



HAL
open science

TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE. Manual pentru studenți.

Adrian Adascalitei

► **To cite this version:**

Adrian Adascalitei. TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE. Manual pentru studenți.. Editura PERFORMANTICA Institutul Național de Inventică, Iași. , pp.1-389, 2015, 978-606-685-301-9. hal-04468786

HAL Id: hal-04468786

<https://hal.science/hal-04468786>

Submitted on 20 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

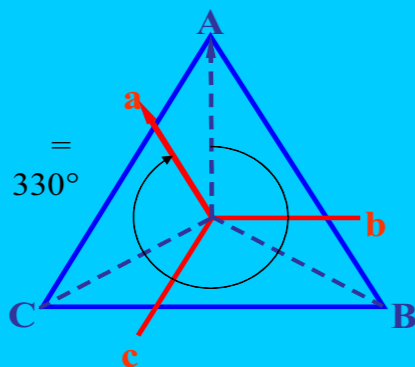
Copyright

Adrian A. ADĂSCĂLIȚEI

TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE

Adrian A. ADĂSCĂLIȚEI

TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE

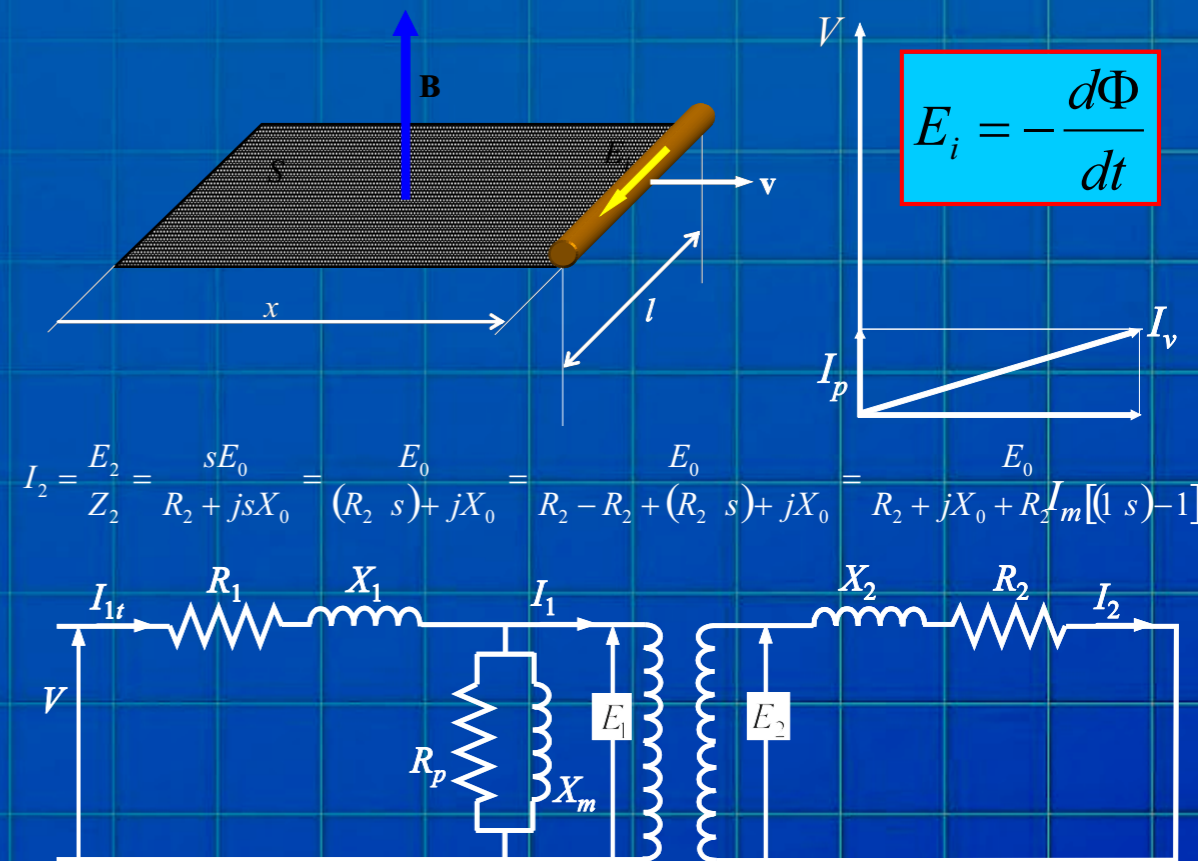


Lucrarea exprimă experiența didactică precum și a rezultatelor activității de cercetare a autorului într-un domeniu de pregătire fundamentală a viitorilor ingineri - teoria circuitelor electrice. Manualul a fost conceput astfel încât să pregătească cititorul pentru calculul și analiza circuitelor electrice și a structurilor neelectrice echivalente din punct de vedere matematic (circuite magnetice, hidraulice, termice, etc.), în vederea optimizării soluției de proiectare a acestora. Lucrarea se adresează studenților de la Programele de Inginerie Electrică, Energetică, Informatică Aplicată, dar poate fi utilă și tuturor celor care doresc să aprofundeze metodele de analiză a circuitelor electrice și neelectrice. În lucrare sunt incluse suficiente noțiuni pentru a obține cunoștințele teoretice și aptitudinile practice prescrise de Programele respective de studii pentru această disciplină.

Prof. dr. ing. Petru Todos
Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău,
Facultatea de Energetică și Inginerie Electrică

Lucrarea este un veritabil suport didactic pentru noțiuni fundamentale de teoria circuitelor electrice. Prin conținut și prin abundența de exemple menite să clarifice cititorului semnificația noțiunilor teoretice, lucrarea va fi utilă atât studenților, cât și specialiștilor deja formați care desfășoară activități de cercetare aplicativă și proiectare, precum și inginerilor de producție care se confruntă cu probleme specifice de electrotehnică curenților tari, precum și de electronică și telecomunicații. Rezultat al experienței autorului în activitatea didactică și de cercetare științifică desfășurate într-un mediu academic de înaltă ținută, lucrarea se remarcă printr-o expunere clară, sistematică și coerentă, cu noțiunile prezentate într-o succesiune bine studiată și exemple aplicative alese cu multă grijă.

Prof. dr. ing. Lucian Mandache
Universitatea din Craiova,
Facultatea de Inginerie Electrică



$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{sE_0}{R_2 + jsX_0} = \frac{E_0}{(R_2/s) + jX_0} = \frac{E_0}{R_2 - R_2 + (R_2/s) + jX_0} = \frac{E_0}{R_2 + jX_0 + R_2 I_m [(1/s) - 1]}$$



Adrian A. ADĂSCĂLIȚEI

TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE

PERFORMANTICA

Editura PERFORMANTICA

Institutul Național de Inventică, Iași
Iași, Campusul Universitar "Tudor Vladimirescu",
Corp T24, Etaj 1, CP 2002, OP 10, Iasi
Tel/fax: 0232-214763
www.inventica.org.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

ADĂSCĂLIȚEI, Adrian A.
TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE

/ Adrian A. ADĂSCĂLIȚEI . - Iași :

Performantica, 2015

Conține bibliografie

ISBN 978-606-685-301-9

621.374

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. ing. Petru Todos

Universitatea Tehnică a Moldovei

Prof. univ. dr. ing. Lucian Mandache

Universitatea din Craiova

Consilier editorial:

Prof. univ. dr. Traian D. Stănciulescu

Secretar editorial:

Octav Păuneț

EDITURĂ ACREDITATĂ DE CNCIS BUCUREȘTI,
1142/30.06.2003

Copyright © 2015

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate autorului

CUPRINSUL

1. CONCEPTE DE BAZĂ ALE TEORIEI CIRCUITELOR	17
1.1 Starea de electrizare. Tensiunea electrică. Tensiunea electromotoare.	17
1.2 Starea electrocinetică. Conducție. Intensitatea curentului electric.	19
1.3 Teoremele <i>Kirchhoff</i> (formulare topologică)	21
1.3.1 Teorema I <i>Kirchhoff</i> (KCL)	21
1.3.2 Teorema II <i>Kirchhoff</i> (KVL)	23
1.4 Circuit electric. Elemente dipolare	25
1.4.1. Elemente pasive de circuit. Rezistorul	30
a. Clasificarea rezistoarelor	31
b. Conexiuni ale rezistoarelor	34
b1. Conexiunea serie	34
b2. Conexiunea paralel	34
b3. Divizorul de tensiune	35
b4. Divizorul de curent	35
1.4.2 Elemente de circuit active (surse)	37
1.4.2.1 Surse independente de tensiune	37
a. Generatorul ideal de tensiune	37
b. Generatorul real de tensiune	38
c. Conexiuni ale surselor de tensiune	38
1.4.2.2. Surse independente de curent	39
a. Generatorul ideal de curent	39
b. Generatorul real de curent	40
c. Conexiunile generatoarelor de curent	40
1.4.2.3 Echivalența dintre sursele reale de tensiune și sursele reale de curent	41
1.4.2.4 Surse dependente (controlate)	41
1.4.3 Elemente de stocare a energiei (elemente reactive)	51
1.4.3.1 Condensatorul	51
1.4.3.2 Bobina (inductorul)	57
a. Clasificarea bobinelor	58
b. Relații de echivalență a bobinelor ce conțin condiții inițiale	59
c. Bobine liniare cuplate magnetic	60
1.5 Elemente de teoria grafurilor.	63

2. TEHNICA ANALIZEI CIRCUITELOR	67
2.1 Tehnica transformării surselor și circuitului	67
2.2 Analiza circuitelor electrice cu ajutorul teoremelor <i>Kirchhoff</i>	69
2.2.1 Scrierea matriceală a teoremelor lui <i>Kirchhoff</i>	70
a. Teorema I <i>Kirchhoff</i>	70
b. Teorema II <i>Kirchhoff</i>	71
c. Ecuația <i>Joubert</i> sub formă matriceală	72
2.2.2 Consecințe ale teoremelor <i>Kirchhoff</i> și a relației fundamentale a teoriei grafurilor	74
a. Curenții independenți ai unui circuit electric	74
b. Ecuații nodale ale unui circuit electric (potențiale nodale)	78
2.3 Tehnica analizei în curent. Metoda curenților de contur.	82
a. Analiza în curent utilizând teoremele <i>Kirchhoff</i> .	82
b. Metoda curenților de contur	86
b1 Circuite ce conțin surse reale	86
b2 Circuite ce conțin surse ideale de curent.	89
b3 Circuite ce conțin surse dependente	90
2.4 Tehnica analizei în tensiune a circuitelor electrice	92
a. Analiza în tensiune utilizând teoremele <i>Kirchhoff</i>	93
b. Metoda potențialelor nodale de analiză a circuitelor.	93
b1 Circuite cu surse reale independente	93
b2 Circuite ce conțin surse ideale	95
b3 Analiza nodală în circuitele ce conțin surse dependente	97
2.5 Analiza circuitelor electrice utilizând principiul superpoziției	100
3. TEOREMELE CIRCUITELOR ELECTRICE	103
3.1 Teorema substituției	103
3.2 Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare. Rezistența internă a unui dipol	104
3.2.1 Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare.	104
3.2.2 Determinarea rezistenței echivalente a dipolului activ	107
A) Determinarea rezistenței echivalente în circuitelor ce conțin surse independente	108
B) Determinarea rezistenței echivalente în circuitelor ce conțin surse dependente	111

3.3 Teorema generatoarelor echivalente (<i>Thévenin, Norton</i>)	114
3.3.1 Teorema generatorului echivalent de tensiune (<i>Thévenin</i>)	114
3.3.2 Teorema generatorului echivalent de curent (<i>Norton</i>)	115
3.3.3 Exemple de transformare a circuitelor în dipol echivalent	117
a) Circuite ce conțin surse independente	117
b) Circuite ce conțin surse dependente	119
3.4 Teorema de conservare a puterii instantanee în circuitele electrice	122
3.4.1 Teorema de conservare a puterii instantanee în rețelele închise (izolate) conexe și fără cuplaje magnetice cu alte rețele.	123
3.4.2. Teorema de conservare a puterii instantanee în rețele deschise cu n borne de acces	124
3.4.3. Puterea maximă transferată dipolului echivalent în curent continuu	126
a. Circuitul echivalent reprezentat prin dipol echivalent de tensiune (<i>Thévenin</i>)	127
b. Circuite de alimentare reprezentate prin dipol echivalent de curent (<i>Norton</i>)	128
3.5. Teoremele de transfigurare și reducere a rețelelor electrice	128
3.5.1. Teorema <i>Millman</i>	128
3.5.2. Teorema de transfigurare a rețelei stea în rețea triunghi sau Y- Δ	129
3.5.3 Teoremele de reducere a rețelelor la dipol echivalent	134
a. Reducerea rețelei serie la dipol echivalent	134
a.1 Fie o rețea cu s elemente cuplate magnetic conectată în serie	134
a.2 Circuit serie cu surse și cuplaje	134
b. Reducerea rețelei paralel la dipol echivalent	136
b.1 Rețea paralel cu cuplaje	136
b.2. Rețea paralel cu cuplaje și generatoare de tensiune	136

4. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM ARMONIC PERMANENT	137
4.1. Semnale periodice, alternative și sinusoidale. Definiții.	137
4.1.1. Producerea t.e.m sinusoidale. Valori caracteristice.	140
4.2. Reprezentări simbolice ale semnalelor sinusoidale	142
4.2.1. Reprezentarea geometrică (prin fazori)	142
I) Reprezentarea cinematică (nesimplificată)	142
II) Reprezentarea polară	144
4.2.2. Reprezentarea analitică (în complex)	145
4.3. Parametrii circuitelor liniare de curent alternativ	146
4.3.1. Răspunsul circuitelor liniare în curent alternativ (analiza comparativă)	147
4.3.1.1. Răspunsul în c.a. al elementelor simple de circuit	147
a. Răspunsul în c.a. al rezistenței	147
b. Răspunsul condensatorului în c.a.	149
c. Răspunsul bobinei în c.a.	151
4.3.1.2. Răspunsul în c.a. al unui dipol de ordinul I. Analiza în domeniul timp: Dipol R-C, Dipolul R-L	153
4.3.1.3. Răspunsul în c.a. al circuitelor de ordinul II.	158
A.1. Analiza dipolului echivalent RLC serie	158
A.2. Răspunsul dipolului echivalent RLC paralel.	162
B. Analiza în complex a dipolului de ordinul II: Impedanța complexă a dipolului echivalent RLC serie; Dipol echivalent RLC paralel	163
4.4. Puteri în circuite liniare de c.a. monofazat	169
4.4.1. Puterea instantanee a dipolului echivalent	169
4.4.2. Puterea activă	170
4.4.3. Puterea aparentă	170
4.4.4. Puterea reactivă	171
4.4.5. Expresiile puterilor pentru circuitele dipolare simple	172

4.4.6 Reprezentarea în complex a puterii (puterea complexă)	175
4.5. Teoremele circuitelor liniare în formă complexă	177
4.5.1. Forma complexă a ecuațiilor <i>Joubert</i>	177
4.5.2. Teoremele <i>Kirchhoff</i> în formă complexă	178
4.5.3. Impedanțe echivalente	179
4.5.4. Teorema transferului maxim al puterii active în regim permanent sinusoidal	180
4.5.5. Analiza în complex a circuitelor de curent alternativ monofazat	182
A. Analiza în complex a circuitelor ce conțin surse independente	182
B. Analiza circuitelor în c.a. ce conțin surse dependente	184
C. Reducerea circuitelor electrice de curent alternativ prin generatoarele echivalente <i>Thévenin</i> și <i>Norton</i>	186
4.6 Circuite cu elemente reale în regim sinusoidal	187
4.6.1. Bobina reală: Bobina liniară reală fără miez; Bobina liniară cu miez conductor.	187
4.6.2. Condensatorul real în regim permanent sinusoidal	192
4.7. Circuite cuplate în regim permanent sinusoidal	195
4.7.1. Tipuri de cuplaje	195
4.7.2. Reducerea cuplajului mutual la cel galvanic	196
4.8 Rezonanța circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal	198
4.8.1 Rezonanța serie (rezonanța tensiunilor)	198
4.8.2 Rezonanța de curent (paralel)	201
4.8.3 Rezonanța de curenți în circuitele cu elemente reale	202
4.8.4 Rezonanța în circuite cuplate magnetic	205
5. CUADRIPOLI. FILTRE.	209
5.1. Generalități	209
5.2. Multipoli. Cuadripoli generali și cuadripoli diportți	211
5.3. Cuadripoli rezistivi neliniari	216
5.4. Elemente de circuit cuadripolare	219
5.4.1. Surse comandate	219
5.4.2. Scheme echivalente ale tranzistoarelor bipolare	224
5.4.3. Transformatorul ideal	226

