



HAL
open science

Structures combinatoires pour la modélisation géométrique à base topologique

Samuel Peltier

► **To cite this version:**

Samuel Peltier. Structures combinatoires pour la modélisation géométrique à base topologique. Laurent Fuchs (éd.). Informatique Mathématique : Une photographie en 2023, CNRS éditions, Chapitre 1, pp. 01-54, 2023, Alpha, 978-2-271-14930-5. hal-04500869

HAL Id: hal-04500869

<https://hal.science/hal-04500869>

Submitted on 18 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Chapitre 1

Structures combinatoires pour la modélisation géométrique à base topologique

Samuel Peltier

Ce chapitre propose une présentation de différentes structures utilisées en modélisation géométrique à base topologique : simpliciales (complexes simpliciaux abstraits, ensembles semi-simpliciaux et simpliciaux), simploldales (ensembles semi-simploldaux et simploldaux) et cellulaires (modèles à base de graphes d'incidence et à base de cartes combinatoires).

Ce chapitre détaille et illustre les structures combinatoires, leurs opérations de construction de base, leurs représentations géométriques (en particulier sur des espaces de Bézier), et les liens entre ces différentes structures.

1.1 Introduction

La modélisation géométrique à base topologique est utilisée dans différents domaines de l'informatique graphique (conception assistée par ordinateur, géométrie algorithmique, simulation, géométrie discrète, animation...). Dans ce cadre on s'intéresse en particulier à la description d'objets structurés, subdivisés en cellules de différentes dimensions (sommets, arêtes, faces, volumes...). Une structure combinatoire (ou structure topologique) permet de représenter l'assemblage des cellules (abstraites) liées entre elles par des relations d'incidence.

Selon les besoins, il peut s'avérer utile d'utiliser un type particulier de cellules (par exemple, en géométrie discrète ou en simulation, on travaille usuellement avec des structures à base de cubes, alors qu'en géométrie algorithmique ou en rendu, il est fréquent de travailler avec des structures à base de simplexes). Dans d'autres contextes, il peut s'avérer utile, notamment pour des soucis d'optimisation, d'utiliser des structures permettant de manipuler des briques de base moins régulières (où, par exemple, une face peut être bordée par un nombre quelconque d'arêtes). Un second élément essentiel à prendre en compte lorsque l'on choisit une structure combinatoire concerne les types d'assemblages que l'on souhaite pouvoir construire et manipuler. Il existe en effet différentes variantes de structures permettant de représenter des assemblages plus ou moins contraints. Par exemple, certaines structures autorisent une cellule à être incidente à elle-même ou non, ou permettent de garantir des propriétés globales de l'objet. On dispose ainsi de structures qui permettent de représenter des assemblages quelconques (aussi appelés complexes), ou des assemblages particuliers (variétés, quasi-variétés, pseudo-variétés...).

Ainsi, il existe des structures combinatoires permettant de manipuler des cellules régulières (simpliciales, cubiques) ou plus générales pour les structures dites « cellulaires ». Entre ces grandes familles de structures, il existe les structures simpléoidales, où les briques de base sont des produits de simplexes. Ces structures homogénéisent et généralisent les structures régulières usuelles simpliciales et cubiques.

Enfin, il est important de pouvoir associer une forme (géométrie) aux structures que l'on manipule. On peut par exemple, sous certaines conditions, déduire une forme pour chacune cellule d'un objet à partir des positions géométriques de l'ensemble de ses sommets (on parle aussi de plongement aux sommets). On peut également définir explicitement la forme de chaque cellule en respectant des contraintes afin de garder une cohérence entre la structure d'un objet et sa forme.

Ce chapitre propose un tour d'horizon des familles de structures combinatoire utilisées en modélisation géométrique à base topologique : simpliciales, simpléoidales et cellulaires. Nous présentons les opérations de construction de base, ainsi que les liens entre ces structures. Un focus est fait sur les plongements des structures simpliciales et simpléoidales utilisant les espaces de Bézier.

La section 1.2 présente différentes structures simpliciales (sans dégénérescence), avec les opérations de construction de base, ainsi que les espaces simpliciaux de Bézier permettant d'associer une forme à ces structures. La

section 1.3 se focalise sur les structures simploldales (sans dégénérescence) qui généralisent et homogénéisent les structures simpliciales et cubiques. Les opérations de construction de base y sont présentées, ainsi que les espaces de Bézier simploldaux. La section 1.4 est consacrée aux structures simpliciales et simploldales permettant de gérer la dégénérescence. La section 1.5 présente les grandes familles de structures cellulaires et les liens avec les structures simpliciales.

Ce chapitre s'appuie sur les références [33], [9] et [3].

1.2 Structures simpliciales (sans dégénérescence)

Toutes les structures décrites dans cette partie ont un lien (plus ou moins direct) avec des structures simpliciales. Plus précisément, toutes les structures sont des sous-classes d'une structure bien connue qui est celle des ensembles simpliciaux, qui est la structure la plus générale permettant de représenter des assemblages de simplexes quelconques, avec gestion de simplexes *dégénérés*. De manière informelle, un simplexe dégénéré est « écrasé » sur une de ses faces.

Par souci de clarté, nous présentons dans un premier temps une version « restreinte » qui ne gère pas les simplexes dégénérés : les ensembles semi-simpliciaux. Lorsque les objets ne présentent pas de multi-incidence, on peut décrire les objets simpliciaux par une structure ensembliste : les complexes simpliciaux abstraits, où chaque simplexe est décrit par un ensemble de sommets. Les opérations de construction de base de toutes les structures simpliciales sont le cône (qui permet notamment de créer les simplexes et leurs bords) et l'identification (qui permet de les assembler).

1.2.1 Complexes simpliciaux abstraits

Les complexes simpliciaux abstraits [1] ou CSA permettent de décrire, de manière combinatoire, la structure des complexes simpliciaux (géométriques).

Structure combinatoire

Définition 1.2.1. *Un complexe simplicial abstrait K est un ensemble de sous-ensembles non vides d'un ensemble fini V tel que :*

- (1) $\{v\} \in K$ pour tout $v \in V$,
- (2) Si $\sigma \in K$, alors tout sous-ensemble non vide de σ est dans K .

Les éléments de V sont appelés **sommets**, ceux de K sont les **simplexes abstraits** de K . La **dimension** d'un élément $\{v_0, \dots, v_p\}$ de K est p . En particulier, tout sommet v de V est associé au 0-simplexe $\{v\}$ de K . Tout sous-ensemble non vide de σ (resp. non vide et différent de σ) est une **face** (resp. face propre) de σ . L'ensemble des faces propres de σ est son **bord**. L'ensemble des simplexes qui ont comme face (resp. face propre) σ est l'**étoile** (resp. **étoile propre**) de σ . La **dimension de K** est celle d'un simplexe de dimension maximale de K . Un sous-ensemble de K qui est aussi un complexe est appelée **sous-complexe** de K .

On pourra noter en particulier que, de part la définition ensembliste des CSA, deux simplexes ne peuvent pas avoir même bord, et un simplexe ne peut pas être incident plusieurs fois à une de ses faces. Ainsi, tout p -simplexe possède exactement $p + 1$ sommets dans son bord.

Opérations de construction

Tout CSA peut être construit à partir de deux opérations de base : le *cône* et l'*identification*.

Soit K un CSA et $v \notin K$ un nouveau sommet. Le résultat de l'opération de cône définie par K et v est le CSA K' contenant

- tous les simplexes de K ,
- le 0-simplexe $\{v\}$,
- tous les simplexes $\sigma \cup \{v\}$, pour tout $\sigma \in K$.

On notera en particulier, qu'en partant du CSA réduit à un seul sommet, l'application successive de p opérations de cône permet de créer un CSA correspondant à un p -simplexe abstrait et son bord.

L'opération d'identification consiste à « fusionner » deux sommets distincts. Cette opération est toujours définie, quels que soient les deux sommets choisis. On notera que l'opération d'identification de deux sommets peut :

- entraîner l'identification de simplexes de dimension supérieures,
- entraîner la dégénérescence de simplexes de dimension supérieure.

Dans les deux cas, le résultat est bien un CSA, mais le CSA résultant peut être très fortement modifié suite à l'identification de deux sommets comme le montrent les exemples suivants. La Figure 1.1 représente les CSA K^1, K^2, K^3 et K^4 . Le CSA K^1 est de dimension 1, K^2, K^3 sont de dimension 2 et K^4 est de dimension 3. K^1 est un sous-complexe de K^3 , il peut être obtenu à partir de K^3 en identifiant v_1 et v_3 . Cette identification entraîne la dégénérescence des deux triangles et de l'arête $\{v_1, v_3\}$. Le CSA K^3 peut être obtenu à partir de K^2 en identifiant v_3 et v_5 , ce qui

entraîne l'identification des arêtes $\{v_1, v_5\}$ et $\{v_1, v_3\}$. K^3 peut également être obtenu à partir de K^1 en effectuant un cône sur le sous-complexe $\{\{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_3, v_0\}, \{v_3, v_2\}\}$ avec le sommet v_1 .

$$K^1 = \left\{ \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \right. \\ \left. \{v_3, v_0\}, \{v_3, v_2\}, \{v_3, v_4\} \right\}$$

$$K^2 = \left\{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \right. \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_5\}, \{v_1, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \\ \left. \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_5\} \right\}$$

$$K^3 = \left\{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \right. \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \\ \left. \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\} \right\}$$

$$K^4 = \left\{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \right. \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \\ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \\ \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \\ \left. \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \right\}$$

Complexe simplicial

On peut associer à tout CSA, un complexe simplicial (géométrique), en associant à chaque simplexe abstrait un simplexe géométrique, et tel que l'intersection de deux simplexes géométriques vérifie certaines propriétés.

Définition 1.2.2. Soit $\{p_0, \dots, p_i\}$ un ensemble de points de \mathbb{R}^n affinement indépendants. Le i -**simplexe géométrique** σ de sommets p_0, \dots, p_i (de **dimension** i) est l'enveloppe convexe de ces points. Un simplexe décrit par un sous-ensemble de $\{p_0, \dots, p_i\}$ est une **face** de σ . Les faces de σ différentes de σ lui-même sont ses **faces propres**, leur union est son **bord** et σ est la **face principale**.

Définition 1.2.3. Un **complexe simplicial** K de \mathbb{R}^n est une famille finie de simplexes géométriques de \mathbb{R}^n telle que :

- toute face d'un simplexe de K est dans K ,
- l'intersection de deux simplexes σ_1, σ_2 de K . est soit vide, soit une face commune à σ_1 et σ_2 .

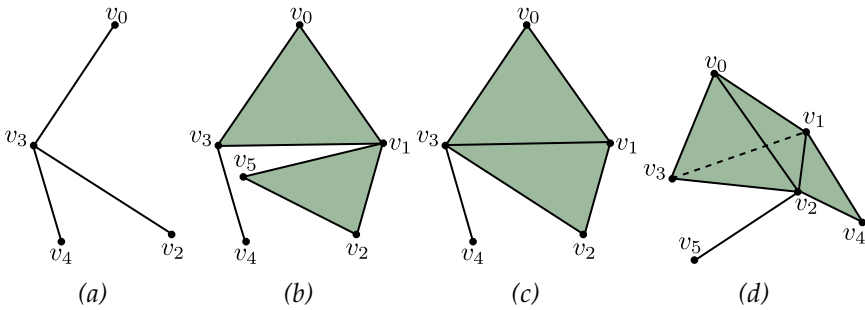


FIGURE 1.1 – (a) – (d) Complexes simpliciaux correspondant à des réalisations géométriques des CSA K^1 , K^2 , K^3 et K^4 .

Le complexe simplicial associé à un CSA est sa **réalisation géométrique**. Plus précisément, on peut clairement associer différents complexes simpliciaux à un CSA donné. Le terme « réalisation géométrique d'un CSA » désigne l'ensemble de tous les complexes simpliciaux correspondant à ce CSA, ou selon le cas un représentant de cet ensemble [26].

Notons enfin que tout complexe simplicial abstrait de dimension n peut être réalisé géométriquement dans \mathbb{R}^{2n+1} . Par exemple tout graphe peut être réalisé géométriquement dans \mathbb{R}^3 .

1.2.2 Ensembles semi-simpliciaux

Comme dit précédemment, les complexes simpliciaux abstraits ne permettant pas de représenter des subdivisions présentant de la multi-incidence. Les ensembles semi-simpliciaux permettent de lever cette contrainte. Par exemple, la subdivision d'un tore avec un CSA nécessite au minimum 14 triangles, 21 arêtes et 7 sommets, alors que si la multi-incidence est autorisée, seulement 2 triangles, 3 arêtes et 1 seul sommet sont nécessaires, comme le montre la figure 1.2.

Structure combinatoire

Définition 1.2.4. Un ensemble semi-simplicial (ou ESS) de dimension n , $S = (K, (d_i))$ est une famille d'ensembles $K = (K^p)_{p \in [0, n]}$ munis d'applications $d_i : K^p \rightarrow K^{p-1}$ pour $p > 0$ et $i \in [0, p]$, qui vérifient :

$$\forall p > 1, \forall \sigma \in K^p, \sigma d_i d_j = \sigma d_j d_{i-1} \text{ avec } j < i.$$

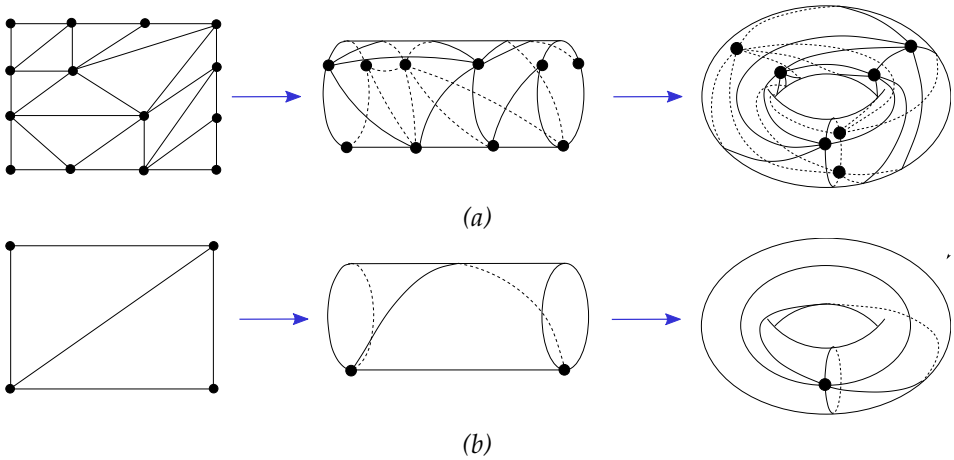


FIGURE 1.2 – (a) une subdivision minimale du tore par un complexe simplicial abstrait. (b) une subdivision minimale du tore par un ensemble semi-simplicial.

Notons que le choix a été fait ici d'utiliser la notation post-fixée pour les opérateurs de face. Ainsi, $\sigma d_i d_j$ correspond à $d_j(d_i(\sigma))$. L'intérêt de cette notation est qu'elle permet de « lire » directement de gauche à droite en utilisant le même sens de lecture que celui utilisé pour lire ce document.

Les éléments de K^p sont les **simplexes de dimension p** ou **p -simplexes**. Comme on s'intéresse aux ensembles finis, tous les ensembles de p -simplexes K^p sont finis et le nombre n d'ensembles de K est lui aussi fini. Les notions de **face**, de **bord** et d'**étoile** décrite pour les CSA s'étendent directement pour les ESS.

Les applications d_i sont les **opérateurs de face** des simplexes. En toute rigueur, il faudrait nommer les opérateurs de face d'un p -simplexe d_i^p afin de distinguer par exemple l'opérateur de face d_0 d'une arête, de celui d'un triangle ou d'un tétraèdre. Bien souvent, il n'y a pas d'ambiguïté, ce qui permet d'omettre l'exposant p des opérateurs de face, et ainsi simplifier la notation.

Les relations sur les opérateurs de face garantissent la cohérence du bord des simplexes. Par exemple, sans ces relations, un p -simplexe pourrait avoir jusqu'à $(p+1)!$ sommets distincts dans son bord, alors qu'il ne peut pas en posséder plus de $(p+1)$.

Par exemple, la Figure 1.3 illustre des exemples et des contrexemples d'ensembles semi-simpliciaux.

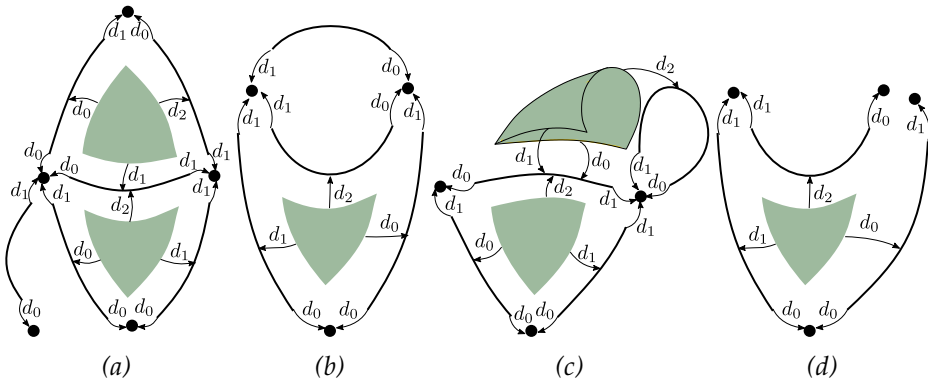


FIGURE 1.3 – (a) – (c) trois ensembles semi-simpliciaux de dimension 2. (a) est sans multi-incidence, (b) deux arêtes ont même bord, (c) présente de la multi-incidence. On peut vérifier les contraintes de cohérence : tout triangle σ vérifie $\sigma d_2 d_1 = \sigma d_1 d_1$, $\sigma d_2 d_0 = \sigma d_0 d_1$ et $\sigma d_1 d_0 = \sigma d_0 d_0$. (d) n'est pas un ensemble semi-simplicial, car les contraintes de cohérence ne sont pas respectées : $\sigma d_2 d_0 \neq \sigma d_0 d_1$.

