



**HAL**  
open science

# EINLEITUNG ZUR THEORIE DER SITUATIONEN Grundlegende Konzepte der Mathematikdidaktik

Annie Bessot

► **To cite this version:**

Annie Bessot. EINLEITUNG ZUR THEORIE DER SITUATIONEN Grundlegende Konzepte der Mathematikdidaktik: Grundlegende Konzepte der Mathematikdidaktik. 2024. hal-04500955

**HAL Id: hal-04500955**

**<https://hal.science/hal-04500955>**

Submitted on 12 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**EINLEITUNG**  
**ZUR**  
**THEORIE DER**  
**SITUATIONEN**

*Grundlegende Konzepte  
der Mathematikdidaktik*

**Annie Bessot**  
*Universität Grenoble-Alpes*

Übersetzung von **Rudolf Sträßer**  
*mit Hilfe des automatischen Übersetzers DeepL.*

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>ii</b>
<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>1. Was aber ist Lernen in einer didaktischen Situation?</b>	<b>2</b>
<b>2. Didaktischer Vertrag</b>	<b>4</b>
2.1. Der didaktische Vertrag stellt die impliziten Rechte und Pflichten von Schülern und Lehrern in Bezug auf unterrichtete Objekte des mathematischen Wissens dar.	4
2.2 Didaktischer Vertrag und Verhandlungen zwischen Schülern und Lehrern über das Wissen	5
2.3 Unterricht und Vertragsbrüche	7
<b>3. Adidaktische Situation</b>	<b>8</b>
3.1 Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Situation als adidaktisch erlebt werden kann?	9
3.2. Welche Elemente der Situation werden im Milieu modelliert?	10
3.3. Beispiel. <i>A-priori-Analyse</i> einer didaktischen Situation "Vergrößern des Puzzles " (Nach G. und N. Brousseau 1987)	11
<b>4. Didaktische Variablen: Definitionen und Beispiele</b>	<b>14</b>
Beispiel. <i>Didaktische Variablen der Situation "Vergrößerung des Puzzles"</i> .	15
<b>5. Analyse des Lernens in einer "gewöhnlichen" Unterrichtssituation</b>	<b>16</b>
<b>6. Unterschiedlicher Status von Wissen, unterschiedliche Arten von adidaktischen Situationen</b>	<b>16</b>
<b>7. Grundlegende Situation (« situation fondamentale »)</b>	<b>17</b>
7.1 Einleitung	17
7.2 Beispiel. <i>A-priori-Analyse</i> einer grundlegenden Situation :	18
"Das Spiel des Rennens nach $n$ " (« Le jeu de la course à $n$ » ; nach G.Brousseau 1978)	18
Begriff des Informationssprungs (« saut informationnel »):	20
<b>8. Ergänzungen. Auffassungen, Hindernisse</b>	<b>20</b>
<b>9. Entwicklung/Institutionalisierung (Wissen/Kenntnisse)</b>	<b>23</b>
9.1. Entwicklung (« Dévolution »)	23
9.2. Institutionalisierung	23
<b>BIBLIOGRAFIE</b>	<b>24</b>
<b>ANHANG I Mathematische Konstruktion versus (Zeichen)Praxis</b>	<b>27</b>
<b>ANHANG III Wortprotokoll Fazit zur Aktivität "Zeichnen mit Instrumenten" in Bezug auf das Trapez, Auszug aus Grenier (1989)</b>	<b>30</b>

## VORWORT

1994 wurde an der Universität Joseph Fourier in Grenoble ein *Diplôme d'Études Approfondies de recherche* (DEA) in der Didaktik der wissenschaftlichen Disziplinen eingeführt. Nach der Einführung der Bologna-Reform wurde an dieser Universität der Masterstudiengang "EIAH<sup>1</sup> und Didaktik" ins Leben gerufen.<sup>2</sup>

Das folgende Dokument enthält das Handout eines Kurses, den ich von 2003 bis 2007 im Rahmen der Unterrichtseinheit (UE1: « Concepts fondamentaux de la didactique »), für die ich verantwortlich war, im Master 2 EIAH-Didaktik gehalten habe.

In diesem Kurs stellte ich den von Guy Brousseau entwickelten theoretischen Rahmen vor.

Ursprünglich hatte ich diesen Kurs "Einführung in die Theorie didaktischer Situationen" genannt. Bei der Neufassung, die ich hier vornehme, habe ich das Adjektiv "didaktisch" aus dem Titel gestrichen.

In der Tat hat Brousseau (1997) ziemlich kürzlich innerhalb der Situationstheorie eine Unterscheidung zwischen der Theorie der mathematischen Situationen mit didaktischem Nutzen (TSM oder *théorie des situations mathématiques*) und der Theorie der didaktischen Situationen im eigentlichen Sinne (TSD) vorgenommen.

Diese aus meiner Sicht sehr erhellende Unterscheidung ist relativ unbemerkt geblieben: Sie wurde mir erst bei der Vorbereitung meines Kurses für die 15. Sommerschule für Forschung in der Mathematikdidaktik in Clermont-Ferrand bewusst. Ich habe sie bei der Abfassung des Kurses für diese 15. Sommerschule berücksichtigt (Bessot 2011).

Der vorliegende Text ist daher eine Überarbeitung des Kurses aus dem Jahr 2003. Diese Überarbeitung wurde größtenteils durch den Wunsch motiviert, eine Übersetzung ins Englische und möglicherweise auch in andere Sprachen zu erstellen. In unserer Arbeit mit Claire Margolinas für das ICMI AMOR-Projekt<sup>3</sup> benötigten wir eine englische Referenz, die uns einen ersten Zugang zu Brousseaus Arbeit verschafft. Dieser Kurs ist nach unserer Auffassung dafür geeignet.

Ich hoffe, dass diese Arbeit und ihre verschiedenen Übersetzungen dazu beitragen werden, die Theorie der Situationen besser bekannt zu machen, und zwar auch außerhalb des besonderen Kontexts Frankreichs. Sie ist eine der wichtigsten Grundlagen der französischen Mathematikdidaktik, die in anderen Didaktiken und im weiteren Sinne in den Erziehungswissenschaften aufgegriffen wird. Die Ironie des Schicksals wollte es, dass ich gerade dabei war, dieses Vorwort zu vervollständigen, als mich die traurige Nachricht vom Tod Guy Brousseaus erreichte. Das macht mich sehr traurig, verleiht diesem Vorhaben aber noch mehr Bedeutung.

Schließlich möchte ich Jean-Luc Dorier herzlich danken, der AMOR initiiert hat, diesen Kurs auf Französisch sorgfältig Korrektur gelesen hat, mir bei der Übersetzung ins Englische geholfen hat und mich motiviert hat, ihn in andere Sprachen übersetzen zu lassen. Ich danke auch sehr herzlich Rudolf Sträßer, der sich bereit erklärt hat, die deutsche Übersetzung dieses Textes anzufertigen.

Annie Bessot

---

<sup>1</sup> Computergestützte Umgebungen für menschliches Lernen (« Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain »)

<sup>2</sup> Die Licence-Master-Doctorat-Reform, kurz LMD-Reform, ist ein Bündel von Maßnahmen, die das französische Hochschulsystem verändern, um es an die europäischen Standards der BMD-Reform anzupassen. Die grundlegenden Texte dieser Reform erschienen 2002, ihre Umsetzung dauerte jedoch mehrere Jahre.

<sup>3</sup> Siehe <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>

Grenoble, Februar 2024

annie.bessot@gmail.com

*Bitte zögern Sie nicht, mich zu kontaktieren, wenn Sie Fragen zum Inhalt dieses Kurses haben.  
Vielen Dank!*

Am Anfang der theoretischen Bewegung unter dem Label "Mathematikdidaktik"<sup>4</sup> in Frankreich steht die Idee, dass es möglich ist, Unterrichtsphänomene zu beschreiben und rational zu erklären, Phänomene, die im Allgemeinen eher Empirie oder Meinungen als einen vernünftigen Diskurs hervorrufen.

Eines der Anliegen, das in der französischen Gemeinschaft der Mathematikdidaktik weitgehend geteilt wird, ist die Schaffung eines originellen theoretischen Rahmens, der seine eigenen Konzepte entwickelt ... Ein breiter Konsens besteht auch über die methodologische Forderung, auf Experimente in Wechselwirkung mit der Theorie zurückzugreifen ... (Laborde 1989, S. 47).

Dieser theoretische Rahmen war zunächst der der Theorie der Situationen, deren Begründer Guy Brousseau war, und der der konzeptuellen Felder von Gérard Vergnaud.

Man könnte zunächst die Didaktik der wissenschaftlichen Disziplinen innerhalb der kognitiven Wissenschaften als die Wissenschaft von den spezifischen Bedingungen der Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse definieren, die für das Funktionieren menschlicher Institutionen von Nutzen sind.

Das minimale Studiensystem ist das didaktische System *im engeren Sinne*, Lehrer, Schüler, Wissen: d. h. die Interaktionen zwischen Lehrern und Schülern in Bezug auf das Wissen in einer Situation mit didaktischem Zweck.

Forscher der Mathematikdidaktik bekräftigen die Besonderheit ihrer Disziplin im Vergleich zu anderen verwandten Bereichen:

Um mathematische Unterrichtssituationen herzustellen, zu verbessern, zu reproduzieren, zu beschreiben und zu verstehen, ist es notwendig - und möglich - geworden, diese Unterrichtstätigkeit als ursprünglichen Untersuchungsgegenstand zu theoretisieren und nicht als bloße Ansammlung von Fakten, die nur in autonomen Bereichen wie Pädagogik, Soziologie, Psychologie, Mathematik, Linguistik oder Epistemologie theoretisierbar sind. (Brousseau 1986a, S.2)

Die Metapher des Labyrinths kann helfen, besser zu verstehen, was die Problematik des Didaktikers von der des Psychologen unterscheidet:

Der Psychologe [...] untersucht das Verhalten der Ratte im Labyrinth; er kennt aber die Struktur des Labyrinths, die er selbst entworfen hat. Der Didaktiker hingegen kennt die Struktur des Labyrinths, in das der Schüler geworfen wird, nicht. Daher muss er logischerweise zunächst versuchen, sie zu erkunden. Dazu kann er, indem er die Perspektive des Psychologen umkehrt, sogar das Verhalten der "Ratte" (des Schülers!) im Inneren des Labyrinths beobachten, um daraus die Struktur des Labyrinths abzuleiten ... (Chevallard 1989, S. 36)

Sind die theoretischen Konzepte, die aus einem bestimmten Disziplinbereich, hier der Mathematik, stammen, spezifisch für diese Disziplin? Derzeit ist in Frankreich zu beobachten, dass Forscher der Didaktik anderer Disziplinen (wie z. B. Sportunterricht oder Physik) einige dieser Konzepte verwenden. Ich würde die Hypothese aufstellen, dass bestimmte theoretische Konzepte aus der Mathematikdidaktik Allgemeingültigkeit besitzen: Sie ermöglichen es, in besonderen Situationen Fragen und Ergebnisse zu generieren, die ihrerseits spezifisch für ein

---

<sup>4</sup> "Auf einem Kolloquium in Bordeaux im Jahr 1975 trafen sich Forscher, die daran interessiert waren, dieses Feld als wissenschaftlichen Bereich zu behandeln, den sie als 'experimentelle Epistemologie' zu bezeichnen vorschlugen. Auf meinen Vorschlag hin zogen wir es vor, das etwas verpönte Etikett 'Didaktik' anzunehmen, um unseren Wunsch zu zeigen, den Unterricht **nithilfe dessen, was wir verstehen können**, zu verbessern." (Brousseau 1986a, S. 28) (Hervorhebung durch mich in Fettdruck).

bestimmtes Wissen sind.

*Was die Positionen "Lehrer" und "Schüler" definiert, ist das Projekt des didaktischen Systems, das darin besteht, von einem Anfangszustand zu einem Endzustand in Bezug auf das Wissen zu gelangen, um das es beim Lernen geht.*

Aus der Sicht der Beziehung zum Wissen gibt es eine *Asymmetrie*, die für das didaktische System konstitutiv ist. Wir würden nicht sagen, dass der Schüler vor dem Unterricht keine Beziehung zum Wissen hat, sondern lediglich, dass diese Beziehung im Anfangszustand wenig oder nicht angemessen ist. Ohne die Annahme dieser Asymmetrie ist das Konzept eines didaktischen Systems nicht sinnvoll (Margolinas 1993, S. 227)).

Der Lehrer unterscheidet sich vom Schüler dadurch, dass er "als ein Wissender" vorausgesetzt wird, aber auch dadurch, dass von ihm angenommen wird, dass er das, was der Schüler lernen muss, zu antizipieren weiß.

Darüber hinaus hat das didaktische System eine besondere Eigenschaft, nämlich das Ziel, zu verschwinden: Wenn der Lehrer in seiner Mission erfolgreich ist, muss er sich zurückziehen können, und *der Schüler muss seine Beziehung zum Wissen außerhalb seiner Anwesenheit aufrechterhalten können.*

## **1. Was aber ist Lernen in einer didaktischen Situation?**

Das Projekt des Schülers ist das Lernen.

Eine weit verbreitete Ideologie geht von einer einfachen Übertragungsbeziehung zwischen Lehren und Lernen aus: Der Schüler nimmt auf, was vom Lehrer vermittelt wird, vielleicht mit einigen Informationsverlusten. (Laborde 1989).

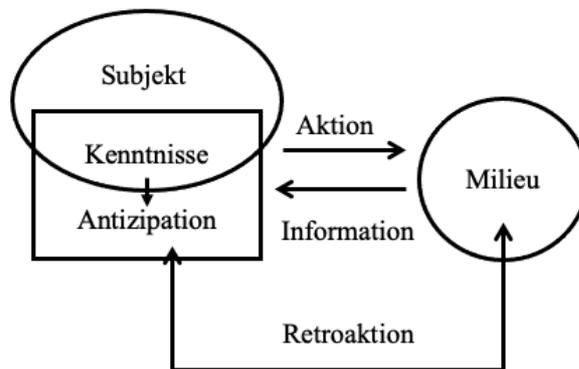
Zahlreiche Arbeiten haben gezeigt, wie falsch diese Sichtweise ist: Lernen ist weder ein reiner Transferprozess noch ein linearer, kontinuierlicher Prozess.