5.5. Cuadripoli în regim permanent sinusoidal	228
5.5.1. Ecuțiile cuadripolului	228
5.5.2. Semnificația fizică și determinarea experimentală a parametrilor cuadripolului	232
5.5.3. Sisteme de parametri ai cuadripolului	237
5.5.3.1. Parametri iterative	238
5.5.3.2. Parametri caracteristici	240
5.5.3.3 Constanta de transfer. Constanta de atenuare. Constanta de fază	241
5.6. Scheme echivalente ale cuadripolilor	245
5.6.1. Schema echivalentă în T	246
5.6.2. Schema echivalentă în Π	248
5.7. Interconectarea cuadripolilor	250
5.7.1. Gruparea serie-serie	250
5.7.2. Gruparea paralel-paralel	252
5.7.3. Conectarea în lanț (cascadă)	254
5.8. Filtre electrice de frecvență	256
6. CIRCUITE TRIFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL	267
6.1 Transmisia energiei. Caracterizarea sistemului trifazat de transmitere a energiei. Proprietățile sistemelor trifazate.	267
6.2 Reprezentarea în complex a sistemelor trifazate. Proprietăți.	269
6.3 Conexiunile sistemelor trifazate	271
6.4. Analiza circuitelor trifazate alimentate cu tensiuni simetrice	274
6.4.1. Consumator trifazat conectat în stea	274
a) Consumator echilibrat	274
b) Consumator dezechilibrat	275
b1. Stea cu nul de impedanță	275
b2. Stea fără nul	275
6.4.2 Consumator trifazat conectat în triunghi	276
a) Consumator echilibrat	276
b) Consumator dezechilibrat	276
6.4.3 Puteri în rețele trifazate echilibrate sub tensiuni simetrice	277
6.5. Metoda componentelor simetrice	278
6.5.1. Descompunerea unui sistem trifazat nesimetric de mărimi sinusoidale în sisteme simetrice. Teorema	279

<i>Stokvis-Fortescue</i>	
6.5.2 Circuite trifazate echilibrate sub tensiuni nesimetrice	281
a. Elementele statice și dinamice	281
b. Receptor trifazat echilibrat cu elementele statice, fără cuplaje magnetice, conectat în stea, cu fir neutru	282
c. Receptor trifazat echilibrat cu elemente statice fără cuplaje magnetice conectate în stea fără fir neutru	283
d. Circuit trifazat echilibrat cu elemente statice cuplate magnetic sub tensiuni nesimetrice.	284
6.5.3 Circuite trifazate dezechilibrate	285
6.5.4 Puteri în rețele trifazate dezechilibrate sub tensiuni nesimetrice	287
a. Metoda directă de calcul a puterilor	287
b. Calculul puterilor în rețele trifazate dezechilibrate cu ajutorul componentelor simetrice	288
7. LINII ELECTRICE LUNGI	289
7.1. Circuite cu parametri repartizați	289
7.2. Parametri lineici	289
7.3. Ecuațiile liniilor electrice lungi	292
7.4. Linii lungi omogene bifilare în regim permanent sinusoidal	293
7.5. Undele de tensiune și de curent în cazul liniilor lungi în regim sinusoidal	297
7.6. Linia fără distorsiuni. Linia fără pierderi	299
8. CIRCUITE LINIARE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL	301
8.1. Introducere. Analiza armonică a semnalelor	301
8.2. Analiza armonică a funcțiilor periodice	304
8.3. Exemple de semnale periodice particulare	308
8.4. Valori caracteristice ale semnalelor periodice nesinusoidale	309
8.5. Puteri ale circuitelor liniare în regim permanent nesinusoidal	311
8.6. Elemente liniare de circuit în regim nesinusoidal	313

1. Rezistorul.	313
2. Bobina ideală	314
3. Condensatorul ideal	315
8.7. Analiza circuitelor în regim nesinusoidal	316
8.8. Circuite liniare trifazate sub tensiuni simetrice nesinusoidale	318
9. REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE	323
9.1 Teoremele comutației	323
9.1.1 Teorema I a comutației	323
9.1.2 A II-a teoremă a comutației	324
9.2. Metode de analiză în domeniul timp a circuitelor electrice	324
9.2.1 Metoda directă de analiză a circuitelor de ordinul I	324
9.2.1.1 Soluția generală a ecuațiilor diferențiale de ordinul I	327
9.2.1.2 Particularizarea soluției generale pentru circuitele electrice excitate în cc și ca	329
9.2.1.3 Determinarea soluției generale a regimului tranzitoriu în circuitele de ordinul I ce conțin surse independente. Aplicații tipice ale circuitelor de ordinul 1: Circuit integrator RC; Circuit derivator RC.	331
9.2.1.4 Determinarea soluției generale a regimului tranzitoriu în circuitele de ordinul I ce conțin surse dependente	334
9.2.2 Metoda variabilelor de stare	335
9.2.2.1 Ecuațiile de stare	335
9.2.2.2 Schema structurală de calcul a regimului tranzitoriu pentru ecuațiile ordinul I	336
9.2.2.3 Răspunsul circuitelor liniare de ordinul II	337
A. Mărimi de stare ale circuitelor de ordin II	337
B. Soluția ecuației diferențiale omogene a ecuațiilor de ordinul II	339
C. Ecuații de stare pentru circuitele de ordinul II	341

D. Schema structurală de calcul atașată ecuațiilor de ordinul II	342
E. Aplicarea metodei variabilelor de stare în circuitele ce conțin surse dependente	342
9.3. Metode de analiză în domeniul frecvență	343
9.3.1 Metoda operațională (a transformatei <i>Laplace</i>)	343
A. Proprietățile transformatei <i>Laplace</i>	343
B. Călculele transformatei <i>Laplace</i> a principalelor semnale utilizate în electrotehnică	344
C. Determinarea funcției originale cunoscând transformata <i>Laplace</i> (Teoreme)	347
9.3.2 Aplicarea transformatei <i>Laplace</i> în analiza regimurilor tranzitorii ale circuitelor electrice	348
9.3.2.1 Transformata <i>Laplace</i> a elementelor simple de circuit	348
a. Rezistorul	348
b. Bobina ideală	349
c. Bobina cuplată magnetic	350
d. Condensatorul	350
e. Aplicarea transformatei <i>Laplace</i> unui dipol ce admite schemă echivalentă:	351
9.3.2.2 Aplicarea transformatei <i>Laplace</i> în analiza circuitelor ce conțin surse independente	352
9.3.2.3. Aplicarea transformatei <i>Laplace</i> în circuitele ce conțin surse dependente	355
10. ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRICE CE CONȚIN AMPLIFICATOARE OPERAȚIONALE	357
10.1 Analiza în curent continuu a configurațiilor de bază ale amplificatoarelor operaționale	357
10.1.1 Configurația neînversoare	357
10.1.2 Configurația inversoare	360
10.1.3 Amplificatoare de tensiune	362
a. Circuitul de control a polarității amplificării	362
b. Convertor de rezistență negativă	363
c. Amplificatorul sumator	363
d. Amplificatorul diferențial	364
e. Amplificatorul de instrumentație	366

10.1.4 Amplificatoare de transrezistență (convertoare curent - tensiune)	367
10.1.5 Amplificatoare de transconductanță (convertoare tensiune - curent)	369
10.1.6 Amplificatoare de curent	370
10.2 Răspunsul în regim tranzitoriu al circuitelor electrice ce conțin amplificatoare operaționale	371
10.2.1 Răspunsul circuitelor de ordinul I ce conțin amplificatoare operaționale	371
a) Circuitul de diferențiere	371
b) Circuitul de integrare	372
c) Circuitul integrator neinvertor	373
d) Crearea răspunsurilor divergente	374
10.2.2 Răspunsul circuitelor de ordinul II ce conțin amplificatoare operaționale	376
a) Circuite de ordinul II pasive fără inductanțe	376
b) Circuite de ordinul II active fără inductanțe	378
c) Crearea rădăcinilor pozitive	380
10.3 Răspunsul în c.a. al circuitelor electrice ce conțin amplificatoare operaționale	381
a) Circuitul integrator	381
b) Circuitul derivator	382
c) Filtru trece jos (“low pass”) cu amplificare	382
d) Filtru trece sus cu amplificare (“high pass”)	383
e) Multiplicator de capacitate	383
e) Simulator de inductivitate	384
BIBLIOGRAFIE	387
Bibliografie minimală pentru studenți	
Bibliografie pentru elaborarea Cursului, Seminariilor și Lucrărilor Experimentale de Laborator	

PREFAȚĂ

Acest manual de curs se adresează studenților Facultății de Inginerie Electrică, Energetică și Informatică Aplicată, Universitatea Tehnică „Gh. Asachi” din Iași, și tuturor celor care doresc să aprofundeze metodele de analiză a circuitelor electrice.

Teoria circuitelor este o disciplină fundamentală în pregătirea studenților în ingineria electrică. Bazată pe legile fizicii, această disciplină operează cu abstractizări necesare viitorului inginer de profil electric pentru a rezolva circuitele și sistemele reale, la un nivel conceptual înalt, folosind atât fizica și matematica.

Teoria circuitelor liniare asigură abordarea corectă a disciplinelor de specialitate o ferind u n m odel u nitar d e in terpretare a f enomenelor d in circuitele electrice.

Cursul de „Teoria ci rcuitelor el ectrice” ar e ca o biect st udiul fenomenelor electrice din punctul de vedere al aplicațiilor tehnice, constituind pregătirea teoretică de bază a viitorilor ingineri electricieni.

Disciplina pune la dispoziția studenților cunoștințe teoretice și practice referitoare la aplicarea fenomenelor electromagnetice în tehnică, având ca obiectiv însușirea unor cunoștințe elementare de electrotehnică.

Urmărind aprofundarea cunoștințelor asimilate la curs, în cadrul orelor de seminar se v a forma și dezvoltă deprinderea de a pune în ecuație și rezolva o problemă, iar ședințele de laborator au scopul verificării experimentale a acestora.

Considerând rolul de fundamentare teoretică a ingineriei electrice și de învățare a unor tehnici practice de analiză și proiectare a circuitelor, Teoria circuitelor electrice are un loc determinant în pregătirea studenților pentru studiul atât al circuitelor electronice (curenți slabi) cât și al circuitelor de putere (curenți tari). Lucrarea de față este o împletire între teorie și aplicații, specifici diferitelor etape ale activității de analiză proiectare a circuitelor electronice și a circuitelor de putere.

În scopul asigurării unei înțelegeri sistematice și de profunzime a obiectivelor teoriei circuitelor, am în cercat să realizăm un echilibru între conceptualizarea matematică, susținerea principiilor fizice și abordarea inginerescă a aplicațiilor.

Această lucrare cuprinde 10 capitole, structurate după cum urmează:

În capitolul 1, intitulat "*Concepte de bază ale teoriei circuitelor*", sunt introduse noțiuni privind: starea de electrizare, tensiunea electrică, tensiunea electromotoare; starea electrocinetică, conducție, intensitatea curentului electric; teoremele Kirchhoff; elemente dipolare și elemente de teoria grafurilor.

Capitolul 2, "*Tehnica analizei circuitelor*", este consacrat: transformării surselor și circuitului; analizei circuitelor electrice cu ajutorul teoremelor Kirchhoff; analizei în curent - metoda curenților de contur; analizei în tensiune a circuitelor electrice - metoda potențialelor nodale de analiză a circuitelor; analizei circuitelor electrice utilizând principiul superpoziției.

În capitolul 3, intitulat "*Teoremele circuitelor electrice*", sunt introduse noțiuni privind: teorema substituției; operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare; teorema generatoarelor echivalente de tensiune (*Thévenin*), de curent (*Norton*); teorema de conservare a puterii instantanee în circuitele electrice; teoremele de transfigurare și reducere a rețelelor electrice.

În capitolul 4, "*Circuite electrice liniare în regim armonic permanent*", se definesc: semnale periodice, alternative și sinusoidale; reprezentări simbolice ale semnalelor sinusoidale; parametrii circuitelor liniare de curent alternativ; puteri în circuite liniare d.c.a.m. monofazate; teoremele circuitelor liniare în formă complexă; circuite cu elemente reale în regim sinusoidal; circuite cuplate în regim permanent sinusoidal; rezonanța circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal.

Capitolul 5, "*Cuadripoli. Filtre.*", prezintă noțiunile de: multipoli; cuadripoli generali și cuadripoli diporți; cuadripoli rezistivi neliniari; elemente cuadripolare de circuit; cuadripoli în regim permanent sinusoidal; scheme echivalente ale cuadripolilor; interconectarea cuadripolilor; filtre electrice de frecvență.

Capitolul 6, "*Circuite trifazate în regim permanent sinusoidal*", este consacrat: proprietăților sistemelor trifazate de transmitere a energiei; reprezentării în complex a sistemelor trifazate; conexiunilor sistemelor trifazate; analizei circuitelor trifazate alimentate cu tensiuni simetrice; metodei componentelor simetrice.

În capitolul 7, "*Linii electrice lungi*", sunt discutate: circuitele cu parametri repartizați; parametri lineici; ecuațiile liniilor electrice lungi; liniile lungi omogene bifilare în regim permanent sinusoidal; unde le de

tensiune și de curent în cazul liniilor lungi în regim sinusoidal; linia fără distorsiuni; linia fără pierderi.

Capitolul 8, “*Circuite liniare în regim periodic nesinusoidal*”, este consacrat: analizei armonice a semnalelor și a funcțiilor periodice; dezvoltării în serie *Fourier*; prezentării unor exemple de semnale periodice particulare; valorilor caracteristice ale semnalelor periodice nesinusoidale; puterilor circuitelor liniare în regim permanent nesinusoidal; comportării elementelor liniare de circuit în regim nesinusoidal; analizei circuitelor în regim nesinusoidal; circuitelor liniare trifazate sub tensiuni simetrice nesinusoidale.

În capitolul 9, “*Regimul tranzitoriu al circuitelor electrice liniare*”, sunt prezentate: teoremele comutației; metodele de analiză în domeniul timp al circuitelor electrice; metodele de analiză în domeniul frecvență (Transformata *Laplace*).

Capitolul 10, “*Analiza circuitelor electrice ce conțin amplificatoare operaționale*”, este consacrat: analizei în curent continuu a configurațiilor de bază ale amplificatoarelor operaționale; răspunsului în regim tranzitoriu al circuitelor electrice ce conțin amplificatoare operaționale; răspunsului în c.a. al circuitelor electrice ce conțin amplificatoarelor operaționale.

Pentru ilustrarea tehnicilor și metodelor de analiză prezentate în lucrare toate capitolele cuprind numeroase și variate exemple. Toate exemplele au rezolvări complete, unele în mai multe variante, cu comentarii și comparații între metode.

Rod al experienței didactice precum și al activității de cercetare a autorului în domeniul teoriilor circuitelor electrice, lucrarea este astfel concepută încât să pregătească cititorul pentru utilizarea calculatorului în analiza circuitelor electrice și structurilor neelectrice echivalente din punct de vedere matematic, în vederea optimizării soluției de proiectare a acestora.

Au fost introduse mai multe referințe bibliografice existente în spațiul virtual al internetului: cursuri web realizate pe medii virtuale de instruire (moodle), manuale cu situri web pentru studenți, resurse educaționale gratuite.

Autorul mulțumește tuturor colegilor și studenților Facultății de Inginerie Electrică, Energetică și Informatică Aplicată (Universitatea

Tehnică “Gh. Asachi” din Iași) care au citit lucrarea și care au făcut numeroase observații despre conținutul și prezentarea manualului.

Autorul mulțumește în mod deosebit companiei National Instruments Romania pe ntru a cordarea dreptului de utilizare a brandurilor *National Instruments: Electronic Workbench, Multisim, Ultiboard și LabVIEW* în cadrul publicației *Teoria Circuitelor Electrice - Îndrumar de Laborator* (care completează prezentul manual de curs), menționând că *materialele au fost revizuite și că aceste materiale sunt în concordanță cu drepturile de copyright ale National Instruments.*

Autorul mulțumește în mod deosebit domnilor Prof. dr. ing. Petru Todos (Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău), Prof. dr. ing. Lucian Mandache (Universitatea din Craiova) și Prof. dr. ing. Corneliu Lazăr (Universitatea Tehnică „Gh. Asachi” din Iași) care au citit cu atenție conținutul științific al lucrării și au contribuit cu sugestii utile la îmbunătățirea conținutului științific și didactic lucrării.

Autorul

Iași, August 2015

CAPITOLUL 1. CONCEPTE DE BAZĂ ALE TEORIEI CIRCUITELOR

1.1 Starea de electrizare. Tensiunea electrică. Tensiunea electromotoare.

De la fizică se știe că două corpuri se electrizează prin frecare. Starea de electrizare presupune un schimb de sarcini între cele două corpuri. Caracterizarea acestei stări se face prin “sarcina electrică” care reprezintă excesul de purtători de sarcină de un semn față de purtătorii de sarcină de semn opus. Sarcina elementară este considerată sarcina electronului având valoarea $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$. Sarcina unui corp electrizat va fi: $q = n \cdot e$ (n – număr întreg).