Opérations de base : cône et identification

Les opérations de base sont les mêmes que pour les CSA : le **cône** et l'**identification**. Comme pour les CSA, l'opération de cône permet en particulier de construire les briques de base (i.e. les simplexes et leurs bords), l'opération d'identification permet d'assembler les simplexes. Les définitions sont rappelées ici, des détails et algorithmes sont proposés dans [32].

L'opération de cône sur un ensemble semi-simplicial S consiste à ajouter un nouveau 0-simplexe v à S , et à créer un nouveau $(i + 1)$ -simplexe $\bar{\sigma}$ incident à σ et à v pour chaque i -simplexe σ de S . Les opérateurs de face respectent les contraintes de cohérence, i.e. pour tout simplexe $\bar{\sigma}$ de dimension n (n est donc par définition supérieur ou égal à 1), $\bar{\sigma} d_n = \sigma$. Si $n = 1$, alors $\bar{\sigma} d_0 = v$, sinon, pour tout $i \in [0, n - 1]$, $\bar{\sigma} d_i = \overline{\sigma d_i}$.

En particulier, le cône effectué à partir d'un ensemble semi-simplicial S vide et un sommet v est un ensemble semi-simplicial ne contenant que v . La figure 1.4 illustre une opération de cône effectuée sur un ensemble semi-simplicial de dimension 1.

L'opération d'identification de base est définie pour deux i -simplexes σ et τ ayant même bord, c'est à dire que, pour tout $j \in [0, i]$, $\sigma d_j = \tau d_j$. On notera que deux sommets ont toujours même bord. L'opération consiste à fusionner σ et τ en un nouveau i -simplexe μ ayant même bord que σ

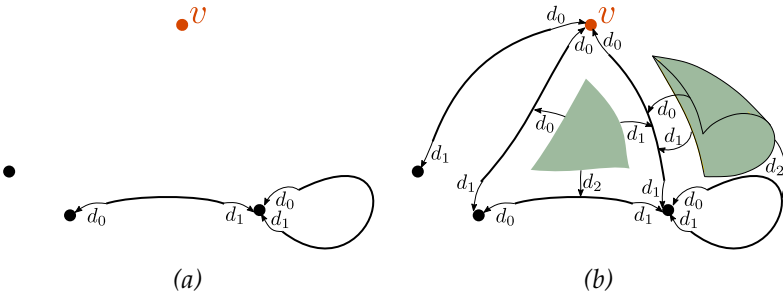


FIGURE 1.4 – (a) Opération de cône effectuée à partir d’un ESS de dimension 1 et du sommet v . (b) Le résultat est un ESS connexe de dimension 2.

et τ , et telle que son étoile corresponde à l’union des étoiles de σ et τ , i.e. si $vd_j = \sigma$ ou $vd_j = \tau$ avant l’identification de σ et τ , alors $vd_j = \mu$ après l’opération.

La Figure 1.5 illustre des opérations d’identification.

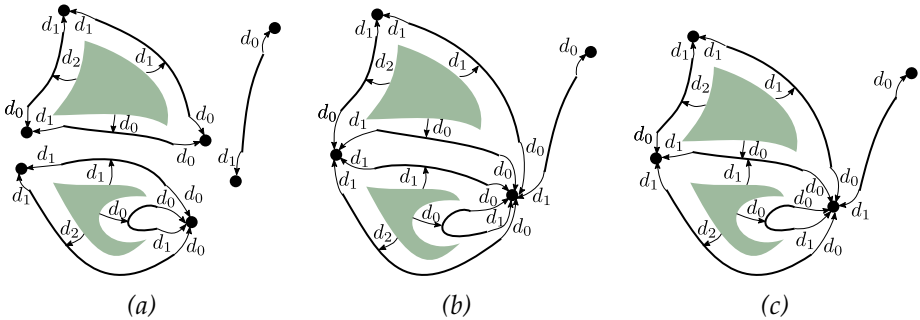


FIGURE 1.5 – (a) un ensemble semi-simplicial de dimension 2. (b) peut être obtenu à partir de (a) par trois identifications de sommets. (c) peut être obtenu à partir de (b) en identifiant les deux arêtes qui ont même bord.

Contrairement aux CSA, l’opération d’identification de base sur les ensembles semi-simpliciaux ne peut pas entraîner de dégénérescence, ni d’identification d’autres simplexes. Des opérations de plus haut niveau ont été définies : par exemple, deux i -simplexes n’ayant pas même bord peuvent être identifiés par une opération d’identification plus générale consistant à identifier de manière récursive les faces deux à deux afin de se ramener au cas atomique de l’identification de deux simplexes ayant même bord. Dans ce cas, il peut arriver que ces identifications changent la

structure du bord des simplexes à identifier. Par exemple, si deux arêtes σ et μ partagent les deux sommets v_1 et v_2 de leur bord, mais pas avec les mêmes opérateurs de face, soit $\sigma d_0 = \mu d_1 = v_1$ et $\sigma d_1 = \mu d_0 = v_2$, alors l'identification de σ et μ entraîne l'identification de leurs faces, et donc de v_1 et v_2 . L'identification de σ et μ produit donc une boucle.

D'autres opérations ont également été définies, comme par exemple l'identification de sous-ensembles de simplexes, des opérations de split, de flip, etc. [4].

1.2.3 Espaces triangulaires de Bézier et ESS

En toute généralité, on ne peut pas associer un complexe simplicial (géométrique) à tout ensemble semi-simplicial en respectant sa structure. Plus précisément, cela n'est pas possible dès lors que 2 simplexes ont même bord ou qu'un simplexe est incident plusieurs fois à un autre. La géométrie associée à tout simplexe d'un ensemble semi-simplicial ne soit pas uniquement être basé sur la géométrie des points de son bord, comme cela est fait pour les CSA, mais il faut pouvoir associer une forme non linéaire.

Les espaces triangulaires de Bézier permettant cela, et il est possible d'associer de manière directe un tel espace géométrique à tout ensemble semi-simplicial. Un *espace triangulaire de Bézier* est un ensemble de *simplexes de Bézier* satisfaisant certaines conditions [18].

En particulier, dans des espaces triangulaires de Bézier, l'intersection de deux simplexes de Bézier est soit vide, soit un simplexe de Bézier de dimension inférieure.

La définition des simplexes de Bézier fait appel aux notions de multi-indices et aux bases de polynômes multivariés de Bernstein. L'ensemble Γ_d^i de *multi-indices de dimension i et degré d* est défini par $\Gamma_d^i = \{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_i) \in \mathbb{N}^{i+1} \mid |\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_i = d\}$. Pour simplifier, un multi-indice $(\alpha_0, \dots, \alpha_i)$ est noté $\alpha_0 \cdots \alpha_i$. Par exemple, l'ensemble des multi-indices de dimension 1 et de degré 3 $\Gamma_3^1 = \{03, 12, 21, 30\}$, et l'ensemble des multi-indices de dimension 2 et de degré 3 $\Gamma_3^2 = \{003, 012, 021, 030, 102, 111, 120, 201, 210, 300\}$. Le nombre d'éléments de Γ_d^i , noté $|\Gamma_d^i|$, est égal à $\binom{i+d}{i}$.

Les *polynômes de Bernstein multivariés de degré d* sont définis par $B_\alpha^d(u) = \binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \cdots u_i^{\alpha_i}$, où $\alpha \in \Gamma_d^i$, et $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha_0! \cdots \alpha_i!}$ sont les *coefficients multinomiaux*, et les u_j sont les coordonnées barycentriques de u , un point du i -simplexe standard, i.e. ils satisfont les propriétés suivantes : $\forall j, 0 \leq j \leq i, 0 \leq u_j \leq 1$ et $\sum_{j=0}^i u_j = 1$.

En particulier, l'ensemble des polynômes de Bernstein $B_\alpha^d(u)$ forme une base des polynômes multivariés, c'est à dire que tout polynôme multivarié peut s'écrire de manière unique dans cette base. On pourra également noter que la formule du multinôme de Newton nous indique que la somme des polynômes de Bernstein vaut toujours 1 :

$$(u_0 + \dots + u_i)^d = 1^d = 1 = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \dots u_i^{\alpha_i} = \sum_{|\alpha|=d} B_\alpha^d(u).$$

Cela signifie que les points du simplexe de Bézier sont bien définis comme combinaison affine des points de contrôle.

Un i -simplexe de Bézier de degré d est défini par $P(u) = \sum_{\alpha \in \Gamma_d^i} P_\alpha B_\alpha^d(u)$, où $\{P_\alpha, \alpha \in \Gamma_d^i\}$ est son ensemble de *points de contrôle* (cf. Figure 1.8). Ainsi, à chaque point u du i -simplexe standard correspond un point du simplexe de Bézier $P(u)$ (cf. Figure 1.6), entièrement défini de manière implicite par ses points de contrôle.

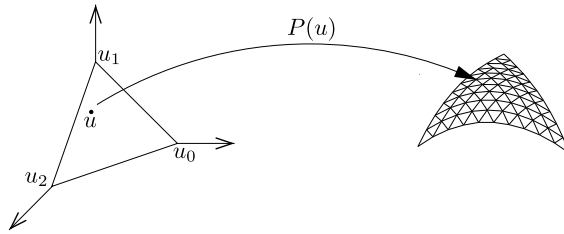


FIGURE 1.6 – À tout point de l'espace de paramètre u correspond un point $P(u)$ du simplexe de Bézier défini par ses points de contrôle.

On peut donc calculer un ensemble de points d'un i -simplexe de Bézier en échantillonnant l'ensemble des points du i -simplexe standard. En pratique, on peut utiliser l'algorithme récursif de De Casteljau de complexité équivalente.

De manière intuitive, l'algorithme de De Casteljau permet de calculer les points d'un i -simplexe de Bézier de degré d en « reconstruisant » les polynômes de Bernstein de manière itérative comme illustré sur la figure 1.7. Pour tout point $u = (u_0, \dots, u_i)$ du i -simplexe standard, le point $P(u)$ du i -simplexe de Bézier de degré d peut être défini à partir de l'ensemble de points de contrôle $\{P_\alpha \mid \alpha \in \Gamma_d^i\}$ de la manière suivante : pour tout u , $P_\alpha^0(u) = P_\alpha$ sont les points de contrôle. Le point $P_{0 \dots 0}^d(u) = P(u)$ est un point du i -simplexe de Bézier défini récursivement par la relation

suivante :

$$P_{\alpha_0 \dots \alpha_i}^k(u) = \sum_{j=0}^i u_j P_{\alpha_0 \dots \alpha_{j-1}(\alpha_j+1)\alpha_{j+1} \dots \alpha_i}^{k-1}(u), \text{ avec } 0 < k \leq d.$$

De manière intuitive, sur la Figure 1.7(a), à partir du point P_{12} , il existe 3 chemins permettant de remonter jusqu'au point P_{00}^3 : $u_0u_1u_1$, $u_1u_0u_1$ et $u_1u_1u_0$, soit $3u_0u_1^2$ correspondant au polynôme de Bernstein $B_{12}^3(u_0, u_1)$.

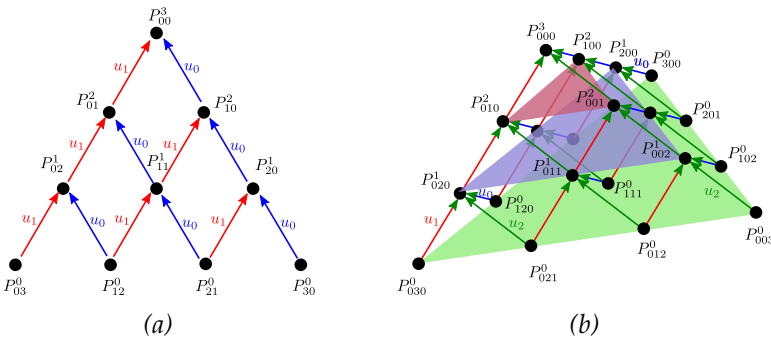


FIGURE 1.7 – Principe de l'algorithme de De Casteljau. En (a), pour une courbe de degré 3, en (b) pour un triangle de degré 3.

Notons que tout point $u = (u_0, \dots, u_i)$ du i -simplexe standard peut toujours s'écrire $(u_0, \dots, u_{i-1}, 1 - (u_0 + \dots + u_{i-1}))$; ainsi, on trouve souvent dans la littérature la définition des courbes de Bézier utilisant un unique paramètre t et les polynômes de Bernstein décrits dans la base $t, (1 - t)$, avec t compris entre 0 et 1.

D'un point de vue pratique, les points de contrôle d'un simplexe de Bézier peuvent être stockés dans un *tableau simplicial*, selon l'ordre lexicographique de leur multi-indice [12]. L'indice d'un point de contrôle P_α peut être simplement retrouvé en utilisant l'algorithme décrit dans [33]. Soit $\alpha = \alpha_0 \dots \alpha_i$ le multi-indice d'un point de contrôle. Si $i = 1$, alors le point de contrôle est stocké dans la case α_0 du tableau simplicial. Si $i > 1$, alors il faut d'abord stocker tous les multi-indices de même degré commençant par 0, puis 1, jusqu'à tous ceux commençant par $\alpha_0 - 1$. On recommence la même chose en regardant à présent α_1 et ainsi de suite jusqu'à la fin.

On peut donc représenter un espace triangulaire de Bézier en stockant, dans des tableaux simpliciaux, l'ensemble des points de contrôle des simplexes principaux. Cette solution pose toutefois deux problèmes : d'une part l'ensemble de la structure n'est pas explicitée, les relations d'incidence ne sont donc pas directes ; or ce sont des informations essentielles dès que l'on souhaite étudier la structure un objet ; d'autre part, si deux simplexes sont assemblés le long d'une face, leurs points de contrôle sont dupliqués, ce qui est, bien entendu, une source potentielle d'incohérences (cf. Figure 1.8(a)).

On peut utiliser d'autres structures de données qui permettent de résoudre ces deux problèmes en utilisant les propriétés des espaces de Bézier. En effet, il est bien connu que le bord d'un i -simplexe de Bézier est composé de simplexes de Bézier de dimensions inférieures. Dit autrement, tout simplexe de Bézier contient son bord. Par exemple, le bord d'un triangle de Bézier est composé de courbes de Bézier. Plus précisément, les multi-indices des points de contrôle des simplexes de Bézier permettent naturellement de structurer les espaces triangulaires de Bézier en ensembles semi-simpliciaux. Dit autrement, l'ensemble des points de contrôle d'un espace triangulaire de Bézier a une structure d'ensemble semi-simplicial [20].

Par exemple, l'ensemble des points de contrôle $P_{\alpha_0 \dots \alpha_{j-1} 0 \alpha_{j+1} \dots \alpha_i}$ d'un i -simplexe de Bézier sont les points de contrôle d'un $(i-1)$ -simplexe de Bézier correspondant à sa j^e face. Par exemple, sur la Figure 1.8(a), l'ensemble des points de contrôle $\{P_{300}, P_{210}, P_{120}, P_{030}\}$ d'un des deux triangles de degré 3 sont les points de contrôle de la courbe de Bézier de degré 3 correspondant à sa face obtenue par application de l'opérateur d_2 .

D'un point de vue pratique, on peut utiliser un ensemble semi-simplicial pour expliciter la structure d'un espace triangulaire de Bézier où chaque i -simplexe stocke uniquement ses **points de contrôle propres**, i.e. qui n'appartiennent pas à son bord. Ainsi, l'ensemble des points de contrôle d'un espace triangulaire de Bézier peuvent être répartis sur la structure d'un ensemble semi-simplicial. Les relations d'incidence sont ainsi explicitées via la structure d'ensemble semi-simplicial, et aucun point de contrôle n'est dupliqué.

Les points de contrôle propres d'un i -simplexe sont donc de la forme $P_{\alpha_0 \dots \alpha_i}$ avec, pour tout $0 \leq j \leq i$, $\alpha_j > 0$. Lorsque l'on souhaite représenter l'espace triangulaire de Bézier associé à un ensemble semi-simplicial, on peut reconstituer l'ensemble des points de contrôle de chaque simplexe principal via les indices des opérateurs de face qui permettent d'accéder

aux points de contrôle de leurs bords. Par exemple, sur la Figure 1.8(b), l'arête commune aux deux triangles contient uniquement ses points de contrôle propres numérotés 12 et 21. Pour le triangle du haut (resp. du bas), cette arête est sa face d_0 (resp. d_1), ces points sont donc numérotés 012 et 021 (resp. 102 et 201), pour le triangle.

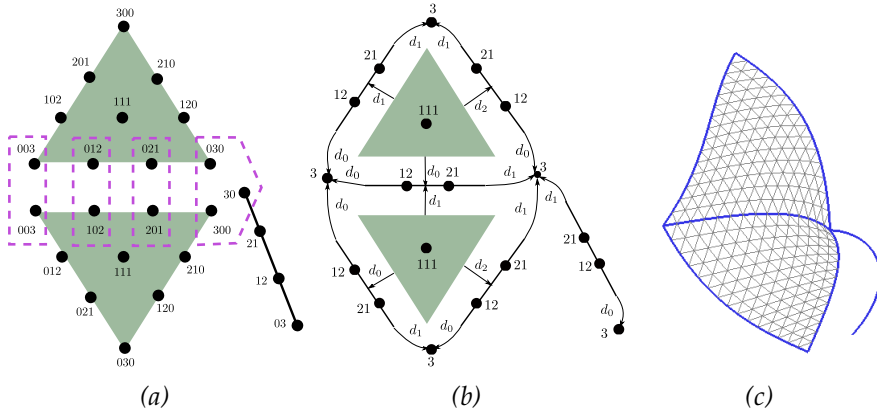


FIGURE 1.8 – (a) Simplexes principaux et leurs points de contrôle. (b) Répartition des points de contrôle sur l'ensemble de la structure. Chaque simplexe ne stocke que ses points de contrôle propres. (c) Un espace triangulaire de Bézier correspondant à la structure représentée en (b).

1.3 Structures simploldales (sans dégénérescence)

Les briques de bases des structures simploldales sont des produits de simplexes, aussi appelés **simploldes**. À l'instar d'un cube de dimension i qui peut être obtenu par le produit cartésien de i arêtes (i.e. de 1-simplexes), les simploldes peuvent être vus comme des produits de simplexes de dimension quelconques. La notion de simploldes a été introduite par [8]. Dans ce cadre, les simplexes et les cubes sont des simploldes particuliers, qui peuvent être assemblés et manipulés de manière homogène, comme tout simploldes.

Afin d'introduire les ensembles semi-simploldaux de manière progressive, nous commençons par présenter les ensembles semi-cubiques, qui sont un cas particulier d'ensembles semi-simploldaux où tous les simploldes sont des produits d'arêtes. Cela permet d'introduire la notion de

produit cartésien simplement. On retrouve les structures cubiques en particulier en géométrie discrète et en image 3D où les briques de base sont souvent issus de grilles régulières, et sont justement des cubes.

1.3.1 Ensembles semi-cubiques

Les **ensembles semi-cubiques** [35, 7] sont définis, comme pour les ensembles semi-simpliciaux, par une famille de briques de base (ici les p -cubes) munis d'opérateurs de face.

Définition 1.3.1. On appelle **cube** de dimension p ou p -cube, le produit cartésien de p simplexes de dimension 1.

Les ensembles semi-cubiques permettent de manipuler des assemblages de cubes. Ces assemblages sont définis de manière analogue aux ensembles semi-simpliciaux, c'est-à-dire par un ensemble de cubes et d'opérateurs de face vérifiant des relations de cohérence.

Définition 1.3.2. Un **ensemble semi-cubique** $S = (K, (d_j^i))$, de dimension n , est une famille d'ensembles $K = (K^p)_{p \in [0, n]}$ de p -cubes munis d'**opérateurs de face** $d_j^i : K^p \rightarrow K^{p-1}$, pour $p > 0$, $i \in [1, n]$ et $j \in [0, 1]$. Pour tout p -cube, $p > 1$, on a :

$$\sigma d_j^i d_l^k = \sigma d_l^k d_j^{i-1}, \forall k < i$$

Chaque p -cube est donc muni de $2p$ opérateurs de face : $d_0^1, d_1^1, \dots, d_0^p, d_1^p$. Par exemple, une arête est munie de deux opérateurs de face d_0^1 et d_1^1 , un carré est muni des quatre opérateurs d_0^1, d_1^1, d_0^2 et d_1^2 . Chaque p -cube correspond intuitivement au produit cartésien de p arêtes, les deux opérateurs de face d_0^i et d_1^i correspondent intuitivement aux opérateurs de face de la i^e arête intervenant dans le produit. Dit autrement, les relations définies sur les opérateurs de face jouent le même rôle que pour les ensembles semi-simpliciaux : elles garantissent la cohérence du modèle. De manière intuitive : soit $\mu = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_p$ un p -cube issu du produit des arêtes $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, alors la face μd_j^i est le $(p-1)$ -cube obtenu par le même produit, excepté pour l'arête σ_i qui est remplacée par sa face $\sigma_i d_j$.

Un *cube de Bézier* de dimension i est défini par un ensemble de points de contrôle correspondant au produit cartésien des points de contrôle de i courbes de Bézier. Les degrés des différentes courbes de Bézier générant un cube peuvent être différents comme le montre la Figure 1.9. Ainsi, le degré d'un cube de dimension i est défini par le i -tuple d'entiers (d_1, \dots, d_i)

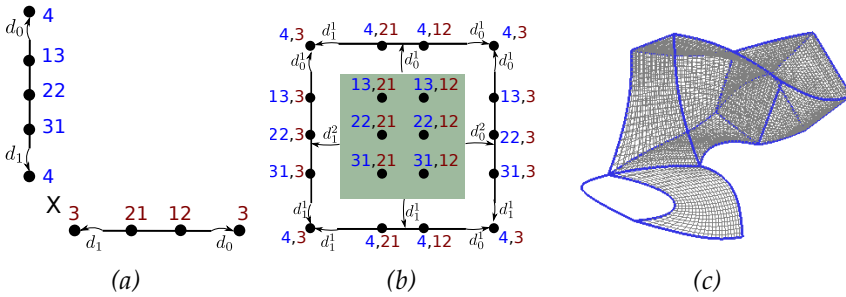


FIGURE 1.9 – Le 2-cube représenté en (b) correspond intuitivement au produit cartésien d’une arête verticale et une arête horizontale représentées en (a). Les opérateurs de face d_j^1 (resp. d_j^2) du 2-cube correspondent aux opérateurs de face de la première arête (resp. de la deuxième arête). En (c), un espace cubique de Bézier ayant comme cellules principales : deux 3-cubes, un 2-cube et un 1-cube.

correspondant aux degrés des courbes « générant » ce cube. Les points de contrôle d’un cube de dimension i sont donc numérotés par des i -tuples de multi-indices de dimension 1, i.e. de la forme $P_{\alpha_0^1 \alpha_1^1, \dots, \alpha_0^i \alpha_1^i}$.

Un *espace cubique de Bézier* est un ensemble de cubes de Bézier satisfaisant des conditions similaires décrites pour les ensembles semi-simpliciaux sur les bords. Soit $\{P_{\alpha^1, \dots, \alpha^i}\}$ l’ensemble des points de contrôle d’un cube de Bézier σ . Pour tout $j \in [1, i]$, l’ensemble des points de contrôle vérifiant $\alpha_0^j = 0$ (resp. $\alpha_1^j = 0$) définit le $(i - 1)$ -cube de Bézier correspondant à la face σd_0^j (resp. σd_1^j).

Par définition, chaque arête « génératrice » de degré d contient $d - 1$ points de contrôles propres ; ainsi, un i -cube de degré $(d_1 \cdots d_i)$ contient $\prod_{j=1}^i (d_j - 1)$ points de contrôle propres.

1.3.2 Ensembles semi-simploïdaux

Les ensembles semi-simploïdaux [32] généralisent les ensembles semi-simpliciaux et semi-cubiques. En effet dans cette structure, les briques de base sont des produits de simplexes quelconques.

Structure combinatoire

Pour les simplexes et les cubes, il n'existe qu'un type de cellule pour chaque dimension, c'est pourquoi les simplexes et les cubes sont caractérisés par leur dimension. On peut en revanche construire différents simploldes pour une dimension donnée cf. Figure 1.10. Ainsi, un simploldes μ est caractérisé par son **type** (a_1, \dots, a_n) défini par un n -tuple d'entiers. Intuitivement, le type d'un simploldes correspond aux dimensions des n simplexes dont il est issu, où tous les a_j sont strictement positifs. Le fait de ne pas faire apparaître les 0 dans le type correspond intuitivement au fait que le produit d'un simploldes par un sommet correspond à un simploldes de même type. Le **dimension** de μ est la somme $\sum_{j=1}^n a_j$ et n est sa **longueur**.

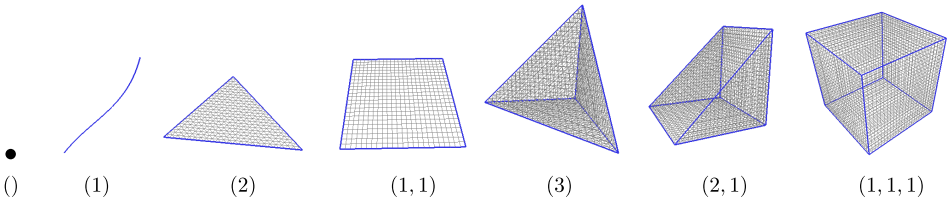


FIGURE 1.10 – Simploldes et leur type jusqu'à la dimension 3.

On notera que les p -simplexes, $p > 0$, sont des simploldes de type (p) de longueur 1 (un 0-simplexe est de type $()$) et que les n -cubes sont des simploldes de type $(1, \dots, 1)$ de longueur n .

Définition 1.3.3. Un ensemble semi-simploldal $S = (K, (d_j^i))$ est un ensemble de simploldes muni d'un opérateur de type $\mathcal{T} : K \mapsto \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{N}^{*i}$ et d'opérateurs de face d_j^i .

Soit $\sigma \in K$; $\sigma\mathcal{T}$ est le type de σ . Soit $\sigma\mathcal{T} = (a_1, \dots, a_n) : \sigma d_j^i$ est défini si $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq a_i$. Les opérateurs vérifient les propriétés suivantes :

(I) Action sur le type

$$1) \sigma d_j^i \mathcal{T} = \begin{cases} (a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_n) & \text{si } a_i > 1 \\ (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

(II) Commutation des opérateurs de face

$$\begin{aligned}
 1) \quad d_j^i d_l^i &= d_l^i d_{j-1}^i \quad l < j, a_i > 1 \\
 2) \quad d_j^i d_l^k &= \begin{cases} d_l^k d_j^i & \text{si } a_k > 1 \\ d_l^k d_j^{i-1} & \text{sinon} \end{cases} \quad k < i
 \end{aligned}$$

Notons que le cas (II).1 avec $a_i = 1$ n'est pas explicité car il s'agit du cas particulier de (II).2, $a_k = 1$, avec $k = i - 1$.

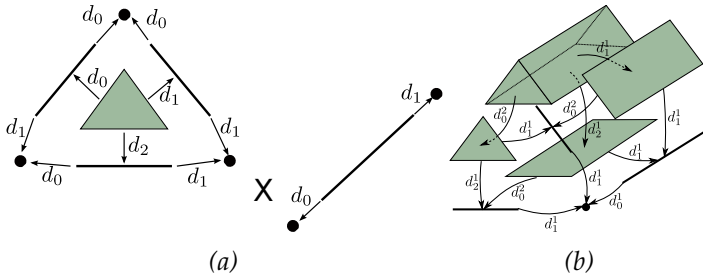


FIGURE 1.11 – (a) – (b) : correspondance entre le produit de deux simplexes (et leur bord) et un simpleïde de type (2, 1). Par souci de clarté, seulement une partie du bord du prisme est représentée.

Opérations de construction

Tout ensemble semi-simploïdal peut être construit à partir de deux opérations de base : l'opération de **produit cartésien** qui permet en particulier de construire des simpleïdes à partir de simplexes, et l'opération d'**identification** permettant de les assembler.

La définition du produit cartésien sur les ensembles simpleïdaux se déduit directement du fait que le produit de deux simpleïdes σ et μ de types respectifs (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_m) est un simpleïde $\tau = \sigma \times \mu$ de type $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$. De plus, les opérateurs de face sont définis, de manière à respecter le produit : $\tau d_j^i = \sigma d_j^i \times \mu$ pour tout i compris entre 1 et n , et $\tau d_j^{i+n} = \sigma \times \mu d_j^i$ pour tout i compris entre 1 et m .

Concernant l'opération d'identification, le principe est exactement le même que pour les ensembles semi-simpliciaux, l'opération atomique consiste à fusionner deux simpleïdes ayant même bord (et donc même type), ce qui implique en particulier de mettre à jour leurs étoiles. Ici encore,

des opérations de plus haut niveau peuvent être définies de manière à, par exemple, identifier deux simploldes (de même type) n'ayant pas même bord.

Espaces simploldaux de Bézier et ensembles semi-simploldaux

Un espace simploldal de Bézier est un ensemble S de simploldes de Bézier [8] tel que l'intersection de deux simploldes σ et τ de S est soit vide, soit un simploldal de S correspondant à une face commune de σ et τ . Un simploldal de Bézier de type (a_1, \dots, a_n) et de degré (d_1, \dots, d_n) est défini par : $P(u^1, \dots, u^n) = \sum_{\alpha^1 \in \Gamma_{d_1}^{a_1}} \dots \sum_{\alpha^n \in \Gamma_{d_n}^{a_n}} P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)} B_{\alpha^1}^{d_1}(u^1) \times \dots \times B_{\alpha^n}^{d_n}(u^n)$ où chaque u^i est un point du a_i -simplexe standard, et $\{P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}\}$ est l'ensemble de ses points de contrôle.

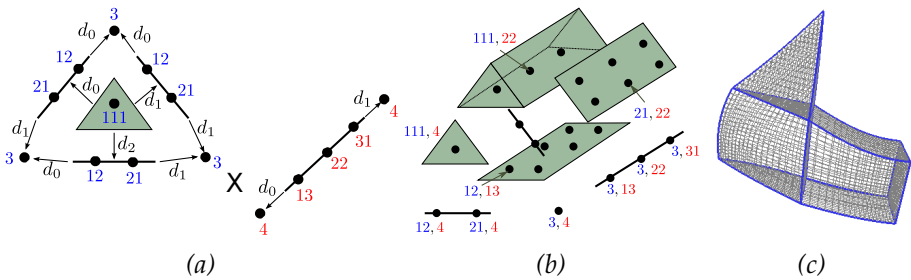


FIGURE 1.12 – (a) – (b) : Les points de contrôle du prisme sont numérotés par des couples de multi-indices. (c) Un exemple d'espace simploldal de Bézier dans lequel un simploldal de type $(2, 1)$ est assemblé à un tétraèdre le long d'une de ses faces triangulaires, et à un cube le long d'une de ses faces carrées.

Le principe est le même que pour les espaces cubiques, il est juste généralisé dans le cas des simploldes à des simplexes quelconques pour chaque composante au lieu de se restreindre à des domaines paramétriques de dimension 1 uniquement.

Comme vu pour les ensembles semi-simpliciaux et semi-cubiques, les espaces simploldaux de Bézier ont une structure d'ensemble semi-simploldal. On retrouve ici encore cette structuration au niveau des tuples de multi-indices qui numérotent les points de contrôle des simploldes de Bézier. Cette correspondance (cf. Figure 1.12) permet en particulier d'associer à chaque simploldal de Bézier ses points de contrôle propres (i.e. qui ne contiennent aucun 0 dans tout le tuple) et de reconstruire l'ensemble

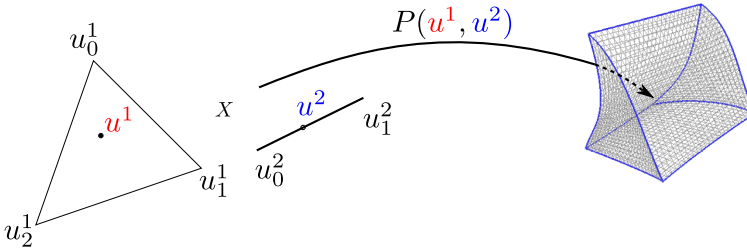


FIGURE 1.13 – L'espace paramétrique du prisme est le produit de deux espaces paramétriques. À chaque point (u^1, u^2) de l'espace des paramètres, correspond un point du simplexe de Bézier

de ses points de contrôle en utilisant les indices des opérateurs de face en procédant de la même manière que pour les ensembles semi-simpliciaux sur chaque composante du tuple de multi-indices.

Par exemple, soit σ un simplexe de Bézier de type (a_1, \dots, a_n) et $\{P_{\alpha^1, \dots, \alpha^n}\}$ l'ensemble de ses points de contrôle. L'ensemble des points de contrôle de σ tels que $\alpha_j^i = 0$ (i.e. le multi-indice α contient un 0 à l'indice j de la i^e composante du multi-indice) définit le simplexe de Bézier correspondant à sa face d_j^i .

D'un point de vue pratique, de manière analogue à ce qui a été vu pour les ensembles semi-simpliciaux, l'ensemble des points de contrôles propres des simplexes non dégénérés peuvent être stockés dans un **tableau simplexial** selon l'ordre lexicographique des tuples de multi-indices [12, 33]. Par exemple, soit $P = P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}$ l'ensemble des points de contrôle d'un simplexe de Bézier de type (a_1, \dots, a_n) et de degré (d_1, \dots, d_n) . Si $n = 1$, alors le simplexe correspond à un simplexe, et P est stocké dans un tableau simplicial comme décrit pour les ensembles semi-simpliciaux. Si $n > 1$, il faut commencer par stocker tous les points de contrôle d'un simplexe de type (a_2, \dots, a_n) de degré (d_2, \dots, d_n) pour chaque multi-indice de $\Gamma_{d_1}^{a_1}$ précédant α^1 . Ensuite, le point P peut être stocké comme s'il s'agissait d'un simplexe de Bézier de type (a_2, \dots, a_n) et (d_2, \dots, d_n) , indicé par le tuple de multi-indices $(\alpha^2, \dots, \alpha^n)$.

1.4 Gestion de la dégénérescence

Cette partie s'appuie en particulier sur les références [30, 22, 33].

Les ensembles simplloïdaux généralisent et homogénéisent les ensembles simpliciaux et cubiques. Cette unification est possible via la notion d'opérateurs de dégénérescence. Si les ensembles semi-simplloïdaux permettent de manipuler au sein d'un même formalisme des assemblages de simplexes, de cubes et plus généralement de simplloïdes, les opérations de construction de base ne sont pas définies de manière homogène dans ces modèles. En particulier, l'opération de cône n'est pas définie sur les ensembles semi-simplloïdaux, et l'opération de produit cartésien n'est pas définie pour les ensembles semi-simpliciaux.