*Um das Lernen des Schülers zu verstehen, muss die Perspektive, die auf das Lernen eingenommen wird, präzisiert werden.*

*Psychologische Hypothese (Lernen durch Anpassung):*

Das Subjekt lernt, indem es sich an eine Umgebung anpasst (Assimilation und Akkommodation), die Widersprüche, Schwierigkeiten und Ungleichgewichte produziert. Diese Hypothese bezieht sich auf die Piagetsche psychogenetische Theorie.

**Abbildung 1.** Nicht-didaktische Lernsituation



*Beispiel. Nicht-didaktische Lernsituation: das Fahrrad (Brousseau 1988)*

*Situation 1:* Fahrrad mit vier Rädern, eines vorne und drei hinten

mit diesen kleinen Rädern lernt das Kind, in die Pedale zu treten und die Lenkstange nach dem folgenden impliziten Muster zu drehen:

- ich will nach rechts fahren, ich drehe den Lenker nach rechts;

- ich will nach links fahren, ich drehe den Lenker nach links.

$R \rightarrow R$

$L \rightarrow L$  (Brousseau 1988, S.62)

*Situation 2:* Fahrrad mit zwei Rädern (die beiden kleinen Räder hinten werden entfernt).

[...] Das Kind will geradeaus fahren, aber das Fahrrad neigt sich nach rechts und fährt somit nach rechts. Das Kind will also wieder nach links fahren und dreht den Lenker nach dem erworbenen impliziten Muster nach links. Es dreht den Lenker nach links und ... fällt!

Um das Gleichgewicht zu halten [...] muss er zuerst den Lenker auf die Seite drehen, auf die er sich neigt, um einen Schub zu erhalten, der ihn aufrichtet, also einem (momentanen) umgekehrten, aber unerlässlichen Schema folgend.

$L \rightarrow R$

$R \rightarrow L$

Der Wechsel von Schemata ist für das Lernen charakteristisch. (Brousseau 1988, S.62)

*Didaktische Hypothese*

Eine Umgebung ohne didaktische Absichten (d. h. nicht absichtlich so organisiert, dass Wissen gelehrt wird) reicht nicht aus, um in einem Subjekt all das Wissen zu induzieren, von dem die Gesellschaft wünscht, dass es sich dieses Wissen aneignet.

Die Lehrkraft muss also bei den Schülerinnen und Schülern die gewünschten Anpassungen durch eine sorgfältige Auswahl der Situationen hervorrufen, die sie ihnen vorschlägt.

Der Lehrer hat nicht die Aufgabe, die Schüler zum Lernen zu bringen, sondern dafür zu sorgen, dass sie *lernen können*. Seine Aufgabe ist nicht die Übernahme des Lernens - das bleibt außerhalb seiner Macht -, sondern die Übernahme der *Schaffung der Bedingungen für die Möglichkeit des Lernens*. (Chevallard 1986. S.39)

Die Konsequenzen dieser Annahmen führen zur Einführung eines Modells der didaktischen Situation: *adidaktische Situation / didaktischer Vertrag*.

## 2. Didaktischer Vertrag

### 2.1. Der didaktische Vertrag<sup>5</sup> stellt die impliziten Rechte und Pflichten von Schülern und Lehrern in Bezug auf unterrichtete Objekte des mathematischen Wissens dar.

Was jeder in Bezug auf ein Wissen tun oder nicht tun darf, beruht auf einer Reihe von expliziten, aber vor allem impliziten Regeln. Brousseau hat das Regelwerk, das die Verantwortlichkeiten jedes Einzelnen - Schüler und Lehrer - in Bezug auf ein gelehrtes mathematisches Wissen teilt und begrenzt, als didaktischen Vertrag bezeichnet.

Er hatte dieses Konzept 1978 und dann 1980 vorgeschlagen, um das Versagen von Grundschulern zu erklären, die *in allen Unterrichtsfächern außer Mathematik erfolgreich waren* (isoliertes Versagen in Mathematik): das isolierte Versagen entspringe nicht einer Unfähigkeit der Schüler zu lernen, sondern spezifischen didaktischen Verträgen für bestimmte mathematische Kenntnisse, die bestimmte Schüler daran hindern, in einen Lernprozess für diese Kenntnisse einzutreten.

Im Laufe einer Sitzung, die zum Ziel hat, einem Schüler ein bestimmtes Wissen zu lehren (*didaktische Situation*), interpretiert der Schüler die Situation, die ihm präsentiert wird, die Fragen, die ihm gestellt werden, die Informationen, die ihm geliefert werden, die Zwänge, die ihm auferlegt werden – alles das in Abhängigkeit von dem, was der Lehrer - bewusst oder unbewusst - *immer wieder*<sup>6</sup> in seiner Unterrichtspraxis dem Lernenden vorstellt. Wir interessieren uns insbesondere dafür, was in diesen Gewohnheiten spezifisch für das gelehrt Wissen ist (Brousseau 1980, S. 127)

#### *Beispiel 1 Mengenlehre zu Beginn der Sekundarstufe*

Um 1970 wurden in Frankreich in der sechsten Klasse (Kinder im Alter von 11-12 Jahren) die Begriffe "Element einer Menge" und "Menge und Untermenge" gelehrt<sup>7</sup>. Eine übliche Übung zu diesen Begriffen lautete wie folgt:

Welches der folgenden Zeichen  $\in \notin \subset$  ist richtig?

$\{a\}$  ....  $\{a, b, c\}$

$b$  ....  $\{a, b, c\}$

Eine Studie über einen solchen Fragebogen (Duval und Pluvinage 1977, zitiert von Tonnelle 1979) zeigt, dass das Antwortverhalten der Schüler durch einen Entscheidungsbaum geregelt wurde, der es ermöglichte, Entscheidungen nach folgendem Verfahren zu treffen:

- wenn es geschweifte Klammern "auf beiden Seiten" gibt, handelt es sich um Inklusion von Mengen
- wenn es nur "rechts" geschweifte Klammern gibt, handelt es sich um Zugehörigkeit von Elementen zu Mengen
- usw.

Die Schülerinnen und Schüler konnten dann die meisten Übungen zu diesem Thema in der sechsten Klasse richtig beantworten, ohne dass die *mathematische Bedeutung* der mengentheoretischen Beziehungen eine Rolle spielte.

---

<sup>5</sup> D.h. ein vom Forscher konstruiertes Modell

<sup>6</sup> Hervorhebung von mir

<sup>7</sup> Diese Art von Übungen ist aus dem aktuellen Unterricht in Frankreich verschwunden.

Schülerinnen und Schüler, die vor einer Reihe sich wiederholender Probleme stehen, werden dazu gebracht, implizite Regeln zu lernen (wie hier das Vorhandensein oder Fehlen von geschweiften Klammern), die ihnen eine ökonomische Antwort auf das gestellte Problem ermöglichen.

### **Beispiel 2: Faktorisierung in der Mittelstufe<sup>8</sup>**

Der Lehrer erwartet von einem Schüler der Mittelstufe, der mit der Frage "Faktorisiere  $16x^2 - 4$ " konfrontiert wird, dass er die Gelegenheit erkennt, die Faktorisierungsregel  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  anwendet und  $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$  antwortet, und dass er bei der Frage "Faktorisiere  $4x^2 - 36$ " eine einfache Faktorisierung erkennt:  $4x^2 - 36 = 4x(x - 9)$ .

Die völlig korrekten Antworten  $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$ ,  $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$  oder  $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - \frac{1}{4x^2})$  mit  $x \neq 0$ <sup>9</sup> werden aussortiert oder haben keine Gelegenheit, in Erscheinung zu treten, *nicht weil sie eine zuvor formulierte mathematische Bedingung<sup>10</sup> nicht erfüllen, sondern als abweichende Handlung von einem Verhaltenskodex.*

Die Macht des Lehrers in seiner Klasse besteht nicht darin, die Antwort  $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$  zu verbieten (genauer gesagt: *direkt zu verbieten*), sondern die Antwort  $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$  zu erzeugen. Seine Macht besteht weniger darin, die "falschen Antworten" zu benennen, sondern vielmehr darin, *die richtige Antwort hervorzurufen - die implizit die anderen Antworten als falsch benennt.* (Chevallard 1985, S.74)

Die Existenz impliziter Regeln, die das Verhalten der Schüler und das der Lehrkraft stark strukturieren, verändert den Status des Fehlers: Ein Fehler wird eine zulässige und falsche Antwort sein. Der Fehler taucht also als Fehler vor dem Hintergrund eines Musters auf, das den Verhaltenskodex einhält: Die Antwort  $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - 1/4x^2)$  ist wahr, aber nicht zulässig, die Antwort  $16x^2 - 3 = (4x - 3)(4x + 1)$  ist fehlerhaft, d. h. *zulässig und falsch.*

Was wir in Bezug auf die Faktorisierung gezeigt haben, ist kein pathologischer Fall in Bezug auf das Unterrichten eines Wissens, sondern wir haben es verwendet, um einen allgemeinen Mechanismus aufzuzeigen, der bei der didaktischen Kommunikation von Wissen zum Tragen kommt. Die Untersuchung des didaktischen Vertrags über ein Wissen ermöglicht es, die Grenzen der Bedeutung des gelehrtens Wissens für den Schüler zu ziehen.

## **2.2 Didaktischer Vertrag und Verhandlungen zwischen Schülern und Lehrern über das Wissen**

Im Laufe der Wissensvermittlung werden die Regeln für die Kommunikation über Wissensgegenstände zwischen Schülern und Lehrern aufgestellt, verändert, gebrochen und neu geknüpft, je nachdem, wie viel Wissen erworben wird, wie es sich entwickelt und welche Geschichte entsteht. Diese Regeln liegen nicht in einer einzigen, zeitlich fixierten Form vor, sondern sind im Gegenteil das Ergebnis immer neuer Verhandlungen.

Einerseits gehorchen die Interaktionen zwischen Lehrern und Lernenden lokal stabilen Regeln, andererseits sind diese nicht unveränderlich.

Diese Verhandlung bringt eine Art Spiel hervor, dessen vorläufig stabile Regeln es den Protagonisten und insbesondere dem Schüler ermöglichen, Entscheidungen in einer

---

<sup>8</sup> Nach Tonnelle J. (1979) und Chevallard (1985)

<sup>9</sup> die in der zehnten Klasse eine angemessene Antwort sein wird, wenn es um die Grenzwerte von Polynomfunktionen geht.

<sup>10</sup> Wie Faktorisieren in  $\mathbb{Z}[X]$  (Menge der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten)

gewissen Sicherheit zu treffen, die notwendig ist, um ihm die für die Aneignung charakteristische Unabhängigkeit zu sichern. (Brousseau 1986b, S.55)

Der Vertrag ist spezifisch für die auf dem Spiel stehenden Kenntnisse und daher notwendigerweise vergänglich: Die Kenntnisse und sogar das Wissen entwickeln und verändern sich, während der pädagogische Vertrag dazu neigt, stabil zu sein. Die Momente des Bruchs ermöglichen den experimentellen Nachweis des didaktischen Vertrags. (Brousseau 1988a, S.322)

Dieser Aushandlungsprozess ist einer Reihe von Paradoxien unterworfen. Wir werden hier nur eine davon untersuchen: Der Lehrer darf dem Schüler nicht sagen, was er tun soll (sonst erfüllt er seine Rolle als Lehrer nicht), und doch muss er dafür sorgen, dass der Schüler die erwartete Antwort produziert (sonst hat er seinen Unterricht nicht erfolgreich durchgeführt).

Ähnlich verhält es sich, wenn der Schüler akzeptiert, dass die Lehrkraft ihn über die Ergebnisse unterrichtet, dann stellt er sie nicht selbst fest und lernt sie daher nicht. Wenn er hingegen jegliche Information seitens der Lehrkraft ablehnt, dann bricht er die didaktische Beziehung ab.

Brousseau hat verschiedene Verhandlungsmuster charakterisiert, um von den Schülern die erwartete Antwort zu erhalten (die er kennt und die der Schüler nicht kennt). Der Topas-Effekt<sup>11</sup> ist eine dieser Formen: Der Lehrer versucht, die Bedeutung der Antwort so reichhaltig wie möglich zu gestalten. Wenn dies nicht gelingt, fügt er sinnreduzierende Informationen hinzu, bis hin zum Akzeptieren von Bedingungen, die die Antwort des Schülers hervorrufen, ohne dass dieser auch nur die geringste Bedeutung investieren konnte.

### ***Beispiel 3: Zeichnen der Symmetrieachse mit Lineal ohne Maßstab und Geodreieck***

*(Belege: siehe Anhänge II und III)*

Der Plan der Lehrkraft ist es, dass die Schülerinnen und Schüler die folgenden geometrischen Eigenschaften verwenden, um das Zeichnen der Symmetrieachse zu begründen:

P<sub>2</sub> (Orthogonalitätseigenschaft): Die Symmetriegerade einer Figur ist orthogonal zu der Strecke, die zwei symmetrische Punkte verbindet.

P<sub>3</sub> (Inzidenzeigenschaft): Seien (A, A') und (B, B') zwei symmetrische Punktepaare: Der Schnittpunkt der Geraden (A, B) und (A', B') liegt, wenn er existiert, auf der Symmetrieachse.

*Die Wahl der Instrumente (Lineal ohne Skala und Geodreieck) sollte den Rückgriff auf P<sub>1</sub> die Eigenschaften der Mittelpunkte blockieren.*

P<sub>1</sub> (Eigenschaften der Mittelpunkte): Die Symmetrieachse einer Figur verläuft durch die Mittelpunkte aller symmetrischen Punktepaare.

