



HAL
open science

Utilisation des polytopes de manipulabilité cinématique pour la génération de trajectoires 5 axes en UGV

Laureen Grandguillaume, Sylvain Lavernhe, Christophe Tournier

► To cite this version:

Laureen Grandguillaume, Sylvain Lavernhe, Christophe Tournier. Utilisation des polytopes de manipulabilité cinématique pour la génération de trajectoires 5 axes en UGV. 9èmes assises Machines et Usinage à Grande Vitesse, Jun 2016, Tours, France. hal-04482589

HAL Id: hal-04482589

<https://hal.science/hal-04482589>

Submitted on 28 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Utilisation des polytopes de manipulabilité cinématique pour la génération de trajectoires 5 axes en UGV

Laureen GRANDGUILLAUME^(a), Sylvain LAVERNHE^(a),
Christophe TOURNIER^(a).

(a) LURPA, ENS Cachan, Univ. Paris-Sud, Université Paris Saclay, 94235 Cachan, France. Mails : laureen.grandguillaume@ens-cachan.fr, sylvain.lavernhe@ens-cachan.fr, christophe.tournier@ens-cachan.fr

Résumé : Historiquement, les domaines de la robotique et de l'usinage se sont développés en parallèle : des indices de performance et des stratégies de pilotage différentes ont été élaborés. Cet article propose d'investiguer l'usage de polytopes cinématiques, issus de la robotique, pour construire des trajectoires d'usinage avec des vitesses outil/pièce effectives plus élevées. La formalisation des contraintes cinématiques d'un centre d'usinage à l'aide des polytopes permet de caractériser géométriquement la manipulabilité cinématique dans le but de tirer profit des combinaisons spatiales des mouvements et éviter les chutes de vitesse relative entre l'outil et la pièce. L'analyse de cette cartographie des vitesses relatives locales permet ainsi d'envisager la construction de trajets multi-axes à temps de parcours diminués. La mise en œuvre de ce formalisme appliquée sur une pièce test et les essais menés sur centre UGV mettent en avant le potentiel de la démarche.

Mots clés : Usinage 5 axes, UGV, Manipulabilité, Polytope, Cinématique, Trajectoire.

1 Introduction

Les domaines de la robotique et de l'usinage sont tous les deux étroitement liés. Robots et machine-outils sont des structures poly-articulées qu'il faut mettre en mouvement suivant une trajectoire spécifiée. En UGV, la programmation des machines 5-axes s'avère plus difficile qu'en 3 axes du fait de la transformation géométrique et les indicateurs de

performances utilisés en robotique peuvent apporter de nouvelles façons d'envisager l'optimisation des stratégies d'usinage. L'objectif est de maîtriser la réalisation de la tâche, en termes de vitesse d'exécution, d'accessibilité, ou encore de suivi de la trajectoire programmée. Cependant, les méthodes de génération de trajectoire développées dans les deux domaines diffèrent.

En usinage 5 axes, les approches les plus performantes considèrent de manière simultanée la géométrie à usiner et la vitesse d'avance outil/pièce réelle, souvent bien en deçà de celle programmée. L'analyse de la cinématique réelle en usinage nécessite de prendre en compte les caractéristiques cinématiques du centre d'usinage (Beudaert 2012). Plusieurs leviers sont alors possibles pour réduire le temps d'usinage : optimiser le posage de la pièce en 5 axes en estimant la vitesse d'avance réelle (Pessoles 2010), construire des trajets 5 axes hors matière optimaux dans l'espace articulaire (Pateloup 2011), ou encore construire des trajectoires d'usinage 5 axes qui tendent à réduire les sollicitations des axes de rotation (Castagnetti 2008).

