



HAL
open science

Apprentissage et enseignement de la preuve en mathématique. Une étude exploratoire du raisonnement mathématique à l'entrée dans l'enseignement supérieur aux Antilles

Mickaëlle Ramassamy, Jean-Claude Régnier

► To cite this version:

Mickaëlle Ramassamy, Jean-Claude Régnier. Apprentissage et enseignement de la preuve en mathématique. Une étude exploratoire du raisonnement mathématique à l'entrée dans l'enseignement supérieur aux Antilles. Biennale Internationale de l'Éducation, de la Formation et des Pratiques Professionnelles - Édition 2023, Association La Biennale, Sep 2023, Paris, France. hal-04486417

HAL Id: hal-04486417

<https://hal.science/hal-04486417v1>

Submitted on 1 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Apprentissage et enseignement de la preuve en mathématique.

Une étude exploratoire du raisonnement mathématique à l'entrée dans l'enseignement supérieur aux Antilles

Mickaëlle RAMASSAMY - mickaëlle.ramassamy@univ-antilles.fr

Jean-Claude REGNIER - jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr

Résumé

La construction d'une preuve en mathématiques engage le raisonnement de son auteur. Pour un élève entrant dans l'enseignement supérieur, ce raisonnement est empreint du cadre institutionnel régissant l'enseignement des mathématiques, des conceptions des enseignants intervenant dans son parcours de formation et de ses propres représentations des concepts entrant en jeu dans la part mathématique du site local au sens de la théorie anthropologique du didactique – TAD - du résultat à prouver : objets, techniques, technologies et théories.

Dans l'enseignement secondaire, les programmes de mathématiques expriment des recommandations explicites sur l'apprentissage de la preuve qui disparaissent des programmes des classes préparatoires aux grandes écoles.

Une étude longitudinale met en lumière une évolution des représentations et conceptions en mathématiques d'étudiants antillais entre la première année et la fin de la deuxième année dans l'enseignement supérieur – classes préparatoires aux grandes écoles et cursus universitaire. Cette évolution peut être observée grâce à une analyse des sens attribués par ces étudiants aux termes tels que justification, démonstration, hypothèse et conjecture à différentes étapes de leur cursus. Elle peut être mise en lien avec les conceptions d'enseignants engagés dans ce cursus sur le sens qu'ils attribuent à ces mêmes termes. L'absence de mention de la preuve dans les programmes nous conduit à considérer cette évolution, qui peut être un signe de la construction du raisonnement mathématique, comme un fruit des interactions enseignants / étudiants qui peuvent être observées, par exemple, lors des interrogations orales.

La construction du raisonnement mathématique semble requérir de la part de l'étudiant et de l'enseignant, de prendre en compte les représentations de l'autre sur les concepts mathématiques et les conceptions du sens de différents termes employés lorsque l'on cherche à prouver un résultat mathématique.

Mots clés : raisonnement mathématique, représentations, conceptions

En mathématiques, prouver est une activité intellectuelle dont le but est de convaincre autrui ou soi-même de la validité d'une propriété à partir de raisonnements dont la construction demande à son auteur un engagement sous des formes qui peuvent varier. Dans l'enseignement secondaire français, l'enseignement de la preuve est régi par des textes institutionnels qui recommandent un apprentissage de la preuve progressif et transversal aux différents champs des mathématiques, à travers le développement de la compétence « Raisonner ». La production d'un écrit formalisé est un objectif visé en fin de cursus. Dans l'enseignement supérieur, la preuve ne fait plus l'objet des mêmes recommandations. À ce niveau d'étude, les interactions enseignant/étudiant constituent un milieu d'apprentissage du raisonnement mathématique. Les conceptions des enseignants et les représentations des étudiants sont donc à prendre en considération dans l'organisation et le contenu des situations d'enseignement-apprentissage.

En premier lieu, nous verrons comment la théorie anthropologique du didactique – TAD nous permet d'appréhender la preuve en tant qu'objet de connaissance et de situer cet objet dans l'activité de raisonnement. Puis nous verrons comment une analyse praxéologique nous permet d'analyser l'énoncé d'une proposition à prouver ainsi que les connaissances mises en jeu dans le raisonnement mathématique menant à cette preuve. Enfin, nous évoquerons la théorie de l'action didactique conjointe comme cadre d'analyse des interactions enseignants/étudiants mise en jeu dans l'apprentissage de la preuve dans l'enseignement supérieur.