Der Lehrer will ein geometrisches Konstruktionsverfahren (das keine mathematische Konstruktion im Sinne von Felix Klein 1846<sup>12</sup> ist), d. h. der Lehrer arbeitet nicht am materiellen Objekt, sondern am geometrischen Objekt, das wir als Figur bezeichnen. Für ihn ist es ein theoretisches Problem, die Kontrolle der Linienführung erfolgt durch Bezugnahme auf die geometrischen Eigenschaften P<sub>2</sub> und P<sub>3</sub> (hier) der geometrischen Figur.

---

<sup>11</sup> in Anlehnung an das Theaterstück "Topaze" des Schriftstellers Marcel Pagnol, in dem ein Lehrer immer mehr Informationen hinzufügt, damit der Schüler keine Rechtschreibfehler macht, bis hin zur Karikatur: "des moutonssees étai-hunt réunisse...".

<sup>12</sup> Siehe Anhang I.

In den vorherigen Aufgaben (Abbildungen von Gruppe 1) wurden die Probleme durch "die Eigenschaft der Mitte" gelöst. Die Anwendung dieser Eigenschaft war erfolgreich. Für die Schülerinnen und Schüler (zumindest in Gruppe 3) ist es ein praktisches und materielles Problem: die Mittelpunkte zweier paralleler Segmente zu finden. Man versucht also, den materiellen Verlauf der Symmetrieachse mithilfe der Messung herzustellen, und die Kontrolle kann mit Bezug auf das Falten erfolgen, wie es übrigens ein Schüler vorschlägt, oder durch die Kontrolle der Messgenauigkeit.

Der Diskurs über eine Zeichnung ist immer mehrdeutig: Er kann sich auf die geometrische Figur (die die Zeichnung darstellt) oder auf die Zeichnung selbst beziehen. Die Reden der Lehrkraft und der Schülerinnen und Schüler sind von dieser Mehrdeutigkeit nicht ausgenommen.

Die Lehrkraft versucht, die Schüler dazu zu bringen, eine Antwort zu geben, die der Anwendung der Eigenschaften  $P_2$  und  $P_3$  entspricht: Sie muss die auf  $P_1$  basierenden Antworten disqualifizieren. Zu diesem Zweck und an mehreren Stellen (9, 13, 17, 19, 36, 37, 41, 44, 46, 48 und 77) bezieht sie sich auf die Genauigkeit, um die auf  $P_1$  basierenden Antworten in Frage zu stellen, und dann (77), um zu schlussfolgern!

Dies ist eine paradoxe Situation: Der Lehrer möchte, dass die Genauigkeit geometrisch ist, kann aber die Lösung nicht geben. Um die von Gruppe 3 vorgeschlagenen Lösungen zu disqualifizieren, verwendet er ein Genauigkeitsargument, das die Schüler in einer Messproblematik bestärkt: Für sie erfordert eine höhere Genauigkeit eine größere Sorgfalt beim materiellen Messvorgang (vgl. Gruppe 3 und François). Dieses Argument wird zum Autoritätsargument.

Indem die Lehrkraft versucht, die Schülerinnen und Schüler dazu zu bringen, die von ihr gewünschte Antwort zu produzieren, verändert sie die Situation. Der letzte Schüler weiß nicht unbedingt, dass und warum er eine Antwort produziert hat: Er antwortet in Bezug auf die Erwartungen der Lehrkraft. Es gibt keine Erklärung dafür, warum es richtig ist, warum es falsch ist.

Hier kann man auf den Topas-Effekt verweisen: Die erwartete Antwort konnte vom Schüler als Lösung des ursprünglichen Problems nicht produziert werden; die Lehrkraft war gezwungen, die Bedingungen für die Produktion der Antwort einzuschränken (Verringerung der Unsicherheit des Schülers), bis die erwartete Antwort erreicht wurde. Die Bedeutung dieser erzwungenen Antwort für die Schülerinnen und Schüler wird sehr begrenzt.

Die vom Forscher geschaffenen Bedingungen (Auswahl der verfügbaren Instrumente) reichten nicht aus, um die Schülerinnen und Schüler dazu zu bringen, ihr Grundverfahren zu ändern, das darin besteht, durch Messen die Mitte von Strecken zu suchen: Das Grundverfahren konnte durch Anpassung der Instrumente mit geringeren Kosten funktionieren.

### **2.3 Unterricht und Vertragsbrüche**

Jeder Unterricht eines neuen Wissensgegenstandes führt zu Vertragsbrüchen in Bezug auf alte Wissensgegenstände und zur Neuaushandlung neuer Verträge: Das Lernen des Schülers erfolgt um den Preis dieser Brüche, die der Lehrer aushandeln muss.

#### ***Beispiel 4: Status von Zeichnungen im Geometrieunterricht***

In der Grundschule lernen die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit Zeicheninstrumenten, um grafische Fähigkeiten zu entwickeln. Geometrische Zeichnungen (Dreiecke, Rechtecke usw.) sind dann materielle Zeichnungen, mit denen gearbeitet wird und deren Maße überprüft werden: Sie sind die Objekte, die untersucht werden.

In der Mittelstufe, insbesondere ab der vierten Klasse (Schüler im Alter von 13-14 Jahren, nach der in Deutschland üblichen Zählung: der 6. Klasse; Anm. des Übersetzers), muss dieser erste Vertrag gebrochen werden: Der Schüler muss Beweise nicht für die Zeichnung selbst, sondern für die abstrakten und idealen Objekte (auch Dreiecke, Rechtecke usw. genannt) erbringen, die die materielle Zeichnung darstellt (neuer didaktischer Vertrag über Zeichnungen). Beispiel 3 ist ein Beispiel für die (schwierige) Aushandlung dieses neuen Vertrags.

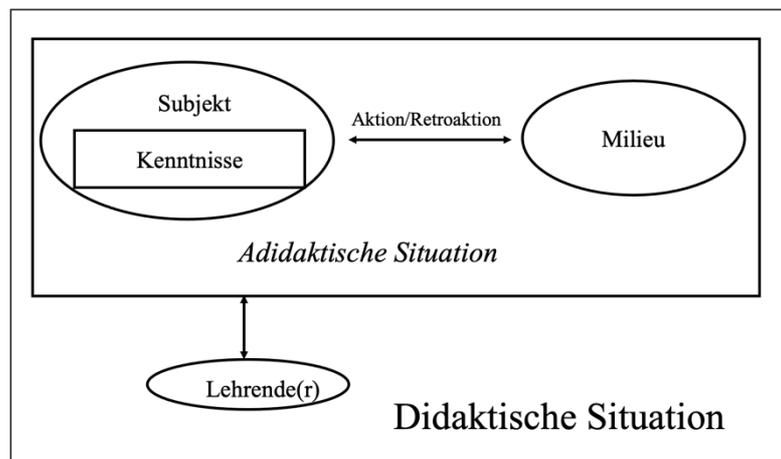
Betrachten wir die folgende Frage: "Überprüfen Sie, ob die Strecken AB und CD gleich lang sind"? Im ersten Vertrag muss der Schüler eine sorgfältige Zeichnung anfertigen und mit Zirkel und Lineal die Überprüfung an den gezeichneten Strecken durchführen. Im zweiten Fall muss er nach geometrischen Eigenschaften der "Figur" (die die Zeichnung darstellt) suchen, um den Beweis für die Gleichheit zu erbringen.

Dieser Wechsel des didaktischen Vertrags, der für viele Schüler Schwierigkeiten und sogar Misserfolge mit sich bringt, ist *für das Erlernen des Beweisens in der Geometrie notwendig*. Man kann ihn folgendermaßen charakterisieren: Von der Effizienz, die vom praktischen Schüler verlangt wird (Geometrie als Ort des *genauen* Zeichnens), geht man zur Strenge des theoretischen Schülers über (Geometrie als Ort der rationalen Untersuchung von Figuren).

### 3. Adidaktische Situation

Beziehen wir uns auf den Standpunkt, den wir zum Lernen einnehmen, wird das Lernen des Schülers durch eine adidaktische Situation in der von der Lehrkraft gesteuerten didaktischen Situation modelliert (Abbildung 2).

**Abbildung 2.** Didaktische Situation und adidaktische Situation



*Milieu* (nach Brousseau 1988a): antagonistisches System (gegenüber dem des Schülers) in der didaktischen Situation, das die Wissenszustände auf eine vom Schüler nicht kontrollierte Weise verändert. Das Milieu verhält sich wie ein nicht zweckgebundenes System. Es hat einen relativen Charakter.

Es spielt eine zentrale Rolle beim Lernen, als Ursache für Anpassungen und im Unterricht als Referenz und epistemologisches Objekt. (Brousseau 1988a, S.321)

*Milieu* (nach Chevallard 1992): Die Elemente, die das Milieu ausmachen, sind diejenigen, die subjektiv, d. h. für die Subjekte der Institution, als selbstverständlich, transparent und unproblematisch erscheinen.

Die Lehrkraft wird versuchen, eine Situation anzubieten, in der die Schülerinnen und Schüler ihr Verhältnis zum Wissensobjekt aufbauen oder dieses Verhältnis als Antwort auf die

Anforderungen des Milieus und nicht auf den Wunsch der Lehrkraft verändern. Eine solche Situation ist eine *Situation, in der das, was man tut, den Charakter einer Notwendigkeit in Bezug auf Verpflichtungen hat, die weder willkürlich noch didaktisch sind, sondern aus der Ordnung des Wissens stammen*. Der Lehrer muss es schaffen, dass der Schüler die didaktischen Voraussetzungen aus der Situation entnimmt, dass die Lösung des Problems für den Schüler unabhängig vom Wunsch des Lehrers wird: Die *Devolution*, die der Lehrer anstrebt, damit der Schüler lernt, ist also die einer *nicht didaktischen Situation* (nach dem Vorbild der Situation mit dem Fahrrad).

Es gibt eine Verschiebung der Verantwortung in Bezug auf das Wissen von der Lehrkraft auf den Schüler: Der Schüler in einer adidaktischen Situation wird verantwortlich für seine Beziehung zum Wissen.

Es ist wichtig, in Brousseaus Theorie der didaktischen Situationen die Unterscheidungen zwischen didaktischen, *adidaktischen und nicht-didaktischen Situationen* zu verstehen: Eine wissensspezifische nicht-didaktische Situation ist eine Situation *ohne* (offizielles) didaktisches Ziel, bei der sich die Beziehung zum Wissen als ökonomisches Handlungsmittel herausbildet (siehe. Das Fahrrad); eine adidaktische Situation ist eine Situation mit didaktischem Zweck (d. h. vom Lehrer organisiert), in der das Subjekt antwortet, *als ob* die Situation nicht didaktisch wäre (d. h. das Subjekt antwortet unabhängig von den Erwartungen des Lehrers): *Es gibt dann in der didaktischen Situation Elemente, die ein adidaktisches Milieu bilden, das dem Schüler antagonistisch gegenübersteht*.

Lernen ist eine *Veränderung* des Verhältnisses zum Wissen, das vom Schüler selbst hergestellt wird, eine Veränderung, die die Lehrkraft nur durch (freiwillige oder unfreiwillige) Entscheidungen über die Werte von *Variablen der adidaktischen Situation* hervorrufen kann: *didaktische Variablen*.

Die Modellierung in Form einer adidaktischen Situation ermöglicht die Gestaltung von Didaktik-Engineering (« *ingénierie didactique* »), bei dem im besten Fall die Bedingungen, die das Lernen des Schülers bewirken, "berechnet" wurden (siehe weiter unten die Situation "Vergrößerung des Puzzles").

### **3.1 Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Situation als adidaktisch erlebt werden kann?**

Es müssen mindestens die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

- Der Schüler kann eine Antwort in Betracht ziehen, aber diese anfängliche Antwort (*Grundverfahren, das sich auf früheres Wissen und Kenntnisse bezieht*) ist nicht die Antwort, die gelehrt werden soll: Wenn die Antwort bereits bekannt wäre, wäre dies keine Lernsituation.

Ohne eine grundlegende Strategie versteht der Schüler das Spiel nicht, auch wenn die Anweisung klar ist. (Brousseau 1988, S.61)

- Dieses grundlegende Verfahren muss sich sehr schnell als unzureichend oder ineffektiv erweisen, sodass der Schüler gezwungen ist, Anpassungen, Änderungen an seinem Wissenssystem vorzunehmen. Es besteht eine Unsicherheit des Schülers hinsichtlich der zu treffenden Entscheidungen.

- Das angestrebte Wissen ist *a priori* erforderlich, um von der grundlegenden zur optimalen Strategie zu gelangen.

- Es gibt ein Milieu für die Validierung: Das Milieu ermöglicht Rückkopplungen

- Der Schüler/die Schülerin kann immer wieder beginnen.

Lernen wird darin bestehen, die Strategien und das mit ihnen verbundene Wissen zu

ändern. (Brousseau 1988, S.61)

### 3.2. Welche Elemente der Situation werden im Milieu modelliert?

Das Milieu bezeichnet in der didaktischen Situation das System, das dem Schüler antagonistisch gegenübersteht, d. h. das, was die Wissenszustände auf eine Weise verändert, die vom Schüler nicht kontrolliert wird: Das Milieu verhält sich wie ein nicht zweckgebundenes System. Es hat einen relativen Charakter. (Brousseau 1998)

Das allgemeine Schema der Interaktionen von Schüler und Milieu in einer adidaktischen Situation entspricht dem für eine nicht-didaktische Lernsituation (vgl. Abbildung 1).

Interaktionen sind bedeutsam für die Fähigkeit des Systems (Subjekt  $\leftrightarrow$  Milieu), nach Störungen wieder ein Gleichgewicht herzustellen oder sich sogar weiterzuentwickeln, wenn die Störungen so groß sind, dass dies notwendig ist.