Pentru a caracteriza acțiunile ponderomotoare ce se exercită între corpurile electrizate, se definește intensitatea forței ce acționează asupra micului corp electrizat ca fiind intensitatea câmpului electric. Presupunând în câmpul produs de sursa q că exista un corp de sarcină q_1 , între q și q_1 se exercită o forță electrică $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q \cdot q_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, de ci sarcina q produce un câmp electric de intensitate $\vec{E} = \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$. (1.1)

Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea corpului de probă q_1 pe linia de câmp \vec{E} este:

$$L = \int_{p_0}^p \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = q_1 \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{p_0}^p q_1 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_1 \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_{p_0} - W_p, \quad (1.2)$$

unde: $\vec{F}_e = q_1 \vec{E}$ - forța care se opune deplasării pe linia de câmp electric. Lucrul mecanic este integrala unui produs scalar și nu depinde de drum ci numai de valorile inițiale și finale. Integrala:

$$\int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{L}{q_1} = \int_{p_0}^p q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{p_0}^p \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot dr \quad (1.3)$$

$$\int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{L}{q_1} = \int_{p_0}^p q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \left| \frac{1}{r} \right|_{p_0}^p = \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{p_0}} \right) \quad (1.4)$$

nu depinde de drum ci numai de diferența valorilor finale și inițiale ale unei funcții scalare numită “potențial”.

Definim diferența de potențial dintre două puncte prin relația:

$$\int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_p - V_{P_0}, \quad (1.5)$$

Alegând un potențial de referință $V_{P_0} = 0$ rezultă valoarea mărimii scalare asociată punctului P ca fiind $V_p = \int_0^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Diferența de potențial dintre două puncte se numește “*tensiune electrică*” și este exprimată prin relația

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.6)$$

Se definește tensiunea electromotoare prin relația $e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ și exprimă circulația intensității câmpului electric pe o rîc c ontur închis. Generalizând, pentru orice forță \vec{F} , noțiunea de câmp electric prin relația $\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$ distingem următoarele tipuri de câmpuri:

$$\text{- câmp Coulombian } \vec{E}_c = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q}; \quad (1.7)$$

$$\text{- câmp solenoidal } \vec{E}_s = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_m}{q}; \quad (1.8)$$

$$\text{- câmp imprimat } \vec{E}_i = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{ne}}{q}, \quad (1.9)$$

unde: - q - sarcina electrică;
 - F_e - forța electrică;
 - F_m - forța magnetică;
 - F_{ne} - forța neelectrică;

Atunci tensiunea electromotoare este:

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{cu} \quad \vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_s + \vec{E}_i. \quad (1.10)$$

Precizare:

Într-o baterie electrică, sub acțiunea forțelor chimice, are loc separarea sarcinilor, iar dacă bornele bateriei sunt în gol constatăm: $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{E}_C \cdot d\vec{l} + \int \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 0$, relație echivalentă cu $u_b = e$. (1.11)

Deoarece intensitatea câmpului electric \vec{E}_C depinde de mediu prin permitivitatea ε , se introduce mărimea numită inducție electrică $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$, mărime ce nu depinde de proprietățile mediului. Fluxul acestei inducții pe orice suprafață închisă este egal cu sarcina din interiorul suprafeței Σ (fig 1.1).

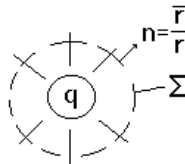


Fig. 1.1

$$\varphi = \oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r} = q_{\varepsilon} \quad (1.12)$$

Definiție:

Se definește capacitatea electrică sau condensatorul ca fiind sistemul format din două corpuri conductoare separate de un dielectric.

Raportul pozitiv dintre sarcina cu care se încarcă una din armături și diferența de potențial dintre cele două armături, se numește “capacitate” și este independentă de sarcină și diferența de potențial dintre armături:

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} > 0. \quad (1.13)$$

Capacitatea este dependentă de permitivitatea mediului dintre armături, de geometria armăturilor și distanța dintre acestea.

1.2 Starea electrocinetică. Conducție. Intensitatea curentului electric.

Corpurile conductoare se pot afla, în afară de starea de electrizare, și în starea electrocinetică (de conducție).

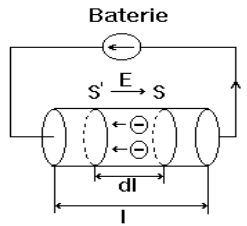


Fig. 1.2

Aplicând unui conductor o tensiune electrică $U = E \cdot l$, ceea ce presupune existența unui câmp electric de intensitate \vec{E} , purtătorii de sarcină q sunt deplasați față de rețeaua cristalină a conductorului cu viteza \vec{v} . Constanta de proporționalitate (dată de raportul dintre viteză și intensitatea câmpului aplicat) se numește “*mobilitate*” $\mu_p = \left| \frac{\vec{v}}{\vec{E}} \right|$.

Presupunând că la momentul t electronii se află în suprafața S , la momentul $t + \Delta t$ electronii ajung în S' parcurgând distanța $d\vec{l} = \vec{v} \cdot dt$.

Numărul de electroni conținuți în volumul delimitat de S și S' este $dn = n \cdot S \cdot dl$, unde: n – reprezintă densitatea de electroni liberi.

Sarcina din volumul elementar se obține prin multiplicarea cu q a relației de mai sus, obținând: $dq = q \cdot dn = n \cdot q \cdot S \cdot dl = n \cdot q \cdot S \cdot v \cdot dt$.

“*Curentul electric*” este mărimea fizică ce caracterizează starea electrocinetică și reprezintă variația sarcinii prin suprafața S a conductorului: $i = \frac{dq}{dt}$. După simple înlocuiri rezultă expresia acestui curent prin secțiunea transversală a conductorului:

$$i = n \cdot q \cdot S \cdot v = n \cdot q \cdot S \cdot E \cdot \mu_p = J \cdot S = \sigma \cdot E \cdot S \quad (1.14)$$

unde: $n \cdot q \cdot v$ - fluxul purtătorilor de sarcină.

Raportul dintre curent și tensiunea aplicată, $\frac{i}{U} = G$, poartă numele de “*conductanță*” iar inversa acestui raport se numește “*rezistență*”. În baza relațiilor de mai sus expresia conductanței este:

$$G = n \cdot q \cdot \mu_p \cdot \frac{S}{l} = \sigma \cdot \frac{S}{l} = \frac{1}{R} \quad (1.15)$$

Deoarece curentul reprezintă fluxul purtătorilor de sarcină prin suprafața transversală a conductorului S, ($i = \int_S n \cdot q \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$), atunci

conductanța reprezintă raportul efect - cauză pentru conductorul considerat, raport independent de valoarea curentului și a tensiunii aplicate, dar dependent de geometria și conductanța conductorului.

$$G = \frac{\int_S \vec{j} \cdot d\vec{A}}{\oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad (1.16)$$

1.3 Teoremele Kirchhoff (formulare topologică)

1.3.1 Teorema I Kirchhoff

“Teorema I Kirchhoff” este denumită și “ecuația lui Kirchhoff pentru noduri”. Numim “nod” punctul de conexiune a cel puțin trei elemente de circuit (surse și consumatori). Dacă numărul elementelor de circuit este mai mic de trei atunci avem un nod fictiv (punct de conexiune).

Așa cum în mecanică există o lege de conservare (a energiei), se definește în electrotehnică, legea conservării sarcinii ce indică faptul că în orice suprafață închisă Σ sarcina se conservă: $q_\Sigma = \iiint_{V_\Sigma} \rho_v \cdot dV_\Sigma = \text{constant}$.

Întrucât curentul electric ($i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt}$) redă viteza de scădere a sarcinii din suprafața Σ , rezultă că în orice suprafață închisă curentul este nul $i_\Sigma = 0$.

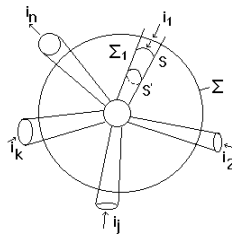


Fig. 1.3

Teorema I Kirchhoff (TIK) are următoarea formulare generală:
 “Curentul prin orice suprafață închisă este nul.”

Exemplificăm formularea teoremei I pe suprafețele închise Σ și Σ_1 (fig.1.3)

a) - pe Σ_1 definită de suprafețele reunite $S \cup S' \cup A_1$ (A_1 - aria laterală a conductorului) $i_{\Sigma_1} = 0 \Rightarrow i_s + i_{S'} + i_{A_1} = 0$.

În relația de mai sus suma curenților este algebrică, deoarece curentul este un flux a densității de curent prin orice suprafață S ($i_s = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$).

Asociind un sens de trecere ac estor curenți și ținând cont de orientarea suprafeței închise (fig.1.3), elementul de suprafață orientat spre exterior $d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$ ($S \in \Sigma$), rezultă semnul curenților pe fiecare suprafață deschisă astfel:

- prin S unghiul dintre densitatea de curent și versorul suprafeței este $(\vec{j}, \vec{n}) = \pi \Rightarrow i_s$ curentul este negativ;
- prin S' unghiul dintre densitatea de curent și versorul suprafeței este $(\vec{j}, \vec{n}) = 0 \Rightarrow i_{S'}$ este pozitiv;
- prin A_1 unghiul dintre densitatea de curent și versorul suprafeței este $(\vec{j}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow i_{A_1} = 0$.

În concluzie, forma matematică a teoremei I pe suprafața Σ_1 este:

$$\boxed{-i_S + i_{S'} = 0}$$

b) - pe suprafața Σ există curent numai la intersecția suprafeței Σ cu planul conductoarelor. Conform regulii stabilite forma matematică a teoremei I Kirchhoff pe această suprafață este:

$$-i_1 - i_2 + i_j - i_k + i_n = 0 \tag{1.17}$$

Concluzie:

“Suma algebrică a intensităților curenților electrici din laturile concurente unui nod este nulă.”

Convenție:

“Curenții ce intră în nod sunt negativi, iar cei ce ies din nod sunt pozitivi.”

Asocierea sensurilor de referință pentru curenți.

“Sensul de referință al unei mărimi scalare definite printr-o integrală de suprafață S_p ce se sprijină pe o curbă închisă este sensul normalei exterioare în la acea suprafață”.

1.3.2 Teorema II Kirchhoff (T_{2K})

Tensiunea, conform enunțului, este $u_b = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = v_1 - v_2$ și reprezintă tensiunea la bornele unei laturi. Să considerăm un contur închis (o buclă) format din n laturi (fig.1.4).

Notând $c u v_k$ - potențialele atașate nodurilor (k), tensiunea la bornele laturii j este:

$$u_{bj} = \int_k^{k+1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = v_k - v_{k+1} \quad (1.18)$$

Întrucât circulația intensității câmpului electric coulombian este nulă pe orice contur: $\oint_{\Gamma} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{k-1}^k \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \dots = 0$, rezultă, prin înlocuire, funcție de potențialul bornelor laturilor, următoarea relație:

$$v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \dots + v_k - v_{k-1} + \dots = u_{b1} + u_{b2} + \dots + u_{bk} + \dots = 0 \quad (1.19)$$

deci: $\sum_{j \in [m]} u_{bj} = 0. \quad (1.20)$

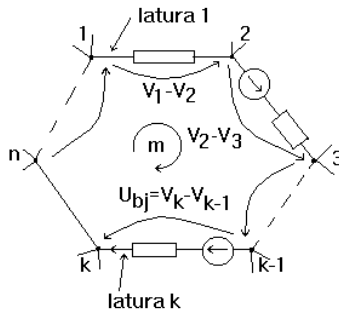


Fig. 1.4

Concluzie:

“ Suma tensiunilor la bornele elementelor de circuit (bornele laturilor) ce aparțin unei bucle este nulă.”

Aceasta este prima formulare a teoremei II Kirchhoff.

A doua formulare a teoremei II Kirchhoff rezultă din înlocuirea tensiunii la bornele laturilor cu dependența acestora de sursele și consumatorii existenți în latură.

Să considerăm latura j în care există o sursă e_j și prezintă rezistența R_j . Se asociază sensul curentului prin latură identic cu sensul sursei (fig.1.5) și se construiește un contur închis format din latura j și tensiunea la borne u_{b_j} .

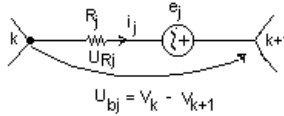


Fig. 1.5

Ținând cont de legea conducerii: $\vec{E}_c + \vec{E}_i = \rho \cdot \vec{j}$ rezultă că în conductoare pe arta Coulombiană a câmpului este descrisă de relația $E_c = \rho \cdot j - E_i$. Circulația părții columbiene a câmpului pe orice contur este nulă: $\oint_{\Gamma} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ și, în consecință pe curba Γ rezultă:

$$\int_{\text{latura } j} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \int_{k+1}^k \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.21)$$

$$\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{\text{latura } j} \rho \cdot \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{R_j \cdot i_j} - \underbrace{\int_{\text{latura } j} \vec{E}_i \cdot d\vec{S}}_{e_j} + \underbrace{\int_{k+1}^k \vec{E}_c \cdot d\vec{S}}_{V_{k+1} - V_k} = 0 \quad v_k - v_{k+1} = R_j \cdot i_j - e_j = u_{b_j} \quad (1.22)$$

relație echivalentă cu:

$$v_k - v_{k+1} + e_j = R_j \cdot i_j \quad (1.23)$$

denumită “*ecuația Joubert*” a laturii j . Această ecuație exprimă dependența dintre tensiunea la borne, tensiunea electromotoare și căderea de tensiune pe o latura j .

Înlocuind ecuația Joubert în teorema II Kirchhoff $\sum_{j \in (m)} u_{b_j} = 0$, rezultă:

$$\sum_{j \in (m)} (R_j \cdot i_j - e_j) = 0 \quad (1.24)$$

sau:

$$\sum_{j \in (m)} \mathbf{e}_j = \sum_{j \in (m)} \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{i}_j \quad (1.25)$$

A doua formulare a teoremei II Kirchhoff este :

“Pe orice buclă suma t.e.m este egală cu suma căderilor de tensiune pe elemente pasive.”

Asocierea sensului de referință pentru tensiuni.

- ◆ *Sensul de referință al unei mărimi scalare definite printr-o integrală de linie este sensul de parcurgere al curbei.*

1.4 Circuit electric. Elemente dipolare

Definiție:

“Numim circuit electric ansamblul format din surse și consumatori prevăzută cu legături conductoare între ele.”

Sursele au rolul de a produce energie electromagnetică, iar consumatorii, de a o transforma în alte forme de energie. Exemplul cel mai simplu este oferit de fig.1.6:

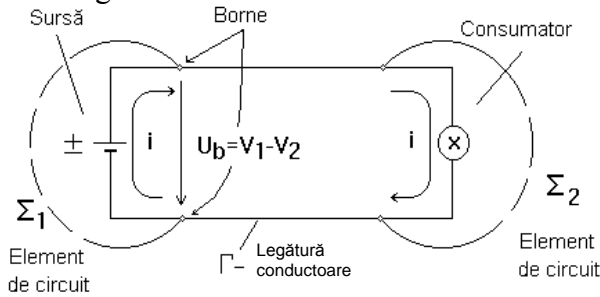


Fig. 1.6

Legătura conductoare este necesară deoarece, cunoaștem că orice circuit electric este parcurs de curent electric i iar închiderea acestuia între sursă și consumator se face prin calea de minimă rezistență ($\rho_{\text{metal}} \ll \rho_{\text{aer}}$).

Nu putem discuta despre un circuit electric dacă între sursă și consumator nu realizăm un contur închis (Γ) din material conductor (cu rol de cale de închidere a curentului).

În conformitate cu relația Ohm, în lungul căii conductoare avem o cădere de tensiune $U_f = R \cdot i = \rho \cdot \frac{l}{S} \cdot i$, cădere de tensiune ce pentru lungimi mici ale conductoarelor se neglijează. Această aproximație în asociere cu definiția tensiunii electrice $u = v_1 - v_2$ conduce la următoarea concluzie:

“Toate punctele unui conductor au același potențial.” (1)

A doua concluzie ce rezultă din noțiunea de circuit electric și concluzia (1) este:

“Valoarea curentului ce intră printr-un capăt al unui conductor este egală instantaneu cu valoarea curentului ce iese pe la celălalt capăt al conductorului.” (2)

Altfel spus, neglijăm fenomenul de propagare al curentului în conductoare din cauza dimensiunilor mici ale acestora față de lungimea de undă a curentului (circuite cu parametri concentrați).

Orice circuit electric poate fi descompus în *elemente de circuit*.

Definiție:

“Numim *element de circuit* sistemul caracterizat de mărimi de intrare și mărimi de ieșire.”

Izolarea dintr-un circuit a unui element de circuit se face printr-o suprafață închisă Σ (imaginară) ce intersectează legăturile conductoare în n puncte numite *borne*.

Elementul de circuit cu două borne de acces se numește dipol și reprezintă numărul minim de borne de acces pe care îl poate avea un element de circuit. Întrucât curentul există numai într-un circuit închis, rezultă că prin una din borne curentul intră iar pe cealaltă iese, iar suma curenților la bornele de acces este nulă (fig.1.7).