Cadre théorique

Selon Balacheff (1987), le raisonnement en mathématique comprend des activités pouvant être caractérisées par leur part discursive telle que l'argumentation, l'explication ou la justification. Duval (1992) désigne le raisonnement comme une organisation de propositions dans le but d'amener à la conviction de la validité d'un énoncé dans un système axiomatique de référence. En s'appuyant sur cette définition, selon Balacheff (2019), réfléchir au raisonnement mathématique demande de considérer tant la production d'un discours que la production d'un texte en tenant compte de l'état des connaissances, des situations et du niveau de langage. Le raisonnement déductif est un exemple d'organisation de propositions amenant à la modification de la force de conviction d'un énoncé – désigné par Duval (1991) par le terme « valeur épistémique ». Ce raisonnement déductif peut amener à la production d'une preuve, qui, selon la théorie anthropologique du didactique, est considérée, dans le cas de l'enseignement, comme un objet de connaissance (Chevallard, 1985). Son enseignement et son apprentissage se font de façon concomitante à ceux d'autres objets mathématiques.

Nous avons recours à la grille de lecture et d'interprétation de l'activité des élèves que Silvy, Delcroix et Mercier (2013) désignent par « site local », qui constitue un cadre pertinent et efficient d'analyse des connaissances mises en jeu dans un raisonnement. Elle nous permet de mettre en lumière les divers objets mis en œuvre, les techniques, technologies et théories qui sous-tendent les propositions mises en jeu, mais également les différents substrats permettant de décrire ce que les auteurs appellent le domaine de réalité. Présentant ce site local sous forme de tableau (Tableau 1), les auteurs de cette étude décrivent les relations locales des connaissances et des savoirs mis en jeu dans une tâche.

Partie anthropologique		Objets	Partie mathématique		
Substrat 2 : heuristiques	Substrat 1 : choses		Techniques	Concepts 1 : technologies	Concepts 2 : théories
Logique du contrat didactique Méthodes : - Manipulation d'une représentation iconique - Construction de progressions - Manipulation de rapports numériques - Tableau de correspondances - Patron d'analyse synthèse - Mise en équation Utilisation d'une estimation Obstacle (frontière grandeurs et nombres)	Dessin/ Schéma Fractions équivalentes Progressions Rapports semblables Nombres Partitions Calcul sur les rapports Pourcentage Ratio Formule	Entiers naturels Rapports de grandeurs Fractions Proportion (rapport d'une partie sur un tout) Quotient Opérateurs multiplicatifs Modèle	Rationnels Tableau de proportionnalité Calcul du coefficient de proportionnalité Passage d'un rapport à une proportion globale Pourcentage Calcul d'une quatrième proportionnelle Équation diophantienne Système de deux équations à deux inconnues	Théorème d'Euclide ¹⁹ Analyse algébrique Rapports et proportions Formules et Équations Rapport de similitude	Raisonnement arithmétique Modèle algébrique Équations dans un corps Système d'équations Algèbre linéaire

TABLEAU 1 : EXEMPLE DE DESCRIPTION D'UN SITE LOCAL D'UN PROBLEME METTANT EN ŒUVRE UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE

Ainsi, les connaissances utilisées à des fins pédagogiques, constitutives de ce que Shulman (1986) appelle le *pedagogical content knowledge* (PCK), sont inhérentes à la façon dont enseignant et apprenant comprennent la tâche à accomplir. Les propriétés qui soutiennent cette compréhension sont de l'ordre de ce que Silvy, Delcroix et Mercier (2013) nomment l'« anthropologie du savoir enseigné ».

Les interactions qui se produisent en situation d'enseignement peuvent être observées à partir d'une issue de la théorie anthropologique du didactique. Ainsi, selon Sensevy (2011), certaines tâches peuvent être vues comme des jeux didactiques dans lesquels l'enseignant et l'apprenant sont engagés. L'enseignant gagne si l'apprenant développe des stratégies gagnantes et ce dernier gagne s'il parvient à les développer en agissant et en évaluant son action, donnant ainsi du sens au savoir (Sensevy & Mercier, 2007). Cependant, nous pouvons considérer qu'il y a échec si l'apprenant ne parvient pas à développer les stratégies adéquates ou refuse de s'engager dans ce jeu. Les situations de construction d'un raisonnement dans les différents domaines des mathématiques peuvent être explorées sous cet angle.