Wir bezeichnen als Problem das Ergebnis einer Störung des Gleichgewichts der Subjekt/Milieu-Beziehung (...), aber das macht nur Sinn, wenn diese Störung sowohl vom Subjekt als auch vom Milieu bezeugt werden kann. Eine Störung, die das Subjekt nicht wahrnehmen kann oder über die das Milieu nicht erkennbar berichten kann, kann nicht zu Problemen führen. (Balacheff 1995, S. 226)

Als *Feedback* (« *retroaction* ») bezeichnet man eine bestimmte Information, die vom Milieu geliefert wird: d. h. eine Information, die vom Schüler als positive oder negative Sanktion in Bezug auf seine Handlung aufgenommen wird und die es ihm ermöglicht, diese Handlung anzupassen, eine Hypothese zu akzeptieren oder zu verwerfen, zwischen mehreren Lösungen zu wählen.

Ebenso wie die im Milieu modellierten Elemente nicht unbedingt materiell sein müssen (es kann altes, stabilisiertes, selbstverständliches Wissen des Subjekts sein), können die Handlungen des Subjekts "geistige", nicht sichtbare Handlungen sein.

Die Entwicklung der adidaktischen Situation, in der sich ein Schüler befindet, kann als eine Abfolge von Zuständen unter erlaubten oder möglichen Zuständen gelesen werden. Das Milieu modelliert in der adidaktischen Situation das, was der Schüler *nicht kontrolliert*, was aber sein Wissen verändert. Die Prozeduren der Schüler sind das, was man an der Entwicklung des Wissens des Schülers *beobachten kann*.

In einer adidaktischen Situation gibt es notwendigerweise Unsicherheit.

Wenn es keine Ungewissheit (im Sinne von relevanten Wahlmöglichkeiten) über die Endzustände der Situation mehr gibt, bedeutet dies, dass das Subjekt die Antwort kennt, dass es *weiß*: Man kann sagen, dass die Situation dann vom Schüler kontrolliert wird (und dass es in Bezug auf diese adidaktische Situation kein Milieu mehr gibt).

[...] Wissen *reduziert* die Unsicherheit des Subjekts, indem es Wahlmöglichkeiten beseitigt.

Die Fragen, die das System Subjekt/Milieu (*das untrennbar mit dem Begriff der adidaktischen Situation verbunden ist*) zu stellen erlaubt, lauten daher wie folgt:

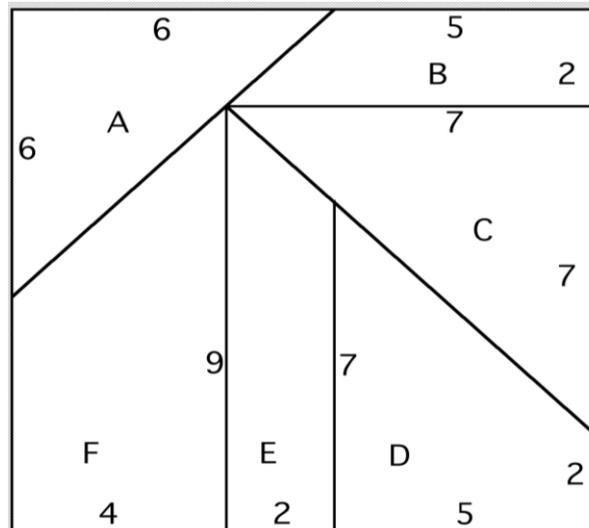
Was kann in einer didaktischen Situation (*a priori*) die Veränderung der Wissenszustände des Schülers bewirken? Oder sie (*a posteriori*) erklären?

### 3.3. Beispiel. *A-priori-Analyse* einer didaktischen Situation "Vergrößern des Puzzles " (Nach G. und N. Brousseau 1987)

#### Material

- 6-8 gezeichnete Puzzles auf rechteckigen Kartons mit den Maßen 20 cm x 15 cm (siehe Abbildung 3).

Abbildung 3. Darstellung des Puzzles



**Legende:** Die Zahlen in dieser Darstellung geben die cm-Maße einiger Seiten der Puzzleteile an.

- karierte Papierbögen
- ein Doppeldezimeter pro Kind

#### Aufgabenstellung

"Hier sind Puzzles. Sie werden ähnliche Puzzles herstellen, die größer sind als die Vorlagen. Beachten Sie dabei folgende Regel: Das Segment, das auf der Vorlage 4 cm lang ist, muss auf Ihrer Reproduktion 7 cm lang sein.

Ich gebe jedem Team ein Puzzle. Jeder Schüler muss ein oder zwei Teile herstellen. Wenn ihr fertig seid, müsst ihr in der Lage sein, die gleichen Figuren wie in der Vorlage nachzubauen".

#### Ablauf

Die Kinder werden in Teams von 4 oder 5 Personen aufgeteilt. Nach einer kurzen Absprache im Team teilen sie sich auf, um ihr(e) Stück(e) herzustellen.

Die Lehrkraft hängt eine vergrößerte Darstellung des vollständigen Puzzles an die Tafel.

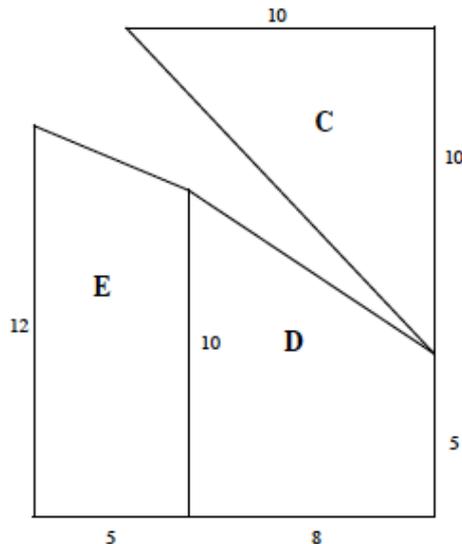
#### *A priori Analyse*

*Zwei Strategien, die keine Erfolgsstrategien sind*

Beide Strategien bauen auf Wissen über natürliche Zahlen und Vergrößerungen auf: Um zu vergrößern, addiert man oder multipliziert man mit einer ganzen Zahl. Die *Bedeutung der Multiplikation mit einer ganzen Zahl ist die der wiederholten Addition*. Außerdem erhält man eine *größere* ganze Zahl, wenn man zu einer Zahl eine positive ganze Zahl hinzufügt (und sie daher mit einer positiven ganzen Zahl multipliziert).

Strategie 1: 'Addiere 3 zu den Längenmaßen der "rechten Winkel"'.  
 Die Anzahl der Seiten jedes Stücker wird beibehalten, ebenso die rechten Winkel: Zu den Seitenmaßen der rechten Winkel wird 3 addiert.

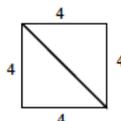
Ergebnis dieses Verfahrens an den "vergrößerten" Puzzleteilen C, D, und E:



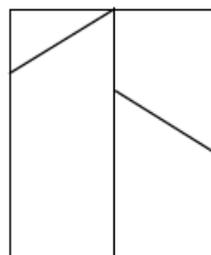
Es gibt eine Rückkopplung des materiellen Milieus: Die Stücke passen nicht einmal grob zusammen, d. h. das Nicht-Passen der Stücke ist unbestreitbar wahrnehmbar.

- Gültigkeitsbereich des Verfahrens 1.

Der Gültigkeitsbereich im engeren Sinne dieses Verfahrens (d. h. der die geometrische Form der Teile respektiert) ist die Gesamtheit der Puzzles, bei denen alle Teile aus rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken mit den Seitenlängen 4 bestehen, z. B. :

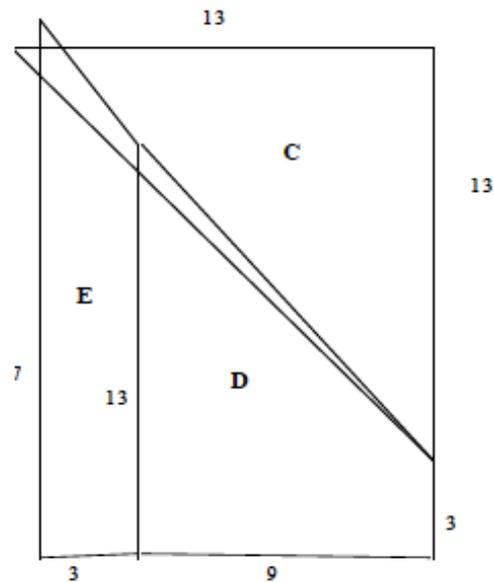


Wenn wir den Gültigkeitsbereich in Bezug auf das materielle Milieu definieren und daher die Vergrößerung als gültig betrachten, wenn die Puzzleteile gut zusammenpassen, dann ist der Gültigkeitsbereich größer und umfasst auch Puzzles mit der Form "Rechteck", die durch das Zusammensetzen von Teilen "im rechten Winkel" (mit höchstens einer schrägen Seite) entstehen und so beschaffen sind, dass die Seiten des Rechtecks durch die gleiche Zahl unterteilt sind. Dann wird an jede Seite des Quadrats die gleiche Anzahl von Vielfachen von 3 angefügt.



Strategie 2: "Jede Maßnahme mit 2 multiplizieren und 1 entfernen".

Ergebnis dieses Verfahrens an den "vergrößerten" Puzzleteilen C, D, und E:



Es gibt eine Rückkopplung vom materiellen Milieu: Die Stücke passen nicht zusammen, aber für dieses Verfahren ist diese Fehlanordnung *wahrnehmungstechnisch fragwürdig*. Das Puzzle ist fast richtig, und die Schülerinnen und Schüler könnten denken, dass die schlechte Anordnung auf ungeschicktes Schneiden zurückzuführen ist. In diesem Fall kann eine andere Art von Feedback erforderlich sein, die sich auf die Beziehungen zwischen den Maßen des Ausgangspuzzles und den Maßen des "Bild"-Puzzles stützt.

Zum Beispiel haben wir für die Teile E, D und C im Anfangspuzzle die Beziehung, die ihre Anordnung charakterisiert:  $2 + 5 = 7$

Wie sieht es im "Bild"-Puzzle aus?

$$2 \rightarrow 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$5 \rightarrow 5 \times 2 - 1 = 9$$

$$7 \rightarrow 7 \times 2 - 1 = 13$$

und  $3+9 \neq 13$  Kriterium, das die Nichtanordnung der Teile im "Bild"-Puzzle dieses Verfahrens belegt und mit dem es eindeutig abgelehnt werden kann.

*Erkenntnis, die in dieser Situation durch das Scheitern dieser Strategien angestrebt wird*

Die Bedeutung der Multiplikation mit einer ganzen Zahl ist die der wiederholten Addition. Die Bedeutung der Multiplikation *mit einer rationalen Zahl* muss gegen diese erste Bedeutung konstruiert werden (erste Bedeutung aufgrund der notwendigen Vorrangigkeit der Konstruktion der ganzen Zahlen vor der Konstruktion der rationalen Zahlen).

In dieser Situation geht es darum, dass *die Schülerinnen und Schüler ganzzahlige Verfahren explizit ablehnen* (bei diesen Vergrößerungsverfahren spricht man oft vom additiven Modell) und *zumindest implizit eine Ablehnungsregel aufstellen*, die man wie folgt formulieren kann: "Wenn  $a + b = c$  im ursprünglichen Puzzle, dann  $f(c) = f(a + b) = f(a) + f(b)$  im vergrößerten Puzzle" (sonst passen die Teile nicht zusammen!).

Die Ablehnung dieses additiven Modells wird dann konstitutiv für die Bedeutung der

Multiplikation mit einer rationalen Zahl. Die lineare Anwendung, die Lösung dieses Problems, ist  $7/4$  d. h. eine rationale Zahl-Anwendung.

Diese erste Bedeutung der Multiplikation von Zahlen mit einer rationalen Zahl wird nach einem langen Lernprozess (Brousseau & Brousseau 1987) die Bedeutung der Abbildung eines rationalen Maßes unter einer linearen-rationalen Abbildung sein.

*Kann diese Situation als didaktisch erlebt werden?*

- Die Lehrkraft hat die Möglichkeit, ihre Interventionen auf neutrale Interventionen in Bezug auf das Wissen, das in dieser Situation auf dem Spiel steht, zu beschränken: Sie kann nur ermutigen und die Tatsachen feststellen, ohne besondere Anforderungen zu stellen.
- Es gibt ein Grundverfahren, das sich auf das Wissen über ganze Zahlen stützt: Tatsächlich ist das Wissen über ganze Zahlen gegenüber jeglichem Wissen über andere Zahlen primär, d. h. die Konstruktion jeder Zahlenmenge (wie z. B. der rationalen) stützt sich auf die Existenz der Menge der ganzen Zahlen. Bei diesem grundlegenden Verfahren werden die Operationen verwendet, die für ganze Zahlen definiert sind.
- Es gibt ein Milieu für die Validierung des Verfahrens, d. h. die Möglichkeit für die Schülerinnen und Schüler, ohne Eingreifen der Lehrkraft zu erkennen, ob ihr Verfahren richtig oder falsch ist: Das Milieu besteht für jeden Schüler aus allen "vergrößerten" Teilen des Puzzles, die von ihm und seinen Partnern unabhängig voneinander produziert wurden (Phase 2).
- Dieses Basisverfahren ist unzureichend, da das angestrebte Verfahren notwendigerweise eine rationale (nicht ganze!) Zahl mit einbezieht: Das Ergebnis des Basisverfahrens (das in Phase 1 erläutert wird) ist, dass die Stücke nicht zusammenpassen, wenn die kooperierenden Teammitglieder wieder zusammen arbeiten (Phase 3).

#### **4. Didaktische Variablen: Definitionen und Beispiele**

Die folgenden Definitionen sind Brousseaus Definitionen, die in zwei (bereits älteren<sup>13</sup>) Texten der zweiten Sommerschule gegeben wurden.

Ein Problemfeld kann aus einer Situation heraus entstehen, indem die Werte bestimmter Variablen verändert werden, was wiederum dazu führt, dass sich die Eigenschaften von Lösungsstrategien (Kosten, Gültigkeit, Komplexität...etc.) verändern [...].