En robotique, la construction des trajectoires s'effectue souvent en fonction de critères de performance. La manipulabilité caractérise ainsi la capacité du mécanisme à se déplacer autour d'une configuration donnée (Yoshikawa 1985). L'ellipsoïde de manipulabilité est construit à partir des limites cinématiques de chaque axe dans l'espace articulaire. Son transfert dans l'espace des tâches par le modèle cinématique direct permet de visualiser l'effet des contraintes articulaires sur le mouvement de l'effecteur. Divers critères caractérisent la manipulabilité. Par exemple, le rapport des longueurs du plus petit et du plus grand demi-axe caractérise la variation de vitesse maximale (Nakamura 1991). Il est également possible de tenir compte de la direction dans laquelle la tâche est à exécuter (Chabane 2006). Cependant, l'utilisation d'un ellipsoïde n'est pas optimale car la vitesse d'avance ainsi modélisée est très souvent sous-estimée. En effet, dans l'espace articulaire les limites cinématiques définissent un polytope géométrique et non un ellipsoïde (Merlet 2005). Bien que son utilisation semble plus complexe par-rapport à la formulation analytique sous forme quadratique disponible avec l'ellipsoïde, le formalisme de polytope pourrait être plus pertinent pour l'analyse cinématique et la construction de trajets associés.

L'objectif de ce papier est d'évaluer l'intérêt de l'utilisation de polytopes cinématiques pour la construction des trajectoires 5 axes maximisant la vitesse outil/pièce. L'approche de la manipulabilité sous formes de polytopes de vitesse, d'accélération et de jerk a pour vocation de représenter de manière réaliste les contraintes cinématiques des centres d'usinage pour définir la meilleure stratégie d'usinage.

Le papier s'articule de la façon suivante : la partie 2 définit mathématiquement le formalisme associé aux polytopes et présente leurs utilisations pour caractériser les contraintes cinématiques. Une démarche permettant d'exploiter ces polytopes pour définir des trajectoires maximisant la vitesse, l'accélération ou le jerk tangentiels à la trajectoire est proposée. La dernière partie est consacrée à la validation expérimentale du

choix de l'orientation de l'outil pour des opérations d'usinage en 5 axes positionnés sur une pièce test.

2 Polytope de manipulabilité cinématique

2.1 Définition d'un polytope

Un polytope est un polyèdre borné, constitué de faces planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droites pour former les arêtes. Il peut se définir de deux façons duales appelées H-description (H pour demi-espace (Halfspace)) et V-description (V pour sommets (Vertex)). Dans une H-description, le polytope est défini comme l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés dont les frontières sont des hyperplans de R^n (Ziegler 1995). Ainsi, un polytope de dimension m peut être défini comme un système d'inégalités formé par l'ensemble des demi-espaces fermés (Equ. 1).

$$P = P(A, b) = \{x \in R^n : A \cdot x \leq b\} \text{ avec } A \in R^{m \times n} \text{ et } b \in R^m \quad (1)$$

Dans une V-description, un polytope de dimension m est défini comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points S_i dans R^n avec $m \leq n$ (Fukuda 2004). La Figure 1 illustre, pour le même polytope 2D du plan (X, Y) , soit la H-description soit la V-description.

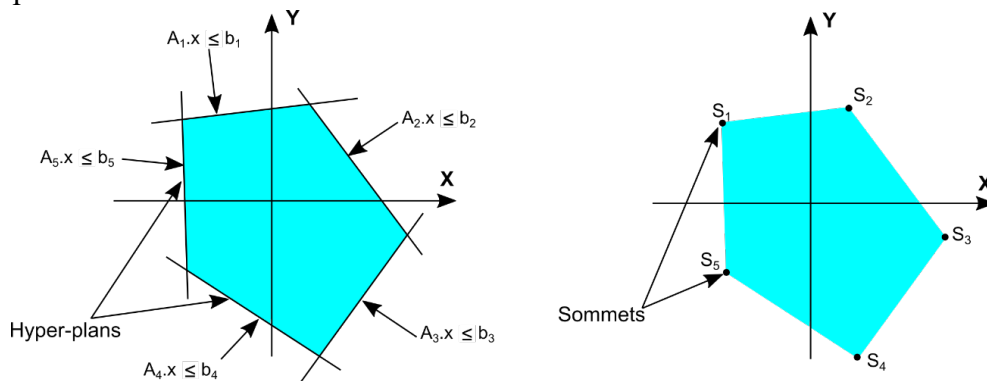


Figure 1 : Illustration des H-description et V-description pour un polytope 2D.

