



**HAL**  
open science

**Les méthodes de comparaison par paires Intérêt  
fondamental, Méthodes pratiques, Avancées  
scientifiques, Logiciel - Deuxième partie: Les méthodes  
classiques et des avancées récentes**

Bernard Yannou, Frej Limayem

► **To cite this version:**

Bernard Yannou, Frej Limayem. Les méthodes de comparaison par paires Intérêt fondamental, Méthodes pratiques, Avancées scientifiques, Logiciel - Deuxième partie: Les méthodes classiques et des avancées récentes. La Valeur de produits, procédés et services, 2002, 93, pp.15-18. hal-04476058

**HAL Id: hal-04476058**

**<https://hal.science/hal-04476058v1>**

Submitted on 24 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Les méthodes de comparaison par paires Intérêt fondamental, Méthodes pratiques, Avancées scientifiques, Logiciel

### Deuxième partie : Les méthodes classiques et des avancées récentes

**Bernard Yannou<sup>1</sup>, Frej Limayem**  
Ecole Centrale Paris,  
Laboratoire Productique-Logistique  
92295 Châtenay-Malabry  
[yannou@pl.ecp.fr](mailto:yannou@pl.ecp.fr)

**NDLR -Nous poursuivons dans ce numéro la parution de l'étude originale (dans le sens premier !) de MM. Yannou et Limayem commencée dans notre revue d'avril.**

### 3. Les méthodes classiques

Des méthodes classiques de Comparaison par Paires (CP) sont brièvement présentées avec leurs hypothèses, leur cadre d'utilisation et leur logique.

Rappelons que ces méthodes de CP ont pour but d'aboutir à la pondération de l'importance d'un ensemble d'éléments<sup>2</sup>  $i$ ,  $i$  variant de 1 à  $n$  ( $n$  est le nombre d'éléments à comparer), à partir de comparaisons de paires d'éléments. Le vecteur de pondération recherché est donc  $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$  tel que  $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + \dots + p_i + \dots + p_n = 1$ . Dans les exemples, les résultats seront présentés en pourcentages.

Les méthodes présentées par la suite sont des méthodes *exactes*, au sens défini dans l'article précédent. En conséquence, elles sont donc bien plus fiables que certaines méthodes de *Tri Croisé* moins élaborées qui donnent des résultats approximatifs. Les 4 premières méthodes présentées donnant des formules simples, le lecteur aura le loisir de les programmer sur un tableur.

Par la suite, la comparaison  $c_{ij}$  est une estimation, par un groupe de travail, du rapport de l'importance de l'élément  $i$  sur l'importance de l'élément  $j$ . On note cela par  $c_{ij} \approx p_i/p_j$ , les comparaisons étant regroupées dans une matrice de comparaisons  $M = (c_{ij})$ .

#### 3.1. Méthode de la Moyenne Arithmétique sur les Lignes (MAL)

La méthode de la Moyenne Arithmétique sur les Lignes (voir [7]) consiste à sommer les comparaisons sur les lignes. Une fois ces éléments normalisés<sup>3</sup>, cela donne une estimation des poids.

$$p_i \approx \frac{r_i}{\sum_{s=1}^n r_s} = \frac{r_i}{r_1 + \dots + r_i + \dots + r_n}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \text{avec } r_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}$$

Le lecteur peut faire la démonstration de l'*exactitude* de la méthode, c'est-à-dire qu'en cas de matrice *cohérente* pour laquelle les  $c_{ij}$  sont réellement construits à partir de rapports

<sup>1</sup> Maître de Conférences, animateur de la liste de diffusion Vafore (Valeur, Fonction, Recherche), inscription par mail vide à [vafore-abonnement@yahoogroupes.fr](mailto:vafore-abonnement@yahoogroupes.fr)

<sup>2</sup> Ces éléments peuvent être des fonctions de service (valorisation en AF) ou des budgets relatifs à des tâches ou objectifs (Conception à Coût Objectif).

<sup>3</sup> On normalise un terme en divisant ce terme par la somme des termes.