La définition des ensembles simpliciaux et simplloïdaux permet d'homogénéiser entièrement les modèles simpliciaux, cubiques et simplloïdaux, à la fois au niveau des briques de base, mais également au niveau des opérations de base. Ces structures embarquent, en plus des opérateurs de face, une seconde famille d'opérateurs, appelés **opérateurs de dégénérescence**. Les opérateurs de dégénérescence des ensembles simpliciaux permettent de définir de manière directe l'opération de produit cartésien simplicial; les opérateurs de dégénérescence des ensembles simplloïdaux permettent de définir l'opération de cône sur les simplloïdes.

Ainsi, les ensembles simplloïdaux permettent de manipuler de manière homogène des assemblages contenant des simplexes, des cubes, et de manière générale des simplloïdes quelconques, tout en généralisant l'ensemble des opérations de construction de base (opération de cône, produit cartésien simplloïdal, et identification).

1.4.1 Ensembles simpliciaux

Les ensembles simpliciaux sont une structure classiquement étudiée en topologie (peut-être plus connue que les ensembles semi-simpliciaux).

Structure combinatoire

Intuitivement, on peut voir un ensemble simplicial comme un ensemble semi-simplicial muni d'une seconde famille d'opérateurs : les *opérateurs de dégénérescence*. Cette structure permet non seulement de manipuler des objets simpliciaux plus généraux, mais elle permet également de définir directement l'opération de produit cartésien.

Définition 1.4.1. *Un ensemble simplicial* $S = (K, (d_i), (s_i))$ *est une famille d'ensembles* $K = (K^p)_{p \in \mathbb{N}}$, *munis de deux familles d'applications* : $\forall p > 0, \forall i, 0 \leq i \leq p, d_i : K^p \rightarrow K^{p-1}; \forall p \geq 0, \forall i, 0 \leq i \leq p, s_i : K^i \rightarrow K^{i+1}$,

vérifiant :

$$\begin{aligned}
 d_i d_j &= d_j d_{i-1} \text{ si } j < i \\
 s_i s_j &= s_j s_{i+1} \text{ si } j \leq i \\
 s_i d_j &= d_j s_{i-1} \text{ si } j < i \\
 s_i d_j &= d_{j-1} s_i \text{ si } j > i + 1 \\
 s_i d_i &= s_i d_{i+1} = Id
 \end{aligned}$$

Un $(p + 1)$ -simplexe μ est dit **dégénéré** s'il existe un p -simplexe σ et un opérateur de dégénérescence s_i tel que $\mu = \sigma s_i$.

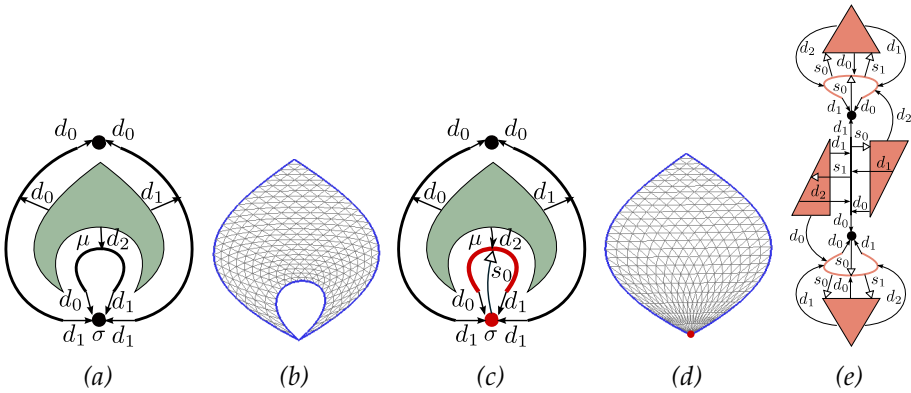


FIGURE 1.14 – (a) Un ensemble semi-simplicial, (b) un espace triangulaire de Bézier associé. (c) Un ensemble simplicial : l'arête rouge μ est dégénérée sur le sommet rouge σ (i.e. $\mu = \sigma s_0$), (d) un espace triangulaire de Bézier associé : la réalisation géométrique de l'arête dégénérée est réduite à un point. L'arête μ est le seul simplexe dégénéré qui apparaît dans le bord d'un simplexe non dégénéré. (e) Un ensemble simplicial représentant une arête et son bord et tous ses simplexes dégénérés jusqu'à la dimension 2. Aucun de ces simplexes dégénérés n'est utile dans notre cadre car aucun n'apparaît dans le bord d'un non simplexe dégénéré.

De manière intuitive, un i -simplexe σ peut être associé à la suite de ses sommets $(v_0, \dots, v_j, \dots, v_i)$. Le $(i + 1)$ -simplexe dégénéré σs_j correspond à la suite de sommets $(v_0, \dots, v_j, v_j, \dots, v_i)$.

D'un point de vue théorique, tous les ensembles simpliciaux contiennent un nombre infini de simplexes car à tout i -simplexe (dégénéré ou non) correspond au moins un $(i + 1)$ -simplexe dégénéré. Cela permet en particulier de définir l'opération de produit cartésien de manière directe.

Opérations de construction

Les opérations de construction de base sont ici encore le cône et l'identification. L'opération de cône s'étend directement sur les ensemble simpliciaux. Pour chaque i -simplexe σ (dégénéré ou non) de l'ensemble simplicial sur lequel on souhaite effectuer une opération de cône, un simplexe $\bar{\sigma}$ est créé. Les opérateurs de face sont établis comme décrit pour les ensembles semi-simpliciaux, et les opérateurs de dégénérescence sont établis de la même manière : $\bar{\sigma}s_j = \overline{\sigma s_j}$ pour tout $0 \leq j \leq i$. Seuls les simplexes dégénérés faces d'un simplexe non dégénéré ont besoin d'être explicités d'un point de vue pratique.

L'opération d'identification de deux i -simplexes σ et μ ayant même bord implique l'identification deux à deux de tous les simplexes dégénérés issus de σ et μ par une même suite d'opérateurs de dégénérescence. Plus précisément, soit K l'ensemble des simplexes de S avant l'identification de σ et μ , K peut être partitionné en $K = C_0 \cup \dots \cup C_n \cup K'$ tel que pour tout i , tous les simplexes de C_i doivent être identifiés (i est simplement un numéro de classe d'équivalence, et n'a rien à voir avec la dimension des simplexes de la classe), et tous les simplexes de K' ne sont pas impacté par l'identification. Après l'identification de σ et μ , l'ensemble simplicial résultant contient donc un seul simplexe γ_i pour chaque classe d'équivalence C_i , ainsi que tous les simplexes de K' .

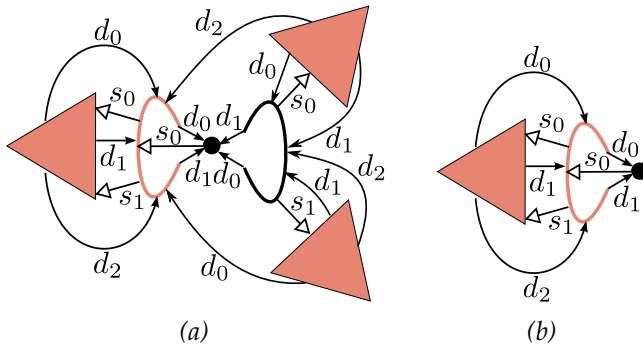


FIGURE 1.15 – L'identification de l'arête non dégénérée et de l'arête dégénérée représentées en (a) induit l'identification de leurs dégénérés. Le résultat de l'identification est représenté en (b).

Les opérateurs de face et de dégénérescence de chaque simplexe γ_i sont définis en respectant les classes d'équivalence. Il faut ensuite mettre à jour les opérateurs de face des simplexes de K' qui avaient une face dans

une classe d'équivalence, ainsi que les opérateurs de dégénérescence des simplexes de K' qui dégénéraient un simplexe d'une classe d'équivalence. Le détail de l'algorithme est disponible dans [33].

Le **produit cartésien** $S \times S'$ de deux ensembles simpliciaux S et S' peut être défini de manière directe : tout i -simplexe $\mu \in S \times S' = (\sigma, \sigma')$, où σ et σ' sont deux i -simplexes, tel que pour tout j , $\mu d_j = (\sigma d_j, \sigma' d_j)$ et $\mu s_j = (\sigma s_j, \sigma' s_j)$. Par exemple, sur la Figure 1.16, on peut vérifier que $(\beta s_1, \beta' s_0) d_0 = (\beta s_1 d_0, \beta' s_0 d_0) = (\beta d_0 s_0, \beta') = (\gamma s_0, \beta')$.

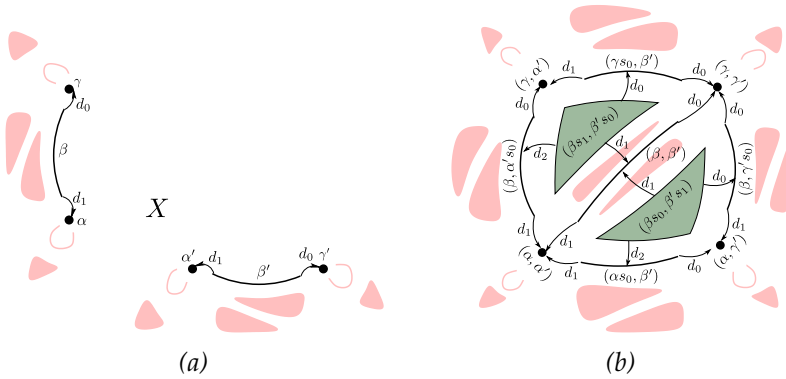


FIGURE 1.16 – Le produit cartésien de deux ensembles simpliciaux s'exprime directement à l'aide des opérateurs de dégénérescence. (a) Deux arêtes non dégénérées et leur bord, (b) le résultat du produit cartésien. Seuls les simplexes non dégénérés sont nommés.

En pratique, seuls les simplexes dégénérés de dimension inférieure à la somme des dimensions de S et S' sont nécessaires par calculer le résultat du produit cartésien de S et S' .

Enfin, comme annoncé précédemment, la définition du produit cartésien des ensembles simpliciaux permet de déduire une définition directe pour les ensembles semi-simpliciaux, en manipulant implicitement les simplexes dégénérés (et donc les opérateurs de dégénérescence) [27].

Espaces de Bézier et ensembles simpliciaux

La réalisation géométrique de σs_j est définie comme celle de σ . D'un point de vue pratique, lorsque l'on modélise de tels objets simpliciaux, seuls les simplexes non dégénérés et leurs faces (dégénérées ou non) nous intéressent. On peut donc expliciter uniquement ces simplexes ; les autres simplexes dégénérés peuvent être gérés de manière implicite et

peuvent être obtenus, si nécessaire, en appliquant une suite d'opérateurs de dégénérescence à partir d'un simplexe non dégénéré.

On peut également associer un simplexe de Bézier à tout i -simplexe σ d'un ensemble simplicial et plus généralement un espace triangulaire de Bézier à tout ensemble simplicial [33]. Les relations entre les points contrôle de σ et ceux de σd_j sont celles décrites pour les ensembles semi-simpliciaux. Si μ est dégénéré, i.e. $\mu = \sigma s_j$ alors la Propriété 1 doit être satisfaite afin de garantir que la réalisation géométrique de μ soit bien celle de σ (cf. Figure 1.17).

Propriété 1. Soient σ un i -simplexe, et B_σ le simplexe de Bézier qui lui est associé, défini par les points de contrôle $\{P_\alpha\}$. Soient $\mu = \sigma s_j$, $0 \leq j \leq i$, et B_μ le simplexe de Bézier qui lui est associé, défini par les points de contrôle $\{P_{\alpha'}\}$. Si tous les points de contrôle $P_{\alpha'_0 \dots \alpha'_j \alpha'_{j+1} \dots \alpha'_{i+1}}$ tels que :

- $\alpha'_k = \alpha_k$, pour $0 \leq k \leq j-1$,
- $\alpha'_j + \alpha'_{j+1} = \alpha_j$, pour $0 \leq \alpha'_j \leq \alpha_j$ et $0 \leq \alpha'_{j+1} \leq \alpha_j$,
- $\alpha'_k = \alpha_{k-1}$, pour $j+2 \leq k \leq i+1$

sont égaux à $P_{\alpha_0 \dots \alpha_i}$, alors $B_\sigma = B_\mu$.

On peut montrer de manière directe que si la propriété est vérifiée, alors à tout point $P(u'_0, \dots, u'_{i+1})$ de B_μ dégénéré correspond le point $P(u_0, \dots, u_i)$ de B_σ sur lequel il se dégénère, où $u'_k = u_k$ pour tout $0 \leq k \leq j-1$, $u'_j + u'_{j+1} = u_j$ et $u'_k = u_{k-1}$ pour tout $j+2 \leq k \leq i+1$.

Pour cela il suffit de montrer que pour tout P_α , on a :

$$\binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \dots u_j^{\alpha_j} \dots u_i^{\alpha_i} = \sum_{\alpha'_j + \alpha'_{j+1} = \alpha_j} \binom{d}{\alpha'} u_0^{\alpha'_0} \dots u_j^{\alpha'_j} u_{j+1}^{\alpha'_{j+1}} \dots u_{i+1}^{\alpha'_{i+1}}$$

Ce qui revient à montrer que l'on a bien l'égalité suivante, qui se montre directement en appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} & \binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \dots (u'_j + u'_{j+1})^{\alpha_j} \dots u_i^{\alpha_i} \\ &= \sum_{\alpha'_j + \alpha'_{j+1} = \alpha_j} \binom{d}{\alpha_0 \dots \alpha'_j \alpha'_{j+1} \dots \alpha_i} u_0^{\alpha_0} \dots u_j^{\alpha'_j} u_{j+1}^{\alpha'_{j+1}} \dots u_i^{\alpha_i} \end{aligned}$$

On notera que d'un point de vue pratique, seuls les points de contrôle des simplexes non dégénérés sont nécessaires pour associer un espace triangulaire de Bézier à un ensemble simplicial. L'ensemble des points de

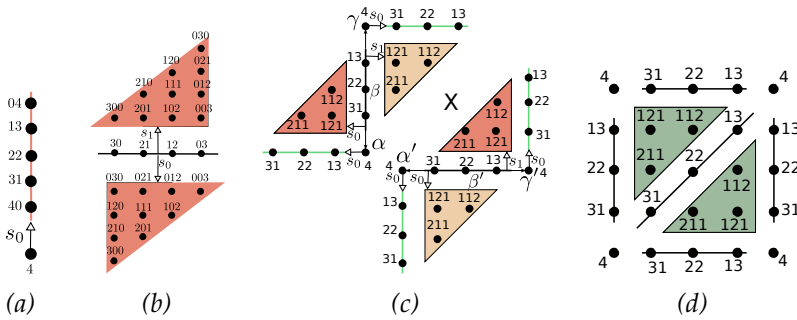


FIGURE 1.17 – (a) La Propriété 1 nous assure que si tous les points de contrôle de l’arête dégénérée sont égaux à celui du sommet, alors les deux simplexes de Bézier correspondant sont égaux. (b) Représente une arête et ses deux triangles dégénérés. Si tous les points de contrôle d’un triangle alignés verticalement correspondent au point de contrôle de l’arête (de l’alignement), alors les simplexes de Bézier correspondant sont égaux. (c) Produit cartésien correspondant à la Figure 1.16. D’après la propriété 1, tous les points de contrôle de αs_0 (resp. γs_0) sont égaux au point P_4 du sommet α (resp. γ); les points de contrôle propres P_{211} et P_{121} (resp. P_{112}) du triangle dégénérée βs_0 sont égaux au point de contrôle P_{31} (resp. P_{22}) de β . (d) Résultat du produit cartésien, mise en évidence des points de contrôle.

contrôle de tout simplexe, qu’il soit dégénéré ou non, peut être retrouvé à partir de ses points de contrôle propres et des relations correspondant à ses opérateurs de face et de dégénérescence. En particulier, si un simplexe est dégénéré, alors ses points de contrôle peuvent être déduits du simplexe non dégénéré de plus grande dimension de son bord, en utilisant la Propriété 1.

On notera qu’ici encore, on suppose que tous les simplexes de l’ensemble simplicial sont de même degré, mais il est tout à fait possible de manipuler des assemblages de simplexes de Bézier de degrés différents en utilisant des résultats bien connus d’élévation de degré [18].

1.4.2 Ensembles simplloïdaux

Les ensembles simplloïdaux sont aux ensembles semi-simplloïdaux ce que les ensembles simpliciaux sont aux ensembles semi-simpliciaux, ils permettent la gestion de la dégénérescence. De manière intuitive, un ensemble simplloïdal peut donc être vu comme un ensemble semi-simplloïdal auquel s’ajoute une seconde famille d’opérateurs : les opérateurs de dégénérescence.

Structure combinatoire

Comme vu pour les ensembles simpliciaux, les opérateurs de dégénérescence sont des applications qui montent en dimension.

Pour les simpleïdes, on peut monter en dimension de deux manières différentes : soit sur un simpleïde de même longueur, ce qui correspond intuitivement à monter en dimension un de ses simplexes générateurs, soit en augmentant la longueur de 1 en ajoutant la valeur 1 au type du simpleïde, ce qui correspond intuitivement à effectuer le produit cartésien du simpleïde par une arête dégénérée.

Par exemple, à partir d'un simpleïde de type $(2, 3)$, ses opérateurs de dégénérescence permettent d'obtenir d'une part des simpleïdes de type $(3, 3)$ et $(2, 4)$, en « dégénégrant chacun de ses simplexes générateurs » comme en simplicial ; d'autre part, ils permettent d'obtenir des simpleïdes de type $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ et $(2, 3, 1)$ en « effectuant le produit du simpleïde par une arête dégénérée ». Bien entendu, des relations de cohérence doivent être respectées entre les opérateurs de face et les opérateurs de dégénérescence.

Définition 1.4.2. *Un ensemble simpleïdal $S = (K, (d_j^i), (s_l^k))$ est un ensemble de simpleïdes muni d'un opérateur de type $\mathcal{T} : K \mapsto \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{N}^{*i}$, d'opérateurs de face d_j^i et d'opérateurs de dégénérescence s_l^k .*

Soit $\sigma \in K$; $\sigma\mathcal{T}$ est le type de σ . Soit $\sigma\mathcal{T} = (a_1, \dots, a_n) : \sigma d_j^i$ (resp. σs_l^k) est défini si $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq a_i$ (resp. $0 \leq k \leq n$ et $l = -1$, ou $1 \leq k \leq n$ et $0 \leq l \leq a_k$). Les opérateurs vérifient les propriétés suivantes :

(I) Action sur le type

$$1) \sigma d_j^i \mathcal{T} = \begin{cases} (a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_n) & \text{si } a_i > 1 \\ (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$2) \sigma s_j^i \mathcal{T} = \begin{cases} (a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_n) & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq a_i \\ (a_1, \dots, a_i, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) & 0 \leq i \leq n, j = -1 \end{cases}$$

(II) Commutation des opérateurs de face

$$1) d_j^i d_l^i = d_l^i d_{j-1}^i \quad l < j, a_i > 1$$

$$2) d_j^i d_l^k = \begin{cases} d_l^k d_j^i & \text{si } a_k > 1 \\ d_l^k d_j^{i-1} & \text{sinon} \end{cases} \quad k < i$$

(III) Commutation des opérateurs de dégénérescence

$$\begin{aligned}
1) \quad & s_{-1}^i s_{-1}^k = s_{-1}^k s_{-1}^{i+1} \quad k \leq i \\
2) \quad & \text{si } l \neq -1, s_{-1}^i s_l^k = \begin{cases} s_l^k s_{-1}^i \text{ si } k \leq i \\ s_l^{k-1} s_{-1}^i \text{ si } i < k - 1 \end{cases} \\
3) \quad & \text{si } j, l \neq -1, s_j^i s_l^k = \begin{cases} s_l^k s_j^i \text{ si } i \neq k \\ s_l^k s_{j+1}^i \text{ si } i = k, l \leq j \end{cases}
\end{aligned}$$

(IV) Commutation des opérateurs de face/dégénérescence

$$\begin{aligned}
1) \quad & \text{si } l \neq -1, s_l^i d_j^i = \begin{cases} d_j^i s_{l-1}^i & \text{si } j < l \\ d_{l-1}^i s_l^i & \text{si } j > l + 1 \\ s_l^i d_{j+1}^i = Id & \text{si } j = l \end{cases} \\
2) \quad & \text{si } l = -1, s_l^{i-1} d_j^i = Id
\end{aligned}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{aligned}
3) \quad & \text{si } k \leq i - 1, s_l^k d_j^i = \begin{cases} d_j^i s_l^k & \text{si } l \neq -1 \\ d_j^{i-1} s_l^k & \text{sinon} \end{cases} \\
4) \quad & \text{sinon (i.e. } k \geq i), s_l^k d_j^i = \begin{cases} d_j^i s_l^k & \text{si } a_i > 1 \\ d_j^i s_l^{k-1} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour rappel, aucun « 0 » n'apparaît dans le type d'un simpleïde, car le produit cartésien d'un simplexe par un sommet est l'identité d'un point de vue structural. Cela explique pourquoi différents cas doivent être distingués dans la définition, même si ces différents cas sont intuitivement similaires. Plus généralement, la définition 1.4.2 peut être entièrement retrouvée à partir des propriétés de commutation sur les opérateurs de face et de dégénérescence des ensembles simpliciaux, et du fait que l'application de deux opérateurs sur deux « simplexes générateurs » différents sont indépendants.

La partie (I) décrit l'action d'un opérateur de face (resp. dégénérescence) sur le type d'un simpleïde (I-1) (resp. (I-2)). Comme vu pour le simplicial, un opérateur de face (resp. dégénérescence) diminue (resp. augmente) la dimension du simpleïde sur lequel il agit. En particulier, si $a_i = 1$, alors l'application d'un opérateur d_j^i diminue la longueur du simpleïde (car il n'y a aucun 0 dans le type d'un simpleïde). De manière similaire, lorsque l'on applique un opérateur de dégénérescence s_{-1}^k , la longueur du simpleïde augmente. Intuitivement, cela revient à ajouter une arête dégénérée comme simplexe générateur du simpleïde.

Les parties (II) (resp. (III), (IV)) sont les relations de cohérence liées aux opérateurs de face (resp. dégénérescence, face et dégénérescence).

On peut noter que différents cas correspondent aux propriétés de commutation des ensembles simpliciaux, i.e. lorsque les opérateurs sont appliqués sur un même simplexe générateur : cf. équation (II-1), le dernier cas de (III-3), et (IV-1).

Le cas (IV-2) correspond au cas où un opérateur de face est appliqué à 1-simplexe générateur dégénéré (au final, rien n'est modifié).

Les autres cas garantissent l'indépendance des opérateurs appliqués sur des simplexes générateurs distincts :

- (II-2) : deux cas distincts car un 1-simplexe générateur peut disparaître suite à l'application d'un opérateur de face ;
- (III-1), (III-2) et le premier cas de (III-3) : correspondent aux différents cas de dégénérescence, qui prennent en compte l'ajout de nouveaux simplexes générateurs créés par des opérateurs s_{-1} . Notons que (III-2) n'a pas de propriété de commutation lorsque $k = i + 1$, car $\sigma s_{-1}^{k-1} s_i^k \mathcal{T} = (a_1, \dots, a_{k-1}, 2, \dots, a_n)$ (le premier opérateur de dégénérescence crée un nouveau 1-simplexe générateur, sur lequel le second opérateur de dégénérescence agit) ;
- (IV-3) et (IV-4) : deux cas distincts en fonction de la création ou la suppression d'un 1-simplexe générateur.

Notons qu'une conséquence directe de la définition des ensembles simloïdaux est que l'on peut associer un unique ensemble simloïdal à tout ensemble simplicial ainsi qu'à tout ensemble cubique. Par exemple, tout p -simplexe d'un ensemble simplicial correspond à un simloïde de type (p) et tout opérateur de face (resp. dégénérescence) simplicial d_i (resp. s_j) correspond à un opérateur de face (resp. dégénérescence) simloïdal d_i^1 (resp. s_j^1). L'idée est similaire pour les ensembles cubiques en associant un simloïde de type $(1, \dots, 1)$ de longueur p à tout p -cube.

Comme pour les ensembles simpliciaux, d'un point de vue théorique, tous les simloïdes dégénérés existent et tout ensemble simloïdal est donc par définition de taille infinie. Ici encore, seuls les simloïdes non dégénérés et leurs bords (dégénérés ou non) sont utiles pour représenter des objets simloïdaux.

Opérations de construction

En plus de pouvoir gérer des formes de simplexes plus générales, la définition de l'opération de cône est possible pour les ensembles simplexiens. Ainsi, les ensembles simplexiens généralisent et homogénéisent les ensembles simpliciaux et cubiques, à la fois au regard des briques de base, mais également des opérations.

Comme pour les ensembles semi-simplexiens, l'opération de **produit cartésien** permet de construire les briques de base. La définition du produit cartésien de deux ensembles simplexiens S^1 et S^2 est directement déduite de la propriété suivante : le produit cartésien de σ^1 de type (a_1, \dots, a_k) , et σ^2 de type (b_1, \dots, b_l) est un simplexe $\sigma^1 \times \sigma^2$ de type $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$.

Le produit cartésien de deux ensembles simplexiens S^1 et S^2 consiste à créer tous les simplexes $\sigma^1 \times \sigma^2$ pour tout $\sigma^1 \in S^1$ et $\sigma^2 \in S^2$.

Les opérateurs de face sont établis selon la propriété suivante : $\sigma d_j^i = \sigma^1 d_j^i \times \sigma^2$ pour $1 \leq i \leq k$, $\sigma d_j^{i+k} = \sigma \times \sigma^2 d_j^i$ pour $1 \leq i \leq l$. Les opérateurs de dégénérescence sont établis selon la propriété suivante : $\sigma s_j^i = \sigma^1 s_j^i \times \sigma^2$ pour $0 \leq i \leq k$, $\sigma s_j^{i+k} = \sigma \times \sigma^2 s_j^i$ pour $0 \leq i \leq l$.

Attention, les simplexes $\tau^1 = \sigma^1 s_{-1}^k \times \sigma^2$ et $\tau^2 = \sigma^1 \times \sigma^2 s_{-1}^0$ correspondent à un même simplexe, τ^1 et τ^2 doivent donc être fusionnés.

Concernant l'opération d'**identification**, comme pour les ensembles semi-simplexiens, deux simplexes σ et μ peuvent être identifiés à condition de respecter certaines conditions structurelles (même bord et même type). De manière analogue à ce qui a été décrit pour les ensembles simpliciaux, l'identification de σ et μ induit les identifications de leurs simplexes dégénérés.

D'un point de vue théorique, il n'est pas nécessaire de définir une opération de **dégénérescence** ; pour dégénérer un simplexe μ sur une de ses faces σ , il suffit de l'identifier avec un simplexe σs_j^i de même type, ayant même bord que μ .

En pratique, si σs_j^i n'est pas explicite, il suffit de l'expliquer en indiquant que $\sigma s_j^i = \mu$.

Notons que si μ est un simplexe principal, alors il peut simplement être supprimé car après dégénérescence, il ne sera pas une face d'un simplexe non dégénéré.

Cette opération de dégénérescence peut se généraliser de manière à dégénérer entièrement un ensemble simplexial S sur un sommet. Cela est utile pour la définition de l'opération de cône. Pour cela il faut identifier

tous les sommets de S , puis itérativement, identifier toutes les arêtes en une seule arête dégénérée, et répéter ce processus sur tous les simplexes de dimension 2 (en respectant leurs types) et ainsi de suite. Au final, l'ensemble simpleïdal résultant ne contient qu'un seul sommet, et un simplexe dégénéré de chaque type contenu dans S . En pratique, cette opération peut être effectuée simplement en créant un simplexe de chaque type contenu dans S et à définir tous ses opérateurs de face et de dégénérescence en fonction de leurs type. Par exemple, en dégénéralant un prisme (et son bord) sur un sommet, l'ensemble simpleïdal résultant contient un simplexe de chaque type (0) , (1) , (2) , $(1,1)$, $(1,2)$ et $(2,1)$. Chaque opérateur de face appliqué au simplexe de type (2) ou au simplexe de type $(1,1)$ a pour résultat le simplexe de type (1) .

L'opération de **cône** d'un sommet v sur un ensemble simpleïdal S consiste de manière intuitive à effectuer une extrusion de S avec une arête incidente à v , et ensuite à dégénéraler l'ensemble simpleïdal $S \times v$ en v (cf. Figure 1.18).

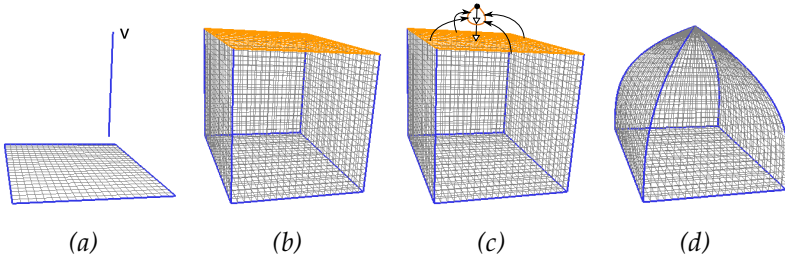


FIGURE 1.18 – (a) L'opération de cône sur un carré (et son bord) a pour résultat une pyramide à base carrée (d). L'opération de cône consiste en une extrusion (a) – (b) suivie de la dégénérescence (c) de la copie du carré original (représenté en orange).

Espaces simpleïdaux de Bézier et ensembles simpleïdaux

On sait associer un simplexe de Bézier à tout simplexe. Pour associer un espace simpleïdal de Bézier à tout ensemble simpleïdal S et garantir que la structure de S est bien respectée, la propriété suivante doit être vérifiée [33] :

Propriété 2. Soit $S = (K, (d_j^i), (s_j^k))$ un ensemble simploldal, soit σ un simplexe de type (a_1, \dots, a_n) de K , soit $P^\sigma = \{P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}, \alpha^i \in \Gamma_{d_i}^{a_i}, 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble de ses points de contrôle, et B_σ le simplexe de Bézier qui lui est associé.

(1) Soit $\mu = \sigma d_j^i$, soit P^μ son ensemble de points de contrôle, et soit B_μ le simplexe de Bézier associé à μ .

Si tout point de contrôle $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \dots, \alpha^n)}^\sigma$ est égal à :

— $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha^i, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^n)}^\mu$, où $\alpha^i = \alpha_0^i \cdots \alpha_{j-1}^i \alpha_{j+1}^i \cdots \alpha_{a_i}^i$ si $a_i > 1$ et $\alpha_j^i = 0$,

— $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^n)}^\mu$, si $a_i = 1$,

alors $B_\sigma(u) = B_\mu(u')$ où :

— $u = (u^1, \dots, u^n)$,

— $u' = (u^1, \dots, u^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \dots, u^n)$,

où $u^i = (u_0^i, \dots, u_{j-1}^i, u_{j+1}^i, \dots, u_{a_i}^i)$, si $a_i > 1$ et $u_j^i = 0$,

— $u' = (u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^n)$ si $a_i = 1$.

(2) Soit $\mu = \sigma s_j^i$, soit P^μ l'ensemble de ses points de contrôle, et soit B_μ le simplexe de Bézier associé à μ :

— si $j \geq 0$: tous les points de contrôle $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \dots, \alpha^n)}^\mu$ sont égaux au point de contrôle $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \dots, \alpha^n)}^\sigma$, où $\alpha_k^i = \alpha_k^i$ pour $k < j$, $\alpha_j^i + \alpha_{j+1}^i = \alpha_j^i$, et $\alpha_k^i = \alpha_{k-1}^i$ pour $k > j + 1$,

— si $j = -1$: tous les points de contrôle $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \alpha^{i+1}, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^n)}^\mu$ de σs_{-1}^i sont égaux au point de contrôle $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}^\sigma$, où $\alpha^{i+1} \in \Gamma_{d_{i+1}}^1$,

alors $B_\sigma = B_\mu$

Une conséquence directe de la Propriété 2, est qu'en pratique, il suffit que chaque simplexe non dégénéré d'un ensemble simploldal connaisse ses points de contrôles propres pour pouvoir reconstruire l'espace simploldal de Bézier entièrement. L'ensemble des points de contrôle de tout simplexe σ peut être reconstitué en utilisant la Propriété 2 et les indices des opérateurs de face :

— si σ est un sommet, un point (correspondant au point de contrôle) lui est associé ;

— sinon, si σ est non dégénéré, l'ensemble de ses points de contrôles peut être reconstruit à partir de ses points de contrôles propres et ceux des simplexes de son bord, en utilisant les indices de ses opérateurs de face.

Si σ est dégénéré, il est nécessaire de reconstituer l'ensemble des points du simplexe non dégénéré dont il est issu, en utilisant les indices des opérateurs de dégénérescence ainsi que la Propriété 2, qui lie les points de contrôle de σ et σs_j^i .

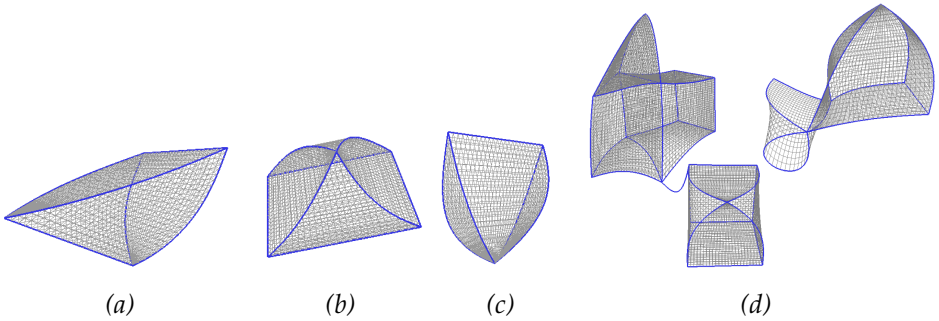


FIGURE 1.19 – (a) – (c) : Un prisme dont une partie du bord est dégénéré. (d) Un exemple d'ensemble simploïdal plongé dans un espace simploïdal de Bézier.

Comme pour les ensembles simpliciaux, la forme géométrique associée à un ensemble simploïdal est entièrement définie par l'ensemble des simploïdes non dégénérés comme le montre la Figure 1.19.

Notons que deux simploïdes σ et μ peuvent avoir des formes similaires, mais des types différents et dans ce cas, ils ne pourront pas être directement identifiés. Cela se produit en particulier lorsque :

- le type de σ est une permutation du type de μ . Par exemple, un simploïde de type $(1, 2)$ et un simploïde de type $(2, 1)$ ont des formes de prisme, mais ils sont bien de types différents, et n'ont pas les mêmes opérateurs de face (le produit cartésien n'est pas commutatif).
- un simploïde possède une face dégénérée. Par exemple, sur la Figure 1.20(a), les deux faces ont bien une forme triangulaire, mais correspondent à un simploïde $(1, 1)$ dont une arête est dégénérée pour l'une et à un simploïde (2) pour l'autre. Comme le montrent les Figures 1.20(b) et (c), les structures de leurs points de contrôle sont clairement différentes.

1.5 Structures cellulaires

Jusqu'à présent, nous avons vu différentes structures proposant différents types de briques de base régulières (simpliciales, cubiques et simploïdales). Dans cette partie, on s'intéresse aux structures cellulaires

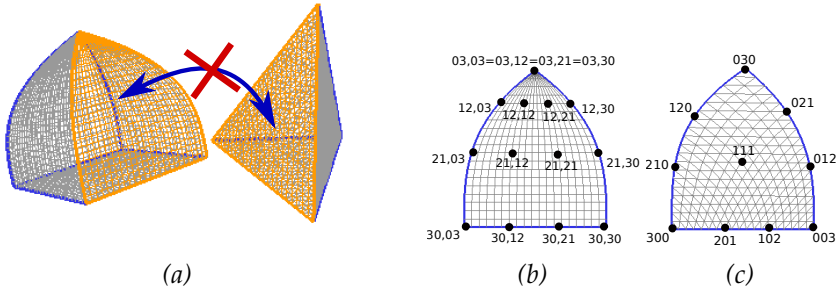


FIGURE 1.20 – (a) Même si les deux faces ont une forme triangulaire, leur structure n’est pas la même : (b) la structure des points de contrôle d’un carreau de Bézier avec une arête dégénérée est différente de celle d’un triangle de Bézier (c).

permettant de manipuler des assemblages où les briques de base sont « quelconques ».

Les structures cellulaires ont toutes une interprétation simpliciale, et correspondent toutes à des sous-classes d’ensembles **semi-simpliciaux numérotés**. Le mécanisme de numérotation des ensembles semi-simpliciaux permet de partitionner l’ensemble des simplexes en **cellules**. De manière intuitive, l’ensemble des simplexes correspondant à une cellule correspond à sa triangulation barycentrique.

L’objectif des structures cellulaires étant bien entendu d’optimiser la représentation cellulaire sans avoir à expliciter tout l’ensemble semi-simplicial numéroté associé.

Avant de présenter les structures combinatoires cellulaires, nous commençons par rappeler les notions d’ensembles semi-simpliciaux numérotés [25] et de cellules.

Définition 1.5.1. Un ensemble semi-simplicial numéroté (S, ν) est un ensemble semi-simplicial $S = (K, (d_i))$ de dimension n muni d’une application $\nu : K^0 \rightarrow \{0, \dots, n\}$, tel que pour tout simplexe principal σ de K :

- si $\sigma \in K^0$, alors $\nu(\sigma) = 0$,
- si $\sigma \in K^p$, $p \in [1, n]$, l’ensemble des entiers associés par ν à l’ensemble des 0-simplexes incidents à σ est $\{0, \dots, p\}$.

Soit μ un p -simplexe dont l'ensemble des sommets associés est $\{v_0, \dots, v_p\}$, on dit que μ est **numéroté** $(v(v_0), \dots, v(v_p))$, avec $v(v_0) < \dots < v(v_p)$.

On peut noter que la numérotation d'un ensemble semi-simplicial nous assure que tous les simplexes sont complets (i.e. un p -simplexe possède $(p + 1)$ sommets distincts dans son bord). Ce qui n'empêche pas à plusieurs simplexes de partager un même bord.

Dès lors que l'on sait associer une numérotation à un ensemble semi-simplicial, alors on peut partitionner celui-ci en cellules.

Définition 1.5.2. Soit (S, v) un ensemble semi-simplicial numéroté. Une cellule de dimension i , ou i -cellule, est identifiée par un 0 -simplexe σ numéroté (i) et contient σ ainsi que tous les j -simplexes numérotés $(v(v_0), \dots, v(v_{j-1}), i)$ qui lui sont incidents, où $1 \leq j \leq i$.

Par exemple, dans un ensemble semi-simplicial numéroté, toutes les 2 cellules seront composées d'un sommet numéroté (2), des arêtes numérotées (0, 2) et (1, 2) incidentes à ce sommet. Dans un ensemble semi-simplicial numéroté, il y a donc autant de i -cellules que de sommets numérotés (i) .

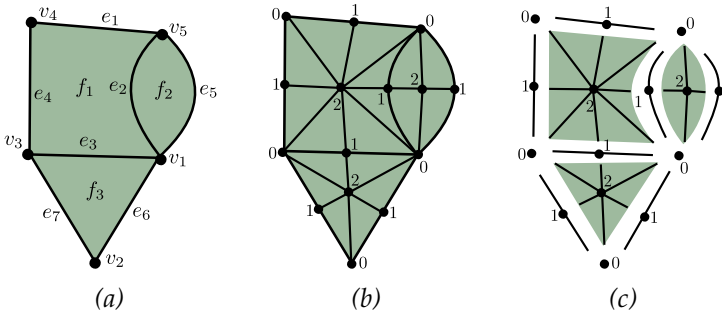


FIGURE 1.21 – (a) Un objet de dimension 2 subdivisé en cellules. (b) L'ensemble semi-simplicial numéroté associé. Les opérateurs de faces ne sont pas représentés, ils peuvent être directement déduits de la numérotation : la face d_j d'un simplexe principal est la face opposée au sommet numéroté j . (c) Mise en évidence de la structuration cellulaire de (b).

Nous allons à présent présenter les deux grandes familles de structures cellulaires : les modèles basés sur les **graphes d'incidence** (ou ordres) et ceux basés sur les **cartes combinatoires**. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de référence [9], pour une étude approfondie des modèles cellulaires utilisés en modélisation géométrique.

1.5.1 Structures basées graphes d'incidence

Les graphes d'incidence permettent de décrire les relations d'incidence entre les différentes cellules d'un objet subdivisé. Chaque noeud du graphe correspond à une cellule, et deux cellules sont liées par un arc si l'une est face de l'autre.

Plusieurs structures basées sur les ordres ont été définies et adaptées à différents types d'applications, e.g. [14, 34, 36]. Les différences sont soit liées à la définition (par exemple les dimensions des cellules sont explicitées ou non), ou sur le type de subdivisions visées. En particulier, il est possible d'ajouter des contraintes sur les assemblages ; ce point sera discuté Section 1.5.4.

La définition proposée ici pour illustrer les graphes d'incidence est basée sur la notion d'ordre [5].

Définition 1.5.3. *Un ordre est un couple $|X| = (X, \alpha)$, où X est un ensemble et α est une relation d'ordre (binaire, réflexive, antisymétrique, et transitive). β est l'inverse de α et θ l'union de α et β .*

Les CF-ordres¹ sont des ordres dénombrables, i.e. X est dénombrable, et localement fini, i.e. $\forall x \in X, \theta(x)$ est fini.

Voici quelques rappels sur le vocabulaire et les notions associées aux ordres, basé sur [10, 11]. L'ensemble $\alpha(x)$ est l' α -adhérence de x , ou la fermeture de la cellule x . l'ensemble $\beta(x)$ est la β -adhérence de x , ou l'étoile de la cellule x . La θ -adhérence de x est l'union de la fermeture et de l'étoile de x . Les $\alpha-$, $\beta-$ et $\theta-$ adhérences strictes, respectivement notées α^\square , β^\square et θ^\square contiennent tous les éléments de l'adhérence correspondante, excepté x . Par exemple, le bord de x est défini par $\alpha^\square(x)$. Les cellules principales sont les cellules dont l'étoile stricte est vide.

Notons que toutes ces notions sont définies de manière similaire dans les autres modèles basés sur les graphes d'incidence. La notion de α -voisin de x , notée $\alpha^\bullet(x)$ est définie par l'ensemble $\{y \in \alpha^\square(x), \alpha^\square(x) \cap \beta^\square(y) = \emptyset\}$, qui contient les éléments du bord de x les plus proches (via α). Les notions de $\beta-$ et $\theta-$ voisins sont définies de manière similaire, et notées β^\bullet et θ^\bullet .

On peut imaginer plusieurs manières de représenter un ordre. En utilisant des graphes orientés acycliques (DAG), la relation d'ordre est explicitée (par un arc orienté), la transitivité est encodée de manière implicite. La dimension d'une cellule correspond au nombre d'arcs qui le sépare d'un

1. CF signifie donc Countable, et locally Finite

noeud qui n’a pas de face. Les diagrammes de Hasse permettent également de représenter des ordres en explicitant uniquement les relations entre les deux éléments de rangs successifs, la transitivité est aussi encodée de manière implicite. Les arcs ne sont en revanche pas orientés, la dimension des cellules est déduite de l’axe vertical : si une cellule est représentée au dessus d’une autre, alors sa dimension est supérieure.

La représentation utilisée ici utilise à la fois les arcs orientés des DAG, ainsi que l’axe vertical pour représenter la relation d’ordre. Les noeuds du graphe d’incidence correspondent aux éléments de X , et un arc est représenté de x vers y si y est un élément de $\alpha^\bullet(x)$. L’ensemble $\alpha(x)$ est donc obtenu par fermeture transitive de α^\bullet sur le graphe d’incidence.

Les CF -ordres permettent de représenter une classe très large d’objets cellulaires. On s’intéresse ici à des objets cellulaires dont toutes les cellules principales ont même dimension n , et telles qu’il n’y ait pas de saut de dimension entre deux cellules (i.e. toute n -cellule contient au moins une $(n - 1)$ -cellule dans son bord, et pour tout $p \in [0, n - 1]$, toute p -cellule est face d’au moins une $(p + 1)$ -cellule). On appelle de tels ordres des **ordres purs et fermés**. La Figure 1.22 représente le CF -ordre associé à la Figure 1.21(a).

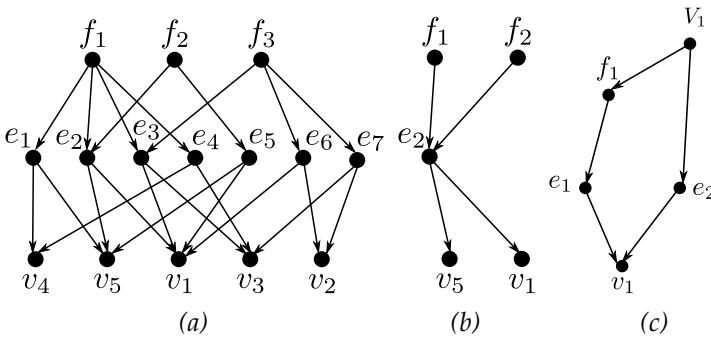


FIGURE 1.22 – (a) Le CF -ordre correspondant à la subdivision cellulaire de la Figure 1.21(a). (b) $|\theta^\square(e_2)|$. (c) Un ordre qui n’est pas fermé car il y a un saut de dimension entre le volume et l’arête e_2 .

Bien que cette description structurelle sous forme de graphe d’incidence soit à première vue « naturelle » et « intuitive », elle comporte un certain nombre de limitations. En particulier, il n’est pas possible d’associer de manière unique une subdivision cellulaire à tout graphe d’incidence. Par exemple, les subdivisions cellulaires représentés sur la figure 1.23 peuvent

toutes être associées au même graphe d'incidence. Le graphe d'incidence est le même pour ces trois objets, alors qu'ils ne sont pas équivalents topologiquement : un disque (à bord), une sphère pincée (orientable) et un plan projectif (non orientable) ont le même graphe d'incidence.

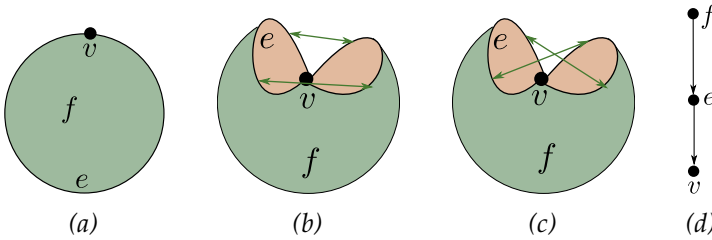


FIGURE 1.23 – (a) Un disque, (b) une sphère pincée et (c) un plan projectif, ont le même graphe d'incidence (d).

En revanche, on peut associer un ensemble semi-simplicial numéroté (en fait c'est même un complexe simplicial abstrait numéroté) [6] à tout graphe d'incidence. Pour cela, on associe un 0-simplexe numéroté i à tout sommet du graphe correspondant à une i -cellule. On obtient ainsi une numérotation et à tout chemin (c_i, \dots, c_j) du graphe correspond un $(j - i)$ -simplexe. En particulier, tout chemin de longueur maximale n correspond à un simplexe principal numéroté $(0, \dots, n)$. On retrouve donc la notion de cellule (i.e. ensemble de simplexes numérotés).

Le problème illustré Figure 1.23 est lié à la multi-incidence. Si différentes approches ont été menées pour décrire des assemblages de cellules via des graphes d'incidence, aucune ne permet, à ma connaissance, de décrire des structures cellulaires présentant de la multi-incidence. Si cela peut sembler évident que l'on ne peut pas représenter de la multi-incidence entre une k -cellule et une $(k - 1)$ -cellule, cela est moins évident lorsqu'il y a plus d'une dimension d'écart, mais cette limitation est toujours vraie [9] Section 8.2.3.

Par ailleurs, même s'ils sont purs et fermés, les CF -ordres permettent de représenter des cellules « pathologiques » (cf. Figure 1.24). Par exemple, rien n'empêche à une arête (une cellule de dimension 1) d'avoir 3 sommets (ou même plus) dans son bord. On peut aussi définir des cellules dont le bord n'est pas connexe.

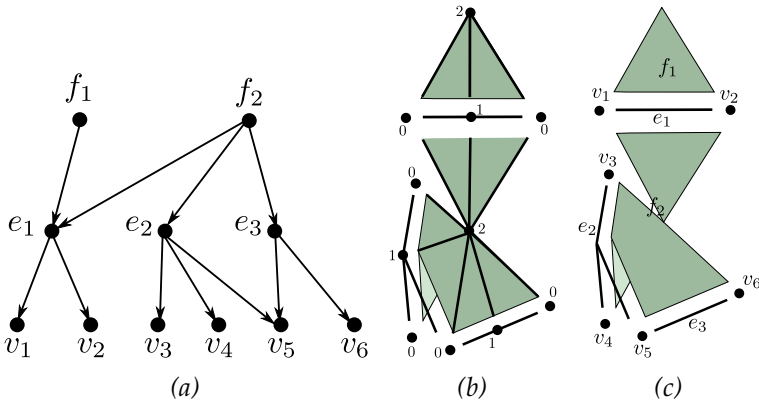


FIGURE 1.24 – (a) Un CF–ordre. (b) Le complexe simplicial abstrait numéroté correspondant avec mise en évidence des cellules. (c) Une représentation cellulaire où certaines cellules sont clairement « pathologiques ».

1.5.2 Variétés, quasi-variétés

L’objectif de cette partie est d’expliciter les propriétés que l’on souhaite ajouter aux cellules afin de s’assurer que celles-ci ne soient pas « pathologiques ». La notion de base est celle de **boule topologique**. Cette notion, bien connue en topologie, fait référence au voisinage des points d’un espace topologique. De manière informelle, si on se place dans l’espace \mathbb{R}^n , la boule de dimension n , centrée en c , et de rayon r est l’ensemble des points situés à une distance inférieure à r du point c . L’ensemble des points situés à une distance égale à r correspondant au bord de la boule, appelé **sphère** de dimension $i - 1$. Par exemple, un segment de droite est une boule de dimension 1, un disque est une boule de dimension 2, l’intérieur d’une sphère est une boule de dimension 3, etc.

Il est bien connu qu’un i –simplexe, un i –cube ou plus généralement un simplexe de dimension i sont topologiquement équivalents à une boule de dimension i [31]. Ainsi, une première idée pour interdire les cellules pathologiques serait de pouvoir garantir qu’une cellule est topologiquement équivalente à une boule, ou à défaut, qu’en tout point de la cellule, le voisinage est topologiquement équivalent à celui d’une boule. De tels objets correspondent à une classe d’objets classiquement étudiée en topologie : les **variétés**. Malheureusement, il n’existe pas (à ma connaissance)

de caractérisation combinatoire des boules, il n'est donc pas possible de garantir qu'un cellule soit topologiquement équivalente à une boule ou correspondent à une variété.

En revanche, il est possible de caractériser combinatoirement des assemblages de simplexes qui sont proches des variétés : les **quasi-variétés**. Nous commençons par présenter la notion de quasi-variété simpliciale définie sur les ensembles semi-simpliciaux, puis celle de quasi-variété cellulaire dont la définition est basée sur la notion de cellules.

Définition 1.5.4. Une quasi-variété simpliciale numérotée de dimension n est un ensemble semi-simplicial numéroté (S, ν) de dimension n qui peut être construit, à partir d'un ensemble semi-simplicial vide, de la manière suivante :

- ajouter des n -simplexes (et leur bord) isolés,
- identifier des $(n - 1)$ -simplexes (et leurs bords) de manière à ce que tout $(n - 1)$ -simplexe soit incident à au plus deux n -simplexes.

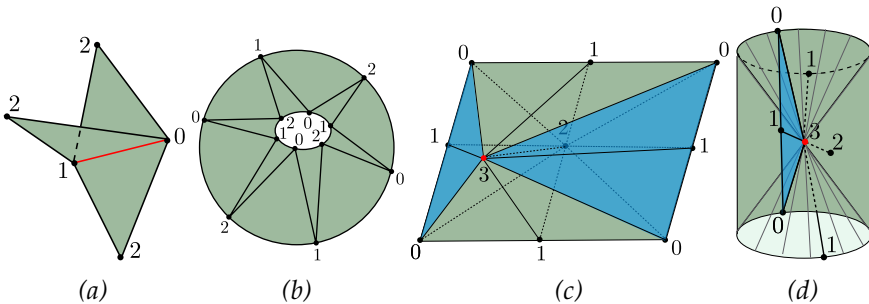


FIGURE 1.25 – (a) Un ensemble semi-simplicial numéroté qui n'est ni variété, ni quasi-variété car l'arête rouge est partagée par trois triangles. (b) Une quasi-variété simpliciale numérotée de dimension 2 (qui est également une variété). (c) – (d) une quasi-variété simpliciale de dimension 3 qui n'est pas une variété. Par souci de clarté, toutes les arêtes ne sont pas représentées en (d). Le voisinage du sommet numéroté 3 n'est pas une boule de dimension 3.

En dimension 0, 1 et 2, toutes les quasi-variétés simpliciales numérotées que l'on peut construire sont des variétés topologiques. Mais dès la dimension 3, la caractérisation combinatoire des quasi-variétés ne garantit absolument pas que l'objet correspondant soit une variété. Par exemple, l'objet représenté sur la Figure 1.25(c) – (d) est une quasi-variété simpliciale numérotée qui n'est pas une variété. Cet objet peut être vu comme une pyramide à base carrée dont on identifie deux faces triangulaires (en bleu) opposées (chaque face triangulaire est composée de deux 2-simplexes).

À ma connaissance, les quasi-variétés simpliciales forment la classe d'objets pouvant être caractérisée de manière combinatoire, se rapprochant le plus de la notion bien connue des variété topologique. Notons que la notion de quasi-variété simpliciale ne nécessite pas que l'ensemble semi-simplicial soit numéroté. Le choix de définir directement les quasi-variétés simpliciales numérotées est motivé ici par l'objectif d'introduire la notion de quasi-variété cellulaire, où la notion de cellule est justement basée sur cette numérotation.

Nous pouvons donc à présent définir la sous-classe des quasi-variétés simpliciales numérotées telle que chaque cellule (et son bord) soit également une quasi-variété simpliciale.

Quasi-variétés cellulaires

Définition 1.5.5. Une quasi-variété cellulaire S de dimension n est une quasi-variété simpliciale numérotée telle que :

- Si $n = 0$, alors S est un ensemble de 0 -simplexes numérotés 0 , partitionnés en composantes connexes de un ou deux 0 -simplexes.
- si $n > 0$, alors S peut être construit à parti des deux opérations suivantes :
 1. cône cellulaire sur une $(n - 1)$ -quasi-variété cellulaire S' : Cette opération correspond à effectuer un cône simplicial sur chaque composante connexe de S' , en numérotant n le nouveau sommet du cône de chaque composante.
 2. identification de deux $(n - 1)$ -cellules. Soient c_1 et c_2 deux $(n - 1)$ -cellules de S , telles que chaque $(n - 1)$ -simplexe de c_1 et de c_2 appartiennent au bord d'un seul n -simplexe de S et qu'il existe un isomorphisme ϕ entre c_1 et c_2 . Cette opération consiste à identifier chaque simplexe de c_1 avec le simplexe de c_2 correspondant par ϕ .

Notons que dans la définition, c_1 et c_2 ne sont pas nécessairement deux cellules différentes. Dans ce cas, il est possible de « replier » toute la cellule sur elle même.

La Figure 1.26 illustre des exemples et contrexemples de quasi-variétés simpliciales et cellulaires.

Par définition, dans une quasi-variété cellulaire de dimension n , tous les simplexes principaux sont donc de dimension n . De plus, la définition des quasi-variétés cellulaire garantit, par construction, que tout $(n - 1)$ -simplexe μ est face de exactement un ou deux n -simplexes. Si μ est face de deux simplexes σ et σ' , alors la numérotation nous assure

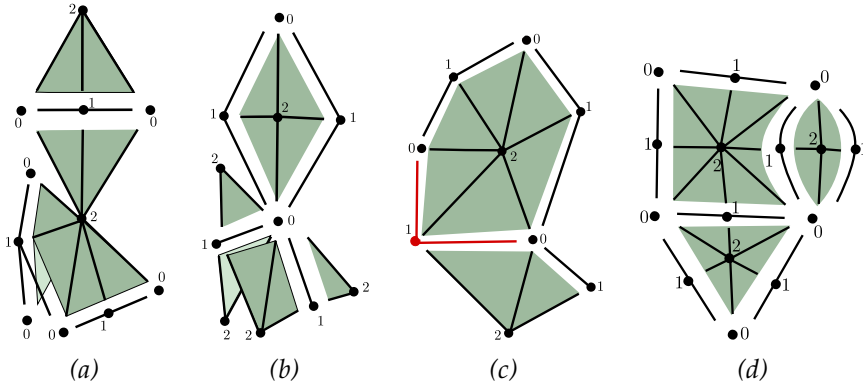


FIGURE 1.26 – (a) Un ensemble semi-simplicial numéroté avec mise en évidence de ses cellules. (b) Une autre numérotation correspond à une subdivision cellulaire différente. (a) et (b) ne sont pas des quasi-variétés. (c) Une quasi-variété simpliciale numérotée qui n’est pas une quasi-variété cellulaire car les deux 2–cellules n’ont pas été assemblés le long d’une 1–cellule complète (en rouge). (d) Une quasi-variété cellulaire.

que σ et σ' partagent μ via un même opérateur de face d_j . En particulier, si $\mu = \sigma d_n = \sigma' d_n$, alors μ appartient à une $(n - 1)$ –cellule, sinon μ appartient à une n –cellule.

La Figure 1.27 illustre la construction d’une quasi-variété cellulaire.

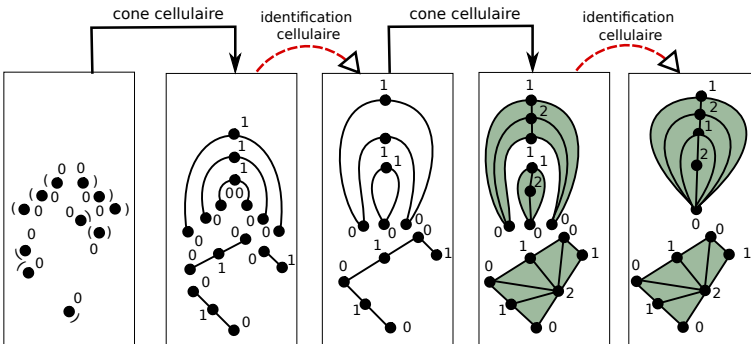


FIGURE 1.27 – Construction d’une quasi-variété cellulaire.

1.5.3 Structures de type cartes combinatoires

Nous présentons dans cette partie des structures cellulaires qui intègrent dans leur définition les contraintes permettant de garantir que les cellules sont des quasi-variétés.

Historiquement, les premiers travaux sur les cartes combinatoires ont été effectués par Edmonds [15] pour représenter des subdivisions de surfaces orientables sans bord. Basée sur ce concept, la structure de **demi-arête** a été définie dans le cadre de la modélisation de volumes par leurs bords (solid modeling) [38, 28]. Ces structures ont été étendues aux surfaces orientables ou non [21], à la dimension 3 par [13], et en dimension quelconque par [37, 23]. Des équivalences entre ces structures ont été montrées dans [24]. Le livre de référence [9] est consacré à l'étude des structures basées sur les cartes combinatoires.

Il existe donc différentes sous-classes de structures basées sur la notion de carte combinatoire. Le modèle des cartes généralisées (ou Gcartes) propose une définition homogène en toute dimension, et permet de décrire les quasi-variétés cellulaires à bord, sans bord, orientable ou non, les cellules peuvent même être recollées sur elles-mêmes.

La structure des Gcartes permet d'optimiser la représentation des quasi-variétés cellulaires en tirant partie du fait que tous les simplexes principaux ont même dimension, et que si deux simplexes principaux σ et μ sont adjacents, alors il existe j tel que $\sigma d_j = \mu d_j$. C'est précisément ce que représente la structure des Gcartes. Les cellules ne sont donc pas explicitées au sein de cette structure, mais sont décrites à partir d'un élément plus élémentaire correspondant à chaque simplexe principal : le brin.

Cartes généralisées

Définition 1.5.6. Une **carte généralisée** de dimension n , ou n -Gcarte, où $n \geq 0$, est un $(n + 2)$ -tuple $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tel que :

- B est un ensemble fini d'éléments, appelés **brins**,
- $\forall i \in [0, n], \alpha_i$ est une involution sur B ,
- $\forall i \in [0, n - 2], \forall j \in [i + 2, n], \alpha_i \alpha_j$ est une involution.

Une involution α_i est une permutation telle que $\alpha_i = \alpha_i^{-1}$. Les cellules n'étant pas explicitées, lorsque l'on a besoin de les utiliser, il faut donc les calculer. Pour cela, on utilise la notion d'**orbite**.

Définition 1.5.7. Soit $\Phi = \{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ un ensemble de permutations définies sur un ensemble B . On note $\langle \Phi \rangle = \langle \pi_0, \dots, \pi_n \rangle$ le groupe des permutations de B engendré par Φ . L'**orbite** d'un élément $b \in B$ relative au groupe $\langle \Phi \rangle$, notée $\langle \Phi \rangle (b)$ est l'ensemble $\{\Phi(b) \mid \Phi \in \langle \Phi \rangle\}$.

De manière informelle, l'orbite $\langle \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n} \rangle (b)$ d'un brin b d'une Gcarte G est l'ensemble des brins de G qu'il est possible d'obtenir par application, à partir de b , de n'importe quelle composition d'involutions α_i , avec $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$.

Comme une n -Gcarte n'explique que les simplexes de dimension n (i.e. les brins), une cellule de dimension i est définie à partir de ces simplexes principaux. Par ailleurs, comme les sommets des simplexes principaux sont numérotés de 0 à n , tout n -simplexe est incident à exactement une i -cellule, pour tout $i \in [0, n]$. Pour rappel, une i -cellule est définie comme l'ensemble des n -simplexes incidents à un sommet numéroté i . Ainsi, si l'on représente une Gcarte par un graphe dont les arêtes sont étiquetées, une n -Gcarte est un graphe où chaque noeud correspondent à un n -simplexe (un brin), une arête étiquetée i relie deux brins qui sont images l'un de l'autre par α_i . L'ensemble des i -cellules d'une Gcarte, est l'ensemble des sous-graphes connexes que l'on obtient en supprimant toutes les arêtes α_i .

Par exemple, sur la Figure 1.28, en (b), chaque cellule de dimension 0 correspond à une orbite $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. En (c), chaque cellule de dimension 1 correspond à une orbite $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle$. En (d), chaque 2-cellule correspond à une orbite $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$.

Définition 1.5.8. Soit G une n -Gcarte, b un brin de G et $i \in \{0, \dots, n\}$. La i -cellule incidente à b est $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \rangle (b)$

Concernant les opérations de construction, comme les Gcartes sont des quasi-variétés cellulaires, elles peuvent être construites comme indiqué dans la Définition 1.5.5. Ainsi, si $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une n -Gcarte (donc une quasi-variété cellulaire de dimension n), alors la $(n+1)$ -Gcarte $(B, \alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} = Id)$, appelée l'**extension** de G , correspond à l'application du cône cellulaire sur chaque composante connexe de la quasi-variété cellulaire associée à G . L'opération de **couture** permet d'assembler les cellules à chaque étape de la construction de la Gcarte. Cette opération correspond à l'opération d'identification cellulaire. La Figure 1.29 reprend la construction de la quasi-variété cellulaire de la Figure 1.27 en utilisant directement une Gcarte.

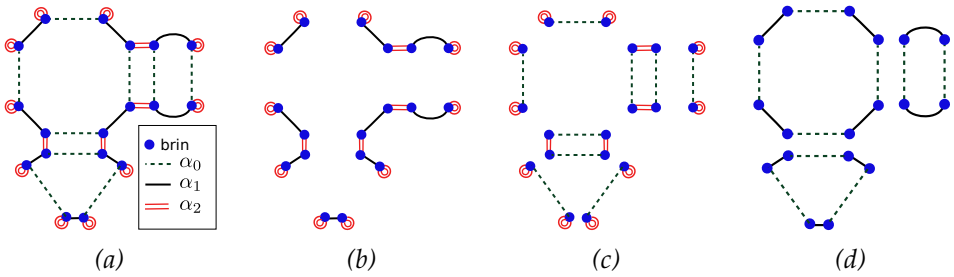


FIGURE 1.28 – (a) *G*carte correspondant à la quasi-variété cellulaire représentée Figure 1.26(d). (b) – (d) Chaque composante connexe correspond à une cellule de dimension 0, 1 et 2 respectivement.

Une attention particulière doit être portée sur l’interprétation cellulaire des *G*cartes, afin de bien comprendre ce que l’on manipule. Lorsque l’on passe d’une $n - G$ carte à une $(n + 1) - G$ carte via une extension, on ajoute, pour chaque composante connexe, une $(n + 1)$ -cellule, dont le bord est, par définition, une quasi-variété cellulaire de dimension n . Par exemple, lorsque l’on passe d’une 2 - *G*carte représentant une sphère à un 3 - *G*carte ; en ajoutant $\alpha_3 = Id$, on a créé une 3 - *G*carte dont le bord est une sphère, la 3-cellule « remplit » la sphère. Considérons à présent une 2 - *G*carte représentant un tore ; idem en ajoutant $\alpha_3 = Id$, on créé une cellule de dimension 3 dont le bord est un tore, mais on n’a pas « rempli » le tore. Dit autrement, la cellule de dimension 3 ne correspond pas à un « tore plein » mais bien à un cône sur un tore. Un autre exemple qui illustre cela : la Figure 1.25(d) est une quasi-variété cellulaire qui peut être obtenue, non pas par la construction indiquée qui définit une quasi-variété simpliciale, mais par un cône cellulaire (sommet 3) sur la surface décrivant le cylindre vertical. On voit bien ici que la 3-cellule est un cône sur le cylindre (et non pas un cylindre plein).

Bien sûr, cela n’empêche pas de décrire la subdivision d’un tore plein (ou d’un cylindre plein), en construisant par exemple un cube de dimension 3 (le cylindre plein) et en recollant deux faces opposées (pour obtenir un tore plein).

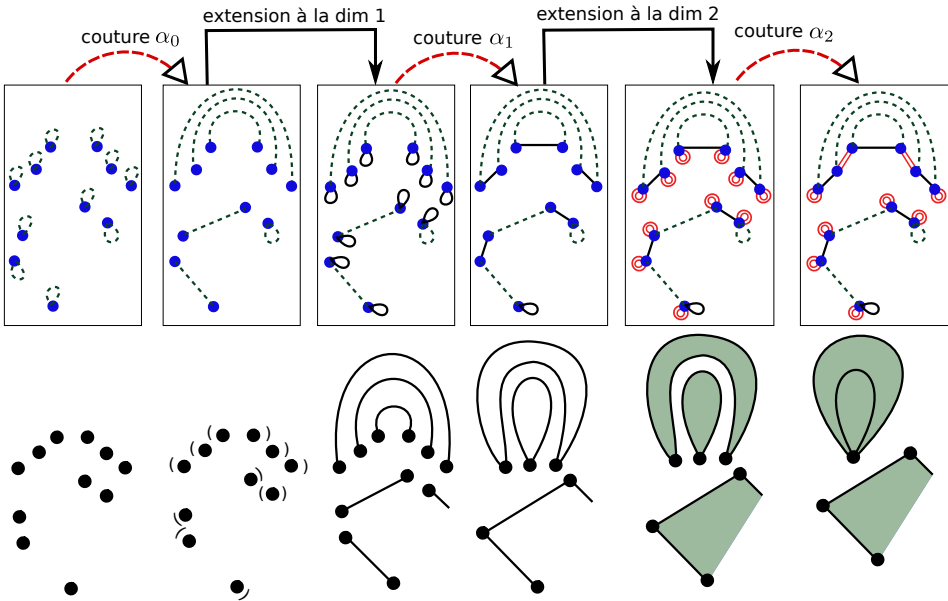


FIGURE 1.29 – Construction d’une Gcarte à partir de l’opération d’extension et de couture.

Chaînes de cartes

La notion de quasi-variété simpliciale permet de contraindre les assemblages de simplexes de manière à manipuler des objets qui sont proches des variétés. Les quasi-variétés cellulaires permettent d’optimiser la représentation de tels ensembles lorsque l’intérieur des cellules elles-mêmes correspondent à l’intérieur de quasi-variétés. En toute généralité, les ensembles semi-simpliciaux permettent de représenter tout type assemblage (les simplexes principaux peuvent être de dimension différentes et autant de simplexes principaux que l’on souhaite peuvent partager une face commune).

Les Gcartes ont été étendues pour relâcher les contraintes sur les assemblages de cellules, tout en préservant des cellules qui ne sont pas quelconques : les cellules restent des quasi-variétés cellulaires, mais les assemblages deviennent libres (cf. Figure 1.30). Cette structure, connue sous le nom de **chaînes de cartes** [16], permet de décrire ces assemblages quelconques de cellules (qui sont des quasi-variétés cellulaires).

Définition 1.5.9. Une chaîne de cartes de dimension n , est un tuple :
 $C = ((G^i)_{i=0,\dots,n}, (\sigma^i)_{i=1,\dots,n})$ tel que :

1. $\forall i, 0 \leq i \leq n, G^i = (D^i, \alpha_0^i, \dots, \alpha_{i-1}^i, \alpha_i^i = \omega)$ est une $i - G$ carte telle que ω n'est pas défini sur D^i ;
2. $\forall i, 1 \leq i \leq n, \sigma^i : D^i \rightarrow D^{i-1}$;
 pour $i \geq 2, \sigma^i$ vérifie, pour tout brin b de D^i :
 - (a) pour tout $j, 0 \leq j \leq i - 2, b\alpha_j^i\sigma^i \in \{d\sigma^i, d\sigma^i\alpha_j^{i-1}\}$ (i.e. σ^i associe une orbite $\langle \alpha_0^i, \dots, \alpha_{i-2}^i \rangle$ de G^i avec (un sous-ensemble de) une orbite $\langle \alpha_0^{i-1}, \dots, \alpha_{i-2}^{i-1} \rangle$ de G^{i-1});
 - (b) $b\alpha_{i-1}^i\sigma^i\sigma^{i-1} = b\sigma^i\sigma^{i-1}$.

Rappelons que chaque composante connexe d'une $i - G$ carte est une i -cellule; dans une chaîne de cartes, les cellules ne sont pas directement recollées entre elles, mais sont reliées aux cellules de leur bord. Dit autrement, une chaîne de cartes explicite toute les cellules de la subdivision cellulaire, les relations d'incidence entre une i -cellule et un $(i - 1)$ -cellule de son bord sont explicitées via les opérateurs de face σ^i . C'est la raison pour laquelle $\alpha_i^i = \omega$ n'est pas défini pour chaque G carte de dimension i . Comme pour les structures simpliciales, une j -cellule c_j est incidente à une i -cellule c_i s'il existe un brin b_i de c_i , un brin b_j de c_j , et une suite d'opérateurs de face tels que $b_i\sigma^i \dots \sigma^{j+1} = b_j$.

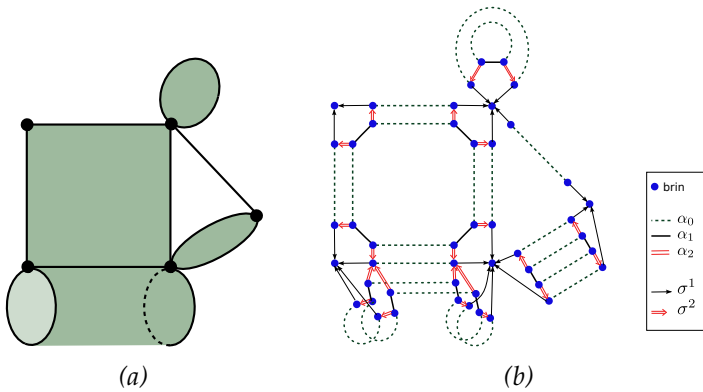


FIGURE 1.30 – (a) un complexe cellulaire dont les cellules sont des quasi-variétés cellulaires, (b) la chaîne de carte correspondant à (a).

Bien sûr, une chaîne de carte peut être associée à toute G carte (mais l'inverse n'est pas vrai), il suffit pour cela d'expliciter toutes les cellules sous forme de G carte. Lorsque l'objet lui-même est une quasi-variété cellulaire, il est plus intéressant, au regard de la complexité de la représentation, de le représenter par une seule G carte.

1.5.4 Équivalences de modèles

Nous avons présenté deux familles de structures cellulaires distinctes. Se pose alors la question du lien entre structures, et en particulier comment se traduisent les notions de quasi-variétés cellulaires sur les graphes d'incidence. Dit autrement, quelles propriétés doit-on ajouter aux graphes d'incidence afin de garantir qu'ils représentent des quasi-variétés cellulaires sans multi-incidence ?

Il existe des ponts entre les structures cellulaires à base de graphe d'incidence et celles à base de cartes combinatoire. En particulier, les n -surfaces forment une sous-classe des CF -ordres, imposant certaines contraintes à la fois sur les cellules et leurs assemblages. Les n -surfaces ont été initialement définies par [17] et introduites dans le domaine de l'analyse d'image par [5]. Les n -surfaces sont des CF -ordres pures et fermés définis récursivement de la manière suivante :

Définition 1.5.10. Soit $|X| = (X, \alpha)$ un CF -ordre non vide.

- L'ordre $|X|$ est une 0-surface si X contient exactement deux éléments x et y tels que $y \notin \alpha(x)$ and $x \notin \alpha(y)$;
- L'ordre $|X|$ est une n -surface, $n > 0$, si $|X|$ est connexe, et si, pour tout $x \in X$, l'ordre $|\theta^\square(x)|$ est une $(n - 1)$ -surface.

L'équivalence entre les n -surfaces et les $n - G$ cartes fermées sans multi-incidence a été établie dans [2]. En outre, les n -surfaces sont donc une structure à base de graphes d'incidence permettant de représenter les quasi-variétés cellulaires fermées sans multi-incidence. Dit autrement, on peut associer un complexe simplicial abstrait numéroté représentant une quasi-variété cellulaire fermée sans multi-incidence et donc une G carte, à toute n -surface. Bien entendu, l'inverse n'est pas vrai : les G cartes permettent de représenter la multi-incidence et les n -surfaces ne le permettant pas, on ne peut donc pas associer une n -surface à toute G carte.

L'idée de base permettant de prouver l'équivalence entre ces deux modèles est la notion de cell-tuple introduite par Brisson [6] et la **propriété de switch** que doivent respecter les graphes d'incidence. Cette propriété garantit qu'à tout chemin de cellules $(c_0, \dots, c_j, \dots, c_n)$ correspond un unique chemin $(c_0, \dots, c'_j, \dots, c_n)$, pour tout j . Cette propriété de switch correspond intuitivement, dans le modèle des G cartes, au fait que α_j soit une involution pour tout j .

La Figure 1.31 illustre une n -surface, son complexe simplicial abstrait numéroté correspondant, et la G carte associée.

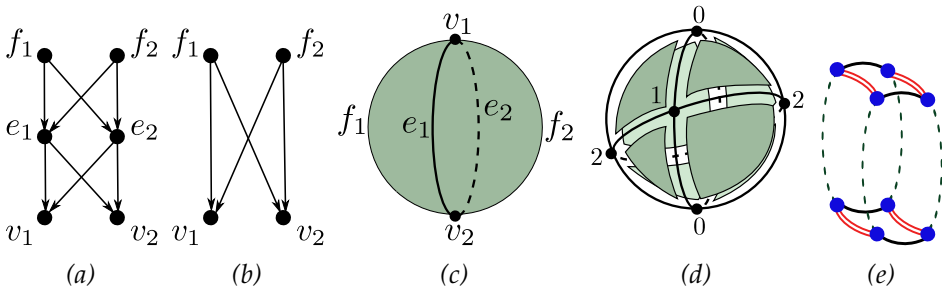


FIGURE 1.31 – (a) Une n –surface de dimension 2 décrivant une sphère. (b) $|\theta^\square(e_1)| = |\theta^\square(e_2)|$ est une 1–surface. (c) Représentation cellulaire de (a). (d) Le complexe simplicial abstrait numéroté correspondant à (a) est une quasi–variété cellulaire fermée sans multi–incidence. (e) La Gcarte correspondant à (a).

Pour résumer, de manière informelle, les n –surfaces sont donc aux Gcartes ce que les complexes simpliciaux abstraits sont aux ensembles semi-simpliciaux : une restriction aux cas sans multi-incidence. Notons qu’en toute rigueur la restriction des n –surfaces porte également sur le fait que l’objet résultant doit être fermé.

De manière analogue, les **chaînes de n –surface** ont été définies dans [3] et leur équivalence avec les chaînes de cartes sans multi-incidence a été démontrée. Ici encore, des contraintes doivent être établies sur les CF-ordres afin de garantir que les cellules sont bien des quasi-variétés cellulaires, alors que les structures à base de carte combinatoire intègrent directement cette propriété dans leur définition : toutes les cellules des Gcartes ou des chaînes de cartes sont des quasi-variétés cellulaires.

1.5.5 Discussion sur les plongement des structures cellulaires

Si la structuration en cellules permet d’optimiser la représentation des quasi-variété-cellulaires, il n’existe pas à ma connaissance d’association directe entre ces structures combinatoires permettant de décrire la structure des objets, et des espaces géométriques, comme ce qui a été présenté dans le cadre simplicial et simpleïdal avec les espaces de Bézier.

Bien entendu, comme à tout objet cellulaire correspond un objet simplicial, on peut associer un espace de Bézier à toute Gcarte ou à toute n –surface. Il est donc possible d’associer un espace triangulaire de Bézier de manière directe, mais on perd alors tout l’intérêt de la structuration en cellule, on repasserait alors à la triangulation barycentrique. Pour une

simple face triangulaire, représentée par une structure cellulaire, cela représente un assemblage de 6 triangles simpliciaux et donc 6 triangles de Bézier. Une solution simple est d'utiliser un plongement aux sommets, c'est-à-dire que l'on donne une position à chaque 0-cellule, dans un espace géométrique donné (par exemple \mathbb{R}^3). La géométrie donnée à chaque arête est celle du segment défini par ses deux extrémités, chaque face est bordée par un ensemble d'arête... Cela pose bien évidemment un certain nombre de limitations, comme par exemple la représentation de cellules incidentes plusieurs fois à leur bord (e.g. la géométrie d'une boucle sera alors réduite à un point). La géométrie d'une face n'est pas clairement définie si l'ensemble des 0-cellules de son bord n'appartiennent pas à un même plan support.

Une autre solution est d'utiliser des techniques de **trimming** [29, 18]. Par exemple en dimension 2, le principe est de « découper » une face (cellulaire) dans un triangle ou un carreau de Bézier. De cette manière on peut associer un élément de surface dit « trimmé » à chaque cellule de dimension 2. La gestion de la jonction entre deux surfaces le long d'une courbe correspondant à une découpe n'est pas triviale. En général, l'intersection de deux surfaces de Bézier est approximée, des techniques permettent de « détrimmer » ces patches en les approximant par un assemblage de patches de Bézier [19].

1.6 Conclusion

Différents modèles permettent de modéliser différents types d'objets. Afin de bien choisir le modèle le plus approprié à un contexte donné, il est important de répondre aux deux questions suivantes :

- de quelles briques de base a-t-on besoin : régulières (simpliciales, cubiques, simploïdales), ou bien cellulaire (les cellules sont des quasi-variétés);
- quel type d'assemblage caractérise au mieux les objets que l'on souhaite manipuler : quelconques (aucune contrainte), avec ou sans multi-incidence, ou « variété » (ou plutôt, quasi-variété) ou autre.

Bien sûr d'autres paramètres entrent en compte comme les opérations que l'on souhaite effectuer dans un contexte donné. Ce point n'a pas été abordé, mais de nombreuses opérations complémentaires à celles présentées dans ce chapitre ont été étudiées dans différents modèles (opéra-

tions booléennes, subdivision barycentrique, chanfreinage, suppression et contraction de cellules...). Des opérations de caractérisation topologique ont également été définies directement sur ces structures (calcul de connexité, d'orientabilité, de groupes d'homologie...).

Enfin, il est souvent utile de pouvoir représenter géométriquement les objets structurés que l'on manipule. Un focus a été présenté sur les espaces de Bézier, en particulier car il existe un lien très fort entre la structuration de ces espaces et les structures d'ensembles simpliciaux et simpleïdaux. D'autres modèles paramétriques (Splines, NURBS) sont également largement utilisés en modélisation géométrique.

1.7 Remerciements

Je tiens à remercier Sylvie Alayrangués, Laurent Fuchs, Pascal Lienhardt et Géraldine Morin pour nos nombreux échanges sur les sujets abordés dans ce chapitre.

Bibliographie

- [1] M. K. AGOSTON : *Algebraic Topology, a first course*. Pure and applied mathematics. Marcel Dekker Ed., 1976.
- [2] S. ALAYRANGUES, X. DARAGON, J.-O. LACHAUD et P. LIENHARDT : Equivalence between closed connected n - g -maps without multi-incidence and n -surfaces. *J. Math. Imaging Vis.*, 32(1):1–22, 2008.
- [3] S. ALAYRANGUES, P. LIENHARDT et S. PELTIER : Conversion between chains of maps and chains of surfaces ; application to the computation of incidence graphs homology. Research report, Université de Poitiers, 2015. URL <https://hal.science/hal-01130543>.
- [4] B. BECHMANN, D. et Péroche : *Informatique graphique, modélisation géométrique et animation*. Signal et Image, Traité IC2. Lavoisier, 2007.
- [5] G. BERTRAND : New notions for discrete topology. *Actes de G. BERTRAND, M. COUPRIE et L. PERROTON, édés : Proc. DGCI'99*, vol. 1568 de *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 218–228, Marne-la-Vallée, France, 1999. Springer.
- [6] E. BRISSON : Representing geometric structures in d dimensions : topology and order. *Discrete & Computational Geometry*, 9(1):387–426, 1993.

- [7] R. BROWN et P. J. HIGGINS : On the algebra of cubes. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 21(3):233 – 260, 1981.
- [8] W. DAHMEN et C. A. MICCHELLI : On the linear independence of multivariate b-splines I. Triangulation of simplexes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, 1982.
- [9] G. DAMIAND et P. LIENHARDT : *Combinatorial Maps : Efficient Data Structures for Computer Graphics and Image Processing*. A K Peters/CRC Press, September 2014.
- [10] X. DARAGON, M. COUPRIE et G. BERTRAND : Discrete frontiers. *Actes de I. NYSTRÖM, G. Sanniti di BAJA et S. SVENSSON*, édés : *Proc. DGCI'03*, vol. 2886 de *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 236–245, Naples, Italie, 2003. Springer.
- [11] X. DARAGON, M. COUPRIE et G. BERTRAND : Discrete surfaces and frontier orders. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23:379–399, 2005.
- [12] T. DEROSE, R. N. GOLDMAN, H. HAGEN et S. MANN : Functional composition algorithms via blossoming. *Transactions On Graphics*, 12(2):113–135, 1993.
- [13] D. DOBKIN et M. LASZLO : Primitives for the manipulation of three-dimensional subdivisions. *Actes de 3rd Symposium on Computational Geometry*, pp. 86–99, Waterloo, Canada, June 1987.
- [14] H. EDELSBRUNNER : *Algorithms in Computational Geometry*. Springer, New-York, 1987.
- [15] J. EDMONDS : A combinatorial representation for polyhedral surfaces. *Notices Amer. Math. Soc.*, 7, 1960.
- [16] H. ELTER et P. LIENHARDT : Cellular complexes as structured semi-simplicial sets. *International Journal of Shape Modeling*, 1(2):191–217, 1994.
- [17] A. V. EVAKO, R. KOPPERMAN et Y. V. MUKHIN : Dimensional properties of graphs and digital spaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6:109–119, 1996.
- [18] G. FARIN : *Curves and Surfaces for CAGD : A Practical Guide*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 5th édn, 2002.
- [19] R. T. FAROUKI, C. Y. HAN, J. HASS et T. W. SEDERBERG : Topologically consistent trimmed surface approximations based on triangular patches. *Computer Aided Geometric Design*, 21(5):459–478, 2004. doi:<https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.03.002>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839604000421>.

- [20] L. FUCHS : *Une specification formelle des modeles de courbes et de surfaces de forme libre*. Thèse de doctorat, 1997. URL <http://www.theses.fr/1997STR13239>. Université Louis Pasteur (Strasbourg).
- [21] L. GUIBAS et G. STOLFI : Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of voronoi diagrams. *Transactions on Graphics*, 4(2):74–123, 1985.
- [22] V. LANG et P. LIENHARDT : Simplicial sets and triangular patches. *Actes de Proceedings of CGI'96*, Pohang, Korea, 1996.
- [23] P. LIENHARDT : Subdivisions of n -dimensional spaces and n -dimensional generalized maps. *Actes de ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 228–236, Juin 1989.
- [24] P. LIENHARDT : Topological models for boundary representation : a comparison with n -dimensional generalized maps. *Computer Aided Design*, 23(1):59–82, 1991.
- [25] P. LIENHARDT : N -dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 4(3):275–324, 1994.
- [26] P. LIENHARDT, L. FUCHS et Y. BERTRAND : Combinatorial models for topology-based geometric modeling. Dans S. N. G. DI MAIO, éd. : *Theory and applications of proximity, nearness and uniformity*, pp. 151–198. Quaderni di matematica, dipartimento di matematica, seconda universita di Napoli, 2009. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00580708>.
- [27] P. LIENHARDT, X. SKAPIN et A. BERGEY : Cartesian product of simplicial and cellular structures. *Int. Journal of Computational Geometry and Applications*, 14(3):115–159, June 2004.
- [28] M. MÄNTYLÄ : *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press,, 1988.
- [29] B. MARUSSIG et T. J. R. HUGHES : A review of trimming in isogeometric analysis : Challenges, data exchange and simulation aspects. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25:1059–1127, 2018.
- [30] J. P. MAY : *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand, Princeton, 1967.
- [31] J. R. MUNKRES : *Elements of algebraic topology*. Perseus Books, 1984.
- [32] S. PELTIER, L. FUCHS et P. LIENHARDT : Simplicial sets : Definitions, operations and comparison with simplicial sets. *Discrete Applied Mathematics*, 157(3):542–557, 2009. doi:<https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.05.032>. International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery.

- [33] S. PELTIER et P. LIENHARDT : Simplicoidal Sets : a data structure for handling simplicoidal Bezier spaces. *Computer Aided Geometric Design*, 62:44 – 62, mai 2018. doi:10.1016/j.cagd.2018.03.010.
- [34] J. ROSSIGNAC et M. O’CONNOR : Sgc : A dimension-independant model for pointsets with internal structures and incomplete boundaries. *Geometric modeling for Product Engineering*, pp. 145–180, 1989.
- [35] J.-P. SERRE : Homologie singuliere des espaces fibres. *The Annals of Mathematics*, 54(3):pp. 425–505, 1951. URL <http://www.jstor.org/stable/1969485>.
- [36] C. SOBHANPANAHAH : Extension of a boundary representation technique for the description of n-dimensional polytopes. *Computer and Graphics*, 13(1):17–23, 1989.
- [37] A. VINCE : Combinatorial maps. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 34:1–21, 1983.
- [38] K. WEILER : Edge-based data structures for solid modelling in curved-surface environments. *Computer Graphics and Applications*, 5(1):21–40, 1985.