2.2 Polytope de manipulabilité cinématique

Les centres d'usinage sont réglés lors de l'intégration de la commande numérique ou lors de leur utilisation spécifique en fonction de leur architecture mécanique, de leur comportement cinématique et dynamique afin d'éviter des phénomènes vibratoires et pouvoir obtenir la qualité désirée pour les pièces usinées. Classiquement, la vitesse (\dot{q}_i), l'accélération (\ddot{q}_i) et le jerk (\dddot{q}_i) de chacun des axes i sont bornés (Equ. 2) :

$$\{\dot{q}_i^{min} \leq \dot{q}_i \leq \dot{q}_i^{max} ; \ddot{q}_i^{min} \leq \ddot{q}_i \leq \ddot{q}_i^{max} ; \dddot{q}_i^{min} \leq \dddot{q}_i \leq \dddot{q}_i^{max}\} \quad (2)$$

Ces inégalités correspondent à la définition d'un polytope par des hyper-plans dans l'espace articulaire. Ainsi, ces limites en vitesse, accélération et jerk, se représentent géométriquement par un polytope de vitesse, un polytope d'accélération et un polytope de jerk.

Afin d'illustrer les développements menés dans la suite de l'article, les représentations géométriques des polytopes sont celles correspondant au centre d'usinage 5 axes Mikron UCP710 de structure $[w C' A' b X_m Y_m Z_m (CI) t]$ selon la norme ISO1079. Les limites cinématiques de chaque axe sont données dans le tableau 1. Il faut toutefois souligner que la démarche est identique quelle que soit la structure poly-articulée étudiée. Elle s'applique donc à tout type de machine ou robot une fois les modèles géométrique et cinématique connus.

Table 1 : Limites cinématiques des axes du centre Mikron UCP710.

	X_m	Y_m	Z_m	A	C
V_{\max} (m/min – tr/min)	30	30	30	15	20
A_{\max} (m/s ² – tr/s ²)	2.5	3	2.1	0.83	0.83
J_{\max} (m/s ³ – tr/s ³)	5	5	50	5	50

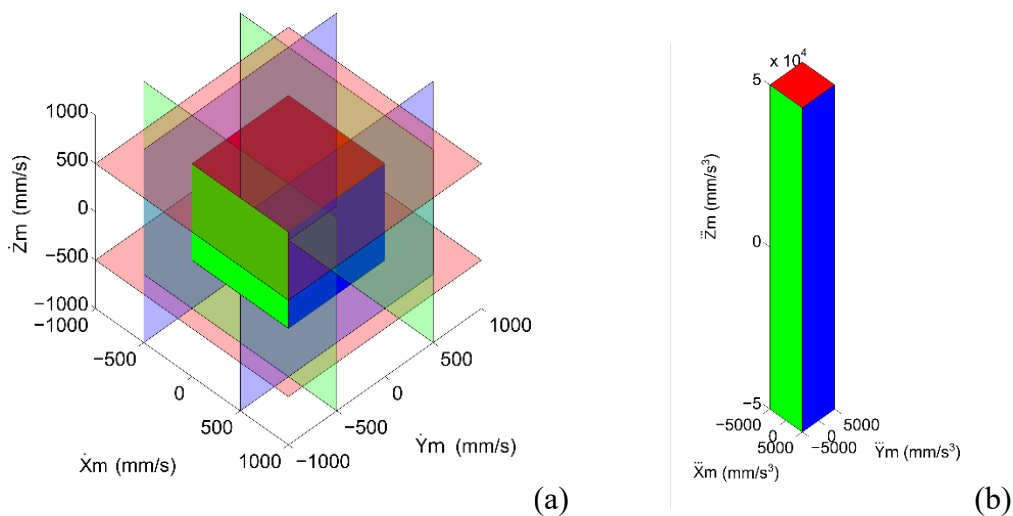


Figure 2 : Hyperplans et polytope de vitesse puis de jerk pour les axes X_m , Y_m , Z_m

Pour obtenir une représentation graphique de ces polytopes de dimension 5 (machine 5 axes), il est nécessaire de les projeter dans un espace de dimension 3. La Figure 2(a) présente les hyperplans des vitesses maximales représentés selon les trois axes de translations X_m , Y_m , et Z_m . Les intersections de chacun de ces hyperplans donnent alors les arêtes et sommets du polytope de vitesse. La Figure 2(b) représente le polytope de jerk des trois mêmes axes. Sa forme souligne le déséquilibre des caractéristiques cinématiques entre les axes.