$p_i/p_j$ , les poids prédits par la méthode MAL sont exactement les  $p_i$ . Ceci s'applique à toute méthode qui suit.

### 3.2. Méthode de la Moyenne Arithmétique sur les Colonnes (MAC)

La méthode de la Moyenne Arithmétique sur les Colonnes (voir [7]) consiste à sommer les comparaisons sur les colonnes et à en prendre l'inverse. Une fois ces termes normalisés, cela donne une estimation des poids.

$$p_j \approx \frac{r_j}{\sum_{s=1}^n r_s}, \quad j = 1, \dots, n; \quad \text{avec} \quad r_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^n c_{ij}}$$

### 3.3. Méthode de la Moyenne Géométrique sur les Lignes (MGL)

La méthode de la Moyenne Géométrique sur les Lignes (voir [9]) consiste à faire le produit des comparaisons par ligne et à en prendre leur racine n-ième. Une fois ces termes normalisés, cela donne une estimation des poids.

$$p_i \approx \frac{r_i}{\sum_{s=1}^n r_s}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \text{avec} \quad r_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n c_{ij}}$$

### 3.4. Méthode de la Moyenne Géométrique sur les Colonnes (MGC)

La méthode de la Moyenne Géométrique sur les Colonnes (voir [9]) consiste à faire le produit des comparaisons par colonne, à en prendre leur racine n-ième, et à prendre leur inverse. Une fois ces termes normalisés, cela donne une estimation des poids.

$$p_j \approx \frac{r_j}{\sum_{s=1}^n r_s}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \text{avec} \quad r_j = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n c_{ij}}}$$

### 3.5. Discussion

Les méthodes de la Moyenne Géométrique sur les Lignes ou sur les Colonnes MGL et MGC sont plus logiques que les méthodes de Moyennes Arithmétiques MAL et MAC dans le sens où il a été prouvé que l'homme était sensible à des stimuli dont l'amplitude est en progression géométrique plutôt que arithmétique<sup>4</sup>.

Néanmoins, ces 4 méthodes n'ont pas de fondement théorique très important.

D'autres méthodes que nous ne détaillerons pas ici ont des fondements plus solides. Citons la méthode des Vecteurs Propres de Saaty [10; 11] et la méthode de la Moyenne Géométrique sur les Lignes et les Colonnes (MGLC) apparue en 1999 [5] qui est une généralisation des méthodes MGL et MGC.

Par la suite, nous nous attarderons sur une dernière méthode qui apporte de nombreux bénéfices.

<sup>4</sup> Cela vient du fait que l'intervalle de discrimination d'un phénomène (ex : est-ce que la température a changé ?) est proportionnel à l'amplitude de ce phénomène.

### 3.6. Méthode de la Régression Logarithmique aux Moindres Carrés (RLMC)

De Graan [4] et Lootsma [8] ont cherché à trouver les poids par une méthode d'optimisation : la Régression Logarithmique aux Moindres Carrés. Cette méthode diffère des précédentes par le fait qu'il est autorisé d'omettre de définir une comparaison ou, au contraire, qu'il est autorisé de donner plusieurs opinions par comparaison. Cela permet donc de ne pas être obligé de s'exprimer sur la comparaison de deux éléments difficilement comparables ou de ne pas être obligé d'aboutir à un consensus du groupe sur la comparaison mais de laisser chaque membre du groupe proposer son estimation de la comparaison. On notera donc maintenant une opinion  $c_{ijk}$  contribuant à évaluer la comparaison  $c_{ij}$ , telle que  $k$  est l'indice du membre du groupe variant de 1 à  $d_{ij}$ , le nombre de membres du groupe s'étant exprimés.