Nur die Veränderungen, die die Hierarchie der Strategien beeinflussen, sind zu berücksichtigen (relevante Variablen), und unter den relevanten Variablen sind diejenigen, die ein Lehrer manipulieren kann, besonders interessant: Das sind die *didaktischen Variablen*. (Brousseau 1982a)

Diese Variablen sind für ein bestimmtes Alter insofern relevant, als sie unterschiedliche Verhaltensweisen steuern. Sie sind insofern didaktische Variablen, als man durch ihre Beeinflussung Anpassungen und Regulierungen hervorrufen kann: Lernprozesse. (Brousseau 1982b)

Brousseau betont also, wie wichtig es ist, für jede Situation Variablen zu berücksichtigen, deren Werteänderung einen Lernprozess auslösen kann (oder auch nicht). In dem Text (Brousseau 1982 b) analysiert er so eine *grundlegende Situation* (« *situation fondamentale* ») der

---

<sup>13</sup> Da diese beiden Texte nie offiziell veröffentlicht wurden, geben wir hier nicht die Seiten der Zitate an, die wir aus unseren persönlichen Unterlagen kopieren.

Subtraktion (für den Begriff der grundlegenden Situation siehe den Abschnitt 7).

**Beispiel.** *Didaktische Variablen der Situation "Vergrößerung des Puzzles".*

$$\bullet V_1 = (n, p)$$

wobei  $n$  und  $p$  die Zahlen sind, die das Proportionalitätsverhältnis definieren.

Die relevanten Werte sind:  $p = kn$  ( $k$  ganzzahlig);  $p = kn + n/2$  ( $k$  ganzzahlig, and  $n$  gerade);  $p/n$  dezimal (aber nicht eine halbe ganze Zahl);  $p/n$  rational nicht dezimal. Hier sind zum Beispiel ganzzahlige Paare, die jede der Kategorien veranschaulichen: Paare (4, 8), (4, 6), (4,7) (3, 7).

Eine Vergrößerung von 4 auf 8 bringt die Multiplikation mit 2 ins Spiel, die in Wirklichkeit die Addition  $4+4$  ist. Die Schülerin oder der Schüler bleibt beim additiven Modell und den ganzen Zahlen.

Eine Vergrößerung von 4 auf 6 wird oft als " $x$  plus die Hälfte von  $x$ " analysiert. Wir haben also ein Modell zwischen dem additiven und dem linearen Modell, das aufgrund des besonderen Status von "die Hälfte" dem additiven Modell "näher" ist, zumal in diesem Fall auch die Hälfte eine ganze Zahl ist.

Eine Vergrößerung von 4 auf 7 ermöglicht keinen einfachen Übergang, auch wenn es möglich ist, Halbierungen zu verwenden: [Die Vergrößerung von 4 auf 7 könnte als "2 mal  $x$  minus die Hälfte der Hälfte von  $x$ " interpretiert werden].

Es gibt einen informationellen Sprung, wenn man "von 3 auf 7 gehen" muss, da keine derartige Beziehung möglich ist. Man ist gezwungen, das Additive und die ganzen Zahlen zu verlassen.

Die Werte von  $V_1$  bringen die Bedeutung der Multiplikation mit einer rationalen Zahl ins Spiel, sie ermöglichen oder verhindern den Übergang von der Multiplikation mit einer ganzen Zahl (additives Modell, wiederholte Addition) zur Multiplikation mit einer rationalen Zahl (multiplikatives Modell, Abbildung durch eine lineare Funktion).

*$V_2 =$  Organisation der Interaktionen zwischen den Schülern*

Die Werte dieser Variable sind ein Tupel, das die verschiedenen Arten von Phasen im Zeitverlauf beschreibt: Einzelarbeit, Kooperation, Absprache, Konfrontation usw. In der Puzzlesituation wird sie wie folgt beschrieben: Absprache, dann Einzelarbeit, dann Konfrontation. Die Durchführung der letzten beiden Phasen ermöglicht eine echte Rückkopplung des Umfelds auf die in der ersten Phase beschlossene Strategie. Wenn man die Phasen auf eine einzige reduziert (Kooperation, um das vergrößerte Puzzle zu bauen), nimmt man dem Milieu seine Eigenschaft als Medium für die Validierung und der Situation ihren didaktischen Charakter.

*$V_3 =$  Konfiguration des Puzzles*

Die Werte sind auch Tupel, die die jeweiligen Unterteilungen der Seiten (durch eine gleiche Zahl oder nicht), die Maße der Teile usw. beschreiben. Die relevanten Werte dieser Variable sind diejenigen, die den Gültigkeitsbereich der grundlegenden Strategien betreffen. Hier werden die Maße so gewählt, dass das Verfahren "3 addieren" (von dem angenommen wird, dass es bei der großen Mehrheit der Schülerinnen und Schüler die Anfangsstrategie sein wird) dazu führt, dass Teile konstruiert werden, die offensichtlich, wahrnehmbar nicht zueinander passen.

$V_1$  befindet sich auf der Seite des *Wissens*, um das es geht (Multiplikation mit einer nichtdezimalen rationalen Zahl, die Ergebnis-Zahl als Bild unter einer lineare Abbildung)

$V_2$  ist konstitutiv für den adidaktischen Charakter der Situation.

$V_3$  ist mit dem Wissen der Schülerinnen und Schüler verbunden, da sie auf Annahmen über die grundlegenden Strategien der Schülerinnen und Schüler beruht.

Andere "Variablen" oder Einschränkungen scheinen in der Situation eine Rolle zu spielen. Zum Beispiel die Materialien, die den Schülern zur Verfügung stehen, kariertes Papier und ein Lineal. Sie werden in die Situation integriert, um den Bau der Teile zu erleichtern und Längen zu messen. Sie sind also mit dem Messen verbunden. Werden wir diesem Element der Situation den Status einer didaktischen Variablen verleihen? Um dies zu beantworten, kehrt man am besten zu dem Wissen zurück, das auf dem Spiel steht, d. h. dem Übergang vom additiven zum linearen Modell. Die Messung steht in dieser Situation nicht auf dem Spiel. Diese Elemente können in die Situation eingreifen, aber wir stellen die Hypothese auf (über die man argumentieren kann), dass ihr Vorhandensein oder Nichtvorhandensein die Situation nicht grundlegend verändert.

## 5. Analyse des Lernens in einer "gewöhnlichen" Unterrichtssituation

Der Begriff der adidaktischen Situation ist auch ein Modell zur Analyse des Lernens von Schülern in einer *gewöhnlichen Unterrichtssituation*. Dieses Modell führt zu folgenden Fragen: In welcher/welchen adidaktischen Situation(en) kann sich der/die Schüler(in) befinden? Dies läuft auf die Frage hinaus: Was können sie in dieser Unterrichtssituation lernen (Suche nach den möglichen Milieus)? Für welches Wissen?

*Es gibt in jedem Unterricht adidaktische Phasen*, die sich in der Regel der Kontrolle des Lehrers entziehen. Chevallard hat den Begriff der *didaktischen Zeit* eingeführt, um die spezifische Zeit der Institution Unterricht zu bezeichnen, eine Zeit, die durch die Verschiebung zwischen dem Zeitpunkt des Lehrens und dem Zeitpunkt des Lernens gekennzeichnet ist: Es gibt im Unterricht eine Fiktion einer homogenen didaktischen Zeit. In seiner Dissertation (1992) zeigt Alain Mercier, dass die offizielle Einführung neuer Wissensgegenstände die Beziehung zu bereits vorhandenen, naturalisierten, transparenten Gegenständen verändert. In diesem Fall wird dem Schüler eine Verantwortung für diese naturalisierten Wissensobjekte übertragen: Als alte Objekte hat der Schüler die Verantwortung, sie zu kennen. Dies kann dann eine adidaktische Phase für diese alten Gegenstände sein (alt in Bezug auf die Zeit, in der sie unterrichtet werden) und somit ein Moment des nachträglichen Lernens.

## 6. Unterschiedlicher Status von Wissen, unterschiedliche Arten von adidaktischen Situationen

Unter Bezugnahme auf die Tätigkeit des Mathematikers spricht Régine Douady (1986) von der *Werkzeug-Objekt-Dialektik*, um den Prozess der Statusänderung von Konzepten zu bezeichnen, ein Prozess, der in der Tätigkeit des Schülers angesichts eines Problems notwendigerweise stattfindet: Sie unterscheidet für ein und dasselbe Konzept drei Status, nämlich den des Objekts, den der impliziten Werkzeuge und den der expliziten Werkzeuge.

Brousseau unterscheidet für sich drei Funktionen (und damit drei Status) des Wissens: Handeln, Formulieren und Validieren. Es sind die Arten von *Situationen*, die es ermöglichen, die Funktionen eines Wissensobjekts zu charakterisieren.

In (adidaktischen) Handlungssituationen erarbeitet ein Subjekt (ein Schüler) implizites Wissen als Mittel zur Einwirkung auf ein Milieu (für die Handlung): Dieses Milieu liefert ihm Informationen und Rückmeldungen als Reaktion auf seine Handlungen.

In (adidaktischen) Formulierungssituationen expliziert das Subjekt (der Schüler) *selbst* das

implizite Modell seiner Handlungen. Damit diese Formulierung für ihn einen Sinn ergibt, muss sie selbst ein Mittel zur Einwirkung auf ein Milieu sein, das ihm Informationen und Rückmeldungen liefert: Diese Formulierung muss es ermöglichen, ein Ergebnis zu erzielen oder andere dazu zu bringen, ein Ergebnis zu erzielen. Kommunikationssituationen zwischen Schülergruppen können ein Beispiel für solche Situationen sein.

In (adidaktischen) Validierungssituationen schließlich wird die empirische Validierung aus dem Umfeld unzureichend: Um einen Gegner zu überzeugen, muss das Subjekt intellektuelle Beweise erarbeiten. Zum Beispiel werden in der Mathematik explizite Aussagen über die Situation zu Behauptungen, deren Richtigkeit und Relevanz nach gemeinsamen Regeln bewiesen werden müssen, um daraus ein allgemein bekanntes Theorem zu machen.

## 7. Grundlegende Situation (« situation fondamentale »)

### 7.1 Einleitung

In adidaktischen Phasen (die durch eine adidaktische Situation modelliert werden können) muss der Schüler ein Problem lösen, für das er verantwortlich ist. Die zentrale Frage lautet nun: Wie kann sichergestellt werden, dass das gestellte Problem in Bezug auf das Wissen *relevant* ist? Welche Beziehung hat das gestellte Problem *zum Zweck* des Wissensgegenstandes, um den es im Unterricht geht? Welche Bedeutung hat das Problem für das Wissen?

Dies sind epistemologische Fragen.

#### *Epistemologische Hypothese*

Wir werden auch annehmen, dass es für jedes Wissen eine Familie von Situationen gibt, die ihm eine korrekte Bedeutung verleihen können. (Brousseau 1986, S. 324)

*Korrekt* in Bezug auf die Geschichte dieses Konzepts, in Bezug auf den sozialen Kontext, in Bezug auf die wissenschaftliche Gemeinschaft.

Für jedes Wissen ist es möglich, ein formales, *kommunizierbares* Spiel zu konstruieren, *ohne dieses Wissen zu verwenden*,<sup>14</sup> und dessen optimale Strategie es dennoch bestimmt. (Brousseau 1988a, S.314–315)

Eine *grundlegende Situation* eines Wissens ist ein *Modell* für eine Familie von *nicht-didaktischen* Situationen, die spezifisch für das angestrebte Wissen sind.

Dieses Modell ist grundlegend:

- in Bezug auf das Wissen: Das Spiel muss so beschaffen sein, dass das Wissen in der gewählten Form als die Lösung oder als das Mittel zur Festlegung der optimalen Strategie erscheint. [...]
- in Bezug auf die Unterrichtsaktivität: Das "Spiel" muss es ermöglichen, alle in Klassen beobachteten Situationen darzustellen [...] selbst die am wenigsten „zufriedenstellenden“, sobald es ihnen gelingt, die Schüler dazu zu bringen, eine Form des angestrebten Wissens zu erlernen. Er muss alle Varianten hervorbringen können, auch die degeneriertesten. Sie werden durch die Wahl bestimmter Variablen, die für diese Situation charakteristisch sind, erreicht. (Brousseau 1986a, S. 334-335)

Eine grundlegende Situation muss mindestens Folgendes ermöglichen (durch ein Spiel, eine Variation mit den Werten von didaktischen Variablen):

---

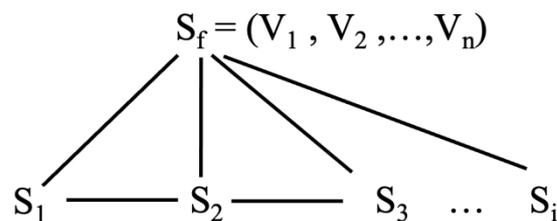
<sup>14</sup> Hervorhebungen nicht im Original!

- eine effektive Genese von Wissen, d. h. eine Genese von Situationen, die repräsentativ für die verschiedenen Bedeutungen eines Wissens (die verschiedenen Gelegenheiten der Verwendung dieses Wissens) sind,
- eine "Neulektüre" dieser Genese entlang der Logik der Wissensorganisation.

Eine "grundlegende" Situation kann durch eine endliche Menge von Variablen dargestellt werden, die in Bezug auf die Bedeutung des Wissens, um das es im Unterricht geht, relevant sind. Umgekehrt werden durch das Setzen von Werten für diese Variablen besondere Situationen erzeugt, die dem Wissen eine besondere Bedeutung verleihen.

Das folgende Schema (Abbildung 4) veranschaulicht unsere Ausführungen:

**Abbildung 4.** Grundlegende Situation



## 7.2 Beispiel. *A-priori*-Analyse einer grundlegenden Situation :

**"Das Spiel des Rennens nach  $n$ "** (« Le jeu de la course à  $n$  »; nach G.Brousseau 1978)

**Spiel 1:** "Das Rennen nach 20".

### *Spielregel*

Bei diesem Spiel sagen zwei Gegner abwechselnd eine Zahl. Für jeden Spieler geht es darum, zuerst 20 zu sagen.