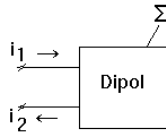


Fig. 1.7

Observație: “Suma curenților la bornele de acces este nulă pentru un dipol.”

$$\sum i = 0 \Rightarrow i_1 + i_2 = 0 \tag{1.26}$$

“Bornele de acces la care suma curenților este nulă formează o *poartă*.”

Dacă numărul bornelor de acces este mai mare de 2 atunci definim “*elemente multipolare*” (exemplu: tranzistorul).

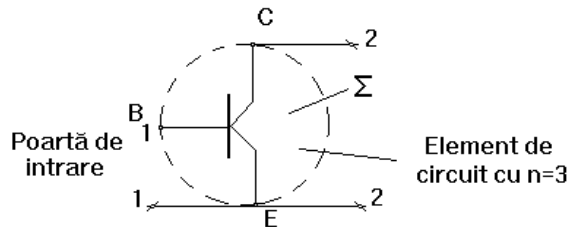


Fig. 1.8

Tranzistorul, având trei borne de acces, este “*element tripolar*”. Bornele tranzistorului sunt grupate în două porți (conform principiului de funcționare al tranzistorului).

După numărul de porți, elementele de circuit se clasifică în:

- *uniporți* (elemente dipolare);
- *diporți* (elemente tripolare sau cuadripoli, sau diporți).

Mărimile de intrare și de ieșire ce caracterizează un circuit se numesc generic “*semnale*”. Semnalul de intrare se numește “*excitație*” (x), iar semnalul de ieșire se numește “*răspuns*” (y). Relația de dependență dintre semnalele de ieșire și cele de intrare se numește “*ecuație caracteristică*”:

$$y = y[x(t), t] \quad (1.27)$$

Numărul de ecuații caracteristice este egal cu numărul de porți ale elementului de circuit. Curbele $y = y(x)$ (fig. 1.9) pentru valori diferite ale timpului t se numesc *caracteristici de funcționare*. Un punct $M(x, y)$ ce aparține caracteristicii de funcționare se numește *punct de funcționare*.

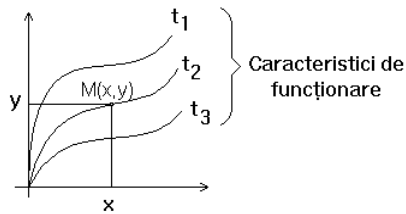


Fig. 1.9

Forma caracteristicii de funcționare poate fi: - liniară sau neliniară; - variabilă sau invariabilă în timp. Distingem astfel următoarea clasificare a elementelor de circuit:

- *elemente liniare invariabile în timp*, cu ecuația caracteristică $y = C \cdot x$;
- *elemente liniare variabile în timp* (parametrice) cu ecuația caracteristică: $y(t) = C(t) \cdot x(t)$;
- *elemente neliniare invariabile în timp* cu ecuația caracteristică $y = y(x)$;
- *elemente neliniare variabile în timp* având ecuația caracteristică $y = y[x(t), t]$.

Independent de natura perechii de mărimi (x, y) elementul de circuit este univoc de terminat de pr odusul semnalelor numit *putere instantanee*. Întrucât în teoria circuitelor lucrăm cu mărimi electrice, semnalele sunt mărimile electrice *tensiune și curent*.

“Produsul tensiune-curent se numește putere electrică instantanee $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ și reprezintă variația energiei electrice în raport cu timpul

$$p(t) = \frac{dW}{dt} \quad (1.28)$$

Din punct de vedere al puterii instantanee, ce poate fi pozitivă dacă energia crește sau negativă dacă energia scade, elementele de circuit se clasifică în:

- *elemente de circuit pasive*, dacă în orice punct în planul caracteristicii de funcționare produsul $u \cdot i = p > 0$ este pozitiv (corespunde unei puteri primite de elementul de circuit);

- *elemente de circuit active*, dacă în cel puțin un punct în planul caracteristicii de funcționare puterea instantanee este negativă.

Elementele pasive capabile să acumuleze energie în câmp electric sau magnetic se numesc *reactive*.

Asocierea sensurilor de referință pentru elementele dipolare

Considerând circuitul elementar din fig.1.10, să exemplificăm asocierea sensurilor de referință pentru - *dipolul generator*, respectiv pentru *dipolul receptor*. În acest sens considerăm circuitul din fig.1.10 pe care îl descompunem în dipol generator și receptor.

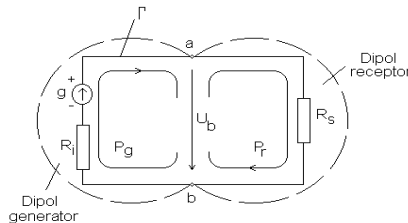


Fig. 1.10

Aplicând legea conducției pe conturul Γ al circuitului, obținem:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E} + \vec{E}_i) \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \rho \frac{i}{A} \cdot ds, \text{ sau } e = i(R_i + R_s) \quad (1.29)$$

Separând dipolul generator cu suprafața C_g imaginară avem:

$$\int_{b, C_g}^a (\vec{E} + \vec{E}_i) \cdot d\vec{S} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_b^a \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \rho \cdot \int_b^a \vec{j} \cdot d\vec{S} = R_i \cdot i \quad (1.30)$$

relație echivalentă cu : $v_b - v_a + e = R_i \cdot i \quad (1.31)$

Pentru dipolul receptor câmpul electric imprimat ($\int E_i = 0$) este nul iar prin aplicarea legii conducției rezultă:

$$\int_{a,r,b} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \rho \cdot \int_a^b \vec{j} \cdot d\vec{S} = R_S \cdot i = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{S} = R_S \cdot i, \quad (1.32)$$

relație echivalentă cu: $v_b - v_a = R_S \cdot i$.

Notând tensiunea la borne $u_b = v_a - v_b$ în baza relațiilor de mai sus se pot defini următoarele reguli de asociere între curenți și tensiuni, la bornele dipolului generator respectiv receptor.

◆ *regula de la generatoare:*

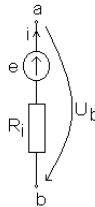


Fig. 1.11

sensurile de referință ale tensiunii la borne U_b și curențului i față de oricare din bornele dipolului sunt opuse (o mărime intră, cealaltă iese).

Relațiile între mărimile electrice la bornele dipolului sunt:

$$\begin{aligned} e - u_b &= R_i \cdot i \text{ sau } u_b = e - R_i \cdot i \\ u_b \cdot i &= e \cdot i - R_i \cdot i^2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

$p = u_b \cdot i > 0$ dacă $e \cdot i > R_i \cdot i^2$ debitată;
 dacă $e \cdot i < R_i \cdot i^2$ primită;

regula de la receptoare:

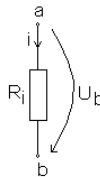


Fig. 1.12

- sensurile de referință ale tensiunii la borne U_b și curențului I , prin laturile receptoare, coincid (ambele intră sau ies față de aceeași bornă). Relațiile între mărimile electrice la bornele dipolului sunt:

$$\begin{aligned} u_b &= R_S \cdot i \\ u_b \cdot i &= R_S \cdot i^2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

$p > 0$ deoarece $R_S \cdot i^2 > 0$ - putere primită.

Sintetic, pentru orice dipol a cărui structură internă este cunoscută, definim următorul flux de putere între dipoli:

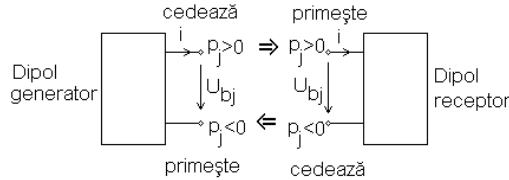


Fig. 1.13

Generalizând ecuația dipolului generator pentru orice dipol (generator sau receptor) *ecuația Joubert a unei laturi j*: este: $e \mp u_b = z_j i$ unde: z_j - operator atașat curentului, impus de natura dipolului.

1.4.1. Elemente pasive de circuit. Rezistorul

Rezistorul este un element pasiv de circuit ce primește energie electrică și o transformă ireversibil în căldură. Ecuația caracteristică a rezistorului este:

$$u = u(i(t), t) \text{ sau } i = i(u(t), t) \quad (1.35)$$

iar curba caracteristică în planul (U,I) se numește “*caracteristica tensiune-curent*” sau “*curent-tensiune*”.

Caracteristica curent tensiune (efect dependent de cauză $i=i(u)$) asociază tensiunii variabila independentă iar curentului variabila dependentă.

Fizic, *tensiunea este cauza iar curentul este efectul* deoarece tensiunea produce câmp electric E sub acțiunea căruia purtătorii de sarcină se deplasează. În planul caracteristicii i-u curba caracteristică poate avea orice formă.

Raportul efect - cauză este independent de efect și de cauză, depinzând numai de proprietatea materialului (ρ) și de dimensiunile geometrice ale corpului lungime și secțiune și este întotdeauna un raport pozitiv.

Enunț:

“Numim conductanță statică (G) raportul dintre curent și tensiunea aplicată.”

Conductanța este definită prin relația:

$$\frac{1}{R} = G = \frac{i}{u} \text{ [S] (siemens)} \quad (1.36)$$

În planul caracteristicii, conductanța reprezintă tangenta unghiului format de dreapta ce unește punctul de funcționare cu originea axelor:

$$k \cdot \operatorname{tg} \alpha = G = \frac{i}{u}$$

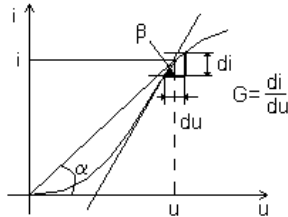


Fig. 1.14

Enunț:

“Numim conductanță dinamică raportul dintre variația curentului pe variația de tensiune în jurul punctului de funcționare:

$$g(t) = \frac{d i}{d v} = \frac{1}{r(t)} = k \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (1.37)$$

Inversa conductanței dinamice se numește rezistență dinamică :

$$r(t) = \frac{1}{k \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \beta . \quad (1.38)$$

Altfel spus, rezistență dinamică reprezintă variația de tensiune ce produce o variație unitară a curentului.

A. Clasificarea rezistoarelor

1. Rezistorul liniar invariabil în timp are simbolul redat în fig.1.15, iar curba caracteristică în planul (i;u) este o dreaptă în cadranele I și III ce trece prin origine. Rezistență statică este identică cu rezistență dinamică și nu depinde de valoarea curentului ce trece prin circuit.

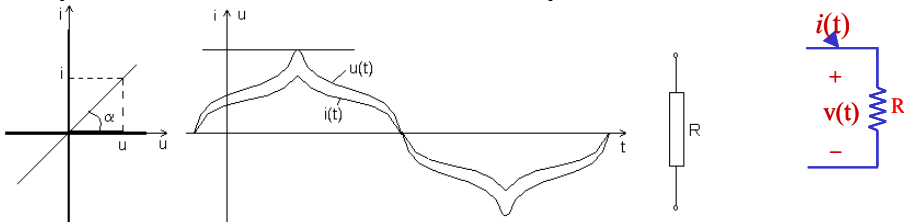


Fig. 1.15

Ecuția caracteristică $i(t) = G \cdot u(t)$ sau $u(t) = R \cdot i(t)$ indică o dependență liniară între semnale. Puterea instantanee $p = u \cdot i = R \cdot i^2 = G \cdot u^2 > 0$ este întotdeauna pozitivă indiferent de sensul asociat tensiunii și curentului.

Integrala puterii instantanee pe un interval se numește energie, și este dată de relația: $W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$. Unitatea de măsură a energiei electrice este kilowattul - oră. [KWh = 10^3 J/s · 3600s = $3.6 \cdot 10^6$ Joule].

2. Rezistorul liniar variabil în timp (parametric) este în tâlnit sub denumirea de potențiomtru având rezistența variabilă în raport cu poziția cursorului. Simbolul atașat este redat în fig.1.16, iar caracteristica este o dreaptă dependentă de poziția cursorului. Ecuția caracteristică este: $i = G(t) \cdot u(t)$ sau $u(t) = R(t) \cdot i(t)$.

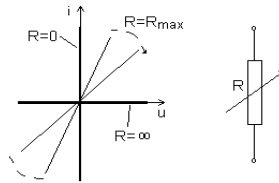


Fig. 1.16

3. Rezistoarele neliniare sunt elementele de circuit ce au rezistența electrică dependentă de curentul ce trece prin circuit. Rezistorul este complet determinat dacă se cunoaște dependența $i = i(u)$ tabelat, analitic sau grafic. Din punct de vedere al formei curbei caracteristice $i = i(u)$, aceste rezistoare se clasifică în: *neliniare cu caracteristică simetrică* sau reciprocă.

Caracteristica acestor rezistoare este simetrică față de origine, ele nefiind dependente de modul de conectare al bornelor la sursă, altfel spus nu au borne polarizate. Un exemplu de rezistor neliniar simetric îl constituie *termistorul*, care are rezistență variabilă cu temperatura. Simbolul și caracteristica unui astfel de rezistor sunt redată în fig.1.17:

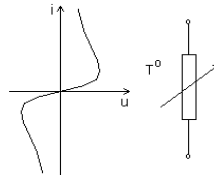


Fig. 1.17 Termistorul

- neliniare cu caracteristică nesimetrică prezentând borne polarizate. În categoria acestor rezistoare intră majoritatea componentelor electronice precum:
 - diodele redresoare cu simbolul și caracteristica prezentate în fig.1.18;
 - diodele Zenner cu simbolul și caracteristica prezentate în fig.1.19;
 - tranzistoarele cu simbolul și caracteristica prezentate în fig.1.20 (un exemplu)

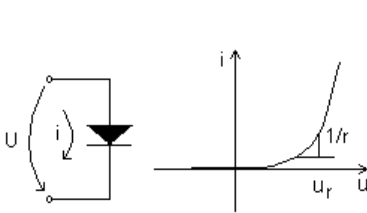


Fig.1.18 Diodă redresoare

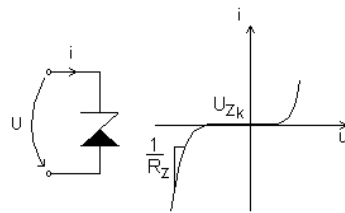


Fig.1.19 Dioda **Zenner**.

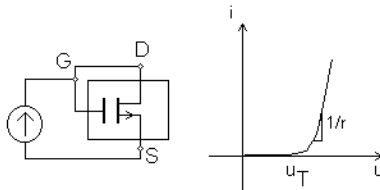


Fig.1.20 Tranzistorul MOSFET (*G* - grilă, *D* - drenă, *S* - sursă).

Observații:

1. Pentru rezistoarele ce nu prezintă borne polarizate dependența curent-tensiune $i = i(u)$ poate fi redată și în forma $u = u(i)$ în care curentul i este variabilă independentă, iar tensiunea u este variabilă dependentă. Exemplu: varistorul ce prezintă rezistență variabilă cu tensiunea aplicată și are curba caracteristică $u = u(I)$ (fig 1.21).

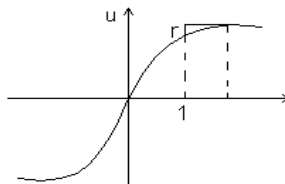


Fig. 1.21

2. Rezistorul este complet definit dacă se cunoaște valoarea rezistenței R_n , puterea disipată $P = \frac{U^2}{R}$, tensiunea maximă de lucru pentru a dezvolta $P = P_n$.

B. Conexiuni ale rezistoarelor

1. Conexiunea serie

O latură ce conține “n” rezistențe înseriate poate fi redusă la o latură cu o rezistență echivalentă. Valoarea rezistenței echivalente se obține din definiția tensiunii la bornele laturii și din impunerea condiției de conexiune $i = i_1 = i_2 = \dots = i_n$

$$u = \int_1^n \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_2^3 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \dots = \sum_{i=1}^n R_i \cdot i \quad (1.39)$$

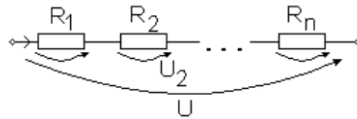


Fig. 1.22a

Rezultă astfel valoarea rezistenței echivalente asociate laturii:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (1.40)$$

2. Conexiunea paralel

Rezistența echivalentă rezultă din impunerea condiției de conexiune $U = U_1 = \dots = U_n$ și aplicarea teoremei I Kirchhoff obținând după efectuarea unor calcule simple:

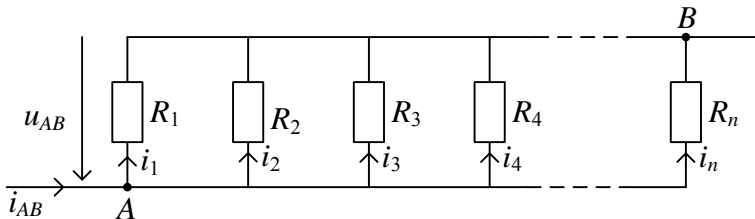


Fig. 1.22b

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (1.41)$$

3. Divizorul de tensiune

În conexiunea serie o utilitate foarte mare o are *divizorul de tensiune* prezentat în fig.1.23.