Ainsi, les interactions enseignant/apprenant sont partie intégrante de l'acquisition du raisonnement mathématique en situation scolaire.

Les programmes de mathématique de l'enseignement secondaire intègrent dans l'activité de raisonnement tant la résolution de problèmes que la démonstration en utilisant un raisonnement logique à partir de propositions établies pour parvenir à une conclusion (Ministère de l'éducation nationale, 2020). Dans le document d'accompagnement des programmes relatif à la compétence « Raisonner » (Ministère de l'éducation nationale, 2016), la définition du raisonnement donnée par Toulmin (1993), décrivant le raisonnement comme « une opération discursive par laquelle on conclut qu'une ou plusieurs propositions (prémisses) impliquent la vérité, la probabilité ou la fausseté d'une proposition (conclusion) », est reprise. Ainsi, différents types de raisonnement sont à enseigner : le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par récurrence, le raisonnement par contraposée, le raisonnement par disjonction de cas (Ministère de l'éducation nationale d. l., 2011).

En ce qui concerne l'enseignement supérieur, les programmes des classes préparatoires aux grandes écoles (Ministère de l'éducation nationale d. l., 2013) décrivent la finalité du raisonnement par la production d'une démonstration en se basant sur des inductions ou des déductions. Les types de raisonnement ne sont plus explicitement mentionnés et un usage courant par exposé de l'enseignant ou production de l'apprenant est recommandé. Une modalité de l'activité d'enseignement est étudiée dans les travaux de Lalaude – Labayle (2016) qui décrivent une situation usuelle où l'acquisition du raisonnement mathématique est mise en œuvre par les interactions enseignant - apprenant : les interrogations orales.

Approches méthodologiques

Le statut du raisonnement mathématique et de son apprentissage change donc lors de la transition enseignement secondaire - enseignement supérieur. Les interactions étant prépondérantes dans cet apprentissage, nous nous interrogeons sur l'impact des perceptions des enseignants sur celle de leurs étudiants dans l'acquisition du raisonnement en mathématique. La modification du contrat didactique issue de cette transition nous amène à supposer que l'importance des interactions dans cet apprentissage induit une influence réciproque entre les perceptions des enseignants et celles de leurs étudiants que l'on peut observer par le biais de l'évolution de leurs conceptions.

Nous étudions cette évolution en mettant en œuvre des méthodes mixtes sur la base d'enquêtes par questionnaire et par entretien. Dans la première phase de notre étude, en 2019 et 2020, nous avons mené une enquête longitudinale par questionnaire auprès d'étudiants ayant débuté un cursus dans lequel la part horaire des cours de mathématiques est significativement importante : la licence de Mathématiques ou les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques de Guadeloupe et de Martinique. Ainsi nous avons construit une base de données sur un échantillon de quarante-quatre étudiants, successivement à leur entrée dans leur cursus de formation, au bout d'un an puis en fin de deuxième année, relativement

aux sens attribués à certains termes employés dans des activités menant à la construction d'un raisonnement en mathématique. Dans la deuxième phase de cette étude, à l'aide d'une enquête par entretiens semi-directifs, nous avons construit des données relatives aux perceptions de sept enseignants sur le sens attribué à ces mêmes termes. Ces enseignants, impliqués dans les formations suivies par les étudiants sujets de l'enquête, ont des profils variés. Une analyse thématique a été menée sur les perceptions de ces enseignants nous permettant de mettre en relief des noyaux de sens qui ont permis de réaliser une comparaison avec les réponses des étudiants.

Pour l'analyse des données, nous avons eu recours au cadre théorique de l'analyse statistique implicite (ASI) (Gras, Régnier, Guillet, 2009), (Gras, Régnier, Marinica, Guillet, 2013), (Gras, Régnier, Lahanier-Reuter, Marinica, Guillet, 2017) dont la finalité est d'analyser des relations non symétriques entre les variables qui modélisent le phénomène étudié. Nous avons ainsi cherché à identifier les relations significatives au sens de l'ASI, à partir des réponses des étudiants aux différentes phases de l'étude et de celles des enseignants. Les traitements dans le cadre de l'ASI ont été réalisés avec les logiciels CHIC et R-CHIC (Ratsimba-Rajohn, 2013).

Résultats :

- Les perceptions des enseignants :

Dans l'enquête par entretien, nous avons interrogé les enseignants sur leur perception du sens attribué au terme *hypothèse*, identifiant ainsi trois noyaux de sens. Indépendamment de leur profil, pour certains enseignants, une *hypothèse* est une donnée dont on ne doute pas de la véracité, un fait avéré. L'*hypothèse* se réfère alors à un constat dont la valeur de vérité est acquise. Pour d'autres enseignants, ce terme désigne une *supposition*. Il s'agit alors d'une assertion que l'on peut extraire d'un énoncé ou que l'on déduit d'éléments affirmés dans un énoncé. Dans ce cas, la valeur de vérité de l'*hypothèse* n'est pas acquise. Le dernier noyau de sens observé fait un lien entre *hypothèse* et point de départ. Ce terme réfère alors à une proposition considérée comme vraie à partir de laquelle on pourra mener un raisonnement.

La question portant sur le sens attribué au terme *démonstration* a mis en lumière trois noyaux de sens. Ainsi, indépendamment de leur profil, pour certains enseignants, la *démonstration* est perçue comme un objet amenant à la conviction d'autrui relativement à la validité d'un procédé ou d'un résultat. D'autres enseignants considèrent que la *démonstration* est synonyme de *preuve*. Un troisième noyau de sens rapproche la *démonstration* du processus déductif. Les réponses fournies par ces enseignants mettent alors l'accent sur le cheminement de déduction permettant, à partir d'une ou plusieurs propositions dont la valeur de vérité est connue, d'établir une ou plusieurs nouvelles propositions en utilisant des règles dites logiques.

La question portant sur le sens attribué au terme *justification* permet d'identifier deux noyaux de sens. Dans le premier noyau, la *justification* désigne une *démonstration* sur laquelle on porte moins d'attention au formalisme dans le produit communiqué. Mais *justification* et *démonstration* visent le même but de conviction. Dans le deuxième noyau, la justification est une explication des raisons amenant à la validité d'une propriété, un raisonnement qui amène à la construction d'une *démonstration*. Dans les deux cas, aucune précision sur la structure de la *justification* n'est précisée.

Enfin, la question portant sur le sens attribué au terme *conjecture* permet d'identifier un consensus selon lequel il s'agit d'une hypothèse sur le résultat à prouver. C'est une proposition obtenue par des méthodes numériques ou expérimentales dont la valeur de vérité n'est pas acquise et reste à établir.

- Les perceptions des étudiants

Les réponses des étudiants sur le sens accordé au mot *hypothèse* permettent de mettre en lumière trois noyaux de sens : supposition, conjecture, point de départ (Figure 1). La notion de point de départ à un raisonnement a également été évoquée. À l'entrée dans l'enseignement supérieur, la majorité des étudiants estiment qu'une *hypothèse* est une conjecture ou quelque chose que l'on suppose. Au bout de deux ans, majoritairement, ce terme désigne le point de départ d'un raisonnement. Pendant ces deux années, l'évolution de cette perception semble tendre de façon homogène vers deux noyaux de sens – l'*hypothèse* vue comme une supposition ou comme un point de départ. – délaissant la notion de conjecture qui se distingue progressivement de l'*hypothèse* dans les conceptions des étudiants.

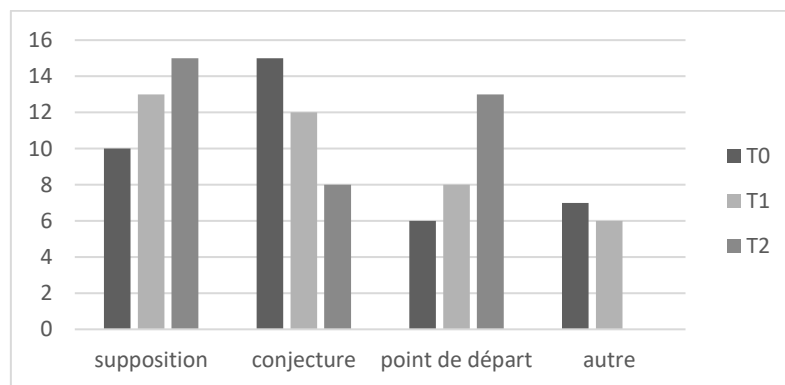


FIGURE 1: SENS ATTRIBUE AU TERME *HYPOTHESE* PAR LES ETUDIANTS

En ce qui concerne le terme *démonstration*, six catégories de réponse sont identifiées : calcul, raisonnement, validation, preuve, processus et explication (Figure 2). À l'entrée dans l'enseignement supérieur, les réponses sont majoritairement réparties entre les notions de raisonnement, de validation d'un résultat, d'explication et de preuve. Au bout de deux ans, la démonstration est majoritairement perçue comme un processus, la perception reliant ce terme à un calcul ou une explication devient

minoritaire. De plus, l'assimilation entre preuve et démonstration, qui était majoritaire au début de la deuxième année du cursus suivi, n'est plus prédominante.

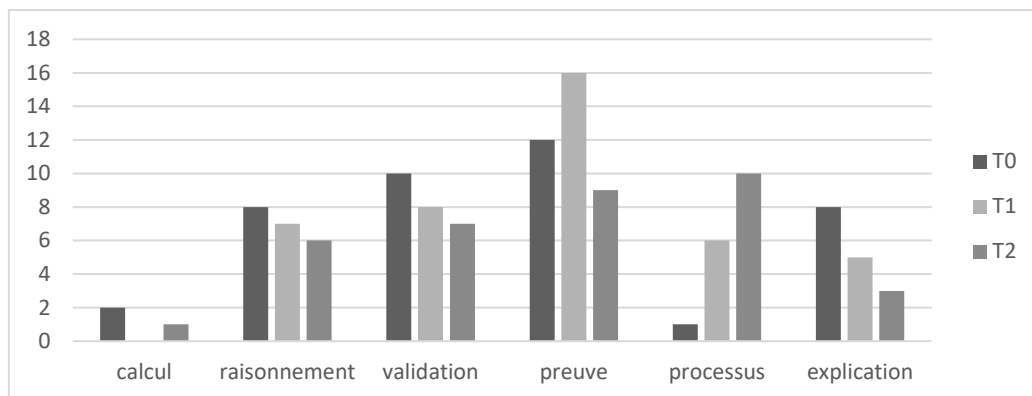


FIGURE 2:SENS ATTRIBUE AU TERME *DEMONSTRATION* PAR LES ETUDIANTS

À l'entrée dans l'enseignement supérieur, les réponses concernant le sens attribué au terme *justification* sont partagées entre la recherche d'arguments, la preuve et la validation (Figure 3). Pour une minorité d'élèves, la *justification* est assimilée à une explication. Au bout de deux ans, ce noyau de sens est davantage présent. La *justification* n'est plus autant liée à la validation d'un résultat au profit de la notion d'*explication*.

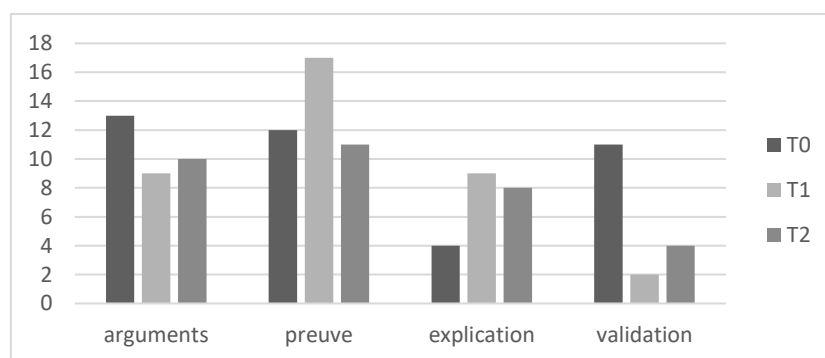


FIGURE 3:SENS ATTRIBUE AU TERME *JUSTIFICATION* PAR LES ETUDIANTS

À l'entrée dans l'enseignement supérieur, la *conjecture* est majoritairement perçue comme une supposition à l'instar de l'*hypothèse* (Figure 4). Le besoin d'établir la valeur de vérité de cette proposition est peu exprimé. Au bout de deux ans, l'absence de *démonstration* amenant à cette proposition caractérise majoritairement la *conjecture*, qui est alors perçue comme une proposition non démontrée.

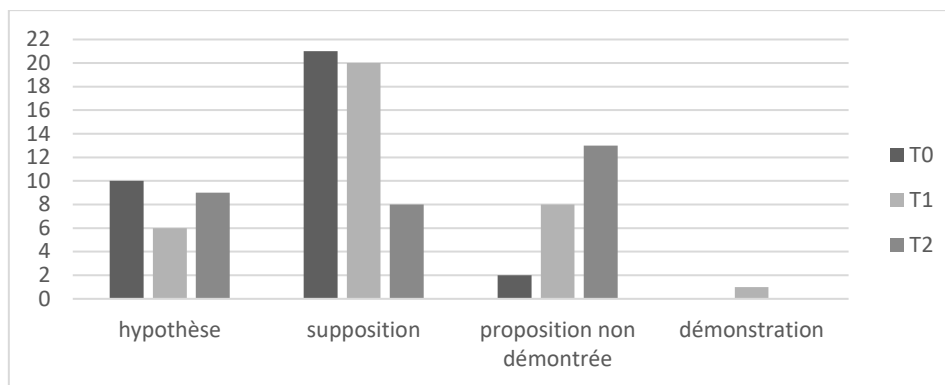


FIGURE 4: SENS ATTRIBUE AU TERME *CONJECTURE* PAR LES ETUDIANTS

- Évolution des perceptions des étudiants

Une première étude nous a permis d'observer une évolution des perceptions des étudiants sur le sens attribué aux termes *hypothèse*, *démonstration*, *justification*, *conjecture*. Une étude des relations non symétriques, les considérant comme l'explicitation d'une causalité dans le cadre théorique de l'ASI nous permet de caractériser cette évolution. Les sens attribués aux différents termes ont été codés comme suit :

<i>Hypothèse</i> au sens de :	<i>Supposition</i>	<i>Conjecture</i>	<i>Point de départ</i>	<i>Autre</i>
Codage des variables	Hyp1	Hyp2	Hyp3	Hyp4

<i>Démonstration</i> au sens de :	<i>Calcul</i>	<i>Raisonnement</i>	<i>Validation</i>	<i>Preuve</i>	<i>Processus</i>	<i>Explication</i>
Codage des variables	Dem1	Dem2	Dem3	Dem4	Dem5	Dem6

<i>Justification</i> au sens de :	<i>Arguments</i>	<i>Preuve</i>	<i>Explication</i>	<i>Validation</i>
Codage des variables	Justif1	Justif2	Justif3	Justif4

<i>Conjecture</i> au sens de :	<i>Hypothèse</i>	<i>Supposition</i>	<i>Proposition non démontrée</i>	<i>Démonstration</i>
Codage des variables	Conj1	Conj2	Conj3	Conj4

Le graphe implicatif (Figure 5) nous permet de caractériser les perceptions des sens attribués par les étudiants au terme *hypothèse*. Nous observons que 61% des étudiants ne percevant pas l'*hypothèse* comme une conjecture au bout de deux ans ne percevaient déjà pas ainsi l'*hypothèse* à l'entrée dans l'enseignement supérieur. De plus, nous observons que 66% des étudiants ne percevant pas l'*hypothèse* comme *un point de départ* à l'entrée dans l'enseignement supérieur conservent cette perception au bout de deux ans.

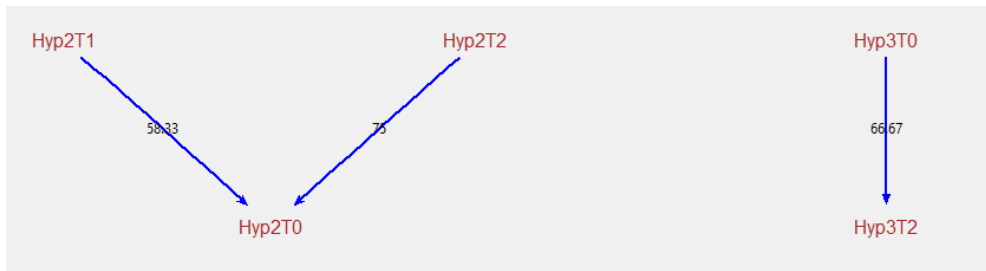


FIGURE 5: GRAPHE IMPLICATIF DE LA PERCEPTION DE L'HYPOTHESE AU SEUIL 0,5

Le graphe implicatif (Figure 6) caractérisant la perception du sens attribué au terme *démonstration* nous permet d'observer l'évolution de ces perceptions :

- 57% des étudiants ne percevant pas la démonstration comme une validation de résultat au bout de deux ans n'y voyaient pas une preuve au début de la deuxième année dans leur cursus.
- 57% des étudiants ne percevant pas la démonstration comme un raisonnement en début de cursus ne perçoivent pas la démonstration comme une preuve au début de la deuxième année.
- 55% des étudiants ne percevant pas la démonstration comme une preuve au bout de deux ans ne la percevaient pas ainsi au début de la deuxième année.
- 68% des étudiants ne percevant pas la preuve comme une validation au début de la deuxième année ne la perçoivent pas comme un processus à la fin de cette deuxième année.

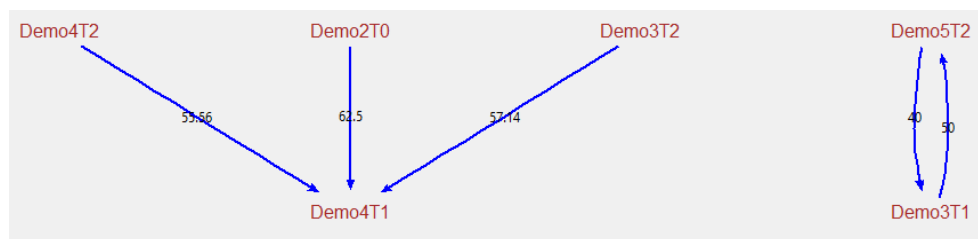


FIGURE 6: GRAPHE IMPLICATIF DE LA PERCEPTION DE L'HYPOTHESE AU SEUIL 0,5

Le graphe implicatif (Figure 7) nous permet de caractériser l'évolution des perceptions des sens attribués par les étudiants au terme *justification*. Nous pouvons remarquer que 57% des étudiants ne percevant pas la *justification* comme une *preuve* au bout de deux ans ne la perçoivent pas comme une recherche d'arguments à l'entrée dans l'enseignement supérieur.

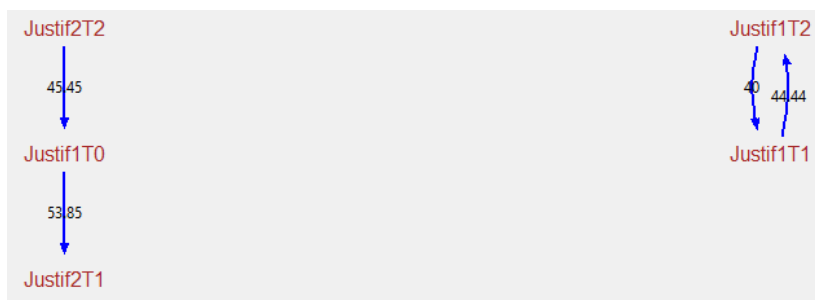


FIGURE 7: GRAPHE IMPLICATIF DE LA PERCEPTION DE LA JUSTIFICATION AU SEUIL 0,5

Le graphe implicatif (Figure 8) nous permet de caractériser l'évolution des perceptions des sens attribués par les étudiants au terme *conjecture*. Nous remarquons que les étudiants percevant la preuve comme une *hypothèse* ou une *conjecture* conservent cette perception aux trois temps de l'étude. En particulier :

- 52% des étudiants ne percevant pas la *conjecture* comme une supposition au bout d'un an conservent cette perception à la fin de la deuxième année.
- 72% des étudiants ne percevant pas la *conjecture* comme une *hypothèse* en entrant dans l'enseignement supérieur conservent cette perception au début de la deuxième année.

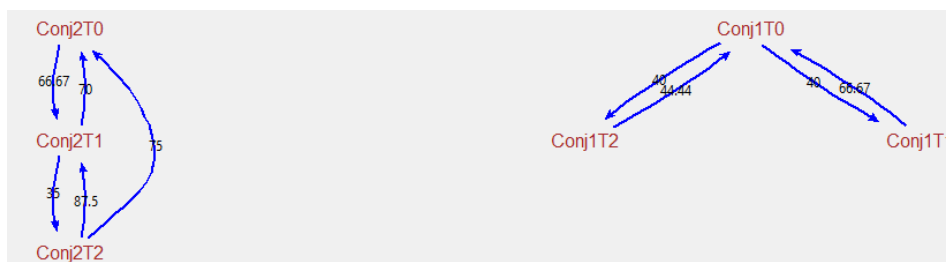


FIGURE 8: GRAPHE IMPLICATIF DE LA PERCEPTION DE LA CONJECTURE AU SEUIL 0,5

Discussion des résultats et conclusion

Concernant la perception du sens attribué au terme *hypothèse*, nous remarquons que les perceptions des étudiants rejoignent au bout de deux ans les perceptions partagées par les enseignants : la *supposition* et le *point de départ* d'un raisonnement. Dans ce dernier cas, une majorité d'étudiants percevant l'*hypothèse* comme un *point de départ* en entrant dans l'enseignement supérieur conserve cette perception au bout de deux ans.

Concernant le terme *démonstration*, les perceptions des étudiants rejoignent celle qui est majoritaire chez les enseignants : le *processus*. Par ailleurs, la moitié des étudiants qui percevaient la *démonstration* comme une *validation* rejoignent cette perception.

La *justification* est vue par les enseignants comme une *démonstration* plus simple ou une *explication*. Ces deux perceptions sont partagées par les étudiants au bout de deux ans.

La perception des étudiants vis-à-vis de la *conjecture* évolue pendant ces deux années, introduisant l'absence de *démonstration* de cette proposition. Ceci rejoint la perception unanimement partagée par les enseignants, qui estiment que la *conjecture* est une *hypothèse* sur le résultat à trouver. Selon les enseignants, cette proposition n'est donc pas démontrée.

En observant le sens attribué à ces quatre termes fréquemment employés lorsque l'on parle de raisonnement en mathématique, nous remarquons donc que les perceptions des étudiants ont tendance à se rapprocher majoritairement de celles de leurs enseignants. Compte tenu des résultats obtenus, nous pouvons considérer que les interactions enseignants-étudiants, qui deviennent prépondérantes dans l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement supérieur, induisent une influence entre les perceptions des enseignants et celles des étudiants. Ainsi, il est vraisemblable que ces interactions, qui peuvent être observées par le biais du jeu didactique, influent sur la construction du raisonnement en mathématique chez les étudiants.

Bibliographie

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147–176.
- Balacheff, N. (2019, June). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *XXVIe Colloque CORFEM*. Strasbourg.
- Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné / Yves Chevallard. *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné / Yves Chevallard*. Grenoble: Éd. la Pensée sauvage.
- Duval, R. (1991). Structure du Raisonnement Deductif et Apprentissage de la Demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233–261.
- Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, pp. 37-61.
- Gras, R., Régnier, J.-C., Guillet, F. (2009), *Analyse Statistique Implicative: Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Toulouse : Éditions Cépaduès.
- Gras, R., Régnier, J.-C., Marinica, C., Guillet, F. (2013), *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse : Éditions Cépaduès.
- Gras, R., Régnier, J.-C., Lahanier-Reuter, D., Marinica, C., Guillet, F. (2017), *Analyse Statistique Implicative. Des Sciences dures aux sciences humaines et sociales*. Toulouse : Éditions Cépaduès.

- Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire-Analyse didactique et épistémologique*. Ph.D. dissertation, UPPA (LMA-Pau).
- Ministère de l'éducation nationale, d. l. (2011, October). Bulletin officiel spécial. *Le Bulletin Officiel de l'Education Nationale*.
- Ministère de l'éducation nationale, d. l. (2013, May). Bulletin officiel spécial. *Bulletin officiel de l'éducation nationale*.
- Ministère de l'éducation nationale, d. l. (2016, March). Raisonement et démonstration. *Eduscol - Ressources d'accompagnement des anciens programmes*.
- Ministère de l'éducation nationale, d. l. (2020, July). Bulletin officiel. *Le Bulletin Officiel de l'Education Nationale*.
- Ratsimba-Rajohn, H (2013) Guide d'utilisation des principales fonctionnalités du logiciel CHIC, in Gras, R., Régnier, J.-C., Marinica, C., Guillet, F. (2013), *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse : Éditions Cépaduès. p.327-348
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.
- Sensevy, G., & Mercier, A. (2007, January). Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves. (Paideia). *Revue française de pédagogie*, 174-177. doi:10.2307/41202296
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15, 4–14.
- Silvy, C., Delcroix, A., & Mercier, A. (2013, February). Enquête sur la notion de "pedagogical content knowledge", interrogée à partir du "site local d'une question". *Éducation et didactique*, 7, 33–58. doi:10.4000/educationdidactique.1442
- Toulmin, S. E. (1993, July). *Les usages de l'argumentation*. Paris: PUF. doi:10.1017/cbo9780511840005