Der erste Spieler, der an der Reihe ist, darf 1 oder 2 sagen. Man darf nur die Zahlen sagen, die sich ergeben, wenn man 1 oder 2 zu der Zahl addiert, die der Gegner gerade gesagt hat.

*Führen Sie einige Partien durch und formulieren Sie eine Gewinnstrategie (d. h. eine Strategie, mit der man gewinnt, egal was der Gegner tut).*

Antwort: Es gewinnt derjenige, der als Erster ausspielt und 2 sagt, dann 5, 8, 11, 14, 17, 20 (was er sagen kann, egal was der Gegner sagt).

Kommentar: Sehr schnell "weiß" man, dass derjenige, der 17 sagt, gewonnen hat: Das Rennen um 20 wird zum Rennen um 17. Man kann also die Argumentation wiederholen. Tatsächlich findet sich so die Gewinnerfolge "abwärts": 20, 17, 14 etc.

**Die folgenden Spiele werden mit denselben Gegnerteams gespielt.**

**Spiel 2:** "Das Rennen nach 27".

Es geht darum, 27 als Erster zu sagen. Derjenige, der anfängt, darf eine ganze Zahl *ungleich* 4 sagen. Man darf nur dann eine Zahl sagen, wenn man sie erhält, indem man zu der Zahl, die der Gegner gerade gesagt hat, eine Zahl ungleich 4 addiert.

*Formulieren Sie eine erfolgreiche Strategie.*

Um zu erreichen, dass man 27 als erstes sagt, welche Zahl muss man direkt davor sagen?

(Analoges Denken wie bei 17 im 20er-Rennen) Wenn ich 26 sage, kann mein Gegner 1 hinzufügen und 27 sagen; wenn ich 25 sage, kann mein Gegner 2 hinzufügen und 27 sagen; wenn ich 24 sage, kann mein Gegner 3 hinzufügen und 27 sagen; wenn ich 23 sage, kann mein Gegner 4 hinzufügen und 27 sagen; wenn ich 22 sage, würde ich, egal was mein Gegner hinzufügt (1, 2, 3 oder 4), das Komplement zu 5 hinzufügen:  $1+4, 2+3, \dots$  : Ich würde also 27 als erstes sagen.

Gewinnstrategie: Es gewinnt derjenige, der als Erster spielt und 2 sagt. Gewinnfolge: 27, 22, 17, 12, 7, 2.

### **Spiel 3: "Das Rennen nach 24".**

Es geht darum, es zu schaffen, als Erster 24 zu sagen. Der erste Spieler, der an der Reihe ist, darf eine ganze Zahl ungleich 3 sagen. Man darf nur dann eine Zahl sagen, wenn man sie erhält, indem man zu der Zahl, die der Gegner gerade gesagt hat, eine Zahl ungleich 3 addiert.

*Können Sie mit der Strategie, die Sie nach Spiel 2 vorgeschlagen haben, gewinnen?*

Antwort: Nein, es **gewinnt derjenige, der als Zweiter spielt**, indem er 4 sagt – was man nie als Ersten sagen kann!

Gewinnfolge: 24, 20, 16, 12, 8, 4.

### **Spiel 4: "Das Rennen nach 5929".**

Es geht darum, 5929 als Erster zu sagen. Der erste Spieler, der am Zug ist, darf eine ganze Zahl ungleich 2 sagen. Man darf nur eine Zahl sagen, wenn man zu der Zahl, die der Gegner gerade gesagt hat, eine Zahl kleiner oder gleich 2 addiert.

Antwort: **Das Spiel wird zu: Wer gewinnt? Soll man anfangen oder mit 2nd spielen? Indem man welche Zahl sagt?**

Wenn wir anfangen, wie in den vorherigen Spielen zu argumentieren, suchen wir nach der letzten Zahl, die wir sagen müssen, um als Erste 5929 zu sagen. Diese letzte Zahl ist 5926, die sich im "richtigen" Abstand zu 5929 befindet, d. h. im Abstand 3: Wenn mein Gegner 1 hinzufügt, füge ich 2 hinzu (und sage als Erster 5929) - wenn er 2 hinzufügt, füge ich 1 hinzu (und sage immer noch als Erster 5929). Aus dem Spiel mit 5929 wird das Spiel mit 5926.

5929, 5926, 5923 ...: Diese Liste erhält man durch wiederholtes Subtrahieren von 3.

Es wird sehr teuer, die gesamte Gewinnfolge zu finden: Um Geld zu sparen, wird man nur einige der ganzen Zahlen der Gewinnliste suchen, um so schnell wie möglich zur kleinsten ganzen Zahl zu gelangen. Wenn wir von 5929 1000 mal 3 subtrahieren, erhalten wir eine ganze Zahl aus der Liste: 2929. Um eine ganze Zahl aus der Liste zu finden, die kleiner als 1000 ist, kann man von 2929 z. B. 800 mal 3 subtrahieren und erhält 529. So geht es weiter bis 1.

Beispiel:  $5929 - 3 \times 1000 - 3 \times 800 - 3 \times 100 - 3 \times 70 - 3 \times 6 = 1$

Daraus ergibt sich die Antwort: Es gewinnt, wer als Erster spielt und 1 sagt.

### **Eine allgemeine Situation der Spiele im Rennen nach $n$**

Das Spiel besteht aus zwei Gegnern, die abwechselnd eine Zahl nennen. Es geht darum, dass der Gegner zuerst  $n$  sagt.

Der erste Spieler, der am Zug ist, darf eine ganze Zahl ungleich *Null* kleiner als  $p$  sagen. Man darf nur dann eine Zahl sagen, wenn man sie erhält, indem man eine ganze Zahl ungleich  $p$  zu der Zahl addiert, die der Gegner gerade gesagt hat [ $n$  und  $p$  sind natürliche Zahlen mit  $n > p$ ].

Diese Situation erzeugt die vier oben beschriebenen Spiele, indem sie den Variablen  $n$  und  $p$  Werte zuweist.

### **Welches mathematische Wissen liefert ein kostengünstiges und optimales Lösungswerkzeug für die Spiele des Rennens nach $n$ ?**

Die euklidische Division von  $n$  durch die ganze Zahl  $(p+1)$ , also:  $n = (p+1)q + r$  mit  $0 \leq r < (p+1)$ <sup>15</sup>. [Dieser Punkt kann diskutiert werden: Wäre es nicht eher die Kongruenz modulo  $r$ , oder ...

Der "Sinn" dieser Division (in den  $n$ -Wettlaufspielen) ist die wiederholte Subtraktion von  $(p+1)$  zu  $n$ : Die Anzahl der wiederholten Subtraktionen, um zur kleinsten ganzen Zahl zu gelangen, ist der Quotient dieser Division, die

---

<sup>15</sup> Dieser Punkt ist durchaus diskutabel: Wäre dies nicht vielmehr eine Grundsituation der Kongruenz modulo  $(p+1)$ ? Bei der Erforschung ...

kleinste ganze Zahl, zu der man gelangt, ist der Rest. Die Zahl  $(p+1)$ , die man wiederholt subtrahiert, ist der Divisor.

Für Spiel 1 ergibt die Division von 20 durch 3 als Rest 2 und um auf 2 zu kommen, muss man 6 mal 3 subtrahieren.

Bei Spiel 4 ergibt die Division von 5929 durch 3 1 und die Subtraktionszahl von 3 ist  $1000+800+100+70+6$ , d. h. 1976.

## Was können didaktische Variablen des n-Rennproblems für ein Lernen dieses mathematischen Wissens sein?

$V_1$ :  $n$  Vielfaches von  $(p+1)$  oder nicht

Wenn  $n$  kein Vielfaches von  $(p+1)$  ist, muss man beginnen - die Gewinnfolge ist eine arithmetische Folge mit der Form  $(p+1)$  und dem ersten Term als Rest.

Wenn  $n$  ein Vielfaches von  $(p+1)$  ist, darf man nicht beginnen - die Gewinnfolge ist eine arithmetische Folge mit der Form  $(p+1)$  [Übergang von Spiel 1, 2 zu Spiel 3].

$V_2$  (Größe von  $n$  relativ zu  $p$ ):  $n$  klein im Vergleich zu  $p$  [ $n$  groß im Vergleich zu  $p$ ].

Wenn  $n$  im Vergleich zu  $p$  klein ist, ist das Schreiben **aller** ganzen Zahlen der Gewinnfolge möglich: Die Strategie der wiederholten Subtraktion von  $(p+1)$  ist eine optimale Strategie, die mit der euklidischen Division konkurriert, die die Liste nicht liefert!!!

Wenn  $n$  im Verhältnis zu  $p$  sehr groß ist, wird die Strategie der wiederholten Subtraktionen sehr teuer (umso mehr, je größer  $n$  im Verhältnis zu  $p$  ist). Man kann dann nur einige wenige der ganzen Zahlen in der Gewinnreihe erreichen. Das Spiel ändert dann seinen Charakter: Muss man, um zu gewinnen, beginnen oder als Zweiter spielen? Indem man welche Zahl sagt?

Die Strategie der wiederholten Subtraktionen muss sich anpassen und in eine Strategie umwandeln, mit der man den Sinn der euklidischen Division (wieder-)findet: Man versucht, von  $n$  das größtmögliche Vielfache von  $(p+1)$  abzuziehen. [Übergang von Spiel 1, 2, 3 zu Spiel 4: Hier haben wir ein Beispiel für einen Informationssprung].

*Fazit: Das Spiel « Rennen nach  $n$  » als grundlegende Situation*

Wenn man die Spiele des  $n$ -Rennens durch eine allgemeine Situation modelliert, erhält man eine Grundsituation der euklidischen Division, deren Bedeutung die der wiederholten Subtraktion ist.

### **Begriff des Informationssprungs (« saut informationnel »):**

Der Informationssprung besteht darin, dass man, nachdem man eine grundlegende Situation gefunden hat, die einen Begriff "funktionieren" lässt, zunächst die Werte seiner Variablen so wählt, dass das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler die Entwicklung wirksamer Strategien ermöglicht ... und dann, ohne die Spielregeln zu verändern, die Werte der Variablen so ändert, dass die Komplexität der zu bewältigenden Aufgabe viel größer wird. Es müssen neue Strategien etabliert werden, die den Aufbau von neuem Wissen erfordern. (Brousseau 1986a, S.23)

## **8. Ergänzungen. Auffassungen, Hindernisse**

Für bestimmte Kenntnisse gibt es grundlegende Situationen, die man direkt zum gewünschten Zeitpunkt inszenieren kann:

Aber nehmen wir an, es gibt Wissen, für das die oben genannten Bedingungen nicht erfüllt sind: Es gibt keine ausreichend zugänglichen, ausreichend effektiven und zahlenmäßig ausreichend kleinen Situationen, die es Schülern beliebigen Alters ermöglichen, durch Anpassung von vornherein eine Form von Wissen zu erlangen, die als richtig und endgültig angesehen werden kann: Man muss (Zwischen)Schritte im

Lernprozess akzeptieren. Das in der ersten Stufe durch Anpassung vermittelte Wissen wird vorläufig nicht nur annähernd, sondern teilweise auch *falsch und unangemessen sein*. (Brousseau 1986a. S. 316–317))

Die Alternative ist, direkt ein Wissen zu unterrichten, das den Anforderungen der wissenschaftlichen Gemeinschaft entspricht, d. h. den Text des Wissens. Das Wissen ist keine Antwort auf ein offenes Problem, für das der Schüler die Verantwortung übernimmt.

Der Lehrer hat also die Wahl, entweder ein formales, bedeutungsloses Wissen zu unterrichten oder ein mehr oder weniger falsches Wissen zu vermitteln, das korrigiert werden muss. (Brousseau 1986a, S. 317)

Man kann dann bei ein und demselben Subjekt die Koexistenz von widersprüchlichen Beziehungen zu ein und demselben Wissensobjekt (aus der Sicht desjenigen, der die Verfahren beobachtet) annehmen, deren Kohärenz in der besonderen Situation, in die das Subjekt gestellt ist, gesucht werden muss: Der Begriff der Vorstellung (« *conception* ») ist eine Antwort auf dieses Problem der Modellierung, um über das Wissen des Subjekts zu sprechen.

*Der Begriff der Vorstellung (« conception ») ermöglicht insbesondere die Beantwortung folgender Fragen: Was wissen die Schülerinnen und Schüler (und was erklärt ihre Schwierigkeiten, ihre Fehler)? In welchen Situationen haben sie es gelernt (welcher Gültigkeitsbereich)?*

Der Begriff des didaktischen Vertrags ergänzt diese Modellierung, um den Zwängen der didaktischen Kommunikation von Wissen Rechnung zu tragen.

*Postulat: Der Fehler ist ein Zeugnis von Wissen*

Dieses Postulat erhält eine starke Bedeutung im Rahmen der Piagetschen Hypothese vom Lernen als Anpassung an ein Milieu, das die Bewusstwerdung eines Widerspruchs und dessen Überwindung ermöglicht:

Fehler sind nicht nur die Auswirkungen von Unwissenheit, Ungewissheit und Zufall, wie man sie in empiristischen oder behavioristischen Lerntheorien vermutet, sondern die Auswirkungen eines früheren Wissens, das sein Interesse und seine Erfolge hatte, sich jetzt aber als falsch oder einfach als ungeeignet erweist (Brousseau 1983, S. 171)).

Brousseau stellt bereits in den 1970er Jahren fest, dass einige dieser Kenntnisse für das Lernen notwendig sind: Der (Lern)Weg des Schülers sollte durch den (vorläufigen) Aufbau fehlerhafter Kenntnisse führen, weil die Bewusstwerdung dieses fehlerhaften Charakters für den Sinn des Wissens, auf dessen Aufbau abgezielt wird, konstitutiv wäre. Diese obligatorischen Durchgangspunkte nennt er in Anlehnung an Bachelard (1938, S. 13-22) *epistemologische Hindernisse*:

[...] ein Wissen, wie ein Hindernis, ist immer das Ergebnis einer Interaktion des Schülers mit seinem Milieu, genauer gesagt mit einer Situation, die dieses Wissen 'interessant' macht. (Brousseau 1998, S.123)).

Je nach ihrem Ursprung werden meist drei Arten von Hindernissen unterschieden.

- 1- Ontogenetisches Hindernis, das mit der psychogenetischen Entwicklung des Subjekts zusammenhängt.
- 2- Didaktisches Hindernis im Zusammenhang mit der didaktischen Umsetzung (« *transposition* ») des Wissens: Es handelt sich um ein Hindernis, das ohne Folgen für den Wissensaufbau vermieden werden kann und das durch Einwirkung auf die Unterrichtssituationen verschwinden kann.

### 3- Epistemologisches Hindernis aufgrund der historischen Entwicklung des Konzepts:<sup>16</sup>

[...] ein epistemologisches Hindernis ist konstitutiv für die fertige Erkenntnis, in dem Sinne, dass seine Zurückweisung unumgänglich erklärt werden muss, und folglich hinterlässt es Spuren, manchmal tiefe, im System der Erkenntnisse [...] (Brousseau 1983, S.195)

Duroux (1983) nennt Kriterien, um ein epistemologisches Hindernis zu definieren:

- 1- Es handelt sich um ein Wissen, das als solches über eine Reihe von Situationen und für bestimmte Werte der Variablen dieser Situationen funktioniert....
- 2- Das Hindernis ist ein Wissen, das bei dem Versuch, sich an andere Situationen oder andere Werte von Variablen anzupassen, spezifische, auffindbare, analysierbare Fehler verursachen wird.
- 3- Das Hindernis ist ein stabiles Wissen. [...]
- 4- Das Hindernis kann also nur in spezifischen Situationen der Ablehnung überwunden werden und ist konstitutiv für das Wissen [...] Die Rückkehr selbst zur Hinderniskonzeption wird integraler Bestandteil des neuen Wissens sein. (Duroux 1983, S. 54)

#### **Beispiel. Ganzzahl-Hindernis**

##### **Beispiel 1. Dezimalzahlen / ganze Zahlen**

Für den Schüler sind die Eigenschaften der natürlichen Zahlen die Eigenschaften der Zahlen im Allgemeinen, aller Zahlen. Die Einbettung der Menge der natürlichen Zahlen in eine Obermenge wie die rationalen oder die Dezimalzahlen führt jedoch dazu, dass neue Eigenschaften entstehen und andere verschwinden: Sie sind nicht mehr für alle Zahlen wahr oder sogar für keine mehr: Multiplizieren kann kleiner werden, eine Dezimalzahl hat keinen Nachfolger mehr

[...]

Die Lehrkraft kann den Schüler nicht angemessen vor diesem Bruch warnen, da weder die Kultur, insbesondere die Tradition, noch das didaktische Engineering bisher die notwendigen Instrumente (Übungen, Warnungen, Konzepte, Bemerkungen, Paradoxien ...) hervorgebracht haben. Diese Situation führt dazu, dass die Lehrkraft Missverständnisse und Missverständnisse provoziert und die Schülerinnen und Schüler Fehler machen. Diese falschen Vorstellungen bleiben bestehen, da sie an einer bestimmten Art des Verständnisses der Eigenschaften der natürlichen Zahlen hängen, und man kann die Auswirkungen des Bruchs noch viele Jahre lang beobachten.

Noch wichtiger ist der Mechanismus dieses Hindernisses: Es ist nicht das unterrichtete Wissen, das versagt - in der Regel sorgen die Lehrer für diesen Nachteil, indem sie versuchen, sich in einem unverständenen, aber korrekten Diskurs zu halten -, sondern es sind die persönlichen Instrumente des Verstehens des Schülers. Er versteht nicht mehr, denn was geändert werden sollte, sind genau die Mittel für das, was er 'verstehen' nannte - bis dahin. (Auszug aus Brousseau 1998, Kapitel 6)

---

<sup>16</sup> Der Begriff des epistemologischen Hindernisses wurde von Gaston Bachelard in "La formation de l'esprit scientifique" (1938) eingeführt.

*Beispiel 2.* Puzzlesituation, um die Begegnung mit dem Hindernis der natürlichen Zahlen herbei zu führen.

## **9. Entwicklung/Institutionalisierung (Wissen/Kenntnisse)**

Die Hauptrollen der Lehrkraft zeichnen sich durch folgende Doppelmanöver aus: Devolutionsprozess und Institutionalisierungsprozess.

### **9.1. Entwicklung (« Dévolution »)**

Um dies zu erreichen, macht der Lehrer zunächst die inverse Arbeit zu der des Forschers: Er oder sie versucht, das zu lehrende Wissen zu re-kontextualisieren und neu zu personalisieren: Er oder sie *sucht nach Problemen, die dem zu lehrenden Wissen einen Sinn geben*, damit die Aktivität des Schülers zeitweise der des Forschers "ähneln". Es wird dem Schüler eine *Verantwortung gegenüber dem Wissen* übertragen, es wird eine adidaktische Situation entwickeln.

Der Prozess der Entwicklung (« Devolution ») (einer adidaktischen Situation) wird von André Rouchier in seiner Dissertation (1991) als ein Prozess beschrieben, der es ermöglicht, ein zu unterrichtendes Wissen in *Wissen* beim Schüler umzuwandeln (personalisiert, kontextualisiert, zeitlich begrenzt).

### **9.2. Institutionalisierung**

Aber wenn diese Phase gut funktioniert hat, wenn der Schüler Lösungen für die gestellten Probleme gefunden hat, weiß er oder sie (der Schüler/die Schülerin) nicht, ob er oder sie ein Wissen produziert hat, das er/sie bei anderen Gelegenheiten verwenden kann. Um die Antworten und das Wissen der Schüler in *Wissen* umzuwandeln, müssen die Schüler mit Hilfe des Lehrers das von ihnen produzierte Wissen re-dekontextualisieren, re-depersonalisieren, damit sie in dem, was sie getan haben, etwas erkennen, das einen universellen Charakter hat, ein wiederverwendbares kulturelles *Wissen* ist.

Kurz gesagt ist der Prozess der Institutionalisierung ein umgekehrter Prozess zum Prozess der Devolution, bei dem ein Wissen beim Schüler in ein wiederverwendbares Wissen umgewandelt wird (depersonalisiert, dekontextualisiert, entemporalisiert).

## BIBLIOGRAPHIE

- Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin éditeur.
- Balacheff N. (1995). Conception, connaissance et concept". In D. Grenier (Ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble : IMAG. <https://hal.science/hal-01072247>
- Bessot A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In C. Margolinas M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. (1978). *Étude locale des processus d'acquisitions scolaires, Enseignement élémentaire des mathématiques n°18*, Bordeaux : IREM. <https://hal.science/hal-00515106>
- Brousseau G (1980) Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire, *Revue de Laryngologie*. 101(3/4). 107–131. <https://hal.science/hal-00582614/>
- Brousseau G. (1982a). Les objets de la didactique des mathématiques. In *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet : IREM d'Orléans.
- Brousseau G. (1982b). Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude *a priori* d'une situation didactique. In *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 39-60). Olivet : IREM d'Orléans. <https://guy-brousseau.com/2381/d%E2%80%99un-probleme-a-l%E2%80%99etude-a-priori-d%E2%80%99une-situation-didactique-1982/>
- Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198. <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>
- Brousseau G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. In *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 43–47). Olivet : IREM d'Orléans et IMAG Grenoble. <https://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maitre-et-l%E2%80%99institutionnalisation-1984/>
- Brousseau G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'État de l'Université de Bordeaux. <https://guy-brousseau.com/46/resume-de-la-these-detat-1986/>
- Brousseau G. (1986b). La relation didactique : le milieu. In *Actes de la Quatrième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 54–68). Paris : IREM de Paris 7.
- Brousseau G. (1988a). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3). 309–336.
- Brousseau G. (1988b). Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Actes de l'université d'été*, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.
- Brousseau G. (1997). *La théorie des situations didactiques. (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal)*. <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>
- Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield)*. Grenoble : La Pensée Sauvage. (English Translation : Brousseau G. (2002). (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. (Eds.)). *Theory of didactical situations in mathematics*. Springer.

- Brousseau G. & Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM. <https://hal.science/hal-00610769/fr/>  
(English translation: Brousseau, G and N, Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Springer.
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage. (1991 : 2<sup>ème</sup> édition).
- Chevallard Y. (1986). Les programmes et la transposition didactique : Illusions, contraintes et possibles. *Bulletin de l'APMEP.*, 352, 32-50.
- Chevallard Y. (1989). *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Étude du cas de l'algèbre*. Habilitation à diriger des recherches. Université d'Aix-Marseille II.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73 – 112.
- Chevallard Y. & Jullien M. (1990-1991) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. *Petit x*, 27, 41–76.
- Chevallard Y., & Mercier A. (1984). La notion de situation didactique. In *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*. Olivet: IREM d'Orléans et IMAG Grenoble.
- Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2). 5–31.
- Duroux A. (1983). La valeur absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, 3, 43-67.
- Duval R. & Pluvinage F. (1977). Démarches individuelles de réponse en mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 8. 51–116.
- Grenier D. (1984). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I. <https://theses.hal.science/tel-00331264>
- Grenier D. (1989). Le contrat didactique comme outil d'analyse des phases de dévolution et de bilan. In R. Gras R. (Ed.) *Actes de la 5ième école d'été de didactique des mathématiques* (pp.21–26). IREM de Rennes. [http://www.numdam.org/item/?id=PSMIR\\_1989\\_S6\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item/?id=PSMIR_1989_S6_21_0)
- Klein F. (1846) *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaires*. Reproduction IREM de Paris 7.
- Laborde C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. In G. Vergnaud, J. Rogalski and M. Artigue (Eds.) *Actes de la 13e Conférence Internationale PME*, (vol. 1, pp.46–61). <https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/>
- Margolinas C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Mercier A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I. <https://theses.hal.science/tel-00278299>
- Piaget J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives problème central du développement*. Paris : Presses Universitaires de France (PUF).

Rouchier A. (1991). *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itéro-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse d'état de l'Université d'Orléans.

Tonnelle J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, Mémoire de DEA de Didactique des mathématiques, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

## ANHANG I MATHEMATISCHE KONSTRUKTION VERSUS (ZEICHEN)PRAXIS

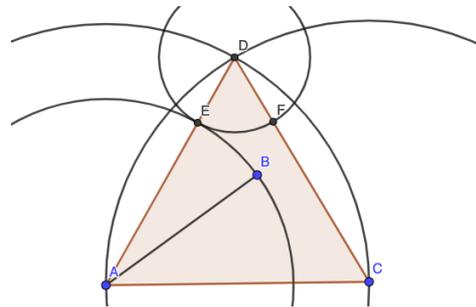
### Mathematische Konstruktion

Instrumente sind "ideale" Instrumente. Ein Konstruktionsproblem in der Mathematik ist in erster Linie ein Problem der *Konstruierbarkeit*.

Euklids Zirkel ist ein "Instrument", mit dem man einen Kreis mit einem Punkt als Mittelpunkt und durch einen anderen Punkt zeichnen kann.

Ein Zirkel "transportiert" keine Entfernungen. Dass er Strecken transportieren kann, wird durch die "Konstruierbarkeit" eines Segments [CF] mit der gleichen Länge wie ein gegebenes Segment [AB] bewiesen.

Gegeben seien drei Punkte (Basis) A, B und C, die nicht auf einer Linie liegen. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck CAD<sup>17</sup>. Zeichne den Kreis mit Mittelpunkt A durch B; nenne E den Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden (AD). Zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt D durch E; nenne F den Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden (CD). Die Strecke [CF] beantwortet die Frage. (Euklids Lösung mit modernen Notationen).



Zu dieser Konstruktion kann man das wiederholen, was Chevallard & Jullien (1991) über die Konstruktion der Mitte eines Strecke sagen:

Man kann das Interesse an dieser Konstruktion nur erfassen, wenn man berücksichtigt, dass Euklids Standpunkt vor allem der der Konstruierbarkeit ist: Er zeigt durch eine logische Verkettung von Sätzen - indem er sich also nur erlaubt, bereits feststehende Sätze zu verwenden -, dass die Mitte eines Segments mit Lineal und Zirkel konstruierbar ist. (Chevallard & Jullien, 1991, S. 65).

Ein Lineal ist ein "Instrument" mit einer einzigen geraden, als unbegrenzten vorausgesetzten Kante und ohne Einteilung oder Markierung.

Man kann die Lösung eines geometrischen Konstruktionsproblems nach folgenden Kriterien analysieren:

1. Sie muss einen Beweis für die Existenz des zu konstruierenden "Objekts" erbringen ;
2. Sie muss einen Beweis für ihre Konstruierbarkeit erbringen ;
3. Sie muss einen Konstruktionsalgorithmus bereitstellen.
4. Eventuell kann sie die geometrographische Konstruktion bereitstellen.<sup>18</sup>

Diese Anforderungen sind natürlich ineinander "verschachtelt", d. h. die Erfüllung der letzten führt zur Erfüllung der drei anderen, die Erfüllung der vorletzten zur Erfüllung der beiden vorhergehenden und so weiter. (Chevallard & Jullien, 1991, S. 68)

---

<sup>17</sup> Zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt A durch C. Zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt C durch A. Nenne einen der Schnittpunkte D.

<sup>18</sup> "...die Geometrographie befasst sich mit den Konstruktionsverfahren selbst, indem sie sich vornimmt, sie zu vergleichen, um die einfachsten nach bestimmten Kriterien zu finden. [...] Die von Mathematikern vorgeschlagenen Lösungen sind (oft) schlechte Lösungen." (Chevallard & Jullien, 1991, S. 66 und 68)

## Praktische Konstruktion

Aus praktischer Sicht besteht das Problem darin, Verfahren zum Zeichnen mit materiellen Instrumenten zu finden, um eine Zeichnung zu erhalten, die in Bezug auf die Messungen zufriedenstellend ist. Um beispielsweise die Symmetrieachsen einer Ellipse mit markiertem Mittelpunkt O zu finden, zeichnet man mit einem Zirkel und Mittelpunkt O - unter allmählicher Veränderung seiner Öffnung - den In- und Umkreis, aber *mit einer solchen Genauigkeit, dass es nicht möglich ist, die erhaltene Zeichnung grafisch (oder wahrnehmungsmäßig) zu beanstanden* ... Ein angenähertes Zeichnungsverfahren ist also akzeptabel, sobald es eine grafische Lösung mit ausreichender Genauigkeit liefert.

Die Kluft zwischen den beiden Sichtweisen wird deutlich, wenn man einen Fall von Nicht-Konstruierbarkeit behandelt.

Für den Zeichner gibt es immer einen exakten oder angenäherten Konstruktionsalgorithmus, der dieses oder jenes Instrument benötigt, um sein Projekt zu verwirklichen. Der Begriff der Nichtkonstruierbarkeit - und damit auch der Begriff der Konstruierbarkeit - wird aus seiner Sicht folglich hinfällig. Er hat kaum noch *grafische* Relevanz; er behält jedoch seine ganze *mathematische* Relevanz (Chevallard & Jullien 1991, S. 76).

Ein Beispiel für ein Problem, das mit Lineal und Zirkel nicht lösbar ist, also keine Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal gegeben ist :

Die exakte Teilung des Kreises in gleiche Teile mit Lineal und Zirkel war früher nur für die Zahlen 2n, 3, 5 und ihre verschiedenen Vielfachen möglich. Gauß fügte weitere Fälle hinzu, indem er die Möglichkeit der Teilung in p Teile zeigte, wenn p eine ganze Zahl der folgenden Form ist

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Er zeigte die Unmöglichkeit der Teilung in allen anderen Fällen.

Die Praxis kann aus diesen Ergebnissen keinen Nutzen ziehen; Gauß' Überlegungen haben eine rein theoretische Bedeutung... (Klein 1846, S.10)

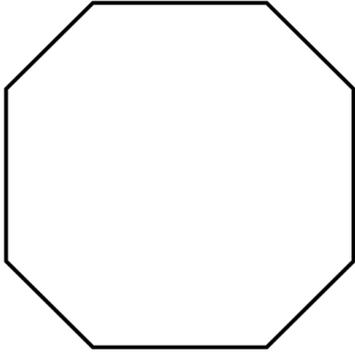
**Problem.** Wie lässt sich das Konstruieren mit Lineal und Zirkel im Geometrieunterricht charakterisieren?

Bei der Konstruktion der Symmetrieachse ist das, was der Lehrer erwartet, weder eine "mathematische" Konstruktion (im Sinne von Klein oder Euklid) noch eine praktische Konstruktion. Die Instrumente sind materiell und man muss eine materielle Spur erzeugen (wie bei einer "praktischen" Konstruktion), aber jede Spur muss durch eine geometrische Eigenschaft begründbar sein (wie bei einer "mathematischen" Konstruktion): *Das Problem der Existenz stellt sich nicht.*

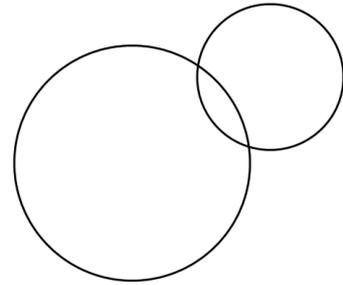
**ANHANG II**  
**Aufgabenstellung zum Zeichnen von Symmetrieachsen**  
Auszug aus Grenier (1984)

Zeichne in den nachstehenden Figuren  
mit den je zugelassenen Werkzeugen alle Symmetrieachsen!

1. Figurengruppe - Zugelassene Werkzeuge: Lineal mit Skala und Geo-Dreieck

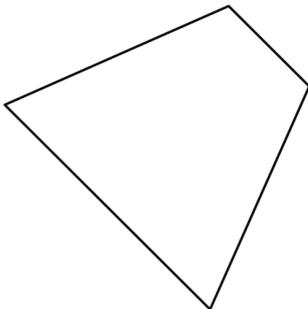


Achteck

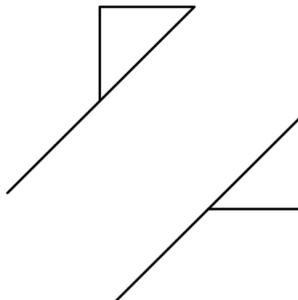


Kreise ohne Mittelpunkt

2. Figurengruppe - Zugelassene Werkzeuge: Lineal ohne Skala und Geo-Dreieck

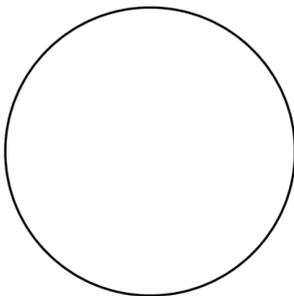


gleichschenkliges Trapez

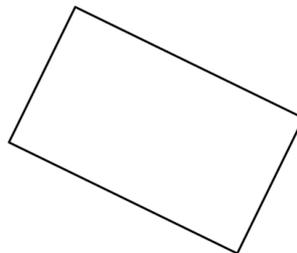


zwei Fahnen

3. Figurengruppe - Zugelassene Werkzeuge: Lineal ohne Skala und Zirkel



Kreis ohne Mittelpunkt



Rechteck

**ANHANG III**  
**WORTPROTOKOLL FAZIT ZUR AKTIVITÄT "ZEICHNEN MIT INSTRUMENTEN"**  
**IN BEZUG AUF DAS TRAPEZ**  
**AUSZUG AUS GRENIER (1989)**

1 Lehrer=L: Wir gehen zu Abbildung 3, dem Trapez. (L klebt die Abbildung an die Tafel).

2 L: Gruppe 3 bitte psst (die Klasse ist laut), also hier habt ihr das Lineal ohne Maßstab und das Geodreieck

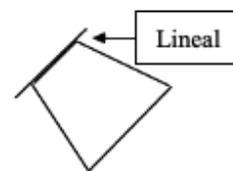
3 Olivier (Gruppe 3) nimmt beide Instrumente und benutzt das Lineal

4 L Gibt das mir (*L nimmt das Geodreieck wieder auf*)

5 Olivier: Also wir haben schon das Lineal genommen /.../ wir haben es hingelegt

6 L *nimmt das Lineal*: psst, bitte

7 Olivier: Wir haben es angelegt und dann haben wir einen Punkt [auf das Lineal] gesetzt.



8 L: Ihr habt auf dem unskalierten Lineal eine Einteilung markiert, um die Länge des Segments zu messen.

9 Olivier: und dann ist es hier genauso (legt das Lineal auf die große Basis und misst)

10 L: Hier ist es ähnlich, gut, ist es sehr genau?

11 XX: nein

12 L: Was denkst du?

13 XX: Es kann auf dem Lineal gelöscht werden.

14 L: Es kann auf dem Lineal gelöscht werden. Das ist nicht sehr genau. Gut! Dann sag trotzdem, wie du es gemacht hast

15 Olivier: Wir haben gesehen, dass es ungefähr die Hälfte war. Das war doppelt so viel ...

16 L: Du hast welchen Ausdruck gesagt? Hast du das gehört?

17 X ja

18 L: Ist das sehr genau? (*er lacht*)

19 XX: nein

20 L: Siehst du! Also werden wir vielleicht, weil die Zeit vergeht, hier weitermachen, denn du bist im "ungefähren", wir wollen etwas Genaues.

21 L an XF: Hast du etwas anzubieten? *XF komm an die Tafel*

22 L (*zu Olivier*): Danke, Olivier.

23 L (*an XF*): Gib sie mir, wenn es dir peinlich ist.

24 XF *gibt das Lineal und behält das Geodreieck*

25 L: sprich bitte sehr laut

26 XF: Wir haben unser Geodreieck auf die Ecke gelegt.

27 L: ja an der Spitze des Winkels

28 XF: Ja und wir haben kleine Pünktchen bis nach unten gemacht

(*XF trace*)

29 L: Okay, also eine Senkrechte?

30 XF: ja

31 XF: Wir machen das Gleiche auf der anderen Seite (*XF zeichnet*)

32 L: Dasselbe auf der anderen Seite. Zwei Senkrechte.

33 XF *gibt das Geodreieck zurück und nimmt das Lineal ohne Skala von L*

34 XF: dann sieht es wie ein Zentimeter aus

35 L: Ah, es sieht aus wie ...

36 XF: Gut, das haben die gesagt

37 L: Das haben die gesagt und du glaubst ihnen aufs Wort

38 XF *rit*

39 L: Ist es also sehr genau, das 'sieht so aus wie'?

40 *Franziskus protestiert*

41 L: Nein, wir beschuldigen dich nicht, François! Aber lass uns darüber diskutieren. Ist das sehr genau?

42 X: nein

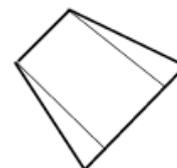
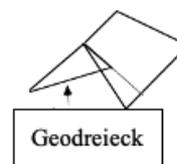
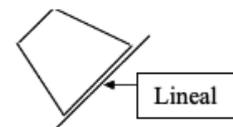
43 L: Ihr dachtet, es sei ein Zentimeter. Mach einfach weiter. Wir werden dir trotzdem zwei Sekunden zuhören

44 XF: Dann drehten sie das Lineal, um herauszufinden, wie viele Zentimeter es waren, und teilten es durch Zwei.

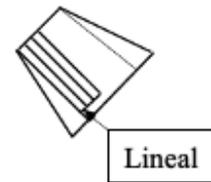
45 L: Gut. Du machst es also ein wenig wie Olivier Ist es genauer als ...

46 XF *kehrt an seinen Platz zurück und gibt François die Instrumente*

47 L: Gut, François? Komm



48 François *kommt zur Tafel und nimmt das Lineal ohne Skala.*  
49 L: du hast auch das Geodreieck

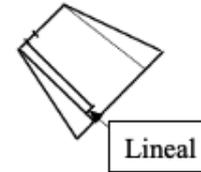


50 François *legt das Lineal an und markiert jeden Übertrag des Linealabschnitts mit einem kleinen Strich.*

51 L: Du markierst also? Ist das sehr genau, was du da machst?

52 François: ja

53 L: Das ist die Länge. Wir sind der gleichen Meinung, weil ich denke, das haben viele so gemacht. Es ist nicht sehr genau, weil du die Dicke hast, die da mitspielt.



54 François *überträgt weiterhin mit seinem Lineal*

55 L: du bist nicht genauer als Olivier, es tut mir leid

56 François *kehrt sehr enttäuscht an seinen Platz zurück.*

57 Ein Schüler aus Gruppe 2 *kommt an die Tafel, nimmt das Lineal ohne Skala*

58 Gruppe 2: Wir zeichnen zuerst das auf

59 L: Also das ist es, du zeichnest sie. Und?

60 L Wer kann sagen, wie die Gerade da heißt, wie du sie genannt hast?

61 Gruppe 2: Wir zeichnen eine ...

62 L: Eine Diagonale, was?

63 X: Senkrechte

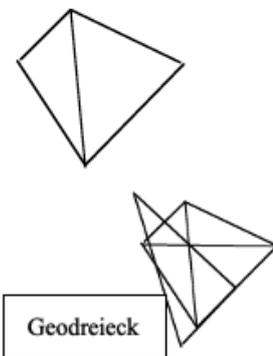
64 L: Eine Diagonale, dann die andere. Psst.

65 *gruppe 2 zeichnet die andere*

66 Gruppe 2: dann gibt mir das das Zentrum

67 L: Das gibt dir einen Punkt;

68 Gruppe 2: mit dem Geodreieck (*nimmt das Geodreieck, legt das Geodreieck auf den Punkt und gibt das Lineal zurück*)



69 L schreibt an die Tafel

70 L: Diesen Punkt betrachtest du...

71 Gruppe 2: dass er in der Mitte ist

72 L: dass er auf? (*Geräusche*)

73 Gruppe 2: Das gibt uns das (*zeigt die Strecke*)

74 L: Was ist es dann?

75 Gruppe 2: das ist die Symmetrieachse

76 L: Das gibt uns die Symmetrieachse. Also hast du den Punkt, dann die Senkrechte (L *schreibt an die Tafel*).

77 L: Und das gibt dir die Symmetriegerade. Du hast diesen Punkt gewählt, d.h. du sagst am Anfang, dass er auf der Symmetriegeraden liegt.

78 Gruppe 2: ja

79 L: In Ordnung. Hat jemand noch eine andere Konstruktion? Ist das in Ordnung? (*Schüler: ja*)

80 X: Man hätte das Blatt falten und abpausen können (*Gelächter anderer Schüler*)

81 L: Nein, das ist mit den Instrumenten. Wir gehen zur nächsten Seite über, die "Flaggen" heißt.

82 Yann: Aber Monsieur es war nur ein Punkt!

83 L: Ja, ein Punkt und die Senkrechte (brouhahaha) das hat ihm gereicht. Ich sage nicht, dass es genau so ist...

84 Yann: Ja, man braucht mindestens zwei Punkte!

85 L: ah pssst! ...Ruhe... Ich glaube, Yann hat ein Problem und wir müssen ihm helfen. Ein Punkt ist nicht genug, sagt Yann.

86 Yann: Ja

87 L: Dann komm doch her, das ist dein Problem

88 X: na er ist dumm, weil... (*lacht*)

89 L: Ah, nein, nein! Du legst das Geodreieck der Seite nach an und schiebst es, bis der Punkt auf der anderen Seite des Geodreiecks liegt (*sie macht es an der Tafel nach*), also kannst du abzeichnen, es ist genau.

90 Yann: Ja.