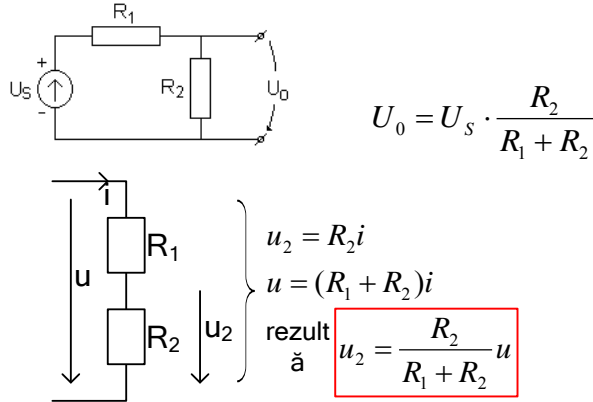


Fig. 1.23

Definim atenuarea tensiunii (A_U) ca fiind raportul dintre tensiunea de ieșire și tensiunea de intrare. Această atenuare pentru divizorul de tensiune este: $A_U = \frac{U_0}{U_s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$. (1.42)

4. Divizorul de curent

Conexiunii pe ralele i se poate defini divizorul de curent (fig.1.24) denumit și *atenuatorul de curent conform următoarei relații:*

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = I \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad (1.43)$$

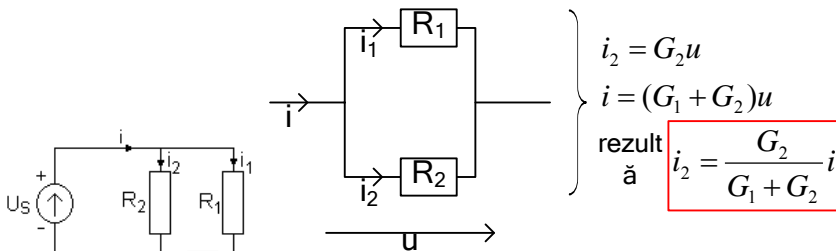


Fig. 1.24

Generalizând relația divizorului pentru n laturi în paralel se poate determina curentul prin latura "k" cu următoarea expresie: $I_k = I \cdot \frac{R_{eq}}{R_{laturik}}$.

Atenuarea divizorului de curent (A_i) este definită prin relația:

$$A_i = \frac{I_2}{I} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}. \quad (1.44)$$

5. Punți rezistive

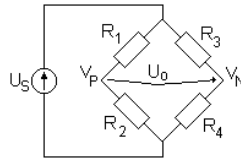


Fig. 1.25

Aplicând divizorul de tensiune pentru determinarea potențialului punctului "P" respectiv "N", obținem:

$$\left. \begin{aligned} V_P &= V_S \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = V_S \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \\ V_N &= V_S \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = V_S \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \\ U_0 &= V_P - V_N \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_0 = V_S \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} - \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \right) \quad (1.45)$$

$$U_0 = V_S \cdot \left(\frac{1 + \frac{R_3}{R_4} - 1 + \frac{R_1}{R_2}}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)} \right) = V_S \cdot \frac{\left(\frac{R_3}{R_4} - \frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)} \quad (1.46)$$

Condiția de echilibru a punții (punte Wheatstone) este de egalitate a potențialelor $V_P = V_N$ având următoarea formulare matematică: $\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}$.

6. Lanturi de rezistențe

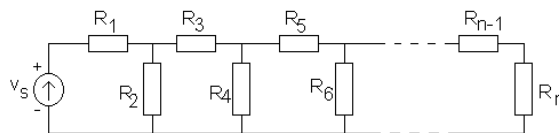


Fig. 1.26

Rezistența echivalentă a circuitului de mai sus se obține utilizând divizorul de curent:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_6} + \dots}}}}} \quad (1.47)$$

1.4.2 Elemente de circuit active (surse)

Rolul unei surse este de a iniția tensiunea și curentul într-un circuit, fiind în general un element activ de circuit. Pot exista circuite în care nu toate sursele din laturile circuitului sunt elemente active.

În schemele electrice sursele le regăsim în două variante surse de curent și de tensiune.

1.4.2.1 Surse independente de tensiune

Sursele independente de tensiune sunt numite și generatoare de tensiune și pot fi:

- generatoare de tensiune ideale;
- generatoare de tensiune reale.

a. Generatorul ideal de tensiune

- este un element activ de circuit cu proprietatea că tensiunea la borne este riguros constantă și nu depinde de valoarea curentului de bitat. Simbolul generatorului ideal de tensiune și caracteristica tensiunii la borne de curentul debitat $U_b = f(i)$ sunt redată în fig.1.27.

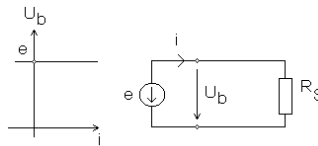


Fig.1.27

Regimurile de funcționare ale acestui generator pot fi (regimuri impuse de sarcină):

- regim de mers în gol: $R_S \rightarrow \infty, i = 0, p = u_b \cdot i = 0$; (1.48)

- regim de mers în sarcină: $R_S \neq 0, i = \frac{l}{R_S}, p = e \cdot i \neq 0$; (1.49)

- *regim de scurtcircuit:* $R_s = 0, i \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$, motiv pentru care nu poate funcționa în regim de scurtcircuit (puterea infinită nu-i posibil fizic]

Observație:

“O sursă ideală de tensiune niciodată nu trebuie să funcționeze în scurtcircuit.”

b. Generatorul real de tensiune

- conține în serie cu generatorul o rezistență R_i (rezistența internă) ce limitează curentul de scurtcircuit la o valoare finită. Simbolul atașat generatorului real și caracteristica acestuia sunt prezentate în fig.1.28.

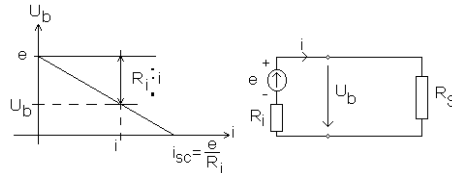


Fig. 1.28

Regimul de funcționare a acestui generator funcție de valoarea sarcinii poate fi:

- *regim de mers în gol:* $R_s \rightarrow \infty, i = 0, p = 0$; (1.50)

- *regim de mers în sarcină:* $R_s \neq 0, i = \frac{e}{R_s + R_i}, p \neq 0$; (1.51)

- *regim de scurtcircuit:* $R_s = 0, i = \frac{e}{R_i}, p \neq \infty, 0$. Rezistența internă este rezistența echivalentă a dipolului generator.

c. Conexiuni ale surselor de tensiune

Două sau mai multe surse de tensiune pot fi conectate în serie sau în paralel.

Conexiunea serie

“Tensiunea electromotoare rezultantă este egală cu suma tensiunilor electromotoare ale surselor.”

$$e = \sum_{k=1}^n e_k \quad \text{și} \quad R_i = \sum_{k=1}^n R_{i_k} \quad (1.52)$$

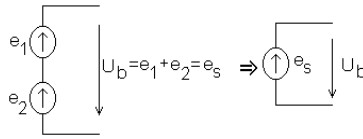


Fig. 1.29

Conexiunea paralel (derivație)

Sursele ideale de tensiune se pot conecta în paralel numai dacă au aceleași tensiuni electromotoare. T.e.m. echivalentă a “n” surse reale de tensiune conectate în paralel și rezistența internă echivalentă sunt exprimate prin relațiile:

$$e = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{e_k}{R_{i_k}}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{i_k}}} \quad \text{și} \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{i_k}} \quad (1.53)$$

Observație:

“Două surse ideale cu t.e.m diferite **nu** se conectează în paralel deoarece apar curenți de circulație între surse.”

1.4.2.2. Surse independente de curent

Sursele de curent mai sunt denumite și *generatoare de curent*. În schemele electrice sunt întâlnite ca generatoare ideale, respectiv reale de curent.

a. Generatorul ideal de curent

Generatorul ideal de curent este un element activ de circuit cu proprietatea că intensitatea curentului debitat este riguros constantă și independentă de valoarea tensiunii la bornele sale.

Simbolul generatorului ideal și caracteristica $u_b = f(i_g)$ (sau $i_g = f(u_b)$), sunt redată în figura de mai jos:

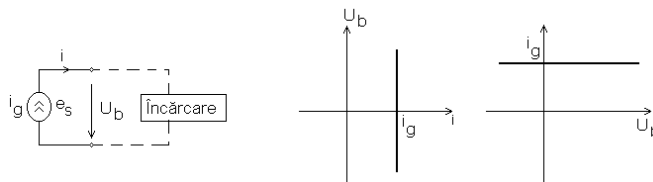


Fig. 1.30

Regimurile de funcționare ale generatorului ideal de curent (regimuri impuse de încărcare) sunt:

- regim de mers în gol : $R_s \rightarrow \infty$; $u_b \rightarrow \infty$; $p \rightarrow \infty$;
- regim de mers în sarcină : $R_s \neq 0$; $u_b \neq 0$; $p = \text{finită}$;
- regim de scurtcircuit : $R_s = 0$; $u_b = 0$; $p = 0$.

Observație:

“Un generator de curent **nu** poate funcționa în gol.”

b. Generatorul real de curent

- conține în paralel cu generatorul ideal o rezistență R_i ce limitează tensiunea la borne la o valoare finită în cazul funcționării în gol. Simbolul electric atașat și caracteristica $u_b = f(i_g)$ este redată în fig.1.31.

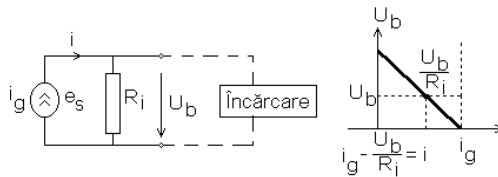


Fig. 1.31

Regimurile de funcționare impuse de încărcare sunt:

- în gol : $R_s \rightarrow \infty$; $u_b = R_i i_g$; $p = u_b i_g$
- în sarcină : $i = i_g \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s}$; $u_b = i \cdot R_s = i_g \cdot \frac{R_s \cdot R_i}{R_i + R_s}$; $p = u_b \cdot i$,
- în scurtcircuit : $R_s = 0$; $u_b = 0$; $p = 0$.

c. Conexiunile generatoarelor de curent

Generatoarele de curent pot fi conectate în serie sau derivație (paralel):

- derivație - curentul total debitat de generatorul echivalent este $i_g = i_{g1} + i_{g2}$

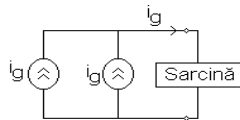


Fig.1.32

- serie - niciodată nu se conectează în serie generatoare ideale de curent cu intensități diferite.

1.4.2.3 Echivalența dintre sursele reale de tensiune și sursele reale de curent

“Pentru ca o sursă reală de tensiune electromotoare "e" și rezistență "R_i" să fie echivalentă cu sursă reală de curent sunt necesare valori identice ale curenților debitați pe aceeași rezistență de sarcină R_s”.

- sursa de tensiune reală debitează pe R_s curentul: $i_u = \frac{e}{R_{i_v} + R_s}$

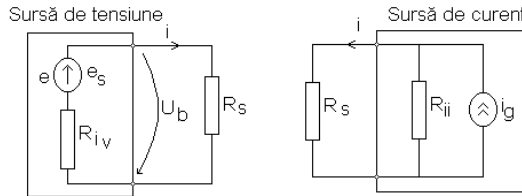


Fig. 1.33

- sursa de curent real debitează pe aceeași R_s curentul: $i_i = i_g \cdot \frac{R_{i_i}}{R_{i_i} + R_s}$

Impunând condiția de egalitate a curenților ce străbat sarcina $i_i = i_v$ se obțin relațiile de echivalență a surselor: $e = i_g \cdot R_{i_i}$; $R_{i_i} \equiv R_{i_v}$

Observație:

Relațiile de echivalență ale surselor reale de tensiune cu surse reale de curent permit asocierea alimentării unei sarcinii oarecare R_s fie de la un dipol echivalent de tensiune fie de la un dipol echivalent de curent.

1.4.2.4 Surse dependente (controlate)

O sursă este dependentă dacă valoarea ei este controlată fie de un curent, fie de o tensiune din circuit. Din acest punct de vedere avem control al surselor fie în curent, fie în tensiune. Sursele controlate pot fi:

- surse de tensiune cu control în tensiune (VCVS);
- surse de tensiune cu control în curent (CCVS);
- surse de curent cu control în tensiune (VCCS);
- surse de curent cu control în curent (CCCS);

◆ Surse de tensiune cu control în tensiune (Voltage Controlled Voltage Source - VCVS)

Sursele de tensiune cu control în tensiune au simbolul rețut în fig.1.34 și ecuația caracteristică:

$$v = K_v \cdot v_x$$

- unde: - v = t.e.m. a sursei;
 - v_x = tensiunea de comandă (control); sau v_b
 - K_v = constantă adimensională.(V/V) , sau A, sau u

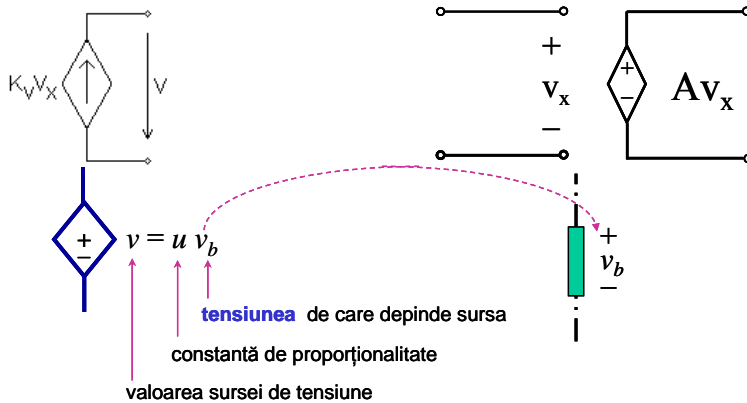


Fig.1.34

◆ Surse de tensiune cu control în curent (Current Controlled Voltage Source - CCVS)

Sursele de tensiune cu control în curent au simbolul redat în fig.1.35 și ecuația caracteristică:

$$v = K_r \cdot i_x \quad (1.54)$$

- unde: - v = t.e.m. a sursei;
 - i_x = curentul de comandă (control);
 - K_r = constantă cu dimensiunile unei rezistențe
 ce exprimă dependența t.e.m. a sursei controlate,
 de curentul de comandă).

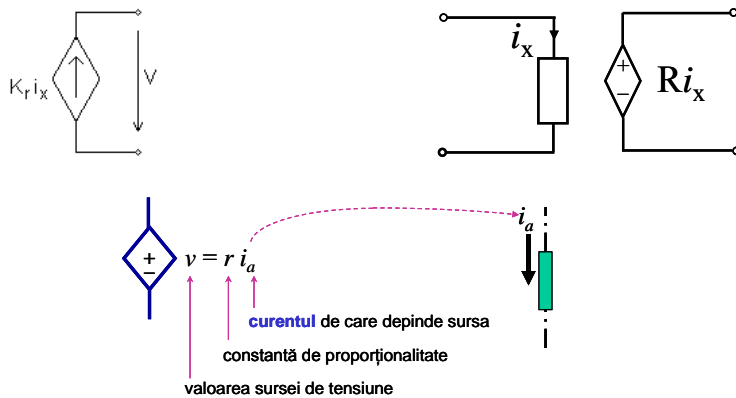


Fig.1.35

◆ Surse de curent cu control în tensiune (Voltage Controlled Current Source - VCCS)

Sursele de curent cu control în tensiune au simbolul redat în fig.1.36 și ecuația caracteristică:

$$i = K_g \cdot v_x \quad (1.55)$$

unde: - K_g - constantă de proporționalitate cu dimensiunile unei conductanțe;

- i - curentul sursei;
- v_x - tensiunea de comandă (control).