On cherche donc à trouver les poids qui minimisent une distance (distance logarithmique au sens des carrés) entre les comparaisons brutes  $c_{ijk}$  et les rapports de ces poids résultats  $p_i/p_j$ . Cela revient à minimiser le terme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{d_{ij}} (\log(c_{ijk}) - \log(p_i/p_j))^2$$

Après quelques opérations, on montre que cela mène à la résolution d'un système linéaire à  $(n-1)$  équations et  $(n-1)$  inconnues en  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  :

$$\theta_i \cdot \sum_{j \neq i}^n d_{ij} - \sum_{j \neq i}^{n-1} d_{ij} \cdot \theta_j = \sum_{j \neq i}^n \sum_{k=1}^{d_{ij}} \log(c_{ijk}), \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$\theta_n = 1$$

Le résultat final des poids est donné par :  $p_i = \frac{\exp(\theta_i)}{\sum_{j=1}^n \theta_j}, i = 1, \dots, n$

Une seule limitation existe à cette méthode : celle-ci nécessite la propriété de *réciprocité* de la matrice des comparaisons, c'est-à-dire que  $c_{ij} = 1/c_{ji}, \forall i, j$  ou, autrement dit, l'estimation doit être rationnelle et indépendante de l'ordre de comparaison des éléments. Ceci n'est pas toujours le cas et ça l'est d'autant moins qu'on autorise des membres du groupe à donner les opinions qu'ils ont envie de donner, on ne peut donc en toute logique leur imposer le sens des comparaisons. Nous verrons par la suite que ce problème a été réglé.

### 3.7. Comparaison sur un exemple

Nous donnons en figure 1 l'exemple d'une matrice de comparaisons issue d'une étude d'étudiants consistant à valoriser les fonctions d'un produit nouveau. Notons que cette matrice s'appuie sur deux hypothèses fortes : (1) la matrice ne présente pas d'omission ni de multiples opinions par comparaison (nécessaire à MAL, MAC, MGL, MGC), (2) la matrice est réciproque (nécessaire à RLMC).

Les résultats de MGL, MGC et RLMC sont identiques dans le cas de matrices réciproques (uniquement). Leur résultat est intermédiaire entre MAL et MAC. Le résultat RLMC est le plus fondé scientifiquement car il assure la minimisation d'une distance.

	FP1	FP2	FC5	FP3	FC1	FC2	FC3	FC4
FP1	1	2	1	1	3	3	4	3
FP2	0,5	1	0,5	0,8	1	1	2	1
FC5	1	2	1	1	2	2	3	2
FP3	1	1,25	1	1	2	2	3	2

FC1	0,33	1	0,5	0,5	1	0,5	2	1
FC2	0,33	1	0,5	0,5	2	1	3	2
FC3	0,25	0,5	0,33	0,33	0,5	0,33	1	0,5
FC4	0,33	1	0,5	0,5	1	0,5	2	1
MAL (en %)	22,28	9,66	17,33	16,40	8,46	12,79	4,63	8,46
MAC	21,41	10,41	19,04	18,02	8,12	9,82	5,07	8,12
MGL, MGC et RLMC	22,06	10,01	18,23	17,19	8,23	11,24	4,82	8,23

Figure 1 : Exemple de matrice réciproque à une opinion par comparaison

#### 4. La prise en compte de l'incertitude du jugement

En entreprise de nombreux membres du groupe auraient tendance à se sentir confiants dans leurs décisions lorsqu'une méthode leur fournit des résultats chiffrés précis. Attention, autant il faut se servir de méthodes exactes de CP, autant il faut faire attention à l'interprétation des résultats. En effet, sur l'exemple de la figure 1, on serait tenté de dire que la fonction FP1 est indubitablement plus importante que la fonction FC5. Cette conclusion se forge sur le fait qu'il n'a pas été tenu compte de l'incertitude du jugement sur l'estimation des comparaisons. En réalité, les estimations de comparaison étant imprécises, il serait juste que les poids soient estimés en reflétant cette imprécision. Y a-t-il une chance que FC5 soit plus importante que FP1 ? Cette question peut avoir une grande importance lorsqu'il s'agit de choisir un candidat ou une décision parmi d'autres.

Il y a deux théories pour prendre en compte l'incertitude du jugement des membres du groupes quand ils définissent les comparaisons : la *logique floue* et *l'approche probabiliste*. Nous ne parlerons dans ce chapitre que des principales extensions floues des méthodes de PC.

Plutôt que d'avoir une valeur précise de la comparaison  $c_{ijk}$ , il suffit simplement de considérer une *courbe floue* dont l'ordonnée donne la vraisemblance<sup>5</sup>. Dans la pratique, les auteurs de la littérature<sup>6</sup> se sont limités à des triangles flous (voir figure 2).

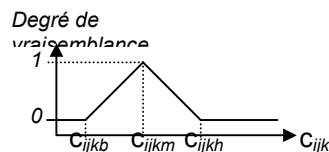


Figure 2 : Un triangle flou représenté par le triplet  $(c_{ijkb}, c_{ijkm}, c_{ijkh})$ .

Il fallait donc étendre les méthodes de CP de base à ces comparaisons floues pour en déduire des poids entachés d'incertitude.

Van Laarhoven et Pedrycz [12] ont étendu la méthode RLMC de De Graan [4] et Lootsma [8] pour obtenir les formules analytiques des 3 valeurs définissant les triangles des poids  $p_i$ . Mais ces formules nous semblent assez empiriques car, dans des rares cas, la valeur haute du triangle est inférieure à la valeur basse. Ce biais est quelque peu, mais pas entièrement, corrigé par Boender [2] qui donne de nouvelles formules.

Une deuxième tentative majeure est celle de Buckley [3] qui utilise lui, proprement, les opérateurs d'extension de la logique floue aux formules algébriques. Du coup il ne peut pas étendre les méthodes RLMC au flou car les poids ne s'expriment pas par des formules algébriques. Mais sa méthode s'applique aux méthodes MAL, MAC, MGL, MGC.

<sup>5</sup> Invraisemblance = ordonnée nulle, Vraisemblance maximale = ordonnée de valeur 1.

<sup>6</sup> Avant nos apports présentés par la suite.

Néanmoins, l'étendue des triangles de poids est très large, on perd beaucoup de précision dans les calculs car la technique d'inférence floue est rudimentaire.

Une idée des résultats de la littérature est donnée en figure 3 avec sur l'extension floue de la méthode MGL par Buckley [3] et l'extension floue de la méthode RLMC par Boender [2].

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)	(1/6,1/5,1/4)
$e_2$	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)	(2/5,1/2,2/3)
$e_3$	(4,5,6)	(3/2,2,5/2)	(1,1,1)

Méthode	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Boender-RLMC	(10,5,10,9,11,8)	(28,0,30,9,34,9)	(49,8,58,2,66,5)
Buckley-MGL	(8,5,10,9,14,6)	(23,5,30,9,41,7)	(42,7,58,2,77,6)

Figure 3 : Exemple de matrice des comparaisons réciproque, dont les comparaisons sont définies par des triangles flous. Résultats (en %) avec les méthodes de Boender et Buckley.

## 5. Des avancées récentes

La thèse de doctorat de Limayem [6] a permis de revisiter le domaine des méthodes de CP en apportant des nouveautés majeures avec un souci d'utilisation pratique pour des projets d'entreprise. Quatre apports majeurs ont été faits dans ce sens :

- La méthode RLMC a été généralisée à des matrices quelconques (non réciproques), nous l'appellerons la méthode RLMC-étendue.
- Une nouvelle extension floue des méthodes CP de base<sup>7</sup> a été proposée. Celle-ci prend en compte n'importe quelle forme de courbe floue pour les comparaisons (pas seulement des triangles) sans perdre de précision sur les poids résultats. Pour un problème des plus généraux en figure 4, l'extension floue de RLMC-étendue donne les poids résultats de la figure 5. Les comparaisons en forme d'histogrammes peuvent très bien provenir d'une synthèse des avis de chacun dans une approche de type méthode DELPHI (voir [1]). L'intérêt ici d'avoir pris soin de modéliser l'incertitude prend tout son sens. En effet, pour les poids  $p_2$  et  $p_3$ , les courbes floues se chevauchent et nous sommes dans l'impossibilité d'établir une hiérarchie claire ; on dit dans le jargon d'aide à la décision que les éléments 2 et 3 sont *indifférents*.
- Une extension probabiliste des méthodes CP de base a été faite. Elle a débouché sur un logiciel, le *Tri Croisé de Monte Carlo* (TCMC<sup>8</sup>), qui sera présenté dans un prochain article. Disons simplement qu'il s'agit d'effectuer des tirages aléatoires de valeurs dans la matrice de comparaisons (nombre de tirages fixé par la précision désirée, en pratique une centaine à quelques milliers). Pour chaque matrice de comparaison de base, on calcule le jeu de poids par la méthode RLMC-étendue. On reconstitue ensuite les *courbes de densité de probabilité* des poids à partir des listes de poids solutions (voir figure 6). Le résultat est différent de celui obtenu par la logique floue mais rappelons qu'il y a des différences notoires de sens entre les notions de probabilité et de vraisemblance.
- Des indicateurs de cohérence du jugement des membres du groupe et du groupe entier ont été développés. Cet aspect est examiné dans le chapitre suivant.

<sup>7</sup> On appelle ici une méthode de base, une méthode qui donne un résultat de poids précis.

<sup>8</sup> Contacter la société Mktools (<http://tcmc.mktools.com> ou <http://www.mktools.com/tcmc>) ou B. Yannou ([yannou@pl.ecp.fr](mailto:yannou@pl.ecp.fr)) pour des renseignements ou une version de démonstration.

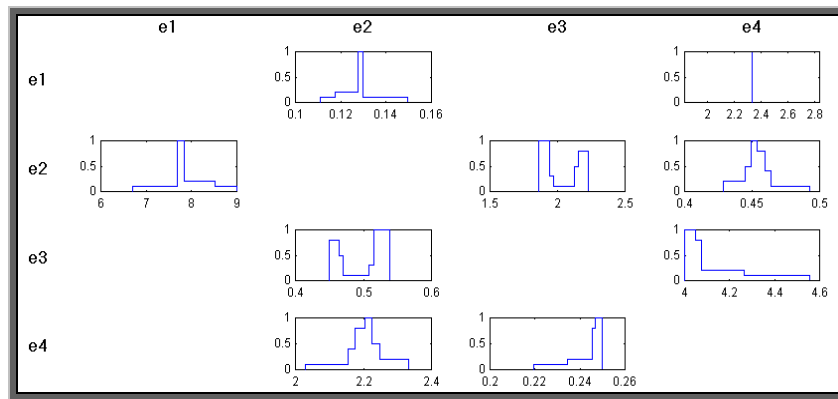


Figure 4 : Matrice de comparaison à 4 éléments, non réciproque, avec des comparaisons manquantes, et des comparaisons floues définies par des courbes complexes (histogrammes). Ce problème est un des plus généraux.

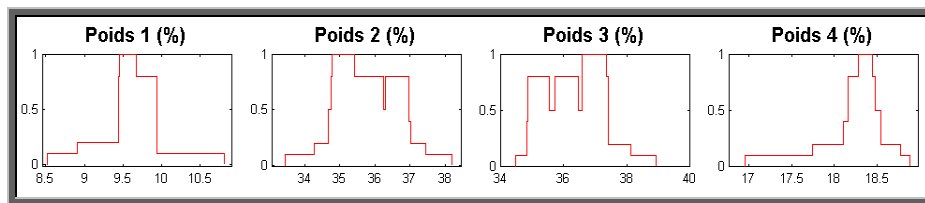


Figure 5 : Résultats de l'extension floue de RLMC-étendu sur le problème défini en figure 4

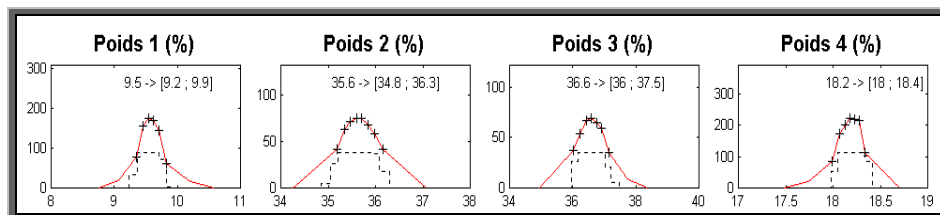


Figure 6 : Résultats d'une simulation de Monte Carlo à partir de la méthode RLMC-étendu sur le problème défini en figure 4

