



**HAL**  
open science

## Comprendre la topologie photonique

Alberto Amo, Gaëtan Lévèque

► **To cite this version:**

Alberto Amo, Gaëtan Lévèque. Comprendre la topologie photonique. Photoniques, 2024, 124, pp.54-58. 10.1051/photon/202412454 . hal-04489231

**HAL Id: hal-04489231**

**<https://hal.science/hal-04489231v1>**

Submitted on 4 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

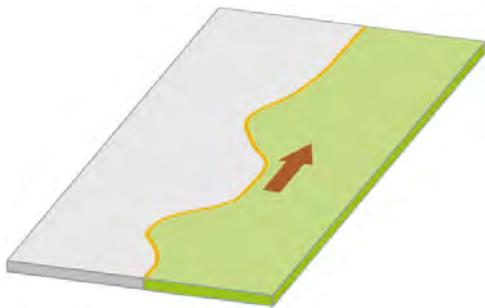
# COMPRENDRE LA TOPOLOGIE PHOTONIQUE

Alberto AMO<sup>1,\*</sup> et Gaëtan LÉVÈQUE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM), CNRS UMR 8523 – Université de Lille, France

<sup>2</sup> Institut d'Électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie (IEMN), CNRS UMR 8520 – Université de Lille, France

\*[alberto.amo-garcia@univ-lille.fr](mailto:alberto.amo-garcia@univ-lille.fr)



**La topologie décrit les propriétés d'un objet qui ne changent pas quand il est déformé. En photonique elle permet de classer les bandes de fréquence d'un matériau structuré selon leurs symétries locales. À l'interface entre deux matériaux optiques de topologie distincte apparaissent des modes guidés de propagation très robuste. Nous donnons ici les notions fondamentales pour en comprendre les propriétés.**

<https://doi.org/10.1051/photon/202312454>

Article publié en accès libre sous les conditions définies par la licence Creative Commons Attribution License CC-BY (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), qui autorise sans restrictions l'utilisation, la diffusion, et la reproduction sur quelque support que ce soit, sous réserve de citation correcte de la publication originale.

La topologie est un concept originaire des mathématiques qui permet de classer des objets à partir de propriétés qui ne changent pas quand ils sont soumis à des déformations douces (sans les couper ni les coller). Ces propriétés sont connues sous le nom d'invariants topologiques, et permettent de grouper, par exemple, les surfaces fermées à trois dimensions selon leur nombre de trous ou les champs vectoriels selon le nombre et signe de leurs singularités (points autour desquels le champ de vecteurs tourne). Depuis les années 1980, les invariants topologiques sont aussi utilisés pour classer les bandes électroniques de conduction et de valence de certains semi-conducteurs. Les découvertes qui en ont découlé ont été récompensées par deux prix Nobel de physique en 1985 (K. von Klitzing) et 2016 (D. Thouless, D. Haldane et M. Kosterlitz).

L'un des éléments les plus remarquables de l'approche topologique en physique du solide est qu'elle permet d'expliquer l'apparition de canaux de conduction électronique à l'interface entre des cristaux dont les bandes présentent des invariants topologiques de valeurs différentes. La figure 1 montre le schéma de deux solides dont les bandes de valence et de conduction sont séparées par une bande interdite. Pour le solide de gauche,

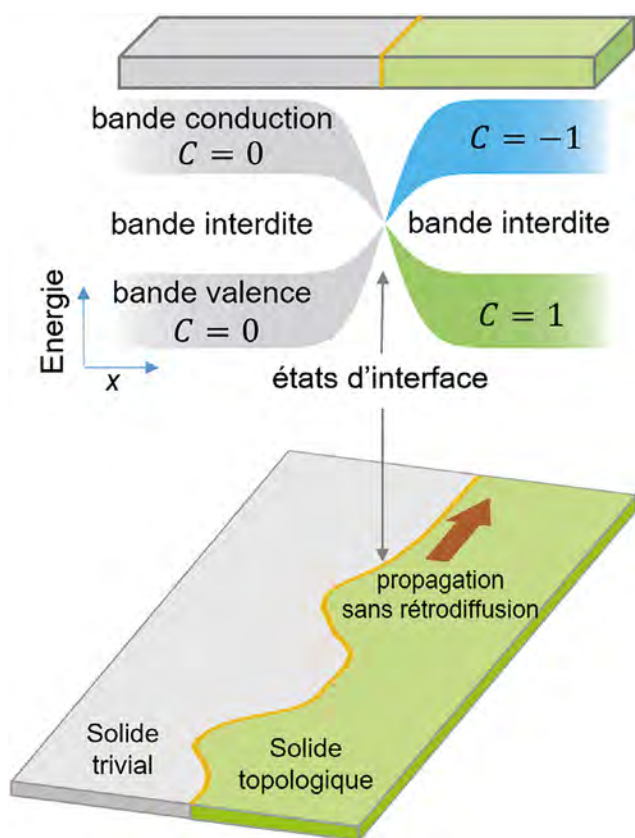
dit *trivial*, ces bandes sont caractérisées par un invariant topologique  $C$  de valeur nulle, tandis que le solide de droite, *non trivial*, possède des bandes dont l'invariant est non-nul. L'interprétation topologique des bandes électroniques implique que la valeur de l'invariant  $C$  reste strictement inchangée pour toute déformation du cristal qui ne referme pas la bande interdite. Si l'on examine l'évolution de la structure de bande lors du passage du solide trivial jusqu'au solide non-trivial, leurs bandes interdites doivent donc se refermer à la traversée de l'interface, les modes propres des deux solides s'y restructurant pour donner lieu au bon invariant topologique de chaque côté. De cette façon apparaissent des états confinés le long de l'interface, pour les énergies situées dans les bandes interdites des deux solides. Ces états forment des canaux topologiques permettant une propagation électronique sans rétrodiffusion, même en présence de désordre.

Les mêmes principes s'appliquent en photonique, cette fois-ci pour caractériser les bandes de fréquences d'un solide structuré périodiquement, par exemple un cristal photonique ou un réseau de guides d'onde ou de résonateurs photoniques couplés [1]. La formation de canaux topologiques possède des applications potentielles fort intéressantes pour la conception de circuits topologiques intégrés et à faibles pertes. Le but de

cet article est de présenter les notions fondamentales permettant de comprendre la formation de ces canaux topologiques.

**LE MODÈLE SU-SCHRIEFFER-HEEGER À UNE DIMENSION**

Une configuration utile pour se familiariser avec la notion d'invariant topologique et d'état topologique d'interface est le modèle de Su-Schrieffer-Heeger (SSH). Ce modèle décrit la propagation de la lumière dans un réseau unidimensionnel de résonateurs photoniques en interaction. La figure 2a montre un réseau de ce type composé d'une chaîne de micropiliers. Chaque micropilier confine la lumière dans un mode photonique fondamental qui se couple aux deux piliers voisins avec une probabilité de saut d'autant plus importante que leur distance centre-à-centre est faible [2]. L'alternance entre distances courtes et longues induit une alternance des constantes de couplage  $t$  et  $t'$  entre deux piliers successifs : le réseau périodique est donc décrit par une cellule unitaire composée de deux micropiliers A et B dont la répétition permet de reconstituer la chaîne infinie.



**Figure 1.** Schéma d'une interface topologique. Le solide à gauche présente de bandes électroniques à la topologie dite triviale (invariant égal à zéro). Celui de droite a des bandes caractérisées par un invariant non nul. À l'interface entre les deux, le gap se ferme donnant lieu à des états d'interface topologique.

# L'OPTIQUE EST NOTRE AVENIR



**NOUVEAU** **TECHSPEC®**

## Objectifs Série UAV Edmund Optics®

Conçus pour les véhicules autonomes et les drones  
Compacts | Légers | 24,6 mégapixels

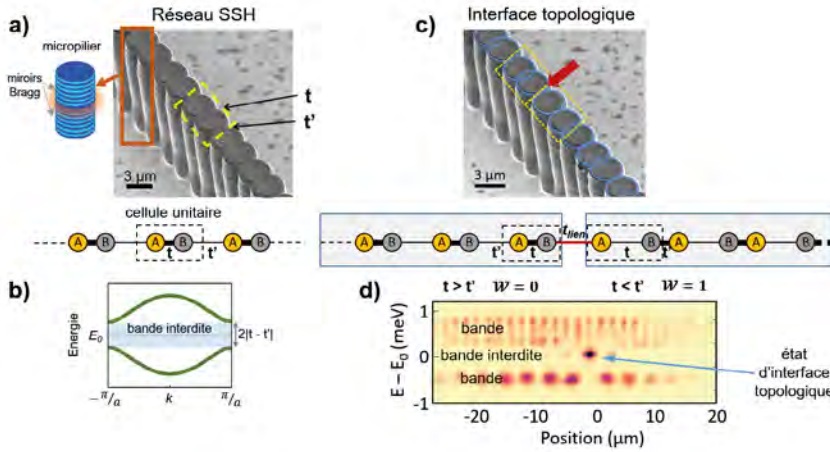
- Compacts et légers avec une faible distance de l'échantillon au sol (GSD)
- 24,6 mégapixels, ouverture f/2,8 pour une haute résolution
- Idéaux pour la cartographie et l'arpentage par drone, l'imagerie aérienne et la photométrie

Pour en savoir plus :

www.  
**edmundoptics.fr/**  
**imaging**



+33 (0) 820 207 555  
sales@edmundoptics.fr



**Figure 2.** a) Réseau de micropiliers couplés avec des couplages alternants  $t$  et  $t'$  (réseau dit SSH). b) Les modes propres se distribuent sur deux bandes séparées par une bande interdite. c) Chaîne formée par deux réseaux de micropiliers de topologie différente, couplés par l'interface marquée par une flèche rouge. d) Le spectre de photoluminescence montre un état d'interface à l'intérieur de la bande interdite. Données extraites de la Ref. [2].

Les amplitudes  $A_m$  et  $B_m$  des modes électromagnétiques confinés dans chaque site A et B de la cellule numéro  $m$  de la chaîne infinie peuvent être décrites par ce système d'équations couplées :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} B_m \\ A_m \end{pmatrix} - t' \begin{pmatrix} B_{m-1} \\ A_{m-1} \end{pmatrix},$$

où  $E_0$  est l'énergie du photon du niveau fondamental de chaque pilier. On peut montrer que les modes propres de cette équation ont la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Psi_{A,m}(k) \\ \Psi_{B,m}(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp 1 \\ e^{i\phi(k)} \end{pmatrix} e^{ikm} e^{i\frac{E_{\pm}(k)}{\hbar}t} \equiv \vec{\Psi}_{\pm}(k) e^{ikm} e^{i\frac{E_{\pm}(k)}{\hbar}t}.$$

Ici  $\Psi_{A,m}(k)$  et  $\Psi_{B,m}(k)$  indiquent les amplitudes sur les micropiliers A et B, respectivement, de la cellule  $m$ , regroupées dans le vecteur  $\vec{\Psi}(k)$ . Le nombre d'onde  $k$  dont dépendent les modes est défini entre  $-\pi$  et  $+\pi$ , en considérant que la période du réseau est  $a=1$ . Les modes propres se distribuent sur deux bandes d'énergie  $E_{\pm}(k) = E_0 \pm \sqrt{t^2 + t'^2 + 2tt' \cos(k)}$  séparées par une bande interdite de largeur  $2|t - t'|$  (voir la figure 2b). Le choix du signe moins ou plus entre les amplitudes des deux piliers A et B de chaque cellule dépend de la bande considérée. On remarquera qu'il existe une différence de phase  $\phi(k)$  entre ces deux sites, donnée par  $\cos\phi(k) = \frac{t'/t}{\sin k} + \cot k$ .

Nous pouvons à présent introduire l'invariant topologique qui permet de classer les bandes de ce modèle. Il s'agit du nombre d'enroulement (*winding number* en anglais), défini ainsi :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \vec{\Psi}^*(k) \frac{d\vec{\Psi}(k)}{dk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{dk} dk$$

L'intégrale parcourt les modes propres d'une bande sur toute la première zone de Brillouin, de  $-\pi$  à  $+\pi$ . Sa valeur est indépendante de la bande choisie, et vaut 0 quand  $t > t'$ , et 1 quand  $t < t'$ . On note ici l'une des caractéristiques des invariants topologiques : il s'agit toujours de nombres entiers. Ceci témoigne du fait que des petites déformations du système, par exemple des variations de  $t$  et  $t'$ , ne changent pas la valeur de l'invariant. Pour passer de la phase topologique  $\mathcal{W} = 0$  à la phase  $\mathcal{W} = 1$

il faut varier la valeur des couplages de  $t > t'$  à  $t < t'$ . Notamment, il faut passer par « une transition de phase topologique » à la fermeture du gap, qui a lieu pour  $t = t'$ .

Cette description nous permet de prédire l'apparition d'états topologiques d'interface. La figure 2c montre deux chaînes de micropiliers avec des couplages  $t > t'$  à gauche, et  $t < t'$  à droite. À l'interface entre les deux, l'invariant topologique  $\mathcal{W}$  doit changer de la valeur 0 à 1 et un état apparaît au centre du gap. Remarquons ici que la valeur exacte du couplage entre les deux chaînes  $t_{lien}$  (flèche rouge sur la figure 2c) ne joue aucun rôle dans l'existence de cet état localisé : sa présence est uniquement la conséquence du changement de l'invariant topologique. Il existerait même si  $t_{lien} = 0$ , ce qui correspond aux deux chaînes séparées physiquement. Dans ce cas-ci, l'état d'interface se trouve uniquement sur le bout de la chaîne avec  $\mathcal{W} = 1$ . Notons aussi que le choix de cellule unitaire dans un réseau infini, qui détermine si  $t > t'$  ou  $t < t'$ , est complètement arbitraire. Ainsi, l'invariant topologique pour ce réseau unidimensionnel a la particularité qu'il n'est pas bien défini sur un réseau infini. Par contre, quand on considère une interface ou une chaîne finie, le choix de la cellule unitaire reste bien déterminé par le couple de sites sur le bord de la chaîne, et l'analyse que nous venons de faire a tout son sens.

Le type de réseau à une dimension que nous venons de décrire présente des états d'interface localisés spatialement, qui ont entre autres été utilisés pour démontrer l'ingénierie d'états localisés au centre d'un gap et pour la réalisation de lasers [3]. Mais leur intérêt est essentiellement conceptuel.

### LA TOPOLOGIE DE VALLÉE À DEUX DIMENSIONS

La possibilité de créer des états d'interface topologiques dans des systèmes à deux dimensions a un intérêt majeur car ceci permet de concevoir des guides photoniques intégrés le long desquels la lumière peut se propager avec une faible rétrodiffusion. L'invariant topologique pertinent pour classer les bandes électroniques des solides cristallins à deux dimensions est le nombre de Chern, défini par la relation :

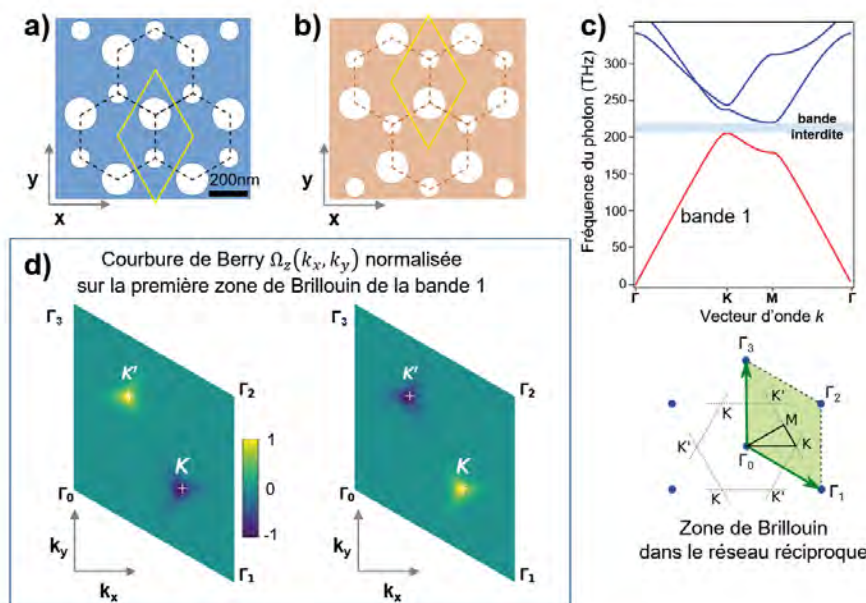
$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{z_B} \nabla_{\vec{k}} \times [\vec{\Psi}^*(\vec{k}) i \nabla_{\vec{k}} \vec{\Psi}(\vec{k})] \cdot \vec{d}S \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{z_B} \vec{\Omega}(\vec{k}) \cdot \vec{d}S,$$

avec  $\vec{dS} = dk_x dk_y \vec{u}_z$ , où les directions  $x$  et  $y$  sont celles du réseau et  $\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire perpendiculaire.

L'intégrale est réalisée sur tous les modes propres  $\vec{\Psi}(\vec{k})$  de la première zone de Brillouin (zB) du réseau cristallin, paramétrés par leur vecteur d'onde  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ . L'intégrand  $\vec{\Omega}(\vec{k})$  porte le nom de courbure de Berry. On remarquera l'analogie entre les expressions du nombre de Chern et du nombre d'enroulement pour le modèle SSH.

De par sa construction, la courbure de Berry a certaines propriétés. Si la symétrie par renversement du temps est préservée, alors  $\vec{\Omega}(\vec{k}) = -\vec{\Omega}(-\vec{k})$  et son intégrale sur la zone de Brillouin est nécessairement zéro. Si la symétrie d'inversion est préservée, alors  $\vec{\Omega}(\vec{k}) = \vec{\Omega}(-\vec{k})$ . La présence de ces deux symétries à la fois implique alors  $\vec{\Omega}(\vec{k}) = \vec{0}$ . En conséquence, pour avoir un nombre de Chern différent de zéro il est nécessaire de briser la symétrie par renversement du temps, par l'application, par exemple, d'un champ magnétique. Mais ceci présente de grandes difficultés pour les systèmes photoniques du fait que la plupart des matériaux utilisés dans ce domaine ont des réponses trop faibles aux champs magnétiques. D'autres invariants topologiques possibles à deux dimensions existent et s'affranchissent de ce problème, mais ils sont réservés aux systèmes fermioniques (les électrons), et ne fonctionnent pas pour les photons qui sont des bosons.

Il a fallu donc trouver d'autres stratégies pour créer des systèmes topologiques à deux dimensions pour les photons. La configuration la plus efficace est connue sous le nom d'effet Hall de vallée [4]. Malgré le fait que le nombre de Chern doit rester égal à zéro pour un réseau photonique dont la symétrie par renversement du temps est préservée, la courbure de Berry peut être non nulle dans certaines régions de la zone de Brillouin d'une bande si la symétrie d'inversion est brisée. La figure 3a montre le schéma d'un cristal photonique à deux dimensions fait de trous disposés sur un réseau en nid d'abeille. La cellule unitaire est marquée par un losange jaune. Les deux trous contenus dans la cellule sont de taille différente, ce qui brise la symétrie d'inversion selon l'axe horizontal, le réseau image étant celui de la figure 3b, non superposable au premier. Ce cristal a plusieurs bandes photoniques, représentées sur la figure 3c (dans le cas où le champ



**Figure 3.** Effet topologique de vallée. a) et b) montrent une petite région de deux cristaux photoniques à deux dimensions en silicium. L'un est l'image miroir de l'autre, et ils possèdent les mêmes bandes photoniques, c). Le panneau d) montre la courbure de Berry de la bande 1 pour chaque cristal sur la première zone de Brillouin. Elle est concentrée sur les points K et K'. Extrait de la Réf. [5].

# Radiometry of wet surfaces When Water Matters

Directed by

Lionel Simonot

Institut d'Optique Graduate School Advanced Textbook

Directed by Lionel SIMONOT

Radiometry of Wet Surfaces  
When Water Matters



How to predict the evolution of the appearance of wet materials for a given surface type, and for a given moisture content? This field of research leads to multiple fields of application: in remote sensing, to correctly identify surfaces and estimate moisture content; in public lighting, to improve visibility on wet roads; in computer graphics, to render wet surfaces in a more realistic way...

Also available in e-book format

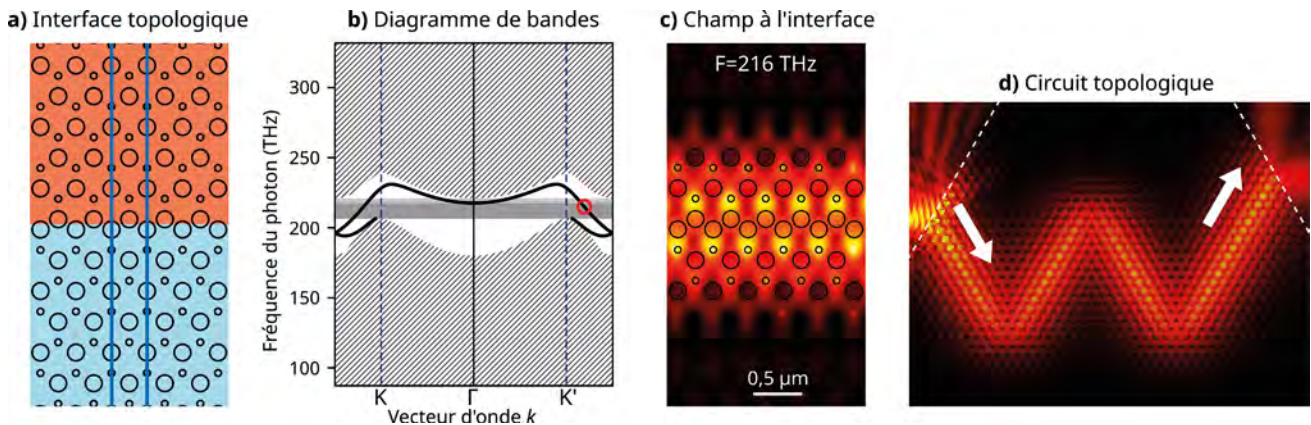
For sale on  
[aboutique.edpsciences.fr](http://aboutique.edpsciences.fr)

ISBN : 978-2-7598-2930-9

120 illustrated pages

Price : 95 €





**Figure 4.** Interface topologique. a) Interface entre deux cristaux photoniques de cellule unitaire miroir. b) Diagramme de bandes pour l'interface. Des états d'interface traversent le gap, notamment autour des points K et K', limités en bleu par des conditions au bord périodiques. c) Norme du champ magnétique du mode à 215 THz, bien confiné à l'interface. d) Circuit topologique composé d'interfaces formant trois virages à 120°. La couleur rouge-orange indique les zones de fort champ. La lumière est injectée à gauche et sort à droite avec très peu de pertes. Figures a), b), c) extraites de la Réf. [5].

électrique est parallèle au plan du réseau) le long des lignes de plus hautes symétries de la première zone de Brillouin, tracée en vert en dessous. Celle de plus basse fréquence (bande 1) est séparée des deux autres à des fréquences plus élevées (en bleu) par une bande interdite. La courbure de Berry correspondant à la bande 1 est montrée sur le panneau d, gauche. On voit qu'elle est concentrée autour des points K et K', avec des valeurs de signes opposés. Si par contre on considère le cristal image de la figure 3b, où le grand trou est remplacé par le petit et vice-versa, les bandes d'énergie restent identiques mais la courbure de Berry change de signe aux points K et K' (figure 3d, droite).

Examinons maintenant le cas d'une interface entre les deux cristaux images des figures 3a et 3b, telle que dessinée sur la figure 4a. L'interface est parallèle à la direction  $\Gamma_0K$  de la figure 3d. Malgré le fait que le vecteur d'onde n'est plus bien défini dans la direction perpendiculaire à l'interface, il le reste dans la direction de l'interface, qui présente une périodicité unidimensionnelle, et les points K et K' restent bien séparés. Si on se place sur le point K', la courbure de Berry locale pour la bande considérée doit changer de signe en passant d'un cristal à l'autre (voir figure 3d). Ceci suggère que localement la bande interdite doit se fermer à l'interface entre les deux cristaux, donnant lieu à des états qui y sont confinés. Le même argument s'applique au point K.

La courbe de dispersion de cet état d'interface, qui peut être calculée numériquement, est tracée sur la figure 4a. On observe que cet état traverse le gap autour des points K et K', et sa distribution en amplitude confirme qu'il est localisé et se propage le long de l'interface, comme le montre la figure 4c, tracée pour l'état marqué par un cercle rouge sur le panneau 4b. Plus important encore, même en présence de virages abruptes tels que présentés sur la figure 4d, la propagation se réalise de façon presque parfaite, avec une rétrodiffusion dans les virages qui peut être largement inférieure à 1% en puissance [5]. Il faut tout de même que la nouvelle direction de propagation ne mélange pas les points K et K'. Ceci est possible si les virages forment des angles de  $\pm 120^\circ$ . Par

contre, la présence de désordre dans la taille ou position des trous produira de la diffusion entre les points K et K' et induira de la rétrodiffusion. Ces propriétés de guidage permettent la réalisation de circuits photoniques d'une grande variété. Elles peuvent être notamment utilisées pour réaliser des diviseurs de faisceau, des interféromètres ou des cavités résonnantes avec grands facteurs de qualité, afin par exemple d'améliorer les performances de dispositifs de télécommunications térahertz.

### CONCLUSION

La notion d'invariant topologique appliquée aux bandes photoniques a permis la compréhension de nouveaux mécanismes de localisation et de guidage robuste de la lumière à l'interface entre deux matériaux. Ces avancées ont conduit à la réalisation de lasers dits topologiques et à la découverte de l'effet Hall quantique de vallée. Ce dernier phénomène est d'une puissance redoutable pour la conception de circuits topologiques photoniques fonctionnels. Néanmoins, plusieurs questions fondamentales restent encore ouvertes telles que le lien strict entre cet effet et les invariants topologiques pertinents dans les systèmes bosoniques, auxquels appartiennent les matériaux photoniques. ●

### RÉFÉRENCES

- [1] T. Ozawa *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 15006 (2019).
- [2] N. Pernet *et al.*, *Nat. Phys.* **18**, 678 (2022).
- [3] Y. Ota, K. Takata, T. Ozawa, A. Amo, Z. Jia, B. Kante, M. Notomi, Y. Arakawa, and S. Iwamoto, *Nanophotonics* **9**, 547 (2020).
- [4] H. Xue, Y. Yang, and B. Zhang, *Adv. Photonics Res.* **2**, 2100013 (2021).
- [5] G. Lévêque, Y. Pennec, P. Szriftgiser, A. Amo, and A. Martínez, *Phys. Rev. A* **108**, 043505 (2023).