vecteur OA. Cette droite correspond exactement à la droite portant le produit dans la représentation géométrique donnée dans la question 4.a mais qui ne correspond pas du tout au produit recherché dans ce cas ; En même temps, C réécrit en langage algébrique les propriétés de la multiplication de nombres complexes : somme d'angles et produit de modules. Puis tous les autres vont tracer la même droite que B).

Je m'étais dit qu'après une heure et demie de recherche et de manipulation d'outils géométriques pour étudier différentes représentations géométriques de la multiplication pour différents ensembles de nombres, la construction du produit de deux nombres complexes émergerait nécessairement d'une signification géométrique de la multiplication comme une transformation dans le plan. Néanmoins, les élèves ont bien abouti à réaliser la construction du produit et ils sont restés engagés dans l'activité tout au long de la séance. La richesse de leur travail mathématique a rendu compte d'une appropriation effective de l'espace de travail mathématique proposé sans que les élèves manifestent dans leur discours la signification



attendue. En conséquence je ne peux que confirmer que *la rencontre des objets mathématiques en jeu* ne peut être prédite et les cheminements des élèves à l'intérieur de l'espace de travail mathématique ne peuvent donc qu'être imaginés. Ce n'est sans doute rien de nouveau, mais l'organisation d'un espace de travail mathématique ne peut jamais anticiper la façon dont les élèves s'en approprieront. En d'autres mots, nous ne pouvons anticiper le problème que chacun se posera pour essayer de répondre à la tâche proposée ou pour rentrer dans les enjeux générés par les échanges qui se produisent au cœur du travail collaboratif.

Par ailleurs, j'aimerais souligner le fait que la médiation de l'enseignant tel qu'elle a été prédéterminée au moment d'organiser l'espace de travail mathématique semble insuffisante. Cette hypothèse me conduit à vouloir mettre en valeur l'idée que l'enseignant ne peut être considéré seulement l'organisateur *a priori* d'un espace de travail mathématique. L'enseignant est un médiateur culturel qui doit faire partie de l'action elle-même en intégrant de façon active le travail mathématique des élèves, en jouant le jeu avec eux, en prenant conscience du fait qu'il fait des mathématiques avec ses élèves – ce qu'il fait toujours ! – pour ainsi les encourager à développer leur discours (Radford, 2003). Ce développement, tel que nous avons pu l'observer en analysant le travail mathématique de la séance, n'a pas pu se produire de façon optimale à l'intérieur des échanges effectifs entre l'enseignant et les élèves. En conséquence, plusieurs questionnements des élèves n'ont pas nécessairement trouvé de réponses et le partage du même regard sur l'objet en question – notions mathématiques – est resté dans l'implicite.

## Conclusion

Pour conclure, cette communication m'a permis d'approfondir certaines de mes réflexions associées à l'analyse du travail mathématique des élèves dans un contexte de médiation sémiotique et sociale. J'ai voulu focaliser mon regard à un aspect spécifique du travail mathématique des élèves dans la recherche d'une mise en relation entre multiplication et géométrie : les échanges produits lors de la construction du produit de deux nombres complexes. De ce fait, j'ai regardé de plus près *le faire* des élèves et de l'enseignant dans un contexte de collaboration et de médiation sémiotique ce qui m'a permis d'apprécier la richesse ou la complexité qui se produisent dans les espaces de travail mathématique appropriés par les élèves. En conséquence, j'ai pu observer des enjeux propres au processus de rencontre des objets mathématiques, par exemple, son imprévisibilité et même son ambiguïté dû la temporalité ou le contexte – des composantes non explicites dans les ETM – ou encore le développement ou non des discours des élèves permettant de trouver des indices d'un *apprentissage* au cœur d'une diversité de façons de s'approprier un Espace de Travail Mathématique.

Ces réflexions ne sont que le point de départ d'un travail de recherche plus approfondi qui vise à étudier, d'une part, des questions concernant l'organisation des ETM afin de favoriser le processus de rencontre d'objets mathématiques dans un contexte de collaboration et de médiation sémiotique ; et d'autre part, la façon dont leur formulation en termes théoriques pourrait tenir compte de la diversité et la plasticité qu'imposent les ETM appropriés de la classe.

## Bibliographie

BARTOLINI BUSSI, M.G. & MARIOTTI, M. A. (2008), Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al.

(Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2e éd.). New York and London: Routledge.

BARRERA CURIN, R. I. (2012) *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat, Paris : IREM de l'Université Paris Diderot – Paris 7.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de travail mathématiques et ses genèses. In *Actes du symposium franco-chipriote de didactique espace de travail mathématique*. Paris.

MATURANA, H. & VARELA, F. (1987). *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding*. Boston: Shambala.

RADFORD, L. (2003), The semiotics of schema. In F. S. M. H. G. Hoffmann J. Lenhard (Eds.), *Activity and signs: Grounding mathematics education* (p. 137-152). Netherlands: Springer US.

RADFORD, L. (2003b). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

RADFORD, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In A.G. ed., *Atti del convegno di didattica della matematica* (p. 11-27). Locarno: Alta Scuola Pedagogica.

RADFORD, L. (2013). On semiotics and education. *Éducation et Didactique*, 7(1), 185-204.

# QUEL SAVOIR DE RÉFÉRENCE POUR LES SITUATIONS DE RECHERCHE EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES ?

Mathias FRONT

S2HEP - Université Lyon1

**Résumé.** Nous revenons dans ce texte sur les savoirs en jeu dans les situations de recherche en classe favorisant la manipulation d'objets mathématiques et nous nous interrogeons sur la nature d'un savoir de référence dans ce contexte. Nous questionnons tout d'abord la notion de « savoir savant » que d'aucuns pourraient considérer comme candidat potentiel à la place de savoir de référence. Nous illustrons ensuite, sur une situation historique particulière, la difficulté à identifier un savoir savant au regard de la diversité des constructions de savoirs particuliers dans de telles situations. Nous concluons sur la nécessaire évolution de la notion de savoir de référence qui renvoie souvent à une conception trop simple du savoir mathématique.

**Mots clés.** Savoirs, savoir savant, recherche, Kepler, situations didactiques,

**Abstract :** We investigate the knowledges involved in classroom research situations favoring the handling of mathematical objects. The nature of a reference knowledge in this context is interrogated. First, the notion of 'savoir-savant', which could be considered as a potential candidate for the reference knowledge, is questioned. Then, using a specific historical situation, we show the difficulty of identifying a "savoir-savant" in view of the diversity of the constructions of specific knowledges in such situations. It can be concluded that the notion of reference knowledges refers often to a too simple perception of the mathematical knowledge and should therefore evolve.

**Keywords :** Knowledges, "savoir savant", research, Kepler, didactical situations.

*Quiconque prétend s'ériger en juge de la vérité et du savoir, s'expose à périr sous les éclats de rire des dieux puisque nous ignorons comment sont réellement les choses et que nous n'en connaissons que les représentations que nous en faisons.*

*Albert Einstein*

## Introduction<sup>4</sup>

Les savoirs mathématiques potentiellement travaillés dans les situations de recherche en classe sont un enjeu particulièrement important de ces situations et, par exemple, si le « savoir » semble par trop absent, certains observateurs ne manqueront pas de poser la question de la nature de l'activité proposée. Nous évoquons dans ce texte des situations de recherche de problème en classe où les objets mathématiques sont centraux et où la dimension expérimentale (Dias et Durand-Guerrier, 2005) particulièrement présente permet d'envisager des constructions de savoirs en un sens que nous allons préciser. Une des questions que nous souhaitons soulever ici est celle de la nature profondément complexe des savoirs qu'on pourrait appeler de référence dans ce genre de situations. Nous débutons ce texte par une réflexion sur le terme « savoir savant », puis présentons ce que nous entendons par « savoirs » en situation de recherche. Après une illustration de la complexité d'élaboration de savoirs ponctuels en mathématiques, nous concluons sur la nécessité pour l'enseignant de se construire une relation à un savoir de référence compatible avec la mise en œuvre de situations de recherche en classe.

## Le « savoir savant »

Le terme « savoir savant » renvoie-t-il à un concept susceptible de définir un savoir de référence pour les situations de recherche ?

---

<sup>4</sup> Ce texte présente très succinctement certaines réflexions qui ont été reprises et développées ultérieurement dans un texte soumis pour publication à la revue Éducation et Francophonie, en octobre 2013.

## Le « savoir savant » de la transposition didactique

Le terme « savoir savant » renvoie forcément dans un premier temps le didacticien à Yves Chevallard et à la transposition didactique. La théorie a largement diffusé depuis les premiers textes des années 1980, et ainsi, depuis 30 ans, le « savoir savant » existe dans le paysage didactique. Initialement, quand Y. Chevallard développe la théorie de la transposition didactique, il développe un outil pour questionner le terme « savoir » et les obstacles qu'il ressent à son usage dans des expressions telles que « transmettre un savoir, enseigner un savoir ». Il produit ainsi une théorie qui est « par nature, outil. Outil de travail du chercheur s'entend », (Chevallard, 1994, p. 2). Dans cette théorie, le savoir savant est un objet qui permet de mettre à distance des objets trop proches. Que représente-t-il ? Y. Chevallard l'explique ainsi (Chevallard, 1982, p. 3) : « [...] ce qui, dans le système didactique, vient à paraître à l'enseignant du Savoir, qu'est-ce donc ? Le « savoir enseigné » que, concrètement, l'observateur rencontre, quel rapport entretient-il à ce qui de lui alentour se proclame ? Et quel rapport encore avec le « savoir savant », celui des mathématiciens ? Des uns aux autres, quels écarts ? »<sup>5</sup>

Dès 1992, Gilbert Arsac dans son cours à l'école d'été sur l'évolution de la « transposition didactique » s'interroge : « Qu'est-ce que le savoir savant, ce personnage qui joue un rôle central dans la transposition. Qui le détient ? En quoi est-il nécessaire de s'y référer pour légitimer un enseignement ? » (Arsac 1992, p.12). Pour Arsac, le savoir savant n'est pas le savoir des mathématiciens et sa nature relèverait plutôt de l'ordre de la pertinence de la théorie :

« Si l'on revient à la fonction du savoir savant dans l'équilibre du système d'enseignement par rapport à son environnement, à savoir la légitimation, on comprend tout de suite que la définition première du savoir savant est de type social : il s'agit d'un savoir réputé savant » (Ibid., page 12).

Ainsi pour Arsac, le savoir savant, a essentiellement une fonction de légitimation du savoir à enseigner. De ce point de vue, seul la réputation de ce savoir importe. Cette installation dans le paysage éducatif d'un savoir savant qui va « vivre sur sa réputation » a des effets bien au-delà de la légitimation du savoir à enseigner. Elle positionne le savoir loin de la classe et renforce ainsi certaines représentations sur la connaissance, et certaines conceptions sur l'apprentissage qui éloignent celui-ci d'une dimension constructiviste.

5 L'introduction de cet outil a fait l'objet d'un long débat, la formulation « du savoir savant au savoir enseigné » donnant lieu à de nombreuses interprétations dont certaines ont alimenté des visions de la transposition réductrices, où l'étude de « l'écart » entre « savoir savant » et « savoir enseigné » mène à une activité de transformation des savoirs. Par exemple : « La TD est donc l'activité par laquelle un savoir « savant » est transformé de manière à pouvoir être enseigné à des apprenants plus ou moins novices en la matière ». Cours en ligne de la HEP de Vaud : <http://lyonelkaufmann.ch/histoire/MHS31Docs/Seance1/TranspositionDidactique.pdf>.

## Une autre approche du « savoir ».

La communauté des mathématiciens s'exprime peu sur cette question du savoir savant qui est le plus souvent laissée à l'investigation des épistémologues, des historiens, des didacticiens. Les positionnements qui s'expriment sont alors très divers. Certains, s'appuyant sur une vision des mathématiques comme science objective ont amené à concevoir le savoir savant comme dépersonnalisé, dé-historicisé, décontextualisé. A l'opposé d'autres investissent des dimensions différentes du savoir. Nous citons ici pour l'occasion, Jean-Pierre Ferrier<sup>6</sup> :

« Le savoir savant lui-même est très difficile à cerner. Il comprend diverses acceptions de la plupart des notions, certaines pouvant être contradictoires. [...] Il comprend aussi l'histoire de toutes ces notions, les conditions de leur genèse étant aussi importantes que leur utilisation courante. Il déborde le cadre des mathématiques, en s'étendant déjà très largement vers la physique. Il est fait de rigueur et d'intuitions. Pour le définir intégralement, on devrait pouvoir interroger tous les mathématiciens ou autres scientifiques actuels, et ressusciter ceux des générations précédentes. Il faut beaucoup d'expérience et de recul pour parler du savoir savant, et à ce jeu certains sont mieux placés que d'autres. La richesse de ce savoir se perd beaucoup dans l'écriture des ouvrages, où, pour des raisons évidentes, on doit toujours privilégier un point de vue parmi d'autres. A ce sujet le contact direct avec des mathématiciens expérimentés apporte beaucoup plus que la lecture de leurs écrits »

Cette description du savoir savant nous emmène cette fois bien au-delà d'un simple produit « hors-sol », et nous renvoie explicitement à l'activité des producteurs de ce savoir. A l'opposé du savoir désobjectivé d'une institution, Ferrier nous invite à questionner les savants et à nous interroger sur les genèses des savoirs, l'usage qui en est fait. Alors que la création du « savoir savant » par Chevallard organise la mise à distance des savoirs pour mieux les étudier et les légitimer, le rapprochement du savoir et de l'activité du savant peut-elle permettre d'envisager une autre forme de légitimation du savoir enseigné ?

## La production de savoirs

### La dialectique connaissances / savoirs

Pour Conne, (Conne 1992, p.236), d'un point de vue théorique, le « savoir mathématique »<sup>7</sup> s'impose comme modèle permettant non seulement la réflexion théorique sur les situations mais également les analyses a priori et a posteriori. Cette première acception du « savoir » ne s'applique toutefois pas dès que l'on cherche à « tenir compte des mécanismes cognitifs, autant ceux du fonctionnement que ceux du développement cognitifs, dans le projet d'enseigner » (Ibid. p.224).

Conne caractérise alors la dialectique connaissance/savoir comme suit : « Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, *il sait. Une connaissance ainsi identifiée*

6 <http://www.iecn.u-nancy.fr/~ferrier/Didac/Savoirs.htm>

7 À cet endroit de l'article, Conne ne précise pas sa définition de ce savoir mathématique, mais on peut s'appuyer sur sa définition antérieure des mathématiques comme ensemble de savoirs culturels mis en des formes très strictes.

*est un savoir, c'est une connaissance, utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation* ». <sup>8</sup> Conne définit alors :

- les savoir-faire et savoir-réfléchis qui sont des savoirs pragmatiques, c'est-à-dire des savoirs qui visent à « la transformation du couple connaissance-situation : soit la transformation du milieu qui supporte la situation, soit la transformation des relations du sujet avec ce milieu » (Ibid., p.253).

- les savoirs savants dont la finalité sera « l'organisation et le développement des savoirs eux-mêmes, ou encore la transformation des modèles ».

Contrairement à ce qu'énonçait Chevallard en 1982, pour Conne les savoirs-savants ne sont pas les savoirs des savants, non seulement parce que le fait d'organiser ses savoirs n'est pas l'apanage du savant, mais également parce que les savoirs des mathématiciens ne sont pas les savoirs institués des mathématiques. Pour Conne, du point de vue purement mathématique, les savoirs jouant un rôle privilégié de référence sont les savoirs socialement institués.

Mais le projet didactique, particulièrement dans le cadre des situations de recherche en classe, ne peut se contenter d'une référence à ces savoirs. En effet la dimension « pratique » de ce projet renvoie nécessairement aux savoirs pragmatiques. Quelle référence pour cette dimension ?

Pour questionner la dialectique connaissance/savoir et les savoirs nouveaux produits par des individus, nous nous proposons dans un premier temps d'observer les genèses historiques d'un savoir lors de l'étude d'une question mathématique bien identifiée.

### **Kepler et Badoureau, l'étude des pavages archimédiens du plan**

Pour interroger la construction de savoirs, nous présentons ici très brièvement les démarches de Johannes Kepler et Albert Badoureau, étudiant la possibilité de paver le plan avec des polygones réguliers.

Le premier texte mathématique approfondissant le sujet est l'œuvre de Kepler<sup>9</sup>. Il paraît en 1619 dans (Kepler 1619), ouvrage qui propose une description-argumentation de l'harmonie du monde. Kepler fonctionne par une dialectique entre les mondes théologiques, philosophiques, mathématiques et physiques. Pour Kepler, Dieu n'est pas seulement géomètre, mais aussi musicien, et plus généralement source de toutes les harmonies. C'est dans cet état d'esprit que Kepler, dès 1597 comme le montre ses correspondances, aborde l'étude de l'harmonie des polygones réguliers. Mais en 1619 c'est comme mathématicien qu'il rédige une présentation-démonstration. Il montre alors que seuls 11 pavages semi-réguliers sont possibles. La démonstration s'appuie sur des objets pour la plupart très bien naturalisés par Kepler. Mais l'impossibilité de « classer » l'heptagone dans son organisation des polygones réguliers lui fera commettre des erreurs de raisonnement. En effet alors que toute sa démonstration repose sur une étude exhaustive des assemblages de polygones autour d'un

8 On pourrait aussi faire référence à Brousseau : « Ainsi un même énoncé peut être une connaissance ou un savoir suivant son rôle dans une situation ». « L'énoncé d'un théorème peut être à un moment donné considéré comme un savoir (s'il est une référence, ou un objet d'étude etc.), sa démonstration comme une connaissance, un moyen de se convaincre de la vérité du théorème. Mais un moment plus tard la démonstration pourra devenir un savoir... ». [http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Glossaire\\_Brousseau.pdf](http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf)

9 Si les pavages réguliers du plan sont bien connus depuis longtemps, Kepler est novateur quant à la recherche d'harmonie associant plusieurs types de polygones. Il peut toutefois s'appuyer sur des planches d'Albrecht Dürer de 1525 dans lesquelles celui-ci avait mis « bout à bout quelques figures polygonales », (Dürer, 1995, p.215). Mais l'approche de Dürer, peu mathématique, reste très partielle.

nœud, Kepler en écarte certains, à tort, montrant par la même, l'influence sur son raisonnement de ses conceptions sur des objets particuliers, les non-étant, dont fait partie l'heptagone (cf. Front 2012).

Ces travaux de Kepler sur les pavages seront oubliés pendant presque 300 ans. Quand A. Badoureau, en 1881, établit à son tour le même résultat (Badoureau 1881), il ne cite pas les travaux de Kepler. Il retrouve, lui, à l'aide d'une démarche cette fois très algébrique, typique de l'époque, l'essentiel des résultats de Kepler pour les polygones convexes. Il commet toutefois un oubli. Son approche algébrique ne lui permet pas de retrouver que l'association de polygones à 3, 3, 3 et 6 côtés amène à considérer 2 pavages différents, non superposables sans retournement (figure 1), ce que Kepler avait lui parfaitement identifié. Là encore, on peut identifier le rôle de l'action sur les objets, et l'importance de la dimension expérimentale de l'activité, ou plutôt de son absence ici, est mise en évidence.

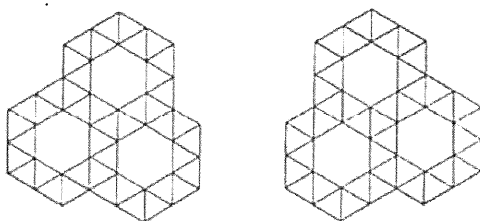


Figure 1

Sans aller plus loin dans cette courte présentation historique, nous rappelons que ce savoir n'a été intégré que récemment par la communauté des géomètres. H.S.M. Coxeter n'a identifié ces avancées historiques qu'au début du 20<sup>e</sup> siècle. Et malgré leur apparente simplicité, elles n'ont donc été intégrées au « savoir mathématique » que très longtemps après leur publication. Ceci met en évidence la difficulté à identifier ce qui est savoir de ce qui ne l'est pas, le parcours aléatoire de certains savoirs en dehors des institutions et également la capacité de certaines questions mathématiques à produire des savoirs qui bien que contextualisés et personnalisés sont très proches de ce que pourrait être le savoir correspondant de l'institution. Ces deux exemples montrent par ailleurs qu'il est bien peu envisageable de pouvoir concevoir une situation qui permettent à chacun de construire exactement le même savoir mathématique. Ceci amène à privilégier pour des situations de recherche, au-delà d'un unique savoir visé, les savoirs produits.

### La diversité des savoirs en situation de recherche

Ce que nous visons par la mise en œuvre de situations de recherche c'est la mobilisation de connaissances naturalisées dans une activité mathématique à forte dimension expérimentale, l'émergence de connaissances nouvelles, l'institutionnalisation de nouveaux savoirs. Nous renvoyons à (Aldon et al. 2010) pour des exemples de telles situations. Les caractéristiques de ces situations de recherche doivent permettre d'envisager l'émergence de la dialectique connaissance/savoirs telle que la décrit François Conne. Il a été montré (Front 2012) que la mise en œuvre d'une situation de recherche construite sur la question des pavages semi-réguliers du plan permet la création de savoirs ainsi définis. Par exemple, la considération des assemblages de polygones autour d'un point questionne la somme des angles qui d'objet d'étude faisant agir des connaissances devient savoir, puis connaissance permettant d'agir à nouveau dans un champ différent. L'émergence de nouvelles connaissances, dans ces situations, se fait dans le va-et-vient entre les manipulations des connaissances naturalisées,

les actions sur des objets nouveaux et des éléments d'une théorie locale, c'est-à-dire restreinte à « l'objet à savoir » (Duchet & Mainguené 2003), en construction.

Une part de la richesse de ces situations de recherche est l'émergence de savoirs divers, qui peuvent apparaître parfois divergents mais qui sont en réalité complémentaires. À cette diversité s'ajoute la présence dans la situation des savoirs que porte ou même construit l'enseignant. C'est de cette pluralité et dans cette diversité que vont être institutionnalisés des savoirs. En pratique rien n'assure que les savoirs-savants tels que décrits par Chevallard ou Conne intègrent le système de connaissance de chacun des élèves. Mais ceci a-t-il d'ailleurs un sens, car en réalité chacun construit bien évidemment ses propres mathématiques : « Chacun d'entre nous perçoit les mathématiques en fonction de sa propre personnalité. C'est choquant mais c'est vrai. »<sup>10</sup>

### **Un savoir de référence pour l'enseignant en situation de recherche ?<sup>11</sup>**

Le professeur pour se projeter en situation de recherche doit se re-crée un savoir sur la situation mathématique dans les niveaux S+3, S+2 d'une situation didactique (cf. Bloch, 2005). Ce savoir sera supposé suffisamment complexe et riche pour que l'enseignant soit capable de mener à bien ses différents rôles de constructeur, projeteur, enseignant... dans une situation de recherche. Mais pour qu'il en soit ainsi le savoir qu'il a construit ne peut être un savoir réduit au texte du savoir mathématique savant sur la question. Quel peut alors être le savoir de référence de l'enseignant pour cette situation ?

Au-delà du savoir mathématique, c'est un savoir sur ce savoir mathématique dont a besoin l'enseignant. Ce savoir sur les savoirs doit intégrer une dimension dynamique des mathématiques et permettre cette ouverture de l'activité mathématique vers la construction de savoirs nouveaux par les élèves. Ainsi l'enseignant doit disposer d'au moins deux références. Celle au savoir mathématique institué, pour autant que celui-ci soit totalement définissable et une autre de nature plus épistémologique, sur des genèses de ce savoir mathématique, aussi bien historiques qu'artificielles, sur l'activité mathématique elle-même. L'absence de l'une ou de l'autre de ces dimensions ampute le travail didactique d'un de ces piliers.

### **Conclusion**

L'évocation d'un « savoir savant » donne souvent à penser un savoir pré-existant, figé, lointain. Pourtant, l'existence d'un savoir mathématique de référence est indéniable, nécessaire et incontournable dans un projet d'enseignement. Pour autant, dans l'optique de la mise en œuvre de situations de recherche riches de leurs potentialités de construction de savoirs, il nous semble indispensable d'introduire une dimension supplémentaire au savoir de référence qui évite une distanciation excessive et préjudiciable.

Chez de nombreux auteurs, les discours sur le savoir et sur la distinction connaissance-savoir conservent pour une part cette idée de distance. Par exemple dans Laparra et Margolinas, (2010, p. 5) :

« Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 1986/2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être

10 Texte en ligne de Yves Meyer : <http://www.cfem.asso.fr/publications/reparer-enseignement-mathematiques>

11 Nous n'évoquons pas ici les transformations des connaissances de l'enseignant en situation qui nécessiterait une étude particulière.



linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle. Si la didactique des mathématiques fait usage de cette distinction, c'est parce que celle-ci est fondatrice du projet de transmission. ».

Autre version du « savoir savant » de la transposition didactique, cette définition en conserve les caractéristiques principales qui l'éloignent, indépendamment des dispositifs didactiques considérés par ailleurs, de l'activité mathématique. Or il y a risque à séparer savoirs et vie des savoirs. Risque pour l'enseignant qui doit alors reconstruire par lui-même des situations adéquates à « l'enseignement de ce savoir », risque pour l'élève qui préfère sans hésitation, les objets à savoir aux présentations de savoirs. Aussi cette vision du savoir, nécessaire pour une part à un projet fondateur de transmission, nécessite toujours d'être amendée par une approche qui permette des moments où la diffusion passe par la re-création des savoirs. La réflexion didactique sur le savoir doit évoluer dans ce sens.

Pour l'enseignant, pour toute situation didactique, la connaissance des objets mathématiques en jeu reste fondamentale, mais dans une situation de recherche cette connaissance complète est difficile non seulement du fait de l'ouverture des savoirs émergents possibles mais également parce que la situation de recherche réintègre la dimension dynamique des savoirs. En termes de ressource, celle sur laquelle devra s'appuyer l'enseignant se doit de proposer, au-delà d'un texte permettant de s'assurer de l'adéquation entre des objectifs mathématiques possibles et les attendus des programmes, des éléments sur les savoirs potentiellement constructibles, des éléments sur les interactions possibles entre ces différents savoirs, des éléments sur les modalités d'émergence de ces savoirs. La richesse et la complexité d'une situation de recherche doivent amener à repousser l'illusion d'un savoir de référence simple et figé qui ne peut que déposséder l'enseignant de sa capacité à comprendre la construction des savoirs et des apprentissages.

## Références

- ALDON G., CAHUET P.-Y., DURAND-GUERRIER V., FRONT M., KRIEGER D., MIZONY M., TARDY C. (2010) *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.
- ARSAC G. (1992) L'évolution d'une théorie en didactique. L'exemple de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1) 7-32
- BADOUREAU, A. (1881). Mémoire sur les figures isoscèles. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 30 : 47 à 172.
- BLOCH I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*, Habilitation à diriger des recherches, Paris : Université Paris 7, 2005.
- CHEVALLARD Y. (1982) Pourquoi la transposition didactique ? Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les Actes de l'année 1981-1982, pp. 167-194.
- CHEVALLARD (1994), *Les processus de transposition didactique et leur théorisation*. Contribution à l'ouvrage dirigé par G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, Andrée Tiberghien (éds), *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée sauvage, Grenoble, p. 135-180
- CONNE F. (1992) Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(2.3) 221-270

DIAS, T. et DURAND-GUERRIER, V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM*, n°60, pp. 61-78.

DUCHET P., MAINGUENE J. (2003) Les apprentis-chercheurs de MATH.en.JEANS. *Actes Journées COPIRELEM* La Roche sur Yon 17-19 mai 2002.

DÜRER A. (1995) *Géométrie* / Albrecht Dürer, présentation, traduction de l'allemand et notes par Jeanne Peiffer.

FRONT M. (2012) Pavages semi-réguliers du plan : une exploration favorable aux élaborations mathématiques, *Repères IREM* 89 5-37.

KEPLER J. (1619). *Harmonices mundi*. Traduction française (1980) L'harmonie du monde. Jean Peyroux. (Trad.) Paris : Blanchard.

LAPARRA, M., ET MARGOLINAS, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques*, 145-146, 141-160.

## RÉSOLUTION DES PROBLÈMES ET SÉRIES DE PROBLÈMES DANS *JEUX AVEC L'INFINI* DE RÓZSA PÉTER

Katalin GOSZTONYI

Université de Szeged (Hongrie) et

Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz

**Résumé.** Je présente ici la notion de « séries de problèmes », développée dans le cadre d'un projet de recherche en histoire des sciences, et son application pour l'analyse d'un extrait de *Jeux avec l'infini*, livre de vulgarisation des mathématiques de Rózsa Péter. A l'aide de cette analyse, j'essaye de décrire une démarche pédagogique originale, et de la situer dans le contexte d'une tradition d'enseignement spécifique de la culture mathématique hongroise.

**Mots clés.** Hongrie, Séries de problèmes, Résolution des problèmes.

**Abstract :** In this paper I present the notion „series of problems”, developed in the framework of a history of science research project, and the application of this notion to analyse a passage of Rózsa Péter's mathematics popularising book, „Playing with infinity”. By means of this analysis I try to describe an original teaching process and situate it in the context of a specific teaching tradition related to Hungarian mathematical culture.

**Keywords :** Hungary, series of problems, problem solving

### Introduction<sup>12</sup>

Si on parle d'une culture mathématique et d'une tradition d'enseignement des mathématiques hongroise, une des caractéristiques régulièrement mentionnées est le rôle important attribué à la résolution des problèmes. En effet : dans la sélection des élèves doués en mathématiques, et dans leur formation, les différentes compétitions jouent un rôle central depuis la fin du 19<sup>e</sup> siècle et jusqu'à aujourd'hui ; ainsi le journal KÖMAL [Journal Mathématique pour Lycéens], en plus des articles pour lycéens, propose aussi des problèmes à résoudre, et publie chaque année la liste des élèves les plus performants. L'album des photos des meilleurs participants, qui apparaît chaque année depuis 1926, témoigne l'importance de ce journal dans la formation des jeunes mathématiciens : on y peut retrouver des photos de l'adolescence de beaucoup de grands mathématiciens hongrois du 20<sup>e</sup> et du 21<sup>e</sup> siècles<sup>13</sup>. György Pólya, auteur central du discours sur la résolution des problèmes en mathématique, est né et a fait ses études en Hongrie.

Toutefois, cette tradition d'enseignement des mathématiques hongroise est très peu étudiée, il manque des analyses historiques et didactiques. Dans cette communication, je présente une recherche qui, en s'appuyant sur la notion « séries de problèmes », tente de comprendre et de décrire comment les mathématiciens et enseignants hongrois, partageant cette tradition, pensent l'activité mathématique ainsi que l'enseignement des mathématiques à l'aide de la résolution des problèmes ; comment ils conçoivent la construction et le développement du savoir mathématique à travers l'enchaînement des problèmes, des questions et des tentatives de réponses.

12 Une version légèrement différente de ce papier est parue dans le N°507 du Bulletin APMEP (p. 25-32.) sous le titre *Séries de problèmes. L'exemple des Jeux avec l'infini de Rózsa Péter.*

13 Le journal est disponible en ligne, ainsi que l'album des photos : <http://www.komal.hu/tablok/> La compétition de résolution des problèmes est proposée, depuis quelques années, en français aussi : <http://www.komal.fr/>

## Le contexte de la recherche

Cette recherche s'inscrit dans un projet intitulé « Séries de problèmes : un genre au croisement des cultures », mené au sein du laboratoire d'excellence HASTEC.<sup>14</sup> Dans ce projet, des historiens des sciences, travaillant sur différentes époques et cultures, étudient les différents textes qu'on appelle séries de problèmes : pas seulement, parce qu'on peut y identifier un recueil de problèmes ou de questions-réponses, mais aussi, parce que leur sérialité, leur mise en ordre semble jouer un rôle important dans la construction du texte.

Ma première analyse dans ce contexte de la notion de « séries de problèmes » porte sur deux chapitres du livre vulgarisateur *Jeux avec l'infini*. Son auteur, la mathématicienne Rózsa Péter est reconnue pour ses travaux sur les fonctions récursives. En même temps, elle s'était toujours intéressée aux questions relatives à l'éducation. Elle bénéficie d'une expérience d'enseignante du secondaire avant la deuxième guerre mondiale ; elle a écrit, avec Tibor Gallai, un manuel scolaire réformateur pour lycéens en 1949 ; elle a participé à la formation des enseignants ; elle a suivi et soutenu le mouvement de réforme de l'enseignement des mathématiques des décennies 1960 et 1970, dirigé en Hongrie par Tamás Varga. L'œuvre la plus connue de Rózsa Péter est sans doute *Jeux avec l'infini*, un livre qu'elle a écrit pendant la guerre, qui était adressé avant tout aux littéraires, aux « non-mathématiciens », pour « offrir à des esprits curieux une vue d'ensemble de notre discipline », pour leur faire sentir « la joie de la découverte »<sup>15</sup>. Le livre est devenu très populaire, il est régulièrement publié en Hongrie, et était traduit en 12 langues étrangères (dont le français en 1977).

Toutefois, il s'agit d'un livre nettement plus influent qu'un simple livre de vulgarisation : il pouvait avoir beaucoup d'influence sur les traditions d'enseignement des mathématiques en Hongrie. (Par exemple, le premier livre du maître qui accompagne le programme réformateur de T. Varga en 1978, réfère explicitement au *Jeux avec l'infini* concernant des questions mathématiques et didactiques.)

## Séries de problèmes dans *Jeux avec l'infini*

Par la suite, je présente l'analyse des chapitres 4 et 5 du livre. (L'apprenti sorcier – variations sur un thème fondamental.) Il s'agit d'un texte continu, quasi littéraire : pour pouvoir effectuer une analyse d'une « série de problèmes », il faut avant tout identifier des « problèmes » dans le texte. Les différentes étapes du texte constituent en effet des « problèmes » de différents genres : problèmes concrets numériques ou géométriques, mais aussi des questions de recherche (est-ce qu'on pourrait utiliser la méthode de notre solution précédente ou bien le résultat obtenu etc). Ensuite, l'identification d'une part, des motifs pour poser chaque « problème », pour arriver à une nouvelle étape et, d'autre part, des solutions ou des réponses données à chaque question permet d'étudier le processus d'enchaînement des problèmes, et de construire un graphe schématique de ce processus<sup>16</sup>.

14 Voir le site du projet : <http://problemata.hypotheses.org/28>

15 Péter 1977 p. 9

16 Voir *figure 1*.

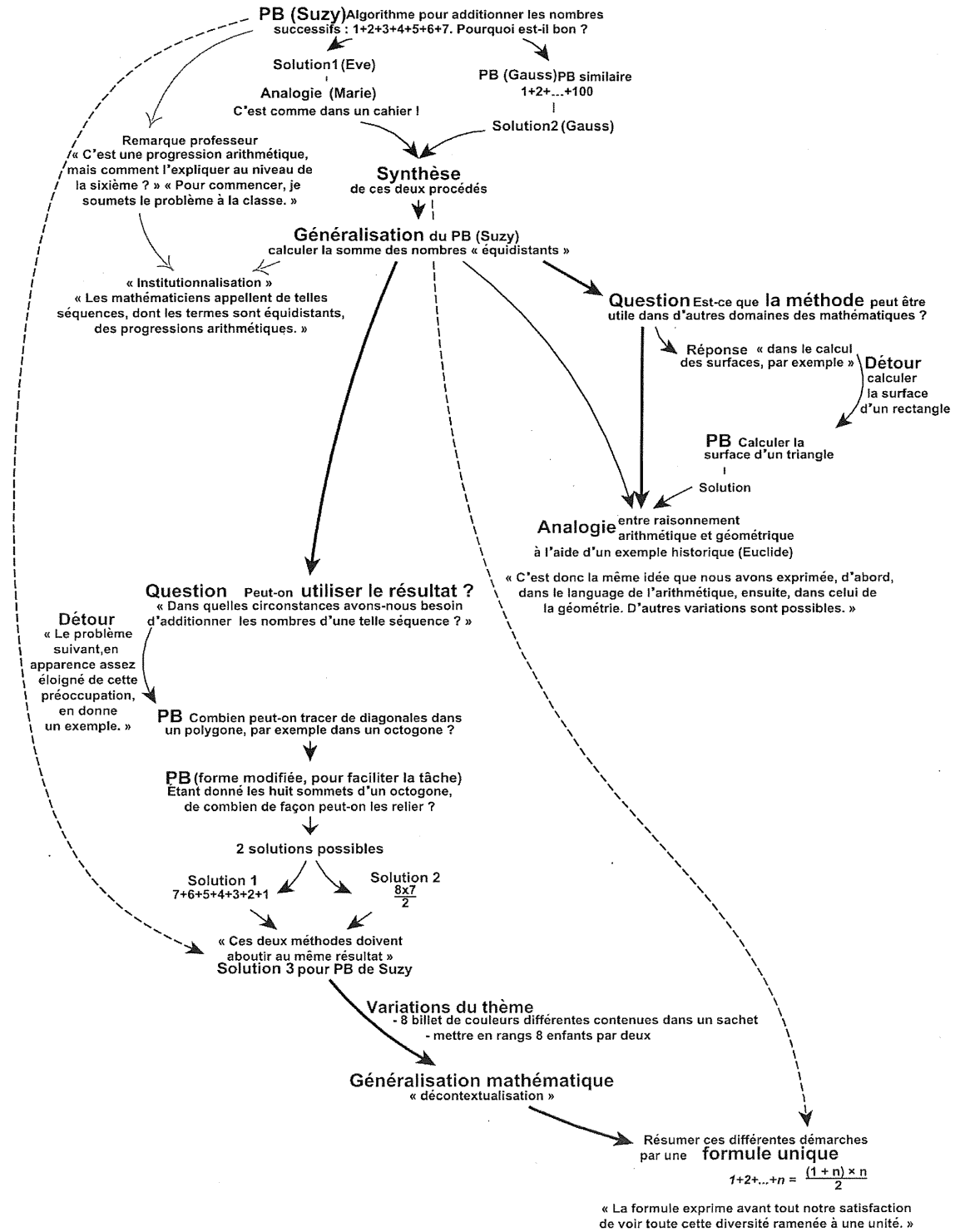


Figure 1

Au chapitre 4, après une introduction partant de la notion de divisibilité qui lie le chapitre 4 aux chapitres précédents, à travers des notions des nombres « amis » et des nombres

« parfaits », on arrive rapidement à des questions ouvertes de la théorie des nombres. L'auteur s'y arrête pour faire une remarque :

De quoi s'agit-il exactement ? L'homme, pour sa propre commodité, a créé la suite des nombres naturels, qui permet de compter les objets et de faire un certain nombre d'opérations. Seulement, bien que l'ayant créée, l'homme n'a pas la maîtrise de cette suite : elle possède désormais ses propres règles, que l'homme n'avait absolument pas prévues. Tel un apprenti sorcier, il contemple les yeux éblouis, les djinns qu'il a libérés. Le mathématicien crée, à partir de rien, un univers nouveau. Mais les régularités mystérieuses et inattendues de cet univers « captivent » l'homme, au sens étymologique du terme, et, de créateur, il se transforme en chercheur, il s'adonne à la recherche des secrets de sa création devenue indépendante de lui.<sup>17</sup>

Elle continue en illustrant d'un exemple, une situation de classe prise de sa propre expérience d'enseignement :

Recherche séduisante qui n'exige pour ainsi dire aucune formation, mais seulement une certaine dose de curiosité. C'est ainsi qu'un jour une de mes élèves de sixième me dit : « Je me suis aperçue, il y a longtemps déjà, qu'en additionnant des nombres qui se suivent, si je m'arrête à un nombre impair, par exemple à 7, j'obtiens un nombre qui est égal au produit de ce nombre et de son milieu ; par exemple, le milieu de 7 est 4 (par « milieu » elle voulait dire, de toute évidence, le chiffre qui se trouve au milieu de la séquence allant de 1 à 7 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), et  $7 \times 4 = 28$ . Quant à la somme des nombres allant de 1 à 7,  $1+2+3+4+5+6+7$  fait également 28. Je sais que c'est toujours comme ça, mais je ne sais pas pourquoi. »  
« C'est une progression arithmétique, me dis-je, mais comment l'expliquer au niveau de la sixième ? » Pour commencer, je soumis le problème à la classe :  
« Suzy a un problème intéressant... »<sup>18</sup>

La suite, pendant deux chapitres, présente un processus de recherche long et complexe basé sur ce problème. Ce premier problème est vite résolu par les élèves, et l'auteur-enseignant doit conclure que « jamais je n'aurais su expliquer la solution aussi bien qu'elle » (elle, Ève, une autre élève de la classe)<sup>19</sup>.

L'auteur met à côté de ce premier un autre problème similaire, de l'histoire célèbre du jeune Gauss : additionner les nombres de 1 à 100. L'auteur introduit ce problème en disant que Gauss était « parvenu au même résultat », pourtant, sa solution ne semble pas être parfaitement équivalente à la solution d'Ève (car dans un des cas, il s'agit d'un nombre pair et dans l'autre d'un nombre impair des nombres à additionner, et cette différence apparaît dans les deux solutions). L'étape suivante est donc d'essayer de trouver une synthèse des deux procédures : cette synthèse sera la méthode connue, écrire la série des nombres deux fois, l'un au-dessous de l'autre en sens inverse et additionner les nombres par colonne etc.

Dans une quatrième étape, on généralise le problème original : on constate que « cette règle ne permet pas seulement de calculer des sommes de nombres successifs, mais aussi celle de nombres « équidistants », quel que soit le premier terme ».<sup>20</sup> On arrive donc à traiter, en générale, des progressions arithmétiques.

---

17 Ibid. p. 41

18 Ibid. p. 41

19 Ibid. p. 42

20 Ibid. p. 43

A partir de ce point, on abandonne l'exemple concret de la classe. Mais la recherche ne s'arrête pas ici : l'auteur constate que la méthode utilisée, ce même type de raisonnement peut être retrouvé dans d'autres domaines des mathématiques, et elle y donne un exemple géométrique, le calcul des aires. Elle traite brièvement le problème du calcul de l'aire d'un rectangle, puis elle pose la question comment calculer l'aire d'un triangle rectangle. La solution apparaît comme similaire à la solution de l'addition des séries des nombres : il faut poser deux triangles isométriques l'un au-dessus de l'autre, comme on a écrit deux fois la série des nombres l'une au-dessus de l'autre. Pour bien établir l'analogie entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement géométrique, elle présente une démarche d'Euclide utilisant les « triangles en escalier » qui permet de faire ce passage entre les deux domaines.

« C'est donc la même idée que nous avons exprimée, d'abord, dans le langage de l'arithmétique, ensuite, dans celui de la géométrie. D'autres variations sont possibles. » - conclue Rózsa Péter à la fin du chapitre. Et dans le chapitre suivant, elle continue par d'autres variations.

La question de départ de ce nouveau chapitre est si on peut utiliser le résultat de notre problème original (« Dans quelles circonstances avons-nous besoin d'additionner les nombres d'une telle séquence ? »<sup>21</sup>) Pour donner un exemple, l'auteur propose un problème « en apparence assez éloigné de cette préoccupation », notamment le problème du nombre des diagonales d'un polygone (mais même si les questions sont générales, elle va montrer les raisonnements toujours sur un exemple concret, dans ce cas sur un octogone). « Pour nous faciliter la tâche »<sup>22</sup>, elle propose tout de suite de modifier un peu l'énoncé : « étant donné les huit sommets d'un octogone, de combien de façons peut-on les relier ? »<sup>23</sup>

Deux solutions différentes à ce problème apparaissent: selon la première, un premier sommet peut être relié à 7 autres, un deuxième aux 6 sommets restants, etc. On aura la somme  $7+6+5+4+3+2+1$  segments. Selon la deuxième, on multiplie le nombre des segments partant de chaque sommet (7) par le nombre des sommets (8), et on divise par 2, car chaque segment est compté pour ses deux sommets. « Ces deux méthodes doivent aboutir au même résultat, dit ici l'auteur, donc  $1+2+3+4+5+6+7$  est égal à la moitié de  $8 \times 7$ . On retrouve donc le raisonnement de Suzy. »<sup>24</sup> Comme les deux différents raisonnements, les deux solutions du problème de l'octogone doivent donner le même résultat, on y trouve une nouvelle solution à notre problème de départ !

Rózsa Péter présente encore plusieurs variations sur le même thème, concernant par exemple « huit billets de couleurs différentes contenues dans un sachet, ou huit enfants que nous voulons mettre en rangs par deux »<sup>25</sup>. Enfin on essaye de décontextualiser, d'exprimer tous ces différents problèmes de différentes situations ensemble, en langage mathématique. C'est l'un des moments rares du livre où l'auteur introduit un langage formel des mathématiques, et exprime l'égalité

$$1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{(1 + n) \times n}{2}$$

---

21 Ibid. p. 48

22 Ibid. p. 49

23 Ibid. p. 50

24 Ibid. p. 51

25 Ibid. p. 51

Il est intéressant de citer ici la conclusion locale de l'auteur, la fermeture de cette partie du texte :

Les mathématiques ne sont qu'un langage, un langage très particulier qui opère uniquement avec les symboles. La formule ci-dessus en est un exemple ; elle ne signifie rien de précis en elle-même, et chacun peut s'en servir pour exprimer son expérience individuelle. Pour les uns, elle exprimera le nombre des diagonales d'un polygone de  $n$  côtés, pour les autres, le nombre de façons de mettre  $n$  élèves « en rangs par deux ». La formule exprime avant tout notre satisfaction de voir toute cette diversité ramenée à une unité.<sup>26</sup>

## Conclusion

Le texte de Rózsa Péter paraît simple, transparent, il est facile à lire. En même temps, une analyse en termes de « séries de problèmes » aide à dévoiler une structure bien complexe et sophistiquée derrière ces deux courts chapitres étudiés. On voit effectivement une démarche pédagogique basée sur des problèmes : mais il ne s'agit pas de problèmes isolés qu'on abandonne après la solution, bien au contraire : ce sont des questions de recherche autour des problèmes et de leurs solutions, les essais de réinvestissement des méthodes utilisés ou des résultats, la comparaison des différentes solutions d'un même problème, la dialectique établie entre différents cadres, différents domaines mathématiques à l'aide de l'analogie, qui font avancer les lecteurs/élèves, guidés par l'auteur/l'enseignant, dans le processus de la construction et du développement des connaissances mathématiques.

Il est intéressant de comparer ce texte avec des questions proposées par Pólya au début de *Comment poser et résoudre un problème*. Par exemple : « Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? » ou « Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? » ou « Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? ».<sup>27</sup> Il est apparent que ce sont des questions très similaires qui guident le processus de Rózsa Péter.

On souligne encore deux aspects qui nous paraissent intéressants à retenir de cette analyse. D'abord le rôle que le professeur joue dans cette démarche pédagogique : l'enseignant n'apparaît pas comme l'autorité indiscutable, une source d'informations, mais comme un guide expérimenté dans un processus de recherche, une activité conjointe des élèves et de l'enseignant.

Enfin, l'utilisation du langage formel des mathématiques dans le texte de Rózsa Péter mérite également l'attention. Les démonstrations, les raisonnements ne sont pas présentés sous forme abstraite et généralisée, mais toujours sur des exemples concrets – toutefois, ces exemples sont toujours génériques, les raisonnements permettent de comprendre des idées, des théorèmes générales. Le langage formel n'intervient qu'à la fin du processus : il aide à la décontextualisation et à l'unification des divers problèmes et solutions analogues.

Plusieurs questions se posent par rapport à ce premier essai de recherche sur les « séries de problèmes ». D'une part, cette approche est-elle applicable sur d'autres exemples, notamment des exemples issus des vraies situations d'enseignement (et plus particulièrement, des exemples de la tradition hongroise) ? Mes premières analyses sur des documents

<sup>26</sup> Ibid. p. 53

<sup>27</sup> Pólya 1965 [après la table des matières]



d'enseignement hongrois (programmes, manuels scolaires, livres du professeur) montrent que la modélisation en termes de « séries de problèmes » peut être efficace sur des exemples de processus d'enseignement des mathématiques issus de cette tradition : car elle aide à rendre compte de certaines de ses caractéristiques, notamment des méthodes de problématisation de différents thèmes mathématiques pour un objectif d'enseignement, elle rend aussi compte de la structure complexe des programmes qui permet d'articuler les différents thèmes d'une façon sophistiquée.

D'autre part, la notion de « série de problèmes », développée dans un contexte d'histoire des sciences, peut-elle être utilement articulée avec les différents cadres théoriques de la didactique des mathématiques ? Même si ces articulations restent à développer, nous pouvons désormais proposer quelques pistes possibles pour définir la place de cette approche parmi les recherches didactiques. La notion de « série de problèmes » pourrait peut-être utilement compléter les approches centrées sur la résolution des problèmes, ou même la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau<sup>28</sup>, en s'intéressant à la place et au rôle des situations problèmes dans des processus d'enseignement longs et complexes. En outre, cette notion pourrait utilement contribuer à la théorisation des approches comme « l'Inquiry Based Teaching »<sup>29</sup> ou bien les PERS<sup>30</sup> qui cherchent à définir des démarches d'enseignement basées sur des longs processus de recherche collective. En résumé, la notion « séries de problèmes » nous paraît pertinente pour rendre compte des liens entre des démarches et des stratégies d'enseignement de long terme et des méthodes d'enseignement ponctuelles, des nuances d'organisation et de gestion de la classe.

## Références

- ARTIGUE M. – BLOMHØJ M. (2013) Conceptualising inquiry based education in mathematics, *ZDM*. 45(6) 797-810.
- BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- GOSZTONYI K. (2014) Séries de problèmes. L'exemple des *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter. *Bulletin APMEP*, 507, 25-32.
- MATHERON Y. – NOIRFALISE R. (2007) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER », Texte d'une conférence au II congrès international sur la Théorie anthropologique du didactique (TAD) : « Diffuser les mathématiques et autres savoirs comme outils de connaissance et d'action ». Uzès, 31 octobre au 3 novembre 2007. <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/YMetRN.pdf>
- PÉTER R. (1977) *Jeux avec l'infini*. Éditions du Seuil (original publié en 1944 sous le titre *Játék a végtelennek*. Budapest, Dante Könyvkiadó).
- PÓLYA G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème*. Ed Jacques Gabay, Dunod, Paris (original publié en 1945 sous le titre *How to solve it*. Princeton, Princeton University Press).

Le carnet scientifique du projet « Séries de problèmes » <http://problemata.hypotheses.org/>

28 Brousseau 1998

29 Voir par exemple Artigue–Blomhøj 2013

30 Voir par exemple Matheron-Noirfalise 2007

# MODÉLISATION ET APPROCHE ALGORITHMIQUE D'UNE SITUATION ALÉATOIRE : UNE AIDE À LA COMPRÉHENSION DES ÉLÈVES

Dominique LAVAL

L.D.A.R. - Université Diderot Paris 7

**Résumé :** Les programmes mathématiques des lycées français introduisent, d'un point de vue sémantique, les algorithmes de construction comme une tâche pour un certain nombre de problèmes spécifiques. L'hypothèse sous-jacente de ces nouveaux programmes est que le travail sur des algorithmes peut aider les élèves à accéder à de nouvelles notions mathématiques. Ainsi, la construction d'algorithmes de simulation de processus aléatoires peut être un support pour la compréhension chez l'élève de lois de probabilité sous-jacentes. Notre méthodologie, adaptée de l'ingénierie didactique, a été construite de façon à obtenir des données globales et d'observer finement les travaux d'élèves de plusieurs classes de lycée et les pratiques d'enseignants.

**Mots clés :** Algorithmes, Espace de Travail Algorithmique et paradigmes, loi binomiale, niveaux de compétences en modélisation, ingénierie didactique.

**Abstract :** The new French curriculum for upper secondary mathematics introduces, from a semantic point of view, the building algorithms as a task for a number of specific problems. The underlying assumption of these new programs is that an algorithmic approach can help students access to new mathematical concepts. In this way, considering the case of probability, our hypothesis is that building algorithms to simulate random situations can support students' understanding of underlying probabilities laws. Our methodology, adapted from the didactic engineering, was constructed to obtain global data and observe the students' work in upper secondary and the practices of teachers.

**Key-words :** Algorithm, Algorithmic Workspaces and paradigms, binomial distribution, levels of modelling skills, didactic engineering.

## Introduction et méthodologie

Nous partons de l'hypothèse sous-jacente des nouveaux programmes de mathématiques au lycée mis en place depuis 2010, que le travail sur des algorithmes peut aider les élèves à accéder à de nouveaux concepts mathématiques, à développer des démarches, des compétences...

L'objectif est d'aider les élèves, au cours de leurs trois années du lycée, à utiliser des algorithmes *en relation avec les autres parties du programme, mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets*. Dans le cas des probabilités, la construction d'algorithmes de simulation de processus aléatoires peut être un support pour la compréhension chez l'élève d'une loi de probabilité sous-jacente : **la loi binomiale**.

Notre méthodologie consiste à mettre en place des ingénieries didactiques pour tester l'hypothèse que le travail sur des algorithmes peut aider les élèves à accéder aux notions mathématiques ou développer des démarches et des compétences.

Dans cet article, notre choix se porte sur l'enseignement des probabilités. Nous choisissons d'implémenter et d'évaluer une unité d'enseignement, dans deux classes de Seconde ordinaire. L'élève doit élaborer un algorithme puis le programmer sur ordinateur en utilisant les logiciels *LARP* et *AlgoBox*, dans le cadre d'un processus aléatoire telle que la loi de probabilité sous-jacente ne soit pas directement accessible par l'élève pour étudier les hypothèses suivantes :

**(H1)** lors du travail sur un algorithme par l'élève, l'identification des variables aléatoires dans une situation particulière, simulée à l'aide d'un générateur aléatoire, et l'observation des fréquences et des moyennes peuvent aider l'élève à approcher une loi de probabilité sous-jacente ;

**(H2)** dans une situation de simulation d'un processus aléatoire le travail de construction en didacticité d'un algorithme motive chez l'élève le repérage des comportements de cet algorithme, et de dépasser une étude empirique de ces comportements ;

**(H3)** les divers environnements (*à la main*, le tableur, les langages algorithmiques : organigramme, langage naturel, pseudo-code,...) offrent des opportunités et des contraintes spécifiques pour simuler le même processus aléatoire ;

**(H4)** les langages algorithmiques utilisés par l'élève doivent lui permettre de rendre les algorithmes utilisés, clairs et compréhensibles. Pour cela, l'élève doit utiliser un langage de description structuré qui n'utilise qu'un petit nombre de structures ne dépendant pas du langage de programmation utilisé ;

**(H5)** la contribution de l'algorithmique peut aider à la compréhension de concepts mathématiques.

Pour résoudre un problème issue d'une tâche de simulation d'un processus aléatoire à l'aide de l'algorithmique, l'élève doit :

**(i)** Analyser le problème posé, créer un modèle associé à la situation décrite par les questions liées au problème, définir avec précision les résultats à obtenir, repérer les informations dont il dispose, ...

**(ii)** Déterminer les méthodes de résolution, c'est-à-dire constituer la suite des opérations à effectuer pour obtenir à partir des données du problème les solutions aux questions posées. Cette suite d'opérations constitue alors l'algorithme.

**(iii)** Parmi tous les algorithmes possibles fournissant des solutions au problème posé, l'élève doit choisir le plus efficace, où le nombre d'opérations à effectuer et la place mémoire occupée soient le plus limité possible. L'algorithme doit aussi permettre de répondre au plus grand nombre de cas possibles associé à la simulation mise en place.

L'élève doit aussi prendre en compte que parmi tous les algorithmes possibles, l'algorithme retenu doit aussi être facile à comprendre par tous ceux qui sont amenés à le lire, et d'une utilisation aisée par n'importe quel utilisateur, en particulier si celui-ci n'a pas participé à son élaboration.

**(iv)** L'élève doit écrire l'algorithme définitif. Au cours de cette étape, il doit prendre en compte la résolution par la machine de l'algorithme élaboré en utilisant un formalisme adéquat, comme des organigrammes, un langage pseudo-code,...

**(v)** Pour finir, l'élève doit traduire l'algorithme définitif dans un langage de programmation adapté au logiciel algorithmique utilisé.

Notre cadre théorique se fonde sur :

**(C1)** une transposition des « Paradigmes et Espaces de Travail Géométriques (ETG) » aux Paradigmes et Espaces de Travail Algorithmique (ETA) (Houdement, Kuzniak, 2003) ;

**(C2)** les niveaux de compétence en modélisation (Keune & Henning, 2007) afin d'évaluer l'activité des élèves lors de la construction d'algorithmes pour la simulation.

Nos objectifs consistent à faire le point sur :

**(O1)** l'apport de l'algorithmique comme objet d'apprentissage sur une simulation d'un processus aléatoire ;

**(O2)** l'illustration via des logiciels algorithmiques et l'utilisation ponctuelle d'un tableur.

Nous illustrerons nos propos avec des logiciels de programmation pour l'environnement algorithmique (*LARP* et *AlgoBox*) et le logiciel *OpenOffice* pour l'environnement tableur.

Conformément à l'hypothèse **(H3)**, nous choisissons de demander aux élèves de construire une simulation dans des environnements variés.

Dans cet article, nous choisissons d'interpréter le travail associé aux hypothèses **(H1)** et **(H2)** à l'aide des ETA (espaces d'objets, artefacts, ensembles théoriques, paradigmes associés).

## Notre cadre théorique

### Description des Espaces de Travail Algorithmique (ETA) et des paradigmes algorithmiques

Une transposition des « Espaces de Travail Géométrique » (Houdement et Kuzniak, 2003) aux « Espaces de Travail Algorithmique » rend possible de penser les interactions entre les objets, les artefacts et les paradigmes. Elle peut être utile pour l'analyse des tâches. Ainsi les ETA pourraient être un univers organisé pour le travail du concepteur d'un algorithme et aideraient à analyser les positions respectives des élèves et des enseignants, sous l'influence du curriculum.

Nous proposons de structurer les ETA à l'intérieur d'un réseau composé :

(1) d'une démarche de modélisation ;

(2) d'ensembles d'objets constitués des instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie) et des notions de boucle et itérateur, ainsi que des instructions conditionnelles. Ils se construisent en étroite relation avec des ensembles réels qu'il reconstruisent ou dévoilent de manière différente suivant les différents paradigmes mis en jeu ;

(3) d'artefacts programmables que sont les outils et les instruments utiles pour l'algorithmique mis à la disposition de l'élève et de l'enseignant, comme les organigrammes, le langage naturel, le pseudo-code, le tableur, les langages algorithmiques et les logiciels de programmation. Au lycée, dès la Seconde, avec la prise en main de logiciels algorithmiques et de calculatrices programmables, l'élève va augmenter le nombre d'outils mis à sa disposition pour mettre en jeu une pratique de la programmation, suite à l'introduction du concept d'algorithme. Plusieurs ETA sont alors à envisager. Ainsi le tableur et les logiciels algorithmiques, que nous utilisons dans notre expérimentation au cours d'une ingénierie didactique se réfèrent à des ETA différents.

(4) d'ensembles d'idées théoriques qui permettent de créer et de justifier les algorithmes comme objets pour l'exécution par des artefacts programmables. Les objets et les artefacts de l'algorithmique constituent la partie empirique des ensembles théoriques, que l'on peut aussi regarder comme un modèle théorique. Le processus conduisant aux ensembles théoriques est à schématiser.

La précision des diverses composantes se ferait en relation avec la nature de la modélisation et l'algorithmique mis en jeu. L'ETA ne prend tout son sens que grâce à ses utilisateurs. Les composantes seules ne suffisent pas à le définir car le sens de l'espace de travail va dépendre de la fonction que son concepteur et ses utilisateurs lui attribuent.

Selon Houdement et Kuzniak (2003), ce sont les paradigmes (ici algorithmiques) qui permettent d'interpréter les contenus des composants et de définir leurs fonctions. En partant d'une transposition des paradigmes de la géométrie à ceux de l'algorithmique, nous définissons les trois niveaux de paradigmes algorithmiques suivant :

**Niveau I** – il s'agit d'une approche intuitive de l'algorithmique en relation avec le monde réel ; ici l'effectivité découle « naturellement » de l'algorithme lui-même. C'est aussi une mise en œuvre de l'algorithme comme outil.

**Niveau II** – il s'agit d'une axiomatique naturelle des algorithmes ; à ce niveau, on étudie la preuve de l'algorithme – ainsi que son efficacité et sa complexité. C'est aussi une mise en œuvre de l'algorithme comme objet.

**Niveau III** – il s'agit d'une axiomatique formelle des algorithmes : fonctions calculables, machine de Turing...

Les questions à étudier lors d'un travail sur un algorithme ou d'une construction géométrique sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Questions issues de l'étude d'un algorithme	Questions issues de l'étude d'une construction géométrique	Niveaux impliqués
<b>Son efficacité</b> Répondre au problème en un nombre fini d'étapes	<b>Répondre au problème donné</b>	<b>Niveau(x) I/II</b> Cela dépend du problème, des contraintes imposées à sa résolution, selon que la situation soit didactique ou adidactique, des structures, ...
<b>Sa complexité</b>	-	<b>Niveau(x) I/II</b>
<b>Preuve de l'existence par construction</b> Exemples : - PGCD – Algorithme d'Euclide - Théorème des valeurs intermédiaires – Algorithme de dichotomie	<b>Preuve de l'existence par construction</b> Exemple : Construction du centre d'un cercle circonscrit	<b>Niveau II</b>
<b>Calculabilité</b> Définition équivalente à une fonction calculable	<b>Différentes géométries</b> Quelles propriétés initiales sont nécessaires ? Axiome des parallèles	<b>Niveau III</b> Axiomatique formelle

### Les niveaux de compétences en modélisation

Dans notre ingénierie didactique, nous pouvons observer comment les élèves travaillent avec de nouveaux modèles mathématiques et algorithmiques. Afin de mieux comprendre le travail de l'élève, il semble que différents niveaux de compétences de modélisation peuvent être utilisés.

Les compétences de modélisation comprennent les éléments suivants : *la capacité de structurer, de mathématiser, d'interpréter et de résoudre des problèmes* (Blum et al., 2002). Elles comprennent aussi bien la capacité de travailler avec des modèles mathématiques : à valider le modèle, à l'analyser de manière critique et à évaluer le modèle et ses résultats, à communiquer le modèle et à observer et contrôler le processus de modélisation (Blum et al., 2002). Nous reprenons les trois niveaux de compétence de modélisation proposés par Keune & Henning (2007) :

**Niveau 1** : *Reconnaissance et compréhension de la modélisation. Ce niveau est caractérisé par les capacités à reconnaître et à décrire le processus de modélisation. Les phases du processus de modélisation sont localisés.*

**Niveau 2 : Modélisation indépendante.** Ce niveau est caractérisé par les capacités d'analyser et structurer les problèmes. Nous travaillons sur des modèles. Nous interprétons les faits et les résultats des modèles. Nous validons les modèles et l'ensemble du processus.

**Niveau 3 : Méta - réflexion sur la modélisation.** Ce niveau est caractérisé par les capacités d'avoir un regard critique sur l'analyse de la modélisation, de formuler des critères d'évaluation du modèle, de réfléchir sur les fins de la modélisation, ainsi que sur l'application des mathématiques.

Nous supposons que l'élève qui travaille avec différents modèles mathématiques ou algorithmiques peut faire des progrès dans la voie de la pensée abstraite. Selon Keune et Henning, l'élève doit valider, analyser et critiquer les modèles. Il doit aussi contrôler et interpréter lui-même le processus de modélisation.

## Une ingénierie didactique

La méthode est basée sur l'idée d'une ingénierie didactique (Artigue, 1992) : la conception et l'exécution d'une partie d'un programme d'études.

### Pourquoi s'intéresser à une tâche de simulation ?

Une première difficulté est de construire les étapes intermédiaires entre l'observation de la réalité et la construction élaborée du modèle mathématique. La deuxième difficulté est le passage à la simulation, puis l'écriture d'un (ou plusieurs) algorithmes en langage naturel du modèle obtenu, ainsi que de la simulation définie. La troisième difficulté consiste alors au passage en langage pseudo-code de l'algorithme pour son utilisation en langage machine. Pour finir il est nécessaire de savoir faire une interprétation pertinente des résultats obtenus.

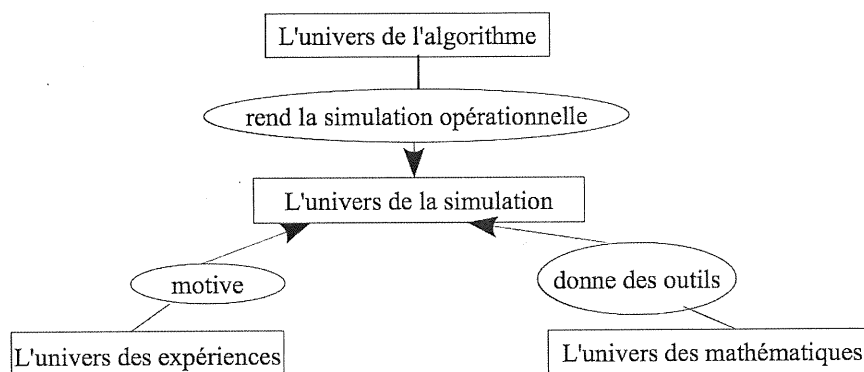


Figure 1

### Une expérimentation mise en œuvre : *Marche aléatoire sur les sommets d'un hexagone régulier*

En lien avec notre compréhension de l'algorithmique comme s'inscrivant dans une démarche de modélisation, une tâche de simulation de processus aléatoire a été retenue.

La méthodologie a été construite de façon à obtenir des données globales et d'observer finement les travaux d'élèves de plusieurs classes et les pratiques d'enseignants.

Une tâche de simulation proposée au niveau Seconde est analysée. Les élèves considèrent un mobile qui se déplace de façon aléatoire sur les sommets d'un hexagone régulier. L'objectif est d'étudier le nombre d'étapes avant d'atteindre un sommet donné.

- Les sommets de l'hexagone sont numérotés de 0 à 5. Le sommet de départ est numéroté 0 et celui de l'arrivée est numéroté 3.

- Pour chaque étape le mobile se déplace vers un sommet adjacent, dans le sens horaire ou anti-horaire avec une probabilité égale.

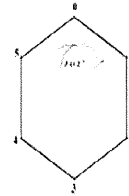


Figure 2

Il est demandé à l'élève d'étudier la durée de plusieurs voyages, puis de conjecturer la durée moyenne d'un trajet, c'est-à-dire la moyenne du temps de premier passage au sommet 3.

- Analyse *a priori*. Nous nous intéressons à la fois aux choix instrumentaux et aux représentations (lancers d'une pièce, graphiques, tableur, algorithmes en langage naturel, programmation avec le logiciel *AlgoBox*). Trois ETA successifs avec des composantes spécifiques sont ainsi organisés. Dans le premier ETA (lancer effectif) seules les connaissances et pratiques de Troisième sont sollicitées. L'élève doit noter les résultats obtenus sur un graphique, pour chaque lancer de la pièce. La numérotation des sommets et le principe de la marche aléatoire sont spécifiés. C'est une approche intuitive de l'algorithme, le déplacement continue tant que le sommet 3 n'est pas atteint. On reste dans un niveau algorithmique I. Avec ces lancers, l'élève prend conscience physiquement du concept de l'aléatoire, à travers le hasard. Le passage à la simulation sur tableur, ETA 2, permet de percevoir les aléas du hasard, autour d'une marche aléatoire en fonction du temps. La touche F9 permet d'observer divers trajets. Avec les *copier-glisser*, l'élève estime la durée moyenne d'un trajet, sans avoir besoin d'augmenter le nombre de trajets et d'utiliser la boucle conditionnelle « Tant que ... Faire ... ». Les indications données dans le « document élève » ont pour but de l'aider à s'appropriier l'algorithme lors de la transposition de l'expérimentation manuelle à la simulation. L'utilisation du tableur est donc une phase introductive à un niveau algorithmique II. La troisième partie, ETA 3, autour du concept d'algorithme et de programmation, sans aucune aide, permet de s'appropriier les raisonnements mathématiques (fluctuation d'échantillonnage) et informatiques (boucle conditionnelle et instruction conditionnelle). La tâche ne se limite plus à des statistiques. On peut espérer que le travail de l'élève dans les deux premiers ETA lui permet de mieux appréhender le passage à un niveau algorithmique II. Les aides données sur le tableur peuvent l'aider à construire ses algorithmes. La nouveauté consiste à la détermination d'un test d'arrêt lors du passage à la résolution dans l'ETA 3. Nous nous attendons à peu de variations dans les ETA 1 et 2, et à davantage dans l'ETA 3, où les élèves sont libres de l'algorithme implanté et de s'inspirer ou non des indications données sur le tableur.

- Analyse *a posteriori*. Dans les deux premiers ETA, lors de l'étude des copies, la première étape des ensembles théoriques autour des observations de la réalité et de la description de celle-ci utilisées pour la construction d'un modèle est relativement bien intégrée chez l'élève, ainsi que la mathématisation du problème amenant à une simulation. Dans l'ETA 3, certaines copies montrent que la numérotation des sommets a été modifiée. Une majorité d'élèves a bien assimilé les connaissances anciennes (niveaux Quatrième et Troisième) sur l'utilisation des tableurs et les représentations graphiques. Le passage à des connaissances nouvelles sur le concept d'algorithme pose des difficultés chez certains, une majorité élabore des algorithmes en langage naturel, mais peu d'élèves passent à la programmation. Pour ceux

qui produisent un algorithme, nous voyons diverses variations imbriquées dans la boucle et la condition de continuation. Nous nous posons la question sur l'influence des aides données sur le tableur. Facilitent-elles ou inhibent-elles le passage au concept d'algorithme ?

## Conclusion

Le but de notre expérimentation était d'observer le travail de l'élève lors de l'élaboration d'un algorithme associé à une marche aléatoire sur un hexagone régulier sans que l'élève est la connaissance de la loi de probabilité mis en jeu. En nous plaçant dans un cadre proche de la *Théorie des Situations Didactiques* (TSD) (Brousseau, 2004), nous avons pu observer, à travers les divers ETA utilisés, que chez une majorité d'élèves, il y avait une grande autonomie avec le tableur, mais que celle-ci était plus relative avec un logiciel de programmation (*AlgoBox* par exemple). L'analyse *a priori* de la tâche proposée, nous a menés à établir un découpage précis en phases de travail, afin de distinguer clairement les responsabilités de l'élève et celles de l'enseignant. Cette analyse nous a permis de dévoluer la situation aux élèves et d'étudier l'adidacticité de chacune des phases de travail nécessaires à la mise en place par l'élève des différentes étapes pour la construction de l'algorithme.

Une telle activité montre que le concept d'algorithme peut se situer surtout à la transition des niveaux I et II des paradigmes algorithmiques chez l'élève. Il comprend rapidement le processus aléatoire, et écrit facilement un algorithme en langage naturel modélisant le processus. La traduction de l'algorithme en langage de programmation pose chez certains élèves des difficultés d'ordre syntaxique.

Notre travail de recherche continue, en investiguant sur la contribution d'activités algorithmiques à la compréhension chez l'élève de nouvelles idées mathématiques comme la preuve.

## Bibliographie

- ARTIGUE M. (1992). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9-3, 281-308.
- BLUM W. et al. (2002). *The 14<sup>th</sup> ICMI Study: Applications and Modelling in Mathematics Education* – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1-2), 149-171.
- BROUSSEAU G. (Réimpression 2004). *Théorie des situations didactiques : didactiques des mathématiques 1970-1990*. Recherche en didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998.
- HENNING H. et KEUNE M. (2007). Levels of Modelling Competencies. *Modelling and Application in Mathematical Education-The 14<sup>th</sup> ICMI Study*, Berlin: Springer, 225-232.
- HOUEMENT C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères*, 67, 69-84.
- KUZNIAK A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques, Notes d'habilitation*. Paris : IREM Université de Paris VII.
- LAVAL D. (2012). L'algorithme au lycée : élaboration d'un cadre théorique et analyse de tâche. *Démarche de recherche et démarches d'investigation dans l'enseignement des mathématiques et des sciences expérimentales*, pp. 36-38. Les actes du Colloque en hommage à Michèle Artigue – Paris 2012.



LAVAL D. (2013). Modeling and algorithmic approach to a random situation: a help for students' understanding? Vol. 5, p. 98. Kiel, Allemagne : PME 37.

# LES LÉA : UN ESPACE POUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE NOUVELLE FORME D'INGÉNIERIES DIDACTIQUES ?

Karine MILLON-FAURE

EA 4671 ADEF ; Aix-Marseille Univ.; ENS de Lyon, IFE ; 13248, Marseille, France

**Résumé :** L'objectif de cette communication est de présenter les Lieux d'Education Associés, mis en place par l'Institut Français de l'Education. A partir de l'étude d'un exemple particulier, le LéA Saint Charles, nous tentons de montrer ce que cette nouvelle forme de collaboration entre enseignants et didacticiens peut apporter à la fois à la recherche et à la formation.

**Mots-clés :** ingénierie didactique, Parcours d'Etude et de Recherche, formation des enseignants, école primaire.

**Abstract :** The purpose of this paper is to present « les Lieux d'Education Associés » (collaborative environments for education). Using a specific example, named « le LéA Saint Charles », we try to illustrate how this new kind of collaboration between researchers and teachers can be beneficial both for research and professional development.

**Key words :** didactic engineering, Study and Research Courses, teacher development, primary school.

Si la didactique se donne pour objectif de mieux comprendre les processus d'enseignement et d'apprentissage, certains travaux cherchent également à concevoir de nouveaux dispositifs d'enseignement. Dès les années 80, des chercheurs se sont intéressés aux ingénieries didactiques et ont cherché, à la suite de Guy Brousseau, à concevoir de tels dispositifs. Ces ingénieries didactiques sont généralement perçues par le didacticien comme le moyen d'observer certains phénomènes ciblés, mais sont rarement réutilisées par la suite par les enseignants. On peut donc se demander s'il n'est pas possible de concevoir des ingénieries qui constituent à la fois un support intéressant pour les recherches en didactique et un outil exploitable pour les professeurs. Depuis 2011, l'Institut Français de l'Education (IFE) propose la mise en place de Lieux d'Education Associés (LéA) dont l'ambition est de faciliter la collaboration entre enseignants et chercheurs. Impliquée dans l'encadrement d'un des premiers LéA, je voudrais illustrer le fonctionnement d'une telle organisation et montrer en quoi cette innovation permet de concevoir des ingénieries didactiques qui soient à la fois au service de la recherche et de l'enseignement.

## Eclairages théoriques autour des ingénieries didactiques

### Les ingénieries didactiques de Brousseau

Dans son livre « Théorie des situations didactiques », Brousseau (1998) s'intéresse aux conditions que doit vérifier un enseignement pour favoriser les apprentissages des élèves. Il décrit ainsi les différentes phases (action, formulation, validation) qu'un élève doit traverser, sous le contrôle de l'enseignant, pour rencontrer une problématique et construire un objet de savoir. Il souligne également l'intérêt d'un milieu antagoniste dont les rétroactions permettent aux élèves d'éprouver leurs stratégies sans avoir recours au verdict de l'enseignant. S'appuyant sur ces principes, il créera des ingénieries didactiques, telles que la course à 20 ou l'enseignement des décimaux qu'il expérimentera dans l'école Michelet de Talence.

Ces recherches se sont depuis largement diffusées auprès des didacticiens, mais beaucoup moins auprès des professeurs des écoles.

### Les PER de Chevallard

Chevallard (2009 ; a ; b) propose, lui, une autre approche. Il remarque que l'on peut attaquer le problème selon deux angles : on peut soit chercher les praxéologies susceptibles d'être enseignées dans un dispositif soumis à des conditions et des contraintes institutionnelles données, soit fixer la

praxéologie que l'on désire travailler et s'interroger sur la possibilité de créer les conditions indispensables à son enseignement au vu des contraintes imposées. Ainsi pour permettre à la classe de mener une véritable enquête permettant de répondre à une question donnée (un Parcours d'Etude et de Recherche), il faut accepter certains aménagements de l'étude :

« Première condition à satisfaire : M [*le milieu*] n'est pas « tout fait » ; il est constitué par la classe à partir de productions diverses, externes à la classe comme internes à celles-ci. [...] La condition mésogénétique rappelée va de pair avec une condition relative à la topogenèse : la constitution du milieu M est le fait de la classe [X, y] [*les élèves et le professeur*], non de y [*le professeur*] seul. [...] La chronogenèse est ce par quoi un PER se distingue en principe de la façon la plus facilement repérable des épisodes didactiques usuels à l'école (si l'on excepte IDD et TPE notamment) : la constitution et le « travail » du milieu M sont en effet à l'origine d'une dilatation du temps didactique et donc, corrélativement, d'une extension du temps d'horloge requis. » (Chevallard ; 2009 ; a).

Ceci nécessite une profonde remise en question des méthodes d'enseignement traditionnelles, remise en question dans laquelle peu d'enseignants se sont aujourd'hui aventurés.

### **Ingénierie au service de la recherche ou de l'enseignement ?**

D'autres encore (Artigue, 1990 et 2002 ; Perrin-Glorian, 1992...) se sont essayés à la conception d'activités s'appuyant sur des principes théoriques de la didactique, activités qu'ils ont ensuite cherché à expérimenter en classe. Mais quelle est la finalité de ces diverses ingénieries didactiques ?

Chevallard (2009 ; a), commentant une citation de Brousseau (2008) distingue deux types d'ingénieries didactiques :

« On pourrait distinguer ici, d'emblée, une ingénierie didactique de recherche d'une ingénierie didactique de développement. On saisit en tout cas l'existence d'une tension entre deux pôles, que je désignerai, provisoirement, comme l'ingénierie didactique pour l'usage et l'ingénierie didactique pour la connaissance, tension bipolaire qui existerait donc, à suivre Guy Brousseau, à l'intérieur même de ce qu'il nomme 'l'ingénierie à visée phénoménotechnique' » (Chevallard, 2009 ; a).

Perrin-Glorian (2009) distingue également les ingénieries « construites par la recherche et pour la recherche » et celles pour l'enseignement. Rares sont finalement les ingénieries qui tentent de concilier ces deux objectifs. Beaucoup d'entre elles constituent avant tout un moyen d'observer en conditions réelles certains phénomènes didactiques, sans cela délicats à modéliser :

« Un regard critique porté sur l'utilisation de la méthode expérimentale de type 'recherche en laboratoire' pour l'étude des faits éducatifs nous a conduit à opter pour une méthodologie d'ingénierie didactique, en référence à Artigue (1988) » (Sauvegrain, Carnus et Terrisse, 2002).

De même, lorsque Brousseau (2008) précise que « l'ingénierie didactique consiste à déterminer des dispositifs d'enseignement communicables et reproductibles », cela rappelle la nécessité pour une expérience scientifique de pouvoir être reproduite par d'autres afin d'être acceptée par la communauté de chercheurs. Il ajoute d'ailleurs :

« Dans le cadre des recherches scientifiques, l'ingénierie à visée phénoménotechnique a pour objet de concilier les obligations normales de tout

enseignement à des élèves avec la reproduction et l'étude de phénomènes didactiques bien déterminés. (Ce genre de recherche ne peut être entrepris que dans des organisations spécifiques complexes et précises). En particulier elle est indispensable pour étudier systématiquement et expérimentalement des modèles théoriques de dispositifs d'apprentissage et d'enseignement (les situations). » (Brousseau, 2008)

Si ces ingénieries ont un intérêt indéniable pour le didacticien, ne pourraient-elles pas également aider l'enseignant ? Pourquoi ne peut-on pas largement diffuser ces activités qui bénéficient des appuis théoriques de la recherche en didactique ? Ceci s'explique peut-être par les difficultés de communication qui surgissent entre enseignants et chercheurs :

« Alors que la description [*des phénomènes didactiques*] demande des efforts considérables, toutes ces précisions apparaissent comme superflues et même offensantes pour le lecteur, elles sont reçues comme un discours de cuisinier. [...] En résumé, les enseignants attendent la didactique sur un terrain où ils règnent en 'maîtres' (c'est bien le mot) et où rien ne les prépare ni les motive à la recevoir pour ce qu'elle est. » (Brousseau, 1990)

Cela condamne-t-il les ingénieries didactiques à rester cloîtrées dans des « cliniques expérimentales » ? N'est-il pas possible de concevoir des ingénieries qui soient exploitables à la fois par le chercheur et par l'enseignant ?