La trajectoire de l'outil est usuellement définie dans l'espace des tâches, i.e. dans un repère associé à la pièce. Il est donc nécessaire d'étudier l'effet des limites cinématiques articulaires sur le mouvement outil/pièce. Cette analyse est possible en transférant le polytope cinématique de l'espace articulaire vers l'espace des tâches.

2.3 Transfert des polytopes de l'espace articulaire à l'espace des tâches

Pour le centre d'usinage étudié, l'espace articulaire \mathbf{q} est défini par les 5 composantes (X_m, Y_m, Z_m, A, C) . Dans l'espace des tâches, la trajectoire de l'outil \mathbf{X} est décrite par 6 composantes : 3 pour la position du point piloté de l'outil (X_p, Y_p, Z_p) et 3 pour les projections de la direction de l'axe outil dans la base pièce (i, j, k) .

Le modèle cinématique direct permet de décrire l'évolution des vitesses $\dot{\mathbf{X}}$ dans l'espace des tâches (dimension 6) en fonction de l'évolution des vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$ (dimension 5) (Equ. 3).

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \text{ avec } \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3)$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ représente la matrice Jacobienne de dimension (6×5) du système poly-articulé ; elle est fonction de la configuration articulaire \mathbf{q} . Le passage de l'espace articulaire à l'espace des tâches est donc une application linéaire pour une configuration articulaire donnée. Ainsi, un polytope de vitesse de dimension 5 de l'espace articulaire donne un polytope de dimension 6 dans l'espace des tâches.

La Figure 3 montre l'influence des vitesses des axes de rotations A et C sur la géométrie du polytope de vitesse obtenu dans l'espace des tâches, ceci pour une position articulaire simple (décalage du centre table de 100 mm selon Y_m). Dans le cas de l'usinage 3 axes ($\dot{A} = \dot{C} = 0$), le polytope dans l'espace des tâches est directement le polytope de l'espace articulaire (un cube dans le cas étudié car les vitesses limites des axes sont identiques). Dans la configuration étudiée, autoriser un mouvement sur l'axe A déforme le polytope dans l'espace des tâches sur les composantes \dot{Y}_p et \dot{Z}_p . Enfin, autoriser un mouvement de l'axe C revient à augmenter la vitesse outil/pièce selon la composante \dot{X}_p .

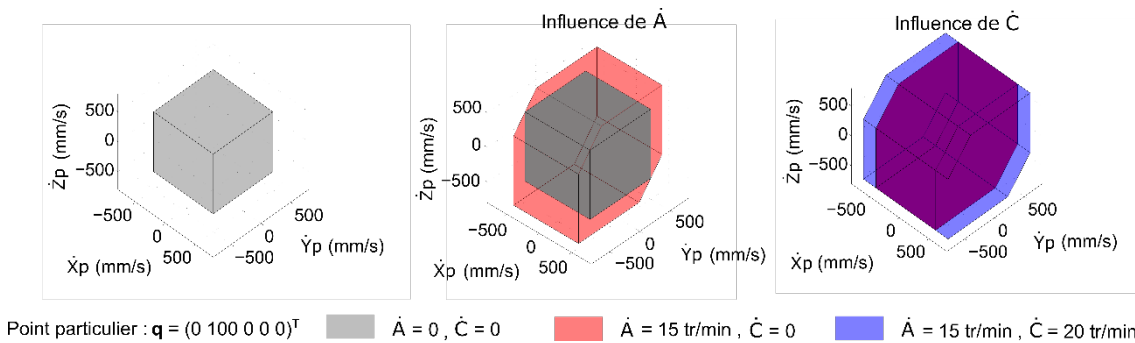


Figure 3 : Polytope de vitesses dans l'espace des tâches

Le modèle cinématique du deuxième ordre (Equ. 4) reliant les accélérations articulaires $\ddot{\mathbf{q}}$ aux accélérations dans l'espace des tâches $\ddot{\mathbf{X}}$ s'obtient en dérivant l'Equ. 3.

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4)$$

Bien que la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ soit une application linéaire, la matrice $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ n'en est pas une. Multiplié par $\dot{\mathbf{q}}$, ce terme peut être interprété géométriquement comme un décalage du centre du polytope d'accélération $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}$ (Equ. 5). La valeur de ce décalage peut être influent suivant les valeurs de vitesse articulaire utilisées (Rosenstein 2002). Dans le cas de cet article, ce terme ne sera pas considéré pour la suite de l'analyse.

$$\ddot{\mathbf{X}} - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{décalage}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \text{ avec } \ddot{\mathbf{X}}_{\text{décalage}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

Le modèle cinématique du troisième ordre (Equ. 6) est obtenu en dérivant le modèle cinématique du deuxième ordre défini à l'Equ. 4. Les valeurs de vitesse articulaire et d'accélération articulaire engendrent un nouveau décalage du centre du polytope de jerk (Equ.7). Ce décalage sera, comme précédemment, supposé négligeable pour poursuivre l'analyse.

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{décalage}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \text{ avec } \ddot{\mathbf{X}}_{\text{décalage}} = 2 \cdot \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (7)$$

La Figure 4 donne une représentation des polytopes d'accélération et de jerk obtenus dans l'espace des tâches pour les mêmes paramètres articulaires \mathbf{q} que ceux définis pour l'exemple en vitesse ($\mathbf{q} = (0 \ 100 \ 0 \ 0 \ 0)^T$).

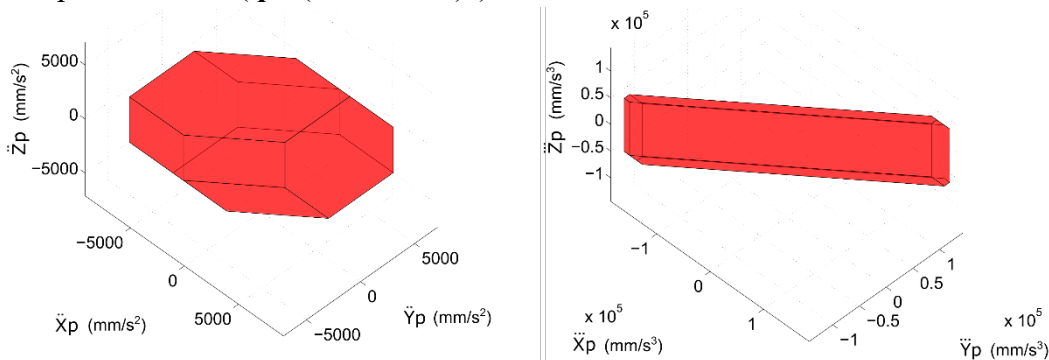


Figure 4 : Polytopes d'accélération et de jerk dans l'espace des tâches.

2.4 Principe d'utilisation des polytopes pour construire une trajectoire d'usinage

A partir de ces polytopes de vitesse, d'accélération et de jerk, l'objectif est de déterminer l'orientation et ou la position de l'outil (i.e. une trajectoire) qui permettent de minimiser le temps d'usinage tout en respectant les contraintes cinématiques de la machine. Réduire

le temps d'usinage passe par l'augmentation de la cinématique du mouvement relatif outil/pièce, soit la vitesse, l'accélération et le jerk dits « tangentiels » (Equ. 8).

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{tan} = \sqrt{\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2} ; A_{tan} = \sqrt{\ddot{X}_p^2 + \ddot{Y}_p^2 + \ddot{Z}_p^2} ; J_{tan} = \sqrt{\dddot{X}_p^2 + \dddot{Y}_p^2 + \dddot{Z}_p^2} \end{array} \right. (8)$$

L'intérêt des polytopes exprimés dans l'espace des tâches est de pouvoir évaluer directement ces caractéristiques. Pour un positionnement outil/pièce donné, c'est-à-dire les positions articulaires correspondantes \mathbf{q} , les polytopes sont calculés par la jacobienne $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. En faisant l'hypothèse que la vitesse, l'accélération et le jerk tangentiels résultent du maximum des capacités des axes machine, alors ces caractéristiques peuvent prendre toutes les valeurs correspondant à la surface des polytopes. Cette modélisation ne prend donc pas en compte des relimitations possibles du mouvement outil/pièce par d'autres paramètres spécifiques. En considérant un mouvement localement rectiligne, les Equ. 8 permettent d'obtenir les Equ. 9 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}}(1:3) = V_{tan} \cdot \vec{u} ; \ddot{\mathbf{X}}(1:3) = A_{tan} \cdot \vec{u} ; \dddot{\mathbf{X}}(1:3) = J_{tan} \cdot \vec{u} \end{array} \right. (9)$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire donnant l'orientation du trajet élémentaire dans l'espace des tâches (i.e. le vecteur tangentiel) ; les composantes 1 à 3 des vitesses, accélération et jerk dans l'espace des tâches correspondent au déplacement du point piloté. Ainsi, pour le polytope de vitesse (respectivement d'accélération et de jerk), l'intersection d'une droite passant par l'origine et de vecteur directeur \vec{u} donne directement le vecteur $\dot{\mathbf{X}}(1:3)$ (respectivement $\ddot{\mathbf{X}}(1:3)$ et $\dddot{\mathbf{X}}(1:3)$). Construire une trajectoire revient donc à déterminer l'ensemble des positionnements (configurations articulaires \mathbf{q}) ; choisir localement la direction d'avance de la trajectoire revient à déterminer l'orientation du vecteur \vec{u} .

Le principe de cette démarche est appliqué par la suite sur un cas de 5 axes positionnés, en choisissant l'orientation de l'outil optimale sur chaque passe. Il s'agit d'un cas relativement simple pour montrer si les critères cinématiques sont vérifiés.

3 Application au choix de l'orientation outil/pièce en 5 axes positionnés

Définir des trajectoires en 5 axes positionnés permet d'éliminer une partie du polytope dans l'espace articulaire. En effet, les polytopes résultants sont maintenant de dimension 3 puisque $\dot{A} = \dot{C} = 0$, $\ddot{A} = \ddot{C} = 0$ et $\dddot{A} = \dddot{C} = 0$. Les polytopes sont donc des parallélépipèdes dont la longueur des côtés correspond aux limites cinématiques des 3 axes de translation. Le polytope dans l'espace des tâches se réduit ainsi à un parallélépipède pouvant changer d'orientation et de position en fonction de \mathbf{q} .

3.1 Pièce test

La surface à usiner choisie est un parabolôïde hyperbolique dont les règles sont à 45° par-rapport aux axes X_p et Y_p qui permettent un usinage en 5 axes positionnés (Figure 5). Le mode de balayage utilisé est du plan parallèle selon les règles du parabolôïde. La trajectoire du point piloté se réduit à un segment linéaire par passe et l'orientation de l'outil peut évoluer pour chaque passe. L'outil utilisé est hémisphérique. Le choix de son orientation est ainsi libre dans la limite des bonnes conditions de coupe (non étudié dans cet article).

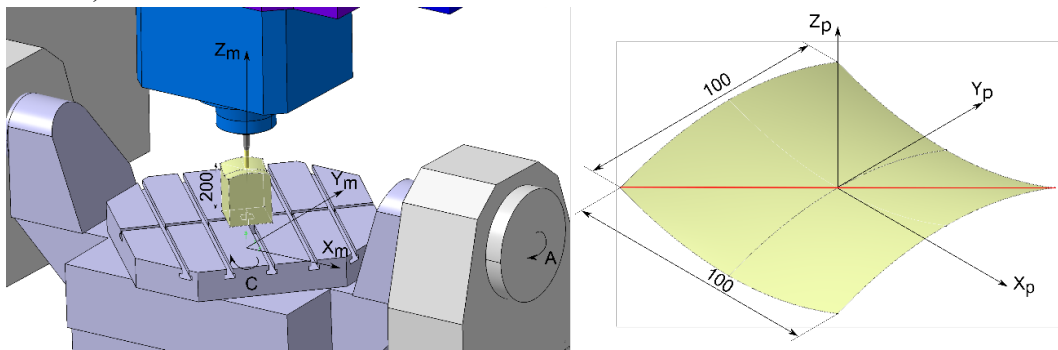


Figure 5 : Pièce test : parabolôïde hyperbolique sur le centre Mikron UCP710

3.2 Choix de A et C donnant les valeurs maximales de vitesse, d'accélération et de jerk

En appliquant la méthode proposée dans la partie 2, il est possible de déterminer l'orientation A et C pour chaque polytope de vitesse, d'accélération et de jerk. Sachant que la direction de la diagonale est imposée, $\dot{X}_p = -\dot{Y}_p$, il faut donc orienter le polytope de l'espace des tâches pour toucher l'un des sommets du polytope connaissant \vec{u} . La Figure 6 présente les résultats pour la passe centrale du parabolôïde (la plus grande). Dans ce cas particulier, $\dot{Z}_p = 0$. Les valeurs des orientations A et C sont différentes pour chacun des cas, mais permettent à chaque fois d'orienter les polytopes pour que la direction imposée de la tâche intersecte un des sommets des polytopes.

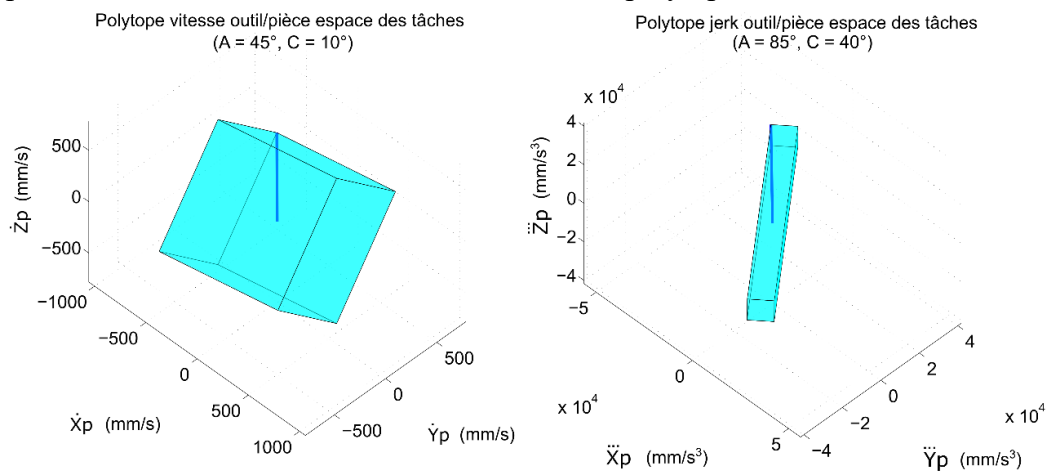


Figure 6 : Polytopes de l'espace des tâches maximisant la norme de la vitesse, et du jerk dans la direction imposée.

3.3 Application expérimentale

Lors de l'exécution de la trajectoire, les valeurs des vitesses des axes sont relevées pour les différentes orientations A et C obtenues précédemment (Figure 7(a)).

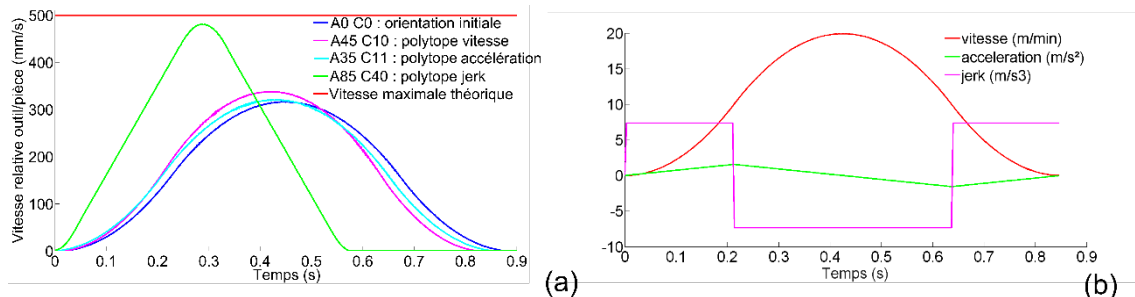


Figure 7 : Vitesse relative outil/pièce pour les différentes orientations solutions.

La Figure montre que lorsque le trajet outil s'effectue suivant la diagonale du polytope en jerk, la vitesse relative outil/pièce atteinte est la plus élevée. Les orientations obtenues par les polytopes de vitesse et d'accélération ne permettent quasiment pas d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. En effet, l'analyse théorique du niveau cinématique de la Figure 7(b) montre que lorsque l'orientation est optimisée pour le polytope d'accélération, le jerk tangentiel disponible est considérablement réduit (environ 7.4 m/s^3). Ainsi sur un trajet de courte longueur, l'accélération n'a pas le temps d'atteindre la valeur maximale disponible. Bien que la capacité maximale d'accélération soit supérieure, le jerk est le paramètre limitant tout au long du trajet. Les mêmes effets se produisent avec l'orientation donnée pour le polytope de vitesse et pour l'orientation initiale. Pour des trajectoires comportant des segments de taille réduite, le jerk est très souvent le paramètre limitant la vitesse d'avance, c'est pourquoi orienter la pièce pour avoir le plus grand jerk possible permet d'améliorer la vitesse relative outil/pièce et ainsi diminuer le temps d'usinage.

En conclusion, orienter chaque passe dans la diagonale du polytope en jerk permet de diminuer le temps d'usinage. L'objectif est par la suite de venir optimiser l'orientation du polytope qui sature pendant l'exécution de la trajectoire.

4 Conclusions et perspectives

L'objectif de cet article est de montrer le potentiel des polytopes de manipulabilité utilisés en robotique pour générer des trajectoires d'usinage. Il présente une méthode pour définir les polytopes de manipulabilité cinématique en vitesse, en accélération et en jerk d'une machine-outil et leurs exploitations pour définir des trajectoires en 5 axes. L'utilisation de ces polytopes a été exploitée sur un cas test afin de montrer leurs intérêts. Ces premiers essais ont été réalisés dans le cadre d'un usinage 5 axes positionnés mais l'objectif à terme est de définir suffisamment de contraintes pour déterminer la stratégie d'usinage optimale en 5 axes continus, que ce soit la direction de guidage de l'outil ou son orientation. Pour

cela, toute contrainte pourra être associée au polytope et exploitée afin de définir une trajectoire optimale.

Références

- Barvinok, A. (2002). A course in convexity. *Graduate Studies in Mathematics*, 54.
- Beudaert, X., Lavernhe, S., & Tournier, C. (2012). Feedrate interpolation with axis jerk constraints on 5-axis NURBS and G1 tool path. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 57, 73-82.
- Castagnetti, C., Duc, E., & Ray, P. (2008). The Domain of Admissible Orientation concept: A new method for five axis tool path optimisation. *Computer Aided Design*, 40, 938-950.
- Chabane, K. (2006). Exploitation de la redondance pour la commande coordonnée d'un manipulateur mobile d'assistance aux personnes handicapées. *Thèse de doctorat, Université d'Evry*.
- Fukuda, K. (2004). From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes. *Journal of Symbolic Computation*, 38, 1261-1272.
- Merlet, J.-P. (2005). Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots. *Journal of Mechanical Design*, 128, 199-206.
- Nakamura, Y. (1991). *Advanced robotics, redundancy and optimization*, ISBN 978-0-201-15198-5.
- Pateloup, S. (2011). Modélisations et aptitudes à l'emploi des machines_ outils à structure parallèle : vers une optimisation dirigée du processus. *Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II*.
- Pessoles, X., Landon, Y., Segonds, S., & Rubio, W. (2012). Optimisation of workpiece setup for continuous five-axis milling: Application to a five-axis BC type machining centre. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 65, 67-79.
- Rosenstein, M. T., & Grupen, R. A. (2002). Velocity-dependent dynamic manipulability. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Yoshikawa, T. (1985). Manipulability of Robotic Mechanisms. *The International Journal of Robotics Research*, 4, 3-9.
- Ziegler, G. (1995). *Lectures on polytopes*, ISBN 978-1-4613-8431-1. Springer Verlag.