### 5.1. Indicateurs de cohérence et conseils en amélioration de cohérence

Rappelons que, dans la méthode RLMC, lorsque la distance évoquée entre les comparaisons brutes  $c_{ijk}$  et les rapports des poids résultats  $p_i/p_j$  n'est pas nulle, la matrice de comparaisons est alors dite *incohérente*. C'est bien sur le cas général lorsque les comparaisons sont évaluées indépendamment les unes des autres. Nous utilisons cette distance pour définir des indicateurs de cohérence variant entre 0 (incohérence totale) et 1 (cohérence) et relatifs soit à un membre du groupe (en ne prenant en compte que ses opinions), soit au groupe (en prenant en compte toutes les opinions). Ces indicateurs sont paramétrables en fonction du type d'incohérence que le groupe et son animateur tolèrent (voir [6]). Nous avons observé que, pour une cohérence personnelle, une cohérence inférieure à 80% dénotait un réel manque de connaissance du domaine et qu'un spécialiste avait généralement une cohérence supérieure à 95%.

En plus de ces  $(m+1)$  degrés de cohérence<sup>9</sup> ( $m$  étant le nombre de participants), nous fournissons des CAC, *Conseils en Amélioration de Cohérence* pour que chacun puisse, s'il le désire uniquement, améliorer sa cohérence personnelle ou contribuer à améliorer la cohérence du groupe. Ces CAC se superposent à la matrice de comparaison dudit membre du groupe et sont au nombre de deux par comparaison. Il s'agit de conseils en augmentation ou diminution

<sup>9</sup> Pour qu'on puisse déterminer la cohérence d'un membre du groupe, il faut tout de même que celui-ci émette suffisamment d'opinions indépendantes.

d'une comparaison, avec ordre de priorité pour aller soit dans le sens de l'amélioration de cohérence personnelle, soit dans le sens de l'amélioration de la cohérence du groupe.

Ce dernier aspect est fondamental pour faire de nos méthodes de CP des outils riches et instructifs au niveau personnel et au niveau du groupe. En effet, les membres du groupe peuvent se montrer fort cohérents en eux-mêmes au sein d'un groupe globalement incohérent car les avis divergent tous. Chaque membre du groupe peut alors décider à son gré de modifier son opinion pour, soit aller dans le sens d'une plus grande cohérence personnelle, soit aller dans le sens d'une plus grande synergie avec le groupe. Ici, nous ne donnerons aucun conseil sur la manière de faire les choses, il y va des techniques de groupe, de la sensibilité des animateurs, du caractère de chacun, du mot d'ordre, et de l'ambiance du groupe. Chacun développera donc sa stratégie en fonction de ses indicateurs et de ceux du groupe, mais n'en est-il pas toujours ainsi en entreprise ?

Une session de pondération en groupe s'avère être alors très flexible, instructive (le groupe apprend sur lui-même), respectueuse de chaque opinion en se déroulant sous la forme d'une série de sessions de vote et de discussion où chacun est libre de réviser ou pas son jugement. La session de travail s'achève lorsque tous les membres du groupe décident de ne plus changer leurs opinions. Une session élémentaire de travail est représentée en figure 7.

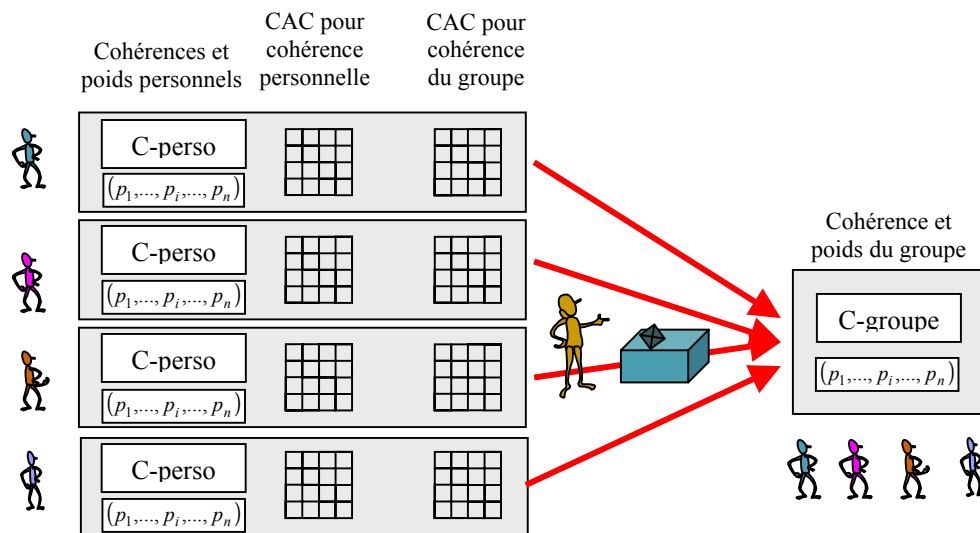


Figure 7 : Session de vote élémentaire

## 5. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article des méthodes connues de Comparaison par Paires, qu'il s'agisse de méthodes de base programmables par le lecteur ou des extensions floues pour prendre en compte l'incertitude du jugement. En seconde partie, nous avons décrit des avancées importantes réalisées durant la thèse de doctorat de Limayem [6] qui généralisent entièrement les méthodes de CP à des matrices non réciproques, avec des comparaisons dont les opinions peuvent être omises ou multiples et dont les courbes modélisant l'incertitude sont quelconques. Une proposition très utile en projet est celle des indicateurs de *cohérence* et les *Conseils en Amélioration de Cohérence* personnelle ou du groupe. Les membres du groupe disposent ainsi d'indicateurs pour mieux comprendre et faire évoluer leur opinion tout au long de sessions de votes émaillées de discussions. Un logiciel a émergé de ces travaux de recherche ; baptisé TCMC, il sera présenté au travers d'un exemple dans un prochain article.



- [1] **Adam B.**, (1989), *Animer une étude Analyse de la Valeur*, ESF éditeur - Entreprise Moderne d'Édition et Librairies Techniques.
- [2] **Boender C.G.E., de Graan J.G., Lootsma F.A.**, (1989), *Multi-criteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 29: p. 133 - 143.
- [3] **Buckley J.J.**, (1985), *Fuzzy hierarchical analysis*. Fuzzy sets and systems, vol. 17: p. 233-247.
- [4] **De Graan J.G.**, (1980), *Extensions to the multiple criteria analysis of T. L. Saaty*, Report National Institute of Water Supply,
- [5] **Koczkodaj W.W., Orłowski M.**, (1999), *Computing a consistent approximation to a generalized pairwise comparisons matrix*. Computers and Mathematics with Applications, vol. 37: p. 79-85.
- [6] **Limayem F.**, (2001), *Modèles de pondération par les méthodes de tri croisé pour l'aide à la décision collaborative en projet*. Ph. D. thesis November 23th 2001, Ecole Centrale Paris.
- [7] **Lootsma F.A.**, (1980), *Saaty's priority theory and the nomination of a senior professor in operations research*. European Journal of Operational Research, vol. 4: p. 380-388.
- [8] **Lootsma F.A.**, (1982), *Performance evaluation of nonlinear optimization methods via multi-criteria decision analysis and via linear model analysis*. M.J.D. Powell ed. Nonlinear Optimization 1981, ed. Press A. Vol. 1, London. 419-453.
- [9] **Lootsma F.A.**, (1996), *A model for the relative importance of the criteria in the Multiplicative AHP and SMART*. European Journal of Operational Research, vol. 94: p. 467-476.
- [10] **Saaty T.L.**, (1977), *A scaling method for priorities in hierarchical structures*. Journal of Mathematical Psychology, vol. 15(3): p. 234-281.
- [11] **Saaty T.L.**, (1980), *The Analytic Hierarchy Process*, New-York, McGraw-Hill.
- [12] **Van Laarhoven P.J.M., Pedrycz W.**, (1983), *A fuzzy extension of Saaty's priority theory*. Fuzzy sets and systems, vol. 11: p. 229-241.