## Les LéA

L'Institut Français de l'Éducation (IFE) a créé en 2011, des Lieux d'éducation Associés (LéA) favorisant un travail collaboratif sur un temps long entre une équipe de recherche de l'IFE et les acteurs d'un lieu « à enjeu d'éducation » :

« Les LéA veulent promouvoir des recherches dans lesquelles une part décisive est prise par des collectifs au sein des lieux d'éducation, associant chercheurs et enseignants. Plus que de recherches 'sur' l'éducation, il s'agit de recherche 'avec' les acteurs, 'pour' le développement des acteurs, de la profession, de l'institution... » (Monold-Ansaldi & Favelier, 2013)

Mais il ne s'agit pas pour autant de créer des simples outils pour les enseignants. Sensevy (2013) précise que « L'institution des LéA peut et doit être motivée par la nécessité d'une recherche spécifique sur la profession de professeur, recherche qui pourrait constituer un arrière-plan fondamental pour la formation et pour le développement professionnel. ». On retrouve ici l'évocation d'un double enjeu : celui de la recherche et celui de la formation des enseignants. Il insiste également sur l'autre spécificité de ces dispositifs, l'aspect collaboratif :

« une part décisive prise par des collectifs de professeurs, au sein des établissements scolaires, dans la production d'une telle recherche fondamentale, en coopération avec les chercheurs. Une assertion synthétique pourrait être la suivante : contre la dichotomie recherche fondamentale/recherche appliquée, les LéA permettent une recherche fondamentale de meilleure qualité parce qu'en meilleure articulation avec l'objet même de la recherche, c'est-à-dire l'apprentissage des élèves à travers l'enseignement des professeurs. »

L'enseignant n'est donc plus seulement un objet d'étude : il enrichit la recherche grâce à son expérience et ses connaissances qui viennent compléter celles des chercheurs.

Ce dispositif innovant permet-il réellement de remplir le double enjeu qu'il s'est fixé, à savoir dans un même temps l'étude de phénomènes didactiques et l'apport d'outils permettant aux

professeurs d'améliorer leur enseignement ? Est-il possible de créer dans ces lieux d'éducation associés des ingénieries qui seraient à la fois des ingénieries pour les chercheurs et pour les enseignants ?

## **Le LéA Saint Charles**

### **Description rapide**

Ce LéA s'ancre dans une école primaire située dans un quartier assez défavorisé de Marseille et s'organise autour d'un collectif constitué de l'ensemble des enseignants de l'école et de didacticiens de l'IFE. Nous proposons aux enseignants de chaque classe de mettre en œuvre des ingénieries didactiques conçues par Brousseau, puis remaniées par Quilio (Quilio & Nedelec-Trohel, 2011). Ces ingénieries concernent pour chaque niveau l'entrée dans le numérique et l'apprentissage des algorithmes opératoires. Au CE2, par exemple, l'ingénierie organise le travail sur la multiplication.

Les séances de classes sont régulièrement filmées et ces vidéos, ainsi que les productions élèves sont analysées par les chercheurs. De leur côté, chaque enseignant rédige un compte-rendu de ces séances permettant à chacun de suivre l'avancée de l'activité mais également le ressenti de l'enseignant (difficulté pour expliquer telle notion ; surprise face à telle stratégie-élève...)

De plus, nous cherchons à privilégier les interactions entre enseignants et chercheurs : lors de réunions bimensuelles et d'échanges de mails, nous discutons collectivement de problèmes ressentis par un enseignant ou soulevés par un didacticien. À partir des arguments de chacun, reposant soit sur des connaissances théoriques, soit sur une expérience pratique, nous tentons d'apporter des éléments de réponses.

### **Un réel intérêt sur le plan de la recherche**

Grâce à l'analyse de toutes les données recueillies (films, productions élèves, discussions avec les enseignants), nous pouvons mieux cerner les effets de nos ingénieries et réfléchir à de possibles améliorations que nous expérimentons ensuite l'année suivante.

Par ailleurs, l'inscription de ce dispositif dans un temps très long nous permet d'envisager des méthodologies de recherche généralement délicates à mettre en place. Ainsi, dans la mesure où l'ensemble des enseignants participe à ce projet, nous pouvons nous lancer dans des suivis de cohortes à l'échelle d'une classe depuis le CP jusqu'au CM2 ; Il est même envisagé de poursuivre ce suivi dans le collège de secteur. Nous pouvons ainsi observer l'évolution de la maîtrise de telle compétence au fil des ans ou remarquer les lacunes présentées par tel ensemble d'élèves et chercher à y remédier en tentant de remanier certaines ingénieries des années précédentes.

Enfin, nous disposons d'une collection conséquente de films et de productions d'élèves sur un temps long qui peuvent nous servir à étudier des phénomènes particulièrement fins en analysant des biographies didactiques (Mercier, 1992). Par exemple, en observant pendant toute une année, un élève particulier durant son apprentissage de la multiplication, nous avons pu étudier le rôle que les rétroactions du milieu, les interactions avec les pairs et celles avec l'adulte avaient pu jouer sur ses choix des techniques utilisées. Ainsi, en donnant accès à des données difficilement accessibles habituellement, les LéA peuvent effectivement enrichir nos recherches en didactique.

## Un élément de formation pertinent pour les enseignants

Tout d'abord nous proposons aux enseignants des activités constituant une véritable avancée par rapport aux méthodes d'enseignement traditionnelles. Ainsi Painchault (1975) a expliqué l'intérêt de définir la multiplication  $axb$  comme la caractérisation d'un quadrillage présentant  $a$  lignes et  $b$  colonnes, comme nous avons choisi de la faire en classe de CE2. Brousseau (2010) a également montré l'avantage que présentait l'algorithme de la multiplication per gelosia par rapport à la multiplication classique.

De plus, nos concertations (nombreuses et régulières) favorisent chez les enseignants associés une acculturation à la didactique et chez les chercheurs une meilleure connaissance du contexte étudié (notamment la prise en compte des contraintes institutionnelles qui pèsent sur les enseignants). Ce double mouvement facilite la communication entre enseignants et chercheurs et évite les écueils dénoncés par Brousseau (1990). Ceci permet au collectif de retravailler certaines explications accompagnant les ingénieries didactiques de manière à faciliter leur utilisation par les enseignants, sans pour autant sacrifier leur richesse sur le plan théorique.

Ces avancées nous conduisent à espérer pouvoir un jour diffuser le fruit de ce travail collaboratif au-delà du cercle des enseignants ayant participé à leur élaboration. Une expérimentation a déjà débuté sous le nom de projet ACE - Arithmétique et Compréhension à l'Ecole primaire - (Sensevy & al, 2013). Une ingénierie concernant les apprentissages numériques au CP a été présentée à des enseignants volontaires. Aidés par des concertations régulières (mais moins fréquentes que celles organisées dans le LÉA Saint Charles), ces enseignants tentent de mettre en œuvre ce dispositif dans leur classe. En conservant ce système mixte (un support écrit et des rencontres avec des didacticiens) nous espérons pouvoir diffuser un jour les ingénieries que nous expérimentons actuellement dans le LÉA Saint Charles et enrichir ainsi les pratiques quotidiennes des enseignants ordinaires.

## Conclusion

Même si cette expérimentation est encore trop récente pour en mesurer les effets, les LÉA paraissent constituer un espace intéressant pour le développement d'ingénieries pertinentes à la fois pour le chercheur et pour le praticien. Deux atouts essentiels expliquent cette réussite : d'une part l'instauration d'un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs dans lequel les connaissances spécifiques de chacun enrichissent les travaux de recherche et rendent possible une éventuelle diffusion auprès des praticiens ; d'autre part, l'inscription de ce projet dans un temps long qui permet aux didacticiens de recueillir des données rarement accessibles et de faciliter la communication enseignants-chercheurs.

## Bibliographie

- ARTIGUE M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- ARTIGUE M. (2002). Ingénierie didactique. Quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, 8, 59-73.
- BROUSSEAU G. (1990). Utilité et intérêt de la didactique. *Grand N*, 47, 93-114.
- BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

- BROUSSEAU G. (2008). Premières notes sur l'observation des pratiques de classes. [http://visa.inrp.fr/visa/presentation/Seminaires/Journees\\_inaugurales/premieres\\_notes\\_observation.pdf](http://visa.inrp.fr/visa/presentation/Seminaires/Journees_inaugurales/premieres_notes_observation.pdf)
- BROUSSEAU G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N*, 85, 13-41.
- CHEVALLARD Y. (2009 ; a). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. *Actes de la 15<sup>e</sup> école d'été*, 81-108.
- CHEVALLARD Y. (2009 ; b). La notion de PER : problèmes et avancées. *Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009*. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La\\_notion\\_de\\_PER\\_\\_\\_problemes\\_et\\_avancees.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf)
- MERCIER A. (1992). L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. Un cas en calcul algébrique. Thèse, mathématiques, université Bordeaux 1.
- MONOLD-ANSALDI R. et FAVELIER N. (2013). Les lieux d'éducation associés à l'IFE ; des laboratoires pour l'action conjointe des chercheurs et des enseignants. *Journal de l'IFE de Mars 2013*. <http://ife.ens-lyon.fr/lea/outils/ressources/productions-internes/presentation-des-lea-mars-2013>
- PAINCHAULT J. (1975). Produits de deux naturels et multiplication en CE1 et CE2. *Grand N*, 7, 83-102.
- PERRIN-GLORIAN M.-J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6<sup>e</sup>*. Thèse de doctorat. Paris : université de Paris 7.
- PERRIN-GLORIAN M.-J. (2009). Ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. *Actes de la 15<sup>e</sup> école d'été*, 57-78.
- QUILIO S., NEDELEC-TROHEL I. (2011). Une ingénierie coopérative à l'École Élémentaire dans une école de ZEP à Marseille. In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, ... E. Roditi (éds.), *Questions vives endidactique des mathématiques. Problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage : XVI<sup>e</sup> École d'été de didactique des mathématiques, Carcassonne, Languedoc-Roussillon, 21-28 août 2011 (Vol. 1-2, n° 2.)*. Grenoble : la Pensée sauvage, 315-333.
- SAUVEGRAIN J.-P., CARNUS M.-F. et TERRISSE A. (2002). Intérêt et utilisation de la méthodologie d'ingénierie didactique dans l'analyse des décisions d'élèves en situation d'opposition, en Éducation Physique et Sportive. *Les Dossiers des sciences de l'éducation*, 8, 113-122.
- SENSEVY G. (2013). Neuf propositions pour les LéA. *Journal de l'IFE de Mars 2013*. <http://ife.ens-lyon.fr/lea/outils/ressources/productions-internes/presentation-des-lea-mars-2013>
- SENSEVY G., FOREST D., QUILIO S. & MORALES G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 1031-1043.

# ÉTUDE DU PROCESSUS D'ACCÈS À LA GÉOMÉTRIE D'ÉLÈVES DYSPRAXIQUES

Edith PETITFOUR

LDAR – Université Paris Diderot

**Résumé :** Les apprentissages géométriques peuvent sembler inaccessibles aux élèves ayant des troubles praxiques quand l'enseignement s'appuie sur des manipulations d'objets lors d'expérimentations avec du matériel ou lors de tracés instrumentés. Ces élèves, en effet, sont maladroits dans les actions à réaliser car il résulte de leur handicap une incapacité à programmer des séquences de gestes et à les automatiser. A cela peut s'ajouter des troubles visuospatiaux empêchant une exploration fiable des figures. Notre étude vise à déterminer ce qui, dans l'action didactique, permet la construction de connaissances et une évolution de la conceptualisation en géométrie plane, lors de la transition école primaire-collège, pour ces élèves porteurs de troubles spécifiques des apprentissages.

**Mots clés :** Dyspraxie visuospatiale, géométrie instrumentée, troubles des apprentissages

**Abstract :** Learning geometry may appear to be inaccessible to the pupils with dyspraxia when the teaching is based on the handling of objects (folding, assembling geometric shapes or drawing with measuring instruments). Due to their developmental coordination disorders which prevent them from programming and automating a series of gestures efficiently, these pupils are clumsy in all these actions. They may also be affected by visual spatial disabilities which refrain the reliable exploration of figures. Our research aims at determining how the pedagogical action may allow the building of knowledge and the evolution of conceptualization in geometry, in grades 5th and 6th, to these pupils with specific learning disabilities.

**Key-words :** Visual spatial dyspraxia, geometry with instruments, learning disorders

## Introduction

Pour permettre aux élèves d'accéder à une conceptualisation en géométrie plane, l'enseignement à l'école primaire et en début de collège fait appel à des expériences dans le monde sensible et à des constructions instrumentées. Les activités qui s'appuient fortement sur le tracé aux instruments et sur une approche perceptive des figures, nous laissent augurer des difficultés importantes dans la construction des apprentissages géométriques des élèves dyspraxiques visuospatiaux. En effet, d'une part les troubles praxiques de ces élèves les rendent maladroits et lents dans les actions à réaliser car il résulte de leur handicap une incapacité à programmer des séquences de gestes et à les automatiser, et d'autre part, leurs troubles visuospatiaux empêchent une exploration fiable des figures et donc une bonne perception des objets géométriques et de leurs propriétés. Des tâches telles que tracer une ligne le long d'une règle en la maintenant ou faire tourner un compas en exerçant une pression adaptée mobilisent toutes les ressources attentionnelles et cognitives de ces élèves au détriment du raisonnement qu'ils seraient en capacité d'exercer s'ils ne se trouvaient pas en situation de double tâche. Leurs compétences raisonnementales sont en effet préservées, de même que le sont leurs compétences langagières et mnésiques.

L'enfant dyspraxique est ainsi très souvent mis en difficulté par la méthode d'enseignement, les procédures préconisées et / ou le matériel pédagogique utilisé (et non par les connaissances ou le concept à acquérir). (MAZEAU, 2010)

Les élèves dyspraxiques sont mis en échec dans leurs apprentissages en géométrie et pourtant, la construction instrumentée dans laquelle ils sont défailants n'est pas un but en soi, ce n'est



qu'un moyen qui doit conduire à une conceptualisation des notions géométriques. Serait-il alors possible de dispenser un enseignement en géométrie qui s'appuierait sur les compétences préservées de ces élèves et leur permettre ainsi d'accéder à des apprentissages ?

## Artefact et construction de connaissances

Pour déterminer les apports de l'utilisation d'instruments tels que règle, équerre ou compas, dans la construction de connaissances géométriques, nous nous référons à l'approche instrumentale de Rabardel (2005). Il définit un *instrument* comme le produit de l'utilisation par le sujet d'un *artefact*, objet matériel ou symbolique avec des caractéristiques spécifiques permettant d'assurer l'accomplissement de buts spécifiques. L'artefact devient un instrument au cours d'un processus de *genèse instrumentale*, qui consiste en l'élaboration de schèmes d'utilisation de cet artefact, résultant d'une construction propre du sujet ou de schèmes sociaux d'utilisation. Un *schème* (Vergnaud, 1990) est une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations. Il implique l'existence de buts, sous-buts et anticipation ; de règles d'action, de prise d'information et de contrôle ; d'invariants opératoires (concepts-en-acte, théorèmes-en-acte) permettant la prise et le traitement de l'information pertinente ; de possibilités d'inférence. De l'artefact à l'instrument, la genèse instrumentale consiste en un double processus d'évolution des relations « sujet – artefact » :

- l'*instrumentalisation* est relative à l'artefact, à la découverte et à la sélection des commandes. Les diverses potentialités de l'artefact sont progressivement découvertes par le sujet, éventuellement transformées ou détournées (l'usager adapte l'artefact à ses habitudes de travail).

- l'*instrumentation* est relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes pour la réalisation d'un type de tâche (les contraintes de l'artefact contribuent à structurer l'action de l'usager).

Ainsi, les connaissances de l'élève standard se construisent dans ses interactions avec l'artefact à travers l'élaboration et la mobilisation de schèmes. L'usage des instruments a donc un impact sur son activité cognitive.

La manipulation d'instruments met en jeu deux types de connaissances :

- des connaissances géométriques portées par les instruments. Par exemple, pour tracer une droite passant par deux points, il faut placer un bord rectiligne d'une règle sur les points et tracer une ligne le long, en démarrant avant le premier point et en allant au-delà du deuxième. Cela traduit les connaissances conceptuelles suivantes : une droite est définie par deux points, une droite est infinie.

- des connaissances relatives à un savoir-faire qui conduisent à construire une figure précise et soignée avec dextérité, comme par exemple la façon de positionner ou de maintenir la règle pour tracer la droite précédente : le bord de la règle doit être décalé en dessous des points en fonction de l'épaisseur de la mine du crayon utilisé pour le tracé, les doigts en « pattes d'araignée » doivent être situés au centre de la règle, en dessous du bord, et exercer une pression suffisante pour ne pas que la règle bouge lors du tracé.