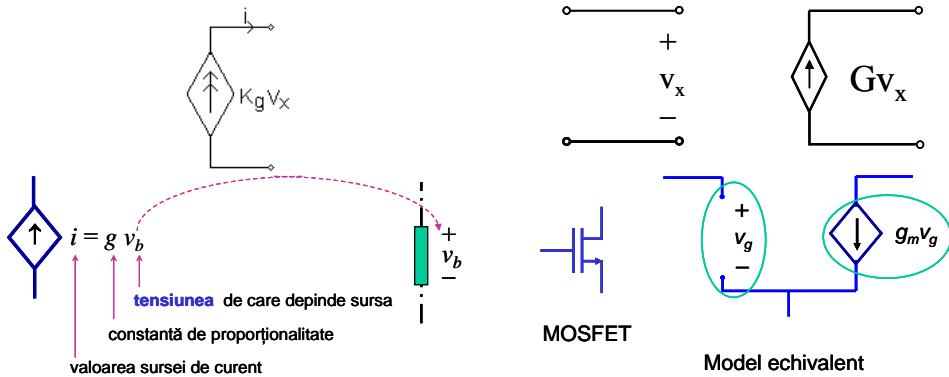


Fig.1.36

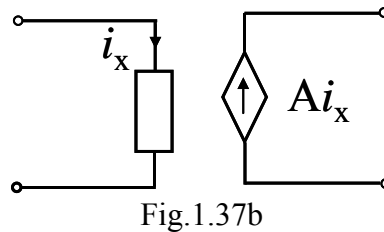
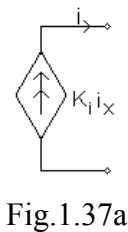
◆ Surse de curent cu control în curent (Current Controlled Current Source - CCCS)

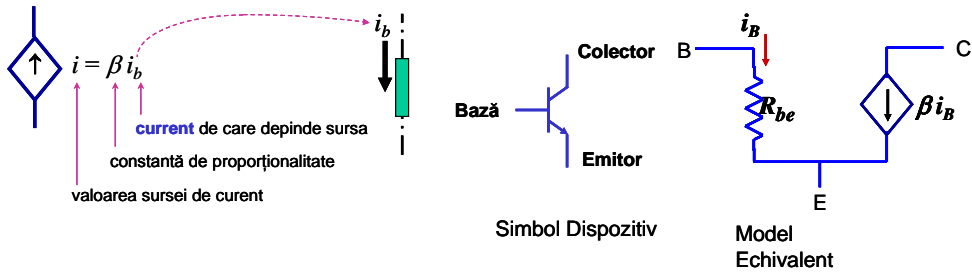
Sursele de curent cu control în curent au simbolul din fig.1.37 și ecuația caracteristică:

$$i = K_i \cdot i_x \quad (1.56)$$

- unde: - K_i - constantă adimensională(A/A);
- i_x - curentul de comandă (control);

- i - curentul sursei.





Transistor cu Joncțiune Bipolară

Fig.1.37

Exemple de surse dependente:

1. Transformarea rezistențelor în surse dependente.

Să considerăm o sursă ideală de tensiune ce alimentează două rezistențe - practic un divizor de tensiune (fig.1.38).

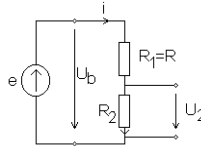


Fig. 1.38

Tensiunea la bornele rezistenței R_2 este:

$$u_2 = i \cdot R_2 \quad \text{cu} \quad i = \frac{u_b}{R_1 + R_2}, u_b = e, \quad u_2 = u_b \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} . \quad (1.57)$$

Notând:

$$- K_v = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{și} \quad u_b = u_x, \quad (1.58)$$

se obține ecuația sursei de tensiune cu control în tensiune $u = u_b \cdot K_v$.

Transformarea rezistenței în sursă dependentă trebuie să nu modifice puterea în circuit. În primul caz rezistența R_2 o putem considera ca aparținând unui dipol receptor ce are puterea instantanee pozitivă deci primită. Transformarea rezistenței în sursă dependentă trebuie să conserve puterea în sensul de putere primită. Dipolul trece astfel în dipol generator. Pentru un dipol generator puterea primită este $p = u_b \cdot i < 0$.

Schema electrică asociată circuitului în condițiile conservării puterii (putere primită) și sensului curentului devine:

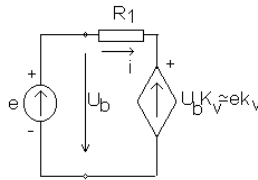


Fig. 1.39

Să încercăm să generalizăm rezultatul obținut pentru o sursă dependentă de tensiune. Considerăm un potențiomtru conectat la o sursă test de tensiune cu valoarea de 1V conform fig.1.40

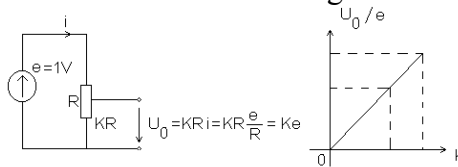


Fig. 1.40

Definim $A = \frac{u_0}{e} = k$ - atenuarea.

Concluzie:

Dacă constanta de proporționalitate a sursei dependente $0 \leq k \leq 1$ se obține un atenuator de semnal (un potențiomtru este un atenuator de semnal).

2. Transformarea sursei dependente în rezistență echivalentă.

Să considerăm un circuit format dintr-o rezistență R și două surse, una independenta cealaltă dependentă conectate conform fig.1.41.

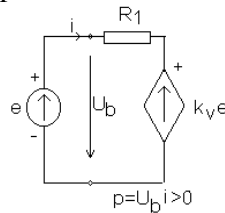


Fig. 1.41

Rolul sursei independente este de a crea un semnal de control, iar al sursei dependente este de a răspunde la acest semnal.

Ne interesează răspunsul sursei dependente, răspuns ce căutăm să-l obținem apoi sub forma unei rezistențe atașate sursei independente.

Presupunând s emnalul de c ontrol $e = IV$ iar p rin a plicarea teoremelor *Kirchhoff* obținem:

$$i = \frac{e - k_v \cdot e}{R} = \frac{e}{R} \cdot (1 - k_v) = \frac{e}{R_{ech}} \quad (1.59)$$

Valoarea rezistenței echivalente asociate față de bornele sursei independente este:

$$R_{ech} = \frac{e}{i} = \frac{R}{1 - k_v} \quad (1.60)$$

Cazuri particulare:

a) Dacă:

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \\ e = 1V \\ R = 1\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow i = \frac{1}{1} = 1A \quad R_{ech} = \frac{e}{i} \quad R_{ech} = R \quad (1.61)$$

Concluzie:

Sursa dependentă are polaritatea din figură și este scurtcircuitată.

b) $0 \leq k \leq 1$

Exemplu: $k = 0.9 \Rightarrow i = \frac{1}{1} \cdot (1 - 0.9) = 0.1A$, $R_{ech} = \frac{e}{i} = 10\Omega$

$k = 0.999 \Rightarrow i = 0.001$, $R_{ech} = 1000\Omega$

Concluzie:

Sursa are aceeași polaritate, curentul păstrează semnul prin circuit dar cu valoare mult redusă. Sursa dependentă se comportă ca un atenuator.

c) Ce se întâmplă dacă $K \notin [0,1]$.

Exemplu:

- conectăm sursa dependentă cu aceeași polaritate față de sursa independentă (fig.1.42).

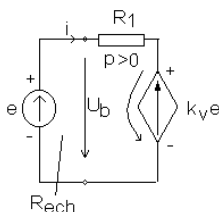


Fig. 1.42

c1. $K < 0$ (coeficient de proporționalitate negativ)

$$i = \frac{e}{R} \cdot (1 - K) = \frac{e}{R_{ech}} \quad R_{ech} = \frac{R}{1 - K}$$

$$K = 0, R_{ech} = R$$

$$K = -9, R_{ech} = \frac{R}{1 + 9} = \frac{R}{10} \Rightarrow 0 < R_{ech} < R$$

$$(1.62)$$

Sursa cu polaritate inversă, curentul nu schimbă sensul prin rezistența R.

$$i = \frac{1V}{R_{ech}} = \frac{1V}{1\Omega} \cdot 10 = 10A \quad (1.63)$$

Circuitele cu $K < 0$ sunt denumite amplificatoare cu reacție negativă. Valoarea negativă a amplificării (K) este echivalentă cu schimbarea polarității sursei dependente.

c2. $K > 1$

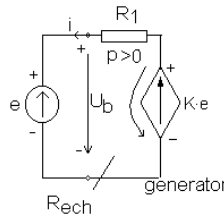


Fig. 1.43

$$i = \frac{e}{R} \cdot (1 - K) \quad \text{cu } K > 1 \text{ rezultă } i < 0 \text{ schimbă de sens.}$$

$$R_{ech} = \frac{e}{i} < 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ech} = 0 \text{ ceea ce fizic nu era posibil.}$$

Concluzii:

1. Rolul unei surse dependente este de a crea unui dipol o rezistență echivalentă cu orice valoare aparentă.
2. Circuitele ce au $K > 1$ sunt denumite amplificatoare cu reacție pozitivă sau negativă funcție de semnul acestui coeficient. Semnul lui K din ecuația R_{ech} impune tipul reacției. Valorile subunitare ale coeficientului de proporționalitate definesc atenuatoarele.
3. *Modelarea componentelor electronice prin surse dependente*
 - a. *Modelarea funcționării tranzistorului bipolar în RAN prin surse dependente*

O importantă aplicație a surselor dependente o constituie tranzistorul bipolar npn din amplificatoarele electronice. Tranzistorul npn, cu simbolul redat în figura 1.44, conform principiului de funcționare, amplifică de β ori curentul de bază i_B dacă valoarea tensiunii de intrare depășește căderea de tensiune a joncțiunii bază - emitor.

Caracteristica externă a tranzistorului redă dependența curentului din colector funcție de tensiunea colector - emitor având ca parametru curentul de bază.

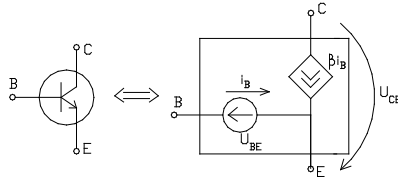


Fig. 1.44

Modelul de tranzistor reprezentat în figura 1.44 conform principiului de funcționare al acestuia asociază între colector și emitor o sursă de curent comandată de curentul de bază.

Exemplu 1. Pentru circuitul de mai jos să se determine valoarea tensiunii de intrare astfel încât la ieșire să avem o tensiune de 10V.

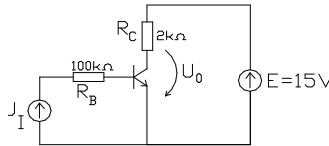


Fig. 1.45

Utilizând modelarea tranzistorului n pn c u v alorile tip ice $U_{BE} = 0,7V, \beta = 150$ rezultă pentru circuitul din figura de mai sus circuitul echivalent.

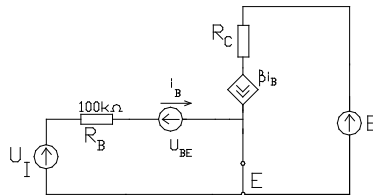


Fig. 1.46

Aplicând pe ochiul de intrare și pe ochiul de ieșire teorema II Kirchoff se obține:

$$\begin{aligned} U_I &= U_{BE} + R_B \cdot i_B \\ U_0 &= E - R_C \cdot \beta i_B \end{aligned} \quad (1.64)$$

Astfel din a doua ecuație se obține curentul de bază:

$$i_B = \frac{E - U_0}{R_C \cdot \beta} = \frac{15 - 10}{2 \cdot 150} = 0,025 \text{mA} \quad (1.65)$$

iar tensiunea necesară aplicată la intrare:

$$U_I = 0,7 + 180 \cdot 0,025 = 3,2V$$

b. Modelarea amplificatorului operațional prin surse dependente

Funcționarea unui amplificator presupune aplicarea unui semnal de la o sursă pe poarta de intrare și obținerea unei replici mărite a acestuia ce se aplică pe o sarcină. Ideal această funcționare a amplificatorului operațional presupune o sursă la intrare și o sarcină la ieșire.

În funcție de tipul sursei conectate la intrare (de tensiune sau de curent) și de tipul semnalului oferit la ieșire (tensiune sau curent) putem defini:

- amplificatoare de tensiune
- amplificatoare de curent
- amplificatoare de transrezistență
- amplificatoare de transconductanță

b.1. Amplificatorul de tensiune

Un amplificator cu caracteristică de transfer liniară admite pentru fiecare poartă un dipol echivalent de tensiune sau de curent. Poarta de intrare este pur rezistivă și pasivă modelată printr-o rezistență de intrare R_i . Poarta de ieșire este una activă modelată printr-o rezistență de ieșire R_o și o sursă dependentă.

Amplificatorul de tensiune are poarta de intrare alimentată de la o sursă de tensiune reală și aplică sarcinii R_L o tensiune de lucru mărită de A_{oc} (amplificarea). Schema echivalentă adoptată pentru a amplificatorul de tensiune este:

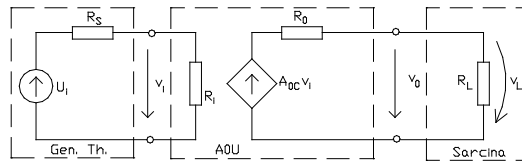


Fig. 1.47

Din formula divizorului de tensiune se poate determina tensiunea aplicată porții de intrare: $v_i = v_s \frac{R_i}{R_s + R_i}$ iar la ieșire se obține

$$\text{tensiunea: } v_L = v_o \frac{R_L}{R_L + R_o} \cdot A_{oc} \cdot v_i \quad (1.66)$$

În absența încărcării $R_L \rightarrow \infty, v_o = A_{oc} v_i$ motiv pentru care A_{oc} se numește amplificarea în curent deschis. Raportul ieșire pe intrare se numește amplificarea.

$$\frac{v_L}{v_s} = \frac{R_L}{R_L + R_o} \cdot A_{oc} \cdot \frac{R_i}{R_s + R_i} \quad (1.67)$$

și conține termenii a două divizoare de tensiune unul reflectând ieșirea R_L iar al doilea intrarea și un termen al amplificării sursei A_{oc} comandate.

Sarcina este în general indezirabilă și $(v_L/v_s) < A_{oc}$. Pentru a obține amplificarea în tensiune $v_L/v_s = A_{oc}$ se impune $R_i \gg R_s$ și $R_o \ll R_L$. Dacă $R_i \rightarrow \infty, R_o = 0$ amplificatorul de tensiune este ideal.

b.2. Amplificatorul de curent

Amplificatorul de curent presupune alimentarea porții de intrare de la o sursă de curent conform figurii:

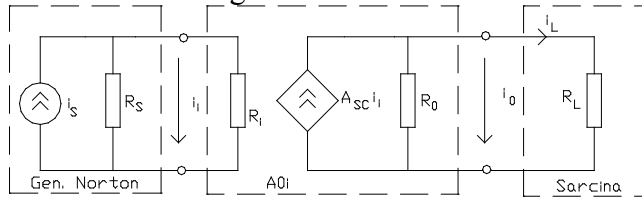


Fig. 1.48

Aplicând divizorul de curent pe circuitul de intrare și de ieșire obținem:

$$i_i = i_s \frac{R_s}{R_s + R_i}, i_L = A_{sc} \cdot i_i \cdot \frac{R_o}{R_o + R_L} \quad (1.68)$$

În caz de scurtcircuitare a sarcinii $R_L=0$, $i_o = A_{sc} \cdot i_i$ motiv pentru care A_{sc} se numește amplificarea de scurtcircuit. Raportul sarcină pe sursă poartă numele de amplificare în curent.

$$\frac{i_L}{i_s} = \frac{R_s}{R_s + R_i} A_{sc} \frac{R_o}{R_o + R_L} \quad (1.69)$$

ce este dependentă de sursă și sarcină. Optimizarea transferului semnalului implică $R_i \ll R_s$ și $R_o \gg R_L$ iar la limită $R_i=0$, $R_o \rightarrow \infty$ se obține un amplificator ideal de curent cu amplificarea $i_L/i_s=A_{sc}$.

b.3. Amplificatoare de transrezistență și transconductanță

La am plificatorul d e t ensiune sau d e cu rent r aportul semnalelor intrare, ieșire sunt adimensionale și se notează V/V sau A/A. Dacă intrarea este un curent iar ieșirea este o tensiune amplificatorul se numește de transrezistență având schema conform figurii:

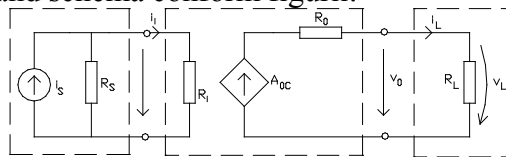


Fig. 1.49

iar funcția de transfer:

$$\frac{v_L}{i_s} = \frac{R_L}{R_o + R_L} A_{oc} \frac{R_s}{R_s + R_i} \quad (1.70)$$

unde A_{oc} - amplificare fără sarcină în V/A.

Acest tip de amplificator este convertor curent-tensiune. Transferul optim se realizează pentru $R_i \ll R_s$ și $R_o \ll R_L$. Dacă intrarea este o tensiune

și ieșirea este un curent atunci amplificatorul este de transconductanță conform modelului:

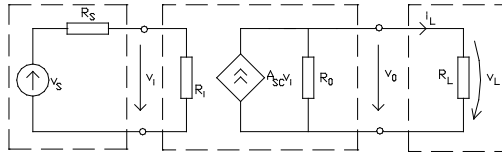


Fig. 1.50

Amplificarea sarcină-sursă este:

$$\frac{i_L}{v_s} = \frac{R_o}{R_o + R_L} A_{sc} \frac{R_i}{R_i + R_s} \quad (1.71)$$

Acest model de amplificator este asociat tranzistoarelor FET cu valorile tipice ale parametrilor $A_{sc}=5\text{mS}$, $R_i=1\text{M}\Omega$, $R_o=10\text{K}\Omega$. Oricărui amplificator i se definește amplificarea în putere $A_p = \frac{P_L}{P_s} = \frac{\text{puterea sarcinii}}{\text{puterea sursei}}$, ce se exprimă în decibeli, prin relația: $A_p(\text{dB}) = 10 \log_{10} A_p$.