Ce savoir-faire, plus souvent acquis en situation de façon implicite que par un enseignement explicite, est indispensable à la réussite d'une construction, mais n'apporte rien au niveau de la conceptualisation. Pour l'élève dyspraxique, l'accès à ce savoir-faire est coûteux et non rentable dans la mesure où il ne peut l'automatiser. Nous proposons donc d'abandonner pour cet élève l'apprentissage et la pratique de ce savoir-faire tout en lui conservant la possibilité d'élaborer des schèmes. Ceux-ci n'émergeraient pas d'une manipulation effective des

instruments mais d'une observation de cette manipulation effectuée par un tiers que l'élève dyspraxique guiderait par des instructions. Ce tiers prendrait à sa charge tout le savoir-faire non mathématique de la manipulation. Ce pourrait être l'auxiliaire de vie scolaire lorsque l'élève bénéficie d'une aide humaine compensatoire à son handicap dans le cas d'une inclusion en classe ordinaire. Ce pourrait être aussi un autre élève dans le cadre d'un travail en binôme.

### **Compensations : langage technique et gestes mathématiques**

D'après nos observations et analyses de quelques épisodes d'activités géométriques dans des classes de sixième où sont scolarisés des élèves dyspraxiques, les élèves n'accèdent pas facilement à un langage géométrique, lorsqu'il s'agit pour eux d'exprimer leur technique de construction ou alors de formuler ce qu'ils cherchent à faire pour résoudre le problème qui leur est posé. Certains s'appuient sur des gestes pour montrer les objets géométriques qu'ils considèrent ou pour exprimer des relations entre ces objets. Ces gestes sont porteurs de significations mathématiques, ils sont accompagnés ou non par des formulations dans un langage courant ou dans un langage mixte entre langage courant et langage géométrique, ils sont préliminaires à un langage spécifique non encore construit ou bien intégré. Le *langage géométrique*, relatif aux objets, relations ou propriétés géométriques, et constitué de vocabulaire et d'expressions spécifiques et conventionnels, n'est pas aisément accessible, il suppose déjà un niveau d'abstraction important.

Les instructions verbales que formulerait l'élève dyspraxique pourraient être données dans un langage intermédiaire, au plus proche des actions à effectuer avec l'instrument. Ce langage, que nous nommons *langage technique*, se compose d'instructions sur la manipulation des instruments avec :

- des termes dénommant l'instrument (*équerre, compas, ...*) ou ses parties (*pointe, bord, ...*)
- des verbes issus de la langue naturelle et exprimant les actions à exécuter avec les instruments (*glisser, écarter, pointer, tourner, ...*)
- des termes dénommant les objets géométriques (*point, droite, ...*) ou leurs représentations (*trait, croix, ...*)
- des termes exprimant les rapports spatiaux, topologique ou d'orientation, entre instrument et objet géométrique (*contre, sur, du côté de ...*)

Il s'agirait donc d'outiller l'élève dyspraxique d'un langage technique précis, au plus proche de la manipulation, à l'exclusion des aspects pratiques non porteurs de connaissances mathématiques. Ce langage, que l'élève dyspraxique serait amené à faire évoluer progressivement vers un langage géométrique au fur et à mesure de ses apprentissages, se substituerait à la manipulation effective des instruments. Le discours de l'élève dyspraxique pourrait aussi être renforcé par une production de gestes ébauchés, supports de l'évocation et du raisonnement.

En effet, selon McNeill (1992), les gestes, en collaboration avec le langage, aident à constituer la pensée et ils reflètent également la représentation mentale d'image activée au moment du discours. À partir d'une analyse des paramètres de la conversation, McNeill (1992) distingue les gestes de structuration du discours, comme les *gestes de battements* rythmant le discours ou les *gestes cohésifs* liant des parties du discours, des gestes propositionnels qui se réfèrent au contenu du discours. Ces derniers ont une composante principale imagée et sont dits *iconiques* s'il existe une relation de ressemblance avec le

contenu de la parole, *métaphoriques* s'ils présentent un contenu imagé d'une idée d'abstraite, *déictiques* s'ils se réfèrent à un objet, un événement ou un lieu indiqué par pointage du doigt.

En situation d'apprentissage, les gestes peuvent donc jouer un rôle non seulement dans la communication mais aussi dans le processus de conceptualisation, en permettant par exemple à l'élève de transmettre une information qu'il n'est pas encore capable d'exprimer de façon purement verbale ou formelle. Nous nommons *gestes mathématiques* les gestes réalisés dans l'air ou sur un support, de nature iconique, métaphorique ou déictique, et destinés à exprimer une idée, un concept ou un objet mathématique.

Ainsi, au vu de ce qui précède, nous émettons l'hypothèse que dans des situations d'action avec des instruments, l'élève dyspraxique peut entrer dans un processus de conceptualisation sans effectuer la manipulation des instruments mais en la guidant à l'aide d'un langage technique accompagné de gestes mathématiques.

### **Cadre d'analyse sémiotique**

Pour étudier les processus d'apprentissage des élèves dyspraxiques en géométrie et vérifier notre hypothèse, nous faisons appel au concept de *faisceau sémiotique* (Arzarello, 2006).

Arzarello (2006) nomme *ensemble sémiotique* la notion de *système sémiotique* d'Ernest (2006) qu'il étend en s'appuyant sur l'idée de système sémiotique de Radford (2002).

Selon Ernest (2006), un *système sémiotique* est formé de trois composantes :

1. Un ensemble de signes (parlés, écrits, dessinés, codés électroniquement)
2. Un ensemble de règles de production et de transformation des signes
3. Un ensemble de relations entre les signes et leurs significations plongées dans une structure de signification sous-jacente.

Radford (2002) considère aussi d'autres signes tels que les gestes, qui ont une signification intuitive, et les artefacts, qui ont une signification fonctionnelle.

Dans l'approche instrumentale (Rabardel, 2005) l'instrument est produit d'un artefact avec ses règles d'utilisation portant un caractère intentionnel : le couple instrument-artefact peut être vu comme un système sémiotique.

Un *faisceau sémiotique* est une structure dynamique composée d'ensembles sémiotiques et de relations entre ces ensembles, il évolue dans le temps en fonction des activités sémiotiques du sujet. Un ensemble sémiotique peut en générer un autre et agrandir le faisceau, on parle dans ce cas de *conversion génétique*. Les processus d'apprentissage se produisent d'une façon multimodale dans un faisceau sémiotique. Deux types d'analyse permettent d'étudier les différents types de signes dans les processus cognitifs et de comprendre le rôle des gestes dans l'évolution des processus d'apprentissage :

- L'analyse synchronique considère les relations entre les différents ensembles sémiotiques activés simultanément par le sujet.
- L'analyse diachronique sur l'évolution des signes activés par le sujet dans des instants successifs.

## Conclusion

Dans notre recherche, nous tenterons d'amener l'élève dyspraxique à des apprentissages géométriques en développant plus particulièrement un faisceau sémiotique gestes – discours grâce au jeu sémiotique de l'enseignant, destiné à soutenir la transition des signes produits par l'élève vers une signification culturelle partagée. Les analyses synchronique et diachronique des faisceaux sémiotiques nous permettront d'étudier les apprentissages de l'élève dans une approche multimodale.

## Références

- ARZARELLO F. (2006) Semiosis as multimodal process *RELIME*, **Numéro spécial**, 267-299
- ERNEST P. (2006) A semiotic perspective of mathematical activity : the case of number, *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 67-101
- MCNEILL D. (1992) Hand and Mind : What gestures reveal about thought. *Chicago : Chicago University Press*.
- MAZEAU M. et LE LOSTEC C. (2010) L'enfant dyspraxique et les apprentissages. Coordonner les actions thérapeutiques et scolaires. *Elsevier Masson*
- RABARDEL P. (2005) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques in Modèles du sujet pour la conception *Octarès*
- RADFORD L. (2002) The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectivation of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, **22(2)**, 14-23.
- VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10/2-3**, 133-170



# ÉMERGENCE DU CONCEPT DE GROUPE UN POINT DE VUE HISTORIQUE ET ÉPISTÉMOLOGIQUE

Christian Spitalas

I3M, Université Montpellier 2

**Résumé :** Cette communication vise à donner les grandes idées qui ont historiquement mené au concept de groupe en mathématiques, et à son évolution progressive vers une théorie axiomatique abstraite. Cette étude permet de faire ressortir quelques caractéristiques épistémologiques de la théorie des groupes qui en font une notion FUG.

**Mots clés :** groupe mathématique, histoire, épistémologie, notion FUG.

**Abstract :** This communication aims at first at presenting the big ideas that have historically led to the concept of mathematical group, and to its gradual evolution towards an abstract and axiomatic theory. This study brings out some features of the theory of groups that make it a FUG notion.

**Key-words :** mathematical group, history, epistemology, FUG concept.

En mathématiques, un groupe est un couple constitué d'un ensemble et d'une loi de composition interne définie sur cet ensemble, qui est associative, possède un élément neutre, et pour laquelle tout élément a un inverse. Nous proposons dans cette communication de présenter un panorama nécessairement non exhaustif des grandes étapes de la naissance du concept de groupe au cours de l'histoire et de son évolution jusqu'à la définition que l'on connaît aujourd'hui ; puis d'en identifier le caractère FUG<sup>31</sup> (Formalisateur, Unificateur et Généralisateur) dans la genèse historique de la théorie des groupes, comme l'ont fait Robinet (1986) et Dorier (1990) pour la théorie des espaces vectoriels. L'analyse s'appuie principalement sur « *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory.* » (Wussing 2007), traduction anglaise du même ouvrage de 1969 en langue allemande.

## Les prémisses du concept de groupe

Bien que l'on attribue traditionnellement la naissance des groupes à Galois et / ou à Cayley, l'apparition de ce concept coïncide avec une nouvelle manière *groupe-théorique*<sup>32</sup> de penser les mathématiques qui se retrouve en géométrie et en théorie des nombres, et ce bien avant l'apparition de la notion de groupe à proprement parlée.

## Une nouvelle vision de la nature de la géométrie

La « révolution » que connurent l'analyse et l'algèbre au 16<sup>e</sup> siècle eut lieu au 19<sup>e</sup> siècle en ce qui concerne la géométrie. Ce changement dans la manière de penser la géométrie trouve son origine dans la révolution industrielle en lien avec les problèmes d'ingénierie de l'époque. Il se traduit par une émancipation d'un mode de pensée classique où la géométrie est nécessairement euclidienne, qui a eu pour conséquence le développement de nouvelles géométries : « non-euclidienne », « n-dimensionnelle », « projective », etc. Ainsi l'émergence de la géométrie projective trouve son origine dans la distinction progressive entre les propriétés descriptives

31 Voir Robert (1986) et Robinet (1984).

32 Traduit de l'anglais « group-theoretic » dans (Wussing 2007).

(c'est-à-dire d'incidence) et les propriétés métriques des figures : Poncelet fit le premier la distinction entre les propriétés (dites projectives) préservées par les projections centrales et les autres. Klein en donna la première définition non métrique (basée sur le birapport) en 1871, et clarifia le lien profond entre géométries métrique et projective dans son « programme d'Erlangen » en 1872, en utilisant explicitement la théorie des groupes. L'apparition de géométries non euclidiennes amena à un problème épistémologique de l'espace. La distinction entre l'espace physique et l'espace mathématique ont fourni des bases épistémologiques déterminantes à la classification des géométries entreprise dans le programme d'Erlangen (voir paragraphe 2.2). Les liens profonds entre les différentes géométries et méthodes géométriques laissaient toujours perplexes les mathématiciens du milieu du 19<sup>e</sup> siècle, mais leurs efforts pour remettre de l'ordre dans ce chaos donna une motivation significative pour le développement des futures méthodes de théorie des groupes.

### **La recherche de principes d'ordonnement en géométrie à travers l'étude de relations géométriques**

Les recherches entre 1830 et 1870 sur les relations entre les transformations géométriques de la géométrie descriptive et projective ont abouti au problème de leur classification, et à leur synthèse grâce à la théorie des groupes. Peu après, Möbius reprit à plusieurs reprises l'idée selon laquelle certaines géométries étaient incluses dans d'autres, idée fondamentale du programme d'Erlangen.

Les géomètres synthétiques recherchaient aussi des principes d'ordonnement en géométrie. Par exemple, Steiner avait pour but le développement systématique de la géométrie projective. Mais leur refus d'utiliser les méthodes analytiques ne pouvaient empêcher les puristes de la géométrie synthétique de s'incliner face aux points de vue de la théorie des groupes. Cependant, le concept de groupe de transformations restera comme fruit de l'approche synthétique en géométrie.

### **La théorie des groupes implicite dans le domaine de la théorie des nombres**

Le mode de pensée « groupe-théorique » apparaît également dans le développement de la théorie des nombres. Même si cette dernière n'a pas directement contribué à l'émergence du concept de groupe, elle a joué un rôle déterminant dans son façonnage, après que l'on eut reconnu les modes de raisonnement similaires aux groupes de permutation.

Euler s'intéressa aux résidus des puissances, c'est-à-dire aux restes obtenus par la division par  $p$  des puissances  $a^v$ , pour  $v$  un entier naturel. Il a eu l'intuition que ce qui importe n'est pas simplement le reste  $r$  tel que  $0 < r < p$ , mais plutôt que tous les restes  $r + np$  peuvent être vus comme le même reste  $r$ , car tous ces restes sont « équivalents » ; c'est ce qui correspond en termes plus modernes aux éléments du groupe quotient  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Il démontre également dans ce cadre un cas particulier de ce que l'on nomme habituellement le théorème de Lagrange dans un groupe fini (« l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe »).

Gauss reformule les travaux d'Euler dans ses *Disquisitiones arithmeticae* (1801), et développe sa théorie des équations cyclotomiques qui a par la suite grandement favorisé le développement de la théorie des équations algébriques et du concept de groupe de permutations.

Kronecker, souhaitant en vain démontrer par des moyens purement arithmétiques un résultat sur les nombres complexes idéaux de son professeur et ami Kummer, revient sur les

*Disquisitiones arithmeticae* de Gauss : il fait remarquer en 1870 que les raisonnements utilisés par Gauss sur les classes de formes quadratiques peuvent s'appliquer n'importe où ailleurs ; ce qui montre que ces principes sont beaucoup plus généraux et abstraits (même s'il faudra attendre 1882 pour que son étudiant Netto fasse le lien avec la théorie développée par Galois).

## Évolution du concept de groupe

### Le concept de groupe comme groupe de permutation

\* Découverte du lien entre la théorie de la résolubilité des équations algébriques et la théorie des permutations

Dans ses « *Réflexions sur la théorie algébrique des équations* » (1770), Lagrange eut l'intuition de la nécessité de développer une « sorte de calcul combinatoire », et eut l'idée d'utiliser des fonctions des racines invariantes par permutations de ces dernières (appelées résolvantes). Il montre même plus généralement que le nombre de valeurs prises par une fonction rationnelle de  $\mu$  variables divise toujours  $\mu!$ , ce qui contient en germe les premiers aspects du concept de groupe.

Dans le même temps, Vandermonde cherche à exhiber des fonctions des polynômes symétriques élémentaires des racines, celles-ci étant alors automatiquement inchangées par permutation des racines. Pourtant, il ne parviendra évidemment pas à des conclusions satisfaisantes dans le cas des équations algébriques de degré 5 ou supérieur malgré quelques résultats intéressants sur l'existence de résolvantes pour les équations de degré 5 et 6. Vandermonde et Lagrange ont tout deux remarqué le lien entre le degré de la résolvante le nombre de valeurs prises par les fonctions des racines après permutation des racines. Mais sur ce point, les travaux de Lagrange sont plus pertinents.

Ruffini reprit les travaux de Lagrange 30 ans plus tard et montra la non-résolubilité de l'équation générale de degré 5, en étudiant les propriétés de l'ensemble des permutations qui laissent invariante une fonction rationnelle des racines. Ce dernier ensemble coïncidant justement avec ce que Galois appela « groupe » de permutation. Ruffini utilise beaucoup la fermeture de cet ensemble, et identifie entre autre ce que l'on appelle aujourd'hui les groupes cycliques.