1.4.3 Elemente de stocare a energiei (elemente reactive)

1.4.3.1 Condensatorul

Energia electromagnetică are două componente: una electrică și una magnetică. Elementele de circuit ce au proprietatea de a acumula energie se numesc elemente reactive.

Raportul dintre efect și cauză în câmp electrostatic definește capacitatea:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\iint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \epsilon \cdot \frac{A}{d} \quad (1.72)$$

cu simbolul în fig.1.51.

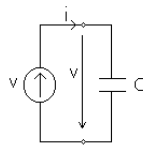


Fig. 1.51

Condensatorul este un element de circuit de ecuație caracteristică:

$$q = q[u(t), t] \quad \text{sau} \quad u = u[q(t), t] \quad (1.73)$$

dacă se considera variabila independentă tensiunea u respectiv sarcina q .

Curba caracteristică în planul q - u se numește caracteristica sarcină-tensiune.

În teoria circuitelor interesează dependența tensiune-curent sau curent-tensiune. Ecuația de legătură pentru obținerea acestei dependențe este dată de curentul de deplasare:

$$\frac{dq}{dt} = i \quad (1.74)$$

În aceste condiții, considerând tensiunea variabilă independentă, obținem caracteristica curent-tensiune i - u a condensatorului.

Exemplul 1:

Un condensator alimentat cu o tensiune trapezoidală conform fig.1.52.determina următoarea formă a curentului prin condensator în baza

ecuației $i = \frac{d}{dt} \cdot (C \cdot u) = C \cdot \frac{du}{dt}$

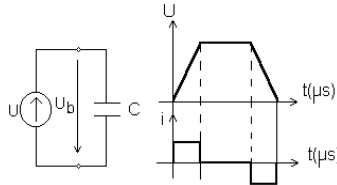


Fig. 1.52

a. Clasificarea condensatoarelor

Conform clasificării elementelor de circuit distingem:

- Condensatorul liniar invariabil în timp

Condensatorul liniar invariabil în timp are următoarea ecuație caracteristică:

$$q(t) = C \cdot u(t) \text{ cu } C > 0 \quad (1.75)$$

În planul (q,u) curba caracteristică este o dreaptă ce trece prin origine cu panta proporțională cu C .

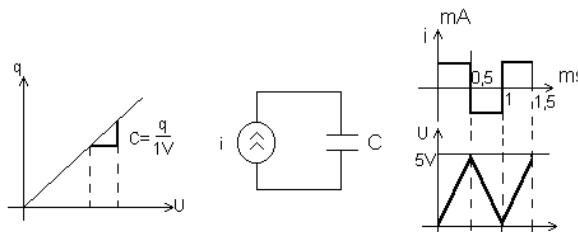


Fig. 1.53

Ecuația curent-tensiune $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt} = i(t)$ poate fi exprimată și în forma tensiune-curent indicând memoria în tensiune a condensatorului:

$$u = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^0 i(t') dt' + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t') dt' = u_{C0} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t') dt'. \quad (1.76)$$

Alimentând de la o sursă de curent un condensator, forma de variație a tensiunii la bornele acestuia este redată în fig.1.53

Tensiunea la bornele condensatorului $u(t)$ de pinde de tensiunea inițială u_{C0} și de valorile anterioare ale curentului ($0 < t' < t$).

În consecință condensatorul este complet determinat dacă se cunoaște valoarea capacității C și a tensiunii inițiale de încărcare u_{C0} .

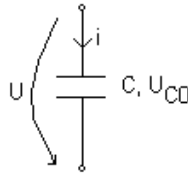


Fig. 1.54

Dependența tensiunii de la bornele condensatorului de tensiunea inițială u_{C0} indică o acumulare de energie în câmpul electric al condensatorului:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2 = \int_0^t u \cdot i dt = \int_0^t u \cdot C \cdot \frac{du}{dt} dt = \int_0^u C \cdot d\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad (1.77)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2 = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot q^2$$

Comparativ cu rezistorul ce absoarbe energia electrică $w = p \cdot dt$ cu $p = R \cdot I^2$ și o transformă ireversibil în căldură, condensatorul absoarbe energia electrică din circuit, o stochează și o returnează circuitului.

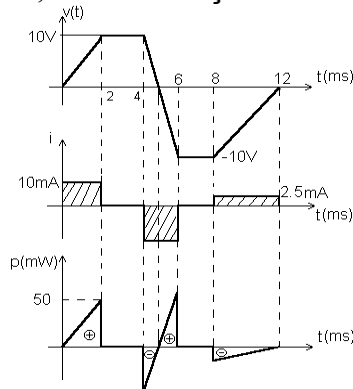


Fig. 1.55

Spre exemplificare aplicând o tensiune cu forma redată în fig.1.55 pe o capacitate de $1\ \mu\text{F}$ se obține puterea instantanee $p = u \cdot i = \frac{dW_e}{dt}$, pozitivă și negativă, cu valoarea constantă a energiei ($W=100\mu\text{J}$).

Condensatorul liniar variabil în timp (parametric)

Condensatorul liniar variabil în timp (parametric) are simbolul prezentat în figura 1.56:

Ecuția caracteristică a condensatorului variabil:

$$q = C(t) \cdot u(t) \tag{1.78}$$

permite definirea ecuației curent-tensiune:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt} + u \cdot \frac{dC}{dt} \tag{1.79}$$

- unde:
- $C \cdot \frac{du}{dt}$ - componenta de pulsație a curentului;
 - $u \cdot \frac{dC}{dt}$ - componenta parametrică.

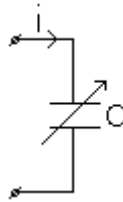


Fig. 1.56

b. Conexiuni ale condensatoarelor

Două sau mai multe condensatoare pot fi conectate în paralel sau în serie.

Conexiunea paralel

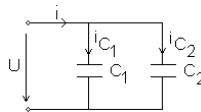


Fig. 1.57

Condiția de conexiune este: $u_1 = u_2 = \dots = u_k$;

Aplicând teorema I Kirchhoff $i = \sum_{k=1}^n i_k$, cu $i_k = C_k \cdot \frac{du}{dt}$ rezultă:

$$i = \sum_{k=1}^n C_k \cdot \frac{du}{dt} = C_{eq} \cdot \frac{du}{dt} \tag{1.80}$$

Din ecuația de mai sus putem identifica valoarea capacității echivalente:

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k \quad (1.81)$$

Conexiunea serie

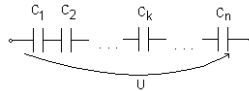


Fig. 1.58

Condiția de conexiune $i_1 = i_2 = \dots = i_k = C_k \cdot \frac{du_k}{dt}$

Tensiunea de la bornele capacității echivalente conform teoremei II Kirchhoff este suma căderilor de tensiune pe condensatoarele conectate în serie $u = \sum_{k=1}^n u_k$. Derivând în raport cu timpul obținem relația:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{du_k}{dt} \quad (1.82)$$

Dar $\frac{du_k}{dt} = \frac{i_k}{C_k}$, iar $\frac{du}{dt} = \frac{i}{C_{eq}}$. deci:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (1.83)$$

Capacitatea echivalentă a unui sistem de două condensatoare serie este:

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (1.84)$$

Observație:

- Pentru conexiunea paralel capacitățile de valori foarte mici pot fi neglijate, iar pentru conexiunea serie capacitățile mari pot fi neglijate.

c. Teoremele de echivalență ale condensatoarelor

După cum am arătat orice condensator este complet determinat de valoarea capacității C și de tensiunea inițială u_{c0} .

Ecuația tensiune-curent $u(t) = u_{c0} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t') dt'$ poate fi pusă în forma:

$$-u_{c0} + U(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t') dt \quad (1.85)$$

Considerând condensatorul cu dipol receptor (fig.1.54), ecuația *Joubert* atașată este:

$$e + u_b = Z_C \cdot i \quad (1.86)$$

unde: $-z_c = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t dt'$ - operator integral atașat curentului.

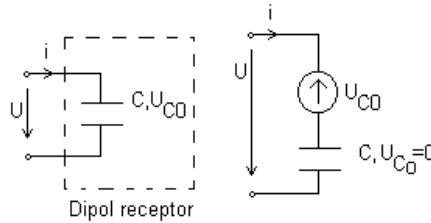


Fig. 1.59

Identificând termenii rezultă: $e = -u_{c0}, u_b = u(t)$.

Pentru a încărca un condensator de capacitate C și tensiune inițială u_{c0} , tensiunea aplicată la borne trebuie să depășească valoarea t.e.m. echivalente.

Prima teoremă de echivalență indică transformarea unui condensator cu condiții inițiale nenule într-o capacitate cu condiții inițiale nule conectată în serie cu o sursă internă ($e = -u_{c0}$) de t.e.m. cu valoarea constantă U_{c0} .

A doua teoremă de echivalență transformă un condensator cu condiții inițiale nenule într-o sursă de curent ideală conectată în paralel cu un condensator fără condiții inițiale.

Demonstrația este simplă prin aplicarea teoremelor de echivalență ale surselor sau :

$$Cu(t) = CU_{c0} + \int_0^t i(t')dt' \Rightarrow C \frac{du}{dt} - CU_{c0}\delta(t) = i(t) \quad (1.87)$$

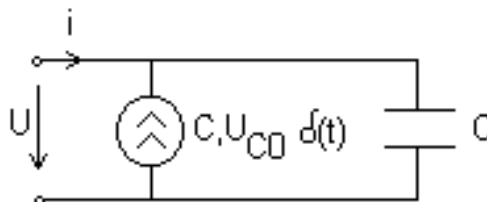


Fig. 1.60

În consecință orice condensator poate fi reprezentat printr-un dipol receptor fie de tensiune fie de curent.

1.4.3.2 Bobina (inductorul)

Bobina este un element de circuit ce are proprietatea de a produce flux magnetic când este parcursă de curent. Raportul efect / cauză poartă numele de inductanță (inductivitate).

$$L = \frac{d\varphi_{sr}}{i_{sr}} = \frac{N \cdot \iint \vec{B} d\vec{A}}{\frac{1}{N} \cdot \oint \vec{H} d\vec{s}} = \mu \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}, \quad [\text{Henry}] = \left[\frac{\text{Wb}}{\text{A}} \right] \quad (1.88)$$

Ecuția caracteristică a bobinei este dată de dependența efect-cauză $\varphi = \varphi[i(t), t]$ iar simbolul bobinei este:



Fig. 1.61

Curba caracteristică în planul flux-curent se numește caracteristica flux-curent. Ecuția de legătură între flux și tensiune este dată de legea inducției electromagnetice:

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\varphi_{sr}}{dt} \quad (1.89)$$

și reprezintă ecuația tensiune-curent.

Considerând o bobină, conform figurii 1.54, și aplicând legea inducției rezultă:

$$\int_a^b \vec{E} d\vec{s} + \int_b^c \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\varphi_{sr}}{dt} \quad \text{sau} \quad R \cdot i - u_b = - \frac{d\varphi_{sr}}{dt} \quad (1.90)$$

Pentru o bobină ideală (rezistență nulă) ecuația tensiune - flux este:

$$u_L = \frac{d\varphi_{sr}}{dt} \quad (1.91)$$

Ecuția flux-tensiune indică dependența fluxului magnetic de valoarea inițială a fluxului din bobină și de valorile anterioare ale tensiunii la bornele bobinei: $0 < t' < t$:

$$\varphi_{sr} = \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt + \int_0^t u_L(t') dt' = \varphi_0 + \int_0^t u_L(t') dt' \quad (1.92)$$

a. Clasificarea bobinelor

Conform clasificării elementelor de circuit bobinele necuplate magnetic se clasifică în:

Bobine liniare invariabile în timp

Ecuția caracteristică este $\varphi = L \cdot i$ cu $L > 0$. În planul $\varphi = \varphi(i)$ este o dreaptă ce trece prin origine (fig.1.56). Dependența tensiune-curent numită și caracteristica $u = f(i)$ este dată de relația $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$.

Ecuția tensiune - curent a bobinei ideale poate fi scrisă în formă compactă

$$u_L = z_L i \tag{1.93}$$

unde: - z_L - operator diferențial atașat curentului.

Ecuția $u = u(i)$ indică faptul că pentru a avea tensiune la bornele unei bobine trebuie să existe variație de curent.

Alimentând o bobină de la o sursă ideală de curent cu forma curentului dată de fig.1.56, tensiunea la bornele bobinei (ptr. $L = 4\text{mH}$), va fi:

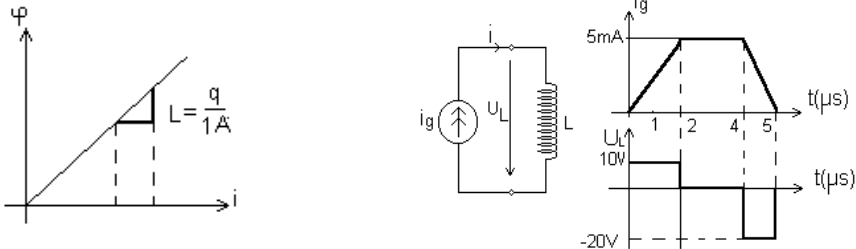


Fig. 1.62

Caracteristica $I = I(u_L)$ presupune alimentarea bobinei de la o sursă de tensiune și considerarea curentului variabil dependent conform ecuațiilor:

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t') dt' = i_{L_0} + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t') dt' \tag{1.94}$$

În baza relațiilor de dependență, curentul printr-o bobină depinde de valoarea inițială a curentului din bobină și de valorile anterioare ale tensiunii la bornele bobinei.

În consecință bobina este complet determinată de valoarea inductanței L și de valoarea inițială a curentului prin bobină i_{L_0} . Alimentând o bobină de la o sursă de tensiune cu forma redată în fig.1.63, curentul prin bobină este:

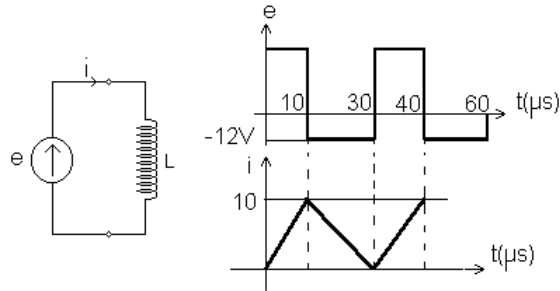


Fig. 1.63

$$i = i_{L_0} + \frac{u_L}{L} \cdot t, \text{ pentru } L=2,4\mu\text{H}.$$

Bobina liniară variabilă în timp și necuplată magnetic (parametrică)

Ecuția caracteristică a acestei bobine este:

$$\varphi(t) = L(t) \cdot i(t) \quad (1.95)$$

unde: - $L(t)$ inductanța proprie.

Ecuția în tensiune a bobinei se obține din legea inducției fiind:

$$u_L = \frac{d\varphi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \frac{dL}{dt}. \quad (1.96)$$

b. Relații de echivalență a bobinelor ce conțin condiții inițiale

O bobină liniară de inductivitate L și curent inițial i_{L_0} poate fi echivalată cu un dipol echivalent pe baza ecuației Joubert.

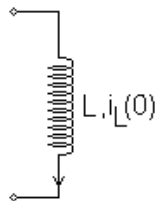


Fig. 1.64

Ecuția Joubert în tensiune permite definirea, în baza echivalenței surselor de tensiune în surse de curent, ecuației Joubert în curent

$e \mp U_b = z_{L_{ech}} \cdot i_{latura}$. Atunci:

$$\frac{e}{z} \mp \frac{u_b}{z} = i_{latura} \Rightarrow y_L \cdot e \mp y_{U_b} = i_{latura} \Rightarrow y_L \cdot e = i_{gl} \Rightarrow i_{gl} \mp y_L \cdot u_b = i_{latura} \quad (1.97)$$

Ultima relație reprezintă ecuația Joubert în curent. Schemele echivalente asociate bobinei liniare sunt redată în fig.1.65.