\* Perfectionnement de la théorie des permutations

L'étude des permutations a commencé à devenir un domaine d'étude à part entière de recherche mathématique (notamment grâce aux travaux de Lagrange, Vandermonde et Ruffini), et s'est alors développé indépendamment de celui des équations algébriques, notamment avec Cauchy. Après avoir, dans un premier temps, approfondi les travaux de Lagrange, Vandermonde et Ruffini, Cauchy développe de nombreux concepts que l'on retrouve aujourd'hui dans le groupe de permutation d'un ensemble fini : il définit par exemple

les « arrangements », introduisit la notation  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}$  pour les permutations ou  $(x, y, \dots, w)$  pour les cycles, le produit de permutations, la commutativité de ces dernières. Il introduisit également la notation puissance et posa la puissance 0-ième égale à 1. Il définit l'ordre d'un élément, et démontra le théorème concernant l'ordre d'une permutation qui s'écrit comme produit de cycles. Dans le deuxième paragraphe de ses « considérations générales », il définit également l'inverse d'une permutation et les permutations « semblables » (qu'il



caractérise comme les permutations conjuguées d'aujourd'hui). Il définit un système de substitutions conjuguées comme un groupe engendré par des éléments donnés.

\* La formulation groupe-théorique du problème de résolubilité des équations algébriques

Poursuivant les travaux de Lagrange et de Gauss, Abel parvint à donner une preuve rigoureuse de l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations de degré supérieur ou égal à 5, et à résoudre certaines classes d'équation. Mais surtout il proposa un programme de recherche que Galois parviendra par la suite à achever. On retrouve par ailleurs dans les recherches d'Abel, comme chez Galois un peu tôt, l'emploi spontané du mot « groupe ».

C'est Galois qui clôt le problème de la résolubilité des équations algébriques, grâce à sa formulation groupe-théorique du problème : sa plus grande découverte n'est pas tant l'idée de « groupe » (qu'il utilise à l'époque dans le sens de regroupement d'éléments), mais l'intuition d'une « structure de groupe » uniquement associée à une équation, ainsi que la découverte du rôle de certains de ses sous-groupes (les sous-groupes normaux) dans la résolubilité ou non de l'équation.

### **Le concept de groupe comme groupe de transformations**

Les querelles des géomètres de son époque, revendiquant chacun la supériorité d'une géométrie sur l'autre, poussa Félix Klein à l'élaboration d'un vaste programme de recherche en 1872, appelé *programme d'Erlangen*, visant à définir et classer les différentes géométries. L'aboutissement de ce programme fut possible grâce à la théorie des groupes : il définit la géométrie comme l'étude des invariants par l'action d'un groupe sur un espace de points ; les différentes géométries sont alors définies à partir du groupe de transformations choisi (similitudes, isométries, projections, etc..) agissant sur cet espace. Klein s'inspira pour cela de la théorie des invariants algébriques de Cayley ayant pour objectif de relier la géométrie projective et sa géométrie métrique euclidienne. Inspiré par ses interactions avec Clebsch, Stolz, et surtout Lie, il lança un vaste programme de classification selon des critères d'invariance, et dans lequel le traitement « groupe-théorique » s'imposa : « *the theory of the relations of any given objects which are unchanged by the group* » ((Klein 1921), dans (Wussing 2007, p.189)).

L'achèvement de ce programme de recherche aboutit naturellement à la classification des groupes de transformation, dans laquelle Sophus Lie joua un rôle majeur. La distinction alors éclaircie entre les propriétés géométriques et analytiques des figures amena Lie à étudier les groupes de transformation continus. Il est aussi à l'origine du concept de « groupe de Lie ».

### **Vers un concept de groupe abstrait**

Après quelques considérations générales sur des opérations liant des symboles, Cayley fut un des premiers à tenter de donner une définition générale et abstraite des groupes (finis) dans « *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation  $\theta^n=1$*  » en 1854 :

« *A set of symbols, 1,  $\alpha$ ,  $\beta$ ... all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set, is said to be a group.* »

Avant Frobenius en 1879, Kronecker proposa en 1870 une définition axiomatique formelle des nombres idéaux, qui ressemble beaucoup à la définition actuelle de groupe abélien (paragraphe 3).

En 1882, Van Dyck (1882) donna une définition moderne de la notion de groupe. Un de ses objectifs est alors de caractériser les groupes "concrets" par leurs générateurs et les relations qu'ils peuvent entretenir ; ce qui le conduisit à formaliser la notion de groupe libre sur les éléments  $A_1, A_2, \dots$  liés par des relations du type  $F_h(A_i)=1$ . L'approche de Van Dyck permit une première construction d'un concept de « groupe abstrait » défini par générateurs et relations. Une année plus tard, il requerra explicitement l'existence d'un inverse dans la définition de groupe.

### **La nature FUG du concept de groupe dans sa construction historique**

D'un point de vue didactique, une notion FUG se caractérise par un formalisme, une unification et une généralisation si grands par rapport aux connaissances à disposition des étudiants au moment de son introduction qu'ils rendent très difficile l'élaboration d'un problème mettant en avant son caractère outil. Cette définition dépend donc a priori des connaissances et du curriculum des étudiants, ainsi que des choix d'enseignement (Robert 1998, Bridoux 2011). Cependant, pour nombre de ces notions, telles que les structures algébriques, les caractères formalisateurs, unificateurs, et généralisateurs apparaissent déjà de manière très marquée dans leur genèse historique ; les rendant de fait des notions FUG d'un point de vue épistémologique. Dorier (1990) a montré que ce fut par exemple le cas pour les espaces vectoriels. Nous proposons de montrer en quoi l'analyse historique de la naissance et de l'évolution du concept de groupe permet d'en dégager des caractéristiques qui en font une notion FUG d'un point de vue épistémologique.

#### **\* Le caractère unificateur**

Le caractère unificateur apparaît à plusieurs niveaux dans l'histoire de la construction du concept.

En premier lieu, l'identification de caractéristiques communes à partir de 1846 de la théorie des équations algébriques « aboutie » grâce à Galois et de la théorie des permutations développée par Cauchy joua un rôle essentiel dans l'émergence de la notion de groupe. En effet, jusqu'alors, la notion de sous-groupe normal apparaissait de manière dissimulée dans les travaux de Cauchy sur les permutations ; de même ce dernier parlait de « théorie des suites », et distinguait la « *substitution arithmétique* » de la « *substitution géométrique* » (Wussing 2007, p.92) sans voir les ramifications avec le point de vue « groupe-théorique » de Galois.

Ensuite, l'aboutissement du programme d'Erlangen lancé par Félix Klein en 1872, et destiné à unifier et classer les géométries, fut possible grâce à la théorie des groupes.

D'un point de vue plus général, la théorie des groupes unifie des théories mathématiques très diverses telles que la géométrie, la théorie des nombres, des équations algébriques, et des permutations.

#### **\* Le caractère généralisateur**

Le caractère généralisateur est visible dans la démarche de Galois : celui-ci cherche à étendre les travaux sur les équations algébriques qui se développaient jusqu'alors suivant deux axes de recherche : celui de Lagrange et celui de Vandermonde (Friedelmeyer, 1991). De plus, l'idée révolutionnaire de pouvoir faire correspondre à chaque équation algébrique un groupe (le groupe de l'équation) a permis à Galois de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de résolubilité de ces équations, et ce en toute généralité. (Mahammed, 1995).

Plus tard, Kronecker fait remarquer en 1870 ((Kronecker 1870, pp. 274-275), dans (Wussing 2007, p.84)) que les raisonnements utilisés par Gauss sur les classes de formes quadratiques

peuvent s'appliquer n'importe où ailleurs, et en particulier en théorie des nombres ; ce qui montre que ces principes sont beaucoup plus généraux et abstraits.

Dans le prolongement de son programme d'Erlangen, l'étude des variétés à travers l'étude de son groupe de transformation devient, selon Klein, une « généralisation de la géométrie » (« Verallgemeinerung der Geometrie », (Klein 1921 p. 464), dans (Wussing 1984, p.189)).

\* Vers une formalisation

Comme nous l'avons vu (paragraphe 2.3), Cayley tenta de donner dès 1854 une définition axiomatique de groupe (fini), mais son travail ne trouva écho que bien plus tard.

Par la suite, Kronecker, souhaitant en vain démontrer par des moyens purement arithmétiques un résultat sur les nombres complexes idéaux de Kummer, propose alors en 1870 une définition axiomatique très formelle des nombres d'idéaux, qui est équivalente à la définition actuelle de groupe abélien fini :

« Let  $\theta', \theta'', \theta''', \dots$  be finitely many elements such that with any two of them we can associate a third by means of a definite procedure. Thus if  $f$  denotes the procedure and  $\theta'$  and  $\theta''$  are two (possibly equal) elements, then there exists a  $\theta'''$  equal to  $f(\theta', \theta'')$ . Furthermore, we require that

$$f(\theta', \theta'') = f(\theta'', \theta')$$

$$f(\theta', f(\theta'', \theta''')) = f(f(\theta', \theta''), \theta''')$$

and if  $\theta''$  is different from  $\theta'''$ , then  $f(\theta', \theta'')$  is different from  $f(\theta', \theta''')$ .

Once this is assumed we can replace the operation  $f(\theta', \theta'')$  by multiplication  $\theta' \cdot \theta''$  provided that instead of equality we employ equivalence. Thus using usual equivalence symbol " $\sim$ " we define the equivalence  $\theta' \cdot \theta'' \sim \theta'''$  by means of the equation  $f(\theta', \theta'') = \theta'''$  » ((Kronecker 1870, pp. 275-276), dans (Wussing 2007, p.65)).

Van Dyck (1882) fit un pas de plus en proposant une nouvelle formulation de la notion de groupe :

« If we [...] view the group-theoretic operations quite formally, then their position in a formal development of all analytic operations is quite clear. They are multiplication operations that obey the associative but not the commutative principle » ((Van Dyck 1882) dans (Wussing 2007, p.240)).

L'ajout de l'axiome de l'inverse de tout élément dans la définition de groupe, et sa définition de groupe abstrait jouèrent un rôle fondamental dans la définition axiomatique que l'on connaît aujourd'hui.

Il est à noter que la démarche de Van Dyck s'inscrit également dans un processus de généralisation et d'unification de la notion de groupe, et donc aurait pu apparaître dans les deux parties précédentes.

## Conclusion et perspectives didactiques

L'analyse historique et épistémologique de l'émergence du concept de groupe en a fait ressortir quelques caractères formalisateurs, unificateurs et généralisateurs.

D'un point de vue didactique, la nécessité de l'abstraction et du formalisme des théories axiomatiques comme la théorie des groupes peut être acceptée s'il s'opère une prise de conscience de son caractère simplificateur futur ; c'est pourquoi certains auteurs parlent de

notions FUGS (Robert, 1998)<sup>33</sup>. Le caractère simplificateur, enjeu didactique dans l'apprentissage des structures algébriques, apparaît déjà chez Kronecker lorsqu'il donne sa définition abstraite des nombres complexes d'idéaux (paragraphe 3) :

« Also, when stated with all admissible generality, the presentation gains in simplicity and, since only the truly essential features are thrown into relief, in transparency » ((Kronecker 1870, pp. 274-275), dans (Wussing 1984, p.84).

Or, le caractère FUG de la théorie des groupes, et plus généralement des structures algébriques, se traduit par une difficile exploitation des outils didactiques classiques (Hausberger, 2012) : en effet, les savoirs FUG sont objets avant d'être outil, et leur pertinence en tant qu'outil n'apparaît que plus tard dans le traitement unifié qu'ils permettent ; les situations fondamentales, à même de donner du sens, seront nécessairement très riches, impliquant différents domaines, différents points de vue, cadres et registres de représentation ; la dévolution pose selon Rogalski (1995) la problématique "de l'acceptation du rôle du détour théorique formel et généralisateur comme une réponse à tout un champ de problèmes et de questionnements qui se ressemblent... alors qu'ils ne le savent pas".

Une des possibilités proposée par A.Robert et J.Robinet (1993) est l'introduction d'un levier "méta"<sup>34</sup>. Une ingénierie didactique fut menée en ce sens pour l'enseignement de l'algèbre linéaire par Dorier, Robert, Robinet et Rogalski (Dorier 1997).

La « théorie des modèles » ou « méthodologie des sciences déductives », introduite par Tarski et menant au concept de « modèle » (voir par exemple Tarski, 1960) permet de rendre compte du caractère FUG des théories axiomatiques comme la théorie des groupes et fait émerger le rôle important de la dialectique entre les définitions et les exemples satisfaisant cette définition. Les recherches dans le cadre de notre travail de thèse sont en cours en ce sens. A un niveau supérieur d'organisation, des recherches de Hausberger (2012) visent à comprendre quelques caractéristiques de la pensée structuraliste à l'œuvre au 20<sup>e</sup> siècle dans le but de développer une « didactique du structuralisme ».

## Références

BRIDOUX S. (2011), Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot, Paris 7.

CAYLEY A. (1854), On the theory of groups, as depending on the symbolic equation  $\theta^n=1$ , Philosophical Magazine 7, 40-47.

DORIER J.-L. (1990), Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, Cahier de didactique des mathématiques, Numéro 7, Université Paris 7.

DORIER J.-L. (1990), Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier (Grenoble 1).

DORIER J.-L. (1992), Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire. Cahier de didactique des mathématiques, Numéro 14, Université Paris 7.

33 Voir par exemple aussi (Dorier, 1992) pour une illustration du caractère simplificateur.

34 « Le mot levier se rapporte à l'idée d'introduire à un moment bien choisi de l'apprentissage un élément permettant aux étudiants de mieux comprendre la nature épistémologique de l'algèbre linéaire. Le préfixe substantivé méta signifie que ce levier favorise une réflexion sur l'activité mathématique propre. » (Dorier, 2000)

- DORIER J.-L. (éd.) (1997), L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.
- DORIER J.-L. (2000), Interactions entre recherches en histoire et en didactique des mathématiques pour l'élaboration d'une réflexion épistémologique sur les questions d'enseignement et d'apprentissage. L'exemple de l'algèbre linéaire. Les cahiers du laboratoire Leibnitz. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- FRIEDELMEYER (1991), Emergence du concept de groupe, Fragments d'histoire des mathématiques III, APMEP, brochure n°83, Paris, 1991.
- HAUSBERGER T. (2012), Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. Contribution au GT3 : les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum. Actes du colloque EMF2012.
- KLEIN F. (1921), Gesammelt mathematische Abhandlungen. Vol. 1 Ed. R. Fricke and A. Ostrowski. Berlin. Dans Wussing H. (2007).
- KRONECKER L. (1870), Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. MB.
- LAGRANGE J.-L. (1770), Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Mémoires de l'Académie royale des sciences et Belles-Lettres de Berlin (205–421).
- MAHAMMED N. (1995), Sur la résolution des équations algébriques, IREM de Lille.
- ROBERT A. (1986), Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche, Cahier de didactique des mathématiques 28, IREM de Paris VII.
- ROBERT A., Robinet J. (1993), Prise en compte du « méta » en didactique des mathématiques. Cahier de DIDIREM n°21, IREM de Paris 7.
- ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université, Recherches en didactiques des mathématiques 18/2 (139-190), Grenoble : La pensée sauvage éditions, 1998.
- ROBINET, J. (1984) Ingénierie didactique de l'élémentaire dans le supérieur, thèse de doctorat, Paris VII.
- ROBINET, J. (1986), Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire, Cahier de Didactique des Mathématiques 29, IREM de Paris VII.
- ROGALSKI M. (1995), Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. Séminaire DidaTech n°169, pp. 127-162, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- TARSKI A. (1960), Introduction à la logique. Paris-Louvain.
- VAN DYCK W. (1882), Gruppentheoretische Studien. Math. Ann. 20, 1-44.
- WUSSING H. (2007), The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory. Dover Publication.

**TITRE :**

Séminaire national des jeunes chercheurs de l'ARDM, Wejch 2013

**AUTEUR/S :**

Coordination : Christophe Hache, Christian Spitalas

**RÉSUMÉ :**

Cette brochure regroupe les textes des communications du séminaire national des jeunes chercheurs de l'ARDM pour l'année 2013 (pour les doctorant ayant souhaité une publication). Le séminaire national des jeunes chercheurs est aussi appelé « week-end jeunes chercheurs », ou « Wejch ». Le Wejch 2013 a eu lieu à Palavas-les-Flots, du 17 au 19 Mai 2013.

Le recueil des textes a été organisé en collaboration avec le comité de rédaction de la revue *Petit x*.

**MOTS CLES :**

Didactique des mathématiques

IREM de Paris – Université Paris Diderot

Directeur de publication Fabrice Vandebrouck – Reprographie Nadine Locufier

[www.irem.univ-paris-diderot.fr](http://www.irem.univ-paris-diderot.fr)

Dépôt légal : 2014 – ISBN : 978-2-86612-356-7