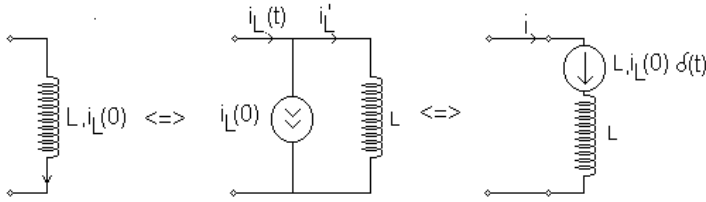


Fig. 1.65

$$i_{L(t)} = i_{L(0)} \cdot h(t) + \frac{1}{L} \cdot \int u_L dt \quad (1.98)$$

c. Bobine liniare cuplate magnetic

O bobină “s” parcursă de curentul “i_s” se numește cuplată magnetic cu al te n -1 bobine dacă fluxul magnetic este funcție și de intensitățile curenților din celelalte bobine.

$$\phi_s = \phi \cdot (i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)) \quad (1.99)$$

Bobinele fiind liniare fluxul total al bobinei s este o suma a fluxurilor elementare (mutuale)

$$\phi_s = \sum_{k=1}^n L_{sk} \cdot i_k \quad (1.100)$$

unde: - $L_{ss} = \left. \frac{\phi_s}{i_s} \right|_{i_k=0, k \neq s}$ - inductivitatea proprie ce reprezintă raportul dintre fluxul propriu al

bobinei s și curentul ce la produs când cele n-1 bobine nu sunt parcurse de curent;

- $L_{sk} = \left. \frac{\phi_s}{i_k} \right|_{i_s=0, s \neq k}$ - inductivitatea mutuală;

◆ $L_{ss} > 0, L_{ks} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \\ = 0 \end{cases}$ - inductivitatea mutuală este funcție de fluxul mutual

produs de bobina k față de fluxul propriu al bobinei s

◆ Pentru a reprezenta în scheme, fără ambiguitate, modul în care se introduce în calcule inductivitatea mutuală se indică prin steluțe (asterisc) bornele polarizate ale bobinelor.

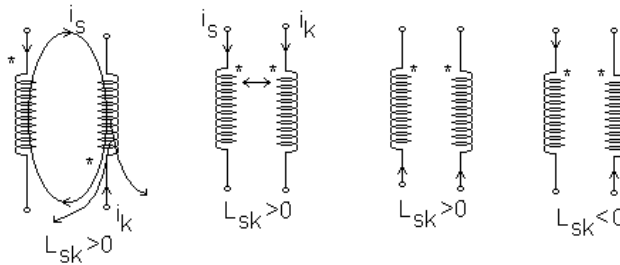


Fig. 1.66

Regula de asociere a fluxurilor mutuale în analiza circuitelor electrice:

- fluxul mutual se consideră pozitiv dacă curenții ce parcurg bobinele cuplate magnetic au același sens față de bornele polarizate, altfel este negativ.

Ecuția tensiune-curent a bobinei cuplate magnetic este:

$$u_L = \frac{d\varphi_S}{dt} = \sum_{k=1}^n L_{Sk} \cdot i_k = L_{SS} \cdot \frac{di_S}{dt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S}}^n L_{Sk} \frac{di_k}{dt} \quad (1.101)$$

Ecuția în tensiune a bobinei liniare cuplată magnetic poate fi exprimată în funcție de operatorul de impedanță z_L astfel:

$$u_S = z_{L_{SS}} \cdot i_S + \sum_{k=1}^n z_{L_{Sk}} \cdot i_k \quad (1.102)$$

unde: $z_{L_{SS}} = L_{SS} \cdot \frac{d}{dt}$, $z_{L_{Sk}} = L_{Sk} \cdot \frac{d}{dt}$ - operatori diferențiali atașați curentului.

Din ecuațiile tensiune-curent ale bobinei cuplate magnetic se pot obține ecuațiile curent-tensiune, ecuații de forma:

$$i_S = \Gamma_S \cdot \int_0^t u_S dt + \sum_k \Gamma_{Sk} \cdot \int_0^t u_k dt + i_S(0) \Rightarrow i_S = \sum_{k=1}^n \Gamma_{Sk} \cdot \int_0^t u_k dt + i_S(0) \quad (1.103)$$

Exemplul nr.1

Exprimarea dependentei curent-tensiune pentru trei bobine cuplate magnetic.

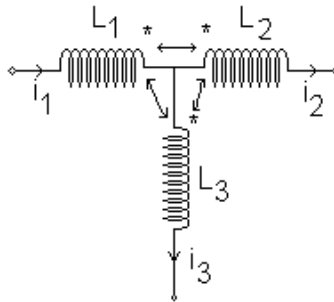


Fig. 1.67

Ecuția în tensiune a fiecărei bobine conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d}{dt}(\varphi_1) = \frac{d}{dt}(\varphi_{11} - \varphi_{12} - \varphi_{13}) \\ u_2 &= \frac{d}{dt}(\varphi_2) = \frac{d}{dt}(-\varphi_{21} - \varphi_{22} - \varphi_{23}) \\ u_3 &= \frac{d}{dt}\varphi_3 = \frac{d}{dt}(-\varphi_{31} - \varphi_{32} - \varphi_{33}) \end{aligned} \quad (1.104)$$

Exprimând fluxurile funcție de curenți rezultă:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \cdot \frac{d i_1}{d t} - L_{12} \cdot \frac{d i_2}{d t} - L_{13} \cdot \frac{d i_3}{d t} \\ u_2 &= -L_{12} \cdot \frac{d i_1}{d t} + L_{22} \cdot \frac{d i_2}{d t} + L_{23} \cdot \frac{d i_3}{d t} \\ u_3 &= -L_{13} \cdot \frac{d i_1}{d t} + L_{23} \cdot \frac{d i_2}{d t} + L_{33} \cdot \frac{d i_3}{d t} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Utilizând forma matriceală a dependenței flux-curent $[\varphi] = [L] \cdot [i]$ ecuațiile de mai sus pot fi scrise și în forma curent-tensiune astfel:

$$[u] = \frac{d}{dt} \cdot [L] \cdot [i], \quad \int_{-\infty}^t [u] dt = [L] \cdot [i] \quad (1.106)$$

Înmulțind la stânga cu $[L]^{-1} \Rightarrow [L]^{-1} \cdot \int_{-\infty}^t [u] dt = [i]$ sau: $[i_s(0)] + [L]^{-1} \cdot \int_0^t [u] dt = [i]$

unde:

$$- [L] = \begin{vmatrix} L_1 & -L_{12} & -L_{13} \\ -L_{12} & L_2 & -L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_3 \end{vmatrix} - \text{matricea inductivităților};$$

$$\Delta = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 + L_{12} \cdot L_{23} \cdot L_{13} + L_{12} \cdot L_{23} \cdot L_{13} - L_{13}^2 \cdot L_2 - L_{23} \cdot L_1^2 - L_{12}^2 \cdot L_3$$

1.5 Elemente de teoria grafurilor.

Circuitele electrice se caracterizează din punct de vedere topologic prin graful lor.

Graful unui circuit se obține înlocuind, în schema electrică, elementele pasive prin simple linii, generatoarele ideale de tensiune prin scurtcircuite, iar generatoarele ideale de curent printr-o latură întreruptă (bornă în gol).

Un graf este alcătuit din noduri și laturi. Dacă unui circuit electric i se asociază fiecărei laturi un sens de trecere al curentului, graful asociat circuitului se numește graf orientat.

Nodul este punctul de conexiune a cel puțin trei elemente de circuit. Dacă numărul de elemente de circuit este mai mic de trei nodul este fictiv (supernod sau legătură echipotențială).

Latura reprezintă legătura dintre noduri pe care există cel puțin un element de circuit. Laturile ce nu conțin elemente de circuit sunt la turi scurtcircuitare. Nodurile conectate de laturile fictive au același potențial.

Un **graf** se numește **conex** dacă de la un nod oarecare al circuitului se poate trece, parcurgând exclusiv laturi ale grafului, la orice alt nod al acestuia.

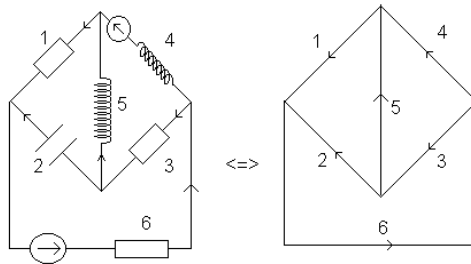


Fig. 1.68

Un **graf neconex** poate fi transformat într-un graf conex prin legarea la pământ a unui nod (prin alegerea unui potențial de referință).

Un rol important în studiul proprietăților topologice ale grafurilor îl au bucla și arborele.

Bucla reprezintă totalitatea laturilor ce formează o curbă închisă.

Arborele reprezintă legătura între toate nodurile unui circuit (graf) fără a forma bucle.

Laturile ce aparțin arborelui se numesc ramuri: r_a . Notând cu n - numărul de noduri ale unui graf și cu l - numărul de laturi atunci, conform Enunți arborelui, ramurile satisfac relația $r_a = n - 1$.

Observație:

Într-un graf, indiferent de arborele ales, numărul de ramuri este același ($r_a = n - 1$). Laturile unui graf ce nu aparțin arborelui se numesc coarde sau joncțiuni.

Numim buclă independentă, buclele ce conțin cel puțin o latură care nu aparține celorlalte bucle. Modul cel mai simplu de a determina buclele independente este de atașare a unei coarde arborelui.

Exemplu: Graful atașat punții Wheatstone admite arboreii:

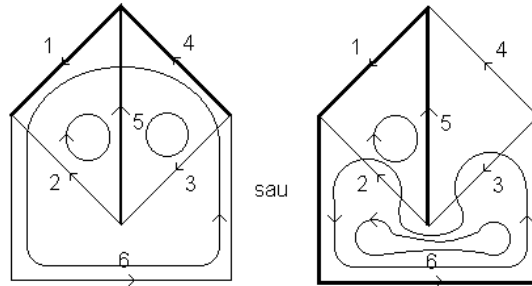


Fig. 1.69

Pentru graful din stânga:

- laturile 1,5 ale arborelui + latura 2 (coarda) formează bucla I;
- laturile 4,5 (arbore) + latura 3 formează bucla II;
- laturile 1,4 + latura 6 formează bucla III.

Concluzii:

1. Numărul buclelor independente este egal cu numărul de coarde ($b = l - r_a$).
2. Numărul de laturi ale unui circuit satisface relația $l = r_a + b$.

Matricile topologice ale unui circuit electric

Grafurile servesc la lustrarea proprietăților topologice ale circuitelor iar matricile servesc la descrierea cantitativă a acestor proprietăți. În analiza circuitelor se procedează astfel:

- se desenează graful orientat (graful cu sensurile curenților în laturi);

- se alege un arbore principal construindu-se buclele independente și alegându-se un sens de parcurgere a fiecărei bucle, considerat sens de referință.

- se definesc matricile topologice ale circuitului

Matricea de incidență a laturilor la noduri

$[A_0]_{n \times l}$ matrice cu dimensiunea noduri \times laturi, de coeficienți α_{kj} , definiți astfel:

$$\alpha_{kj} = \begin{cases} +1, & \text{dacă latura } j \text{ iese din nodul } k \\ -1, & \text{dacă latura } j \text{ intră din nodul } k \\ 0, & \text{dacă latura } j \text{ nu este conectată la nodul } k \end{cases}$$

Dacă se înlătură o linie oarecare în matricea $[A_0]_{n \times l}$ se obține matricea redusă $[A_0]_{n-1 \times l}$. Suprimarea unei linii corespunde alegerii nodului respectiv ca *nod de referință*.

Matricea de apartenență a laturilor la bucle (ochiuri)

- $[B]_{b \times l}$ este o matrice cu dimensiunea bucle independente \times laturi, cu coeficienți β_{bj} definiți astfel:

$$\beta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{dacă latura } j \text{ aparține buclei } b(o) \text{ cu sensul de parcurgere al laturii} \\ & \text{identic cu sensul de referință ales} \\ -1, & \text{dacă latura } j \text{ aparține buclei } b(o), \text{ dar cu sens opus} \\ & \text{sensului de parcurgere al buclei} \\ 0, & \text{dacă latura } j \text{ nu aparține buclei } b(o) \end{cases}$$

CAPITOLUL 2.

TEHNICA ANALIZEI CIRCUITELOR

2.1 Tehnica transformării surselor și circuitului

Analiza circuitelor este un proces specific de determinare, prin calcul, a tensiunilor și curenților cunoscând “sursele” și “parametrii circuitului”. Oricum circuit, *excitat* de surse, produce un “*răspuns*” în tensiune sau curent. Scopul analizei circuitelor este de a determina răspunsul unui circuit la excitații date. Problema inversă, de determinare a circuitului cunoscând excitațiile și răspunsurile, este o problemă de sinteză a circuitelor.

Revenind la analiza circuitelor, aceasta urmărește determinarea “*simțului fizic*” pentru circuite, prin învățarea unor tehnici de analiză. Orice analiză presupune un suport matematic, însă, acest suport nu umbrește sensul fizic al răspunsului circuitului.

Răspunsul circuitului poate fi în curent sau în tensiune. Analiza circuitului, în funcție de răspuns, poate fi:

- analiză în curent;
- analiză în tensiune.

Analiza în curent presupune necunoscute ale circuitului curenților din laturi.

Analiza în tensiune consideră că necunoscutele sunt tensiunile de la bornele laturilor. În baza relațiilor de dependență tensiune-curent de pe laturi, se determină tensiunea (pentru analiza în curent) sau curentul (pentru analiza în tensiune).

Tehnicile de analiză a circuitelor se bazează pe aplicarea teoremelor Kirchhoff, indiferent de tipul răspunsului (curent sau tensiune). Pentru circuitele complicate, aplicarea teoremelor Kirchhoff conduce la sisteme de ecuații de mari dimensiuni, dificil de rezolvat. O reducere a timpului de calcul este posibilă prin cunoașterea tehnicilor de analiză.

O primă metodă de analiză, utilizată în special pentru circuitele simple, este *tehnica transformării surselor și a circuitului*, utilizând teoremele de echivalență ale surselor și de reducere a circuitului, teoreme prezentate în capitolul anterior.

Exemplificăm această tehnică pe circuitul din figura 2.1:

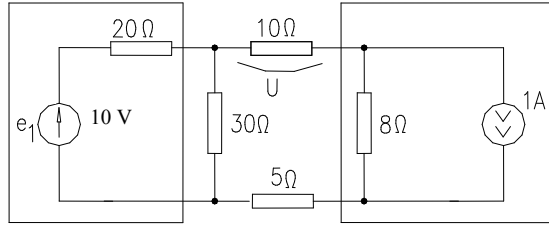


Fig. 2.1

În circuitul din fig.2.1, cunoscând sursele și elementele de circuit pasive (rezistențele) urmărim să determinăm valoarea tensiunii de la bornele rezistorului de 10Ω .

Soluție:

Un prim pas în rezolvarea acestui circuit îl constituie transformarea acestuia într-un circuit elementar prin transfigurarea surselor. A astfel, sursa de tensiune de $10V$ și rezistența de 20Ω este transformată într-o sursă reală de curent, iar sursa de curent de $1A$ și rezistența de 8Ω într-o sursă reală de tensiune, obținând circuitul echivalent următor:

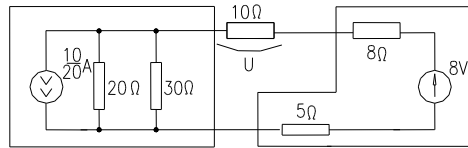


Fig. 2.2

Rezistențele de 20Ω și 30Ω se combină într-o singură rezistență paralel de 12Ω , iar rezistențele de 5Ω și 8Ω într-o rezistență serie de 13Ω .

Pentru obținerea unui circuit mult mai simplu se transformă sursa reală de curent ($0,5A$) într-o sursă reală de tensiune, obținând:

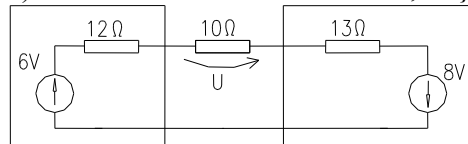


Fig. 2.3

Cele două surse serie formează o singură sursă de $14V$ de rezistență internă $12+13=25\Omega$, ce debitează pe rezistența de 10Ω . Se deduce astfel tensiunea la bornele rezistorului de 10Ω .

$$U=14(10/(10+25))=4V \quad (2.1)$$

Problemă:

Exersați această tehnică pe circuitul din fig.2.4, determinând valoarea tensiunii de pe rezistorul de $4K\Omega$.

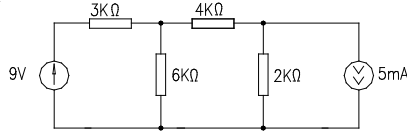


Fig. 2.4

Pentru rezolvarea c ircuitelor c omplicate, a plicarea te hnicii transformării surselor și circuitelor nu reduce semnificativ timpul de calcul. În această situație trebuie, pentru rezolvare, să apelăm la teoremele Kirchhoff.

2.2 Analiza circuitelor electrice cu ajutorul teoremelor Kirchhoff

Circuitul e lectric este alcătuit din surse (generatoare electrice) și receptoare (consumatoare electrice), conectate într-un anumit mod.

Sursele produc energia electrică. Receptoarele consumă energia electrică, în sensul că energia electrică este transformată în altă formă: energie termică, mecanică, luminoasă, acustică etc.

Un circuit electric are următoarea structură:

- **laturi:** porțiuni neramificate de circuit pe care se află cel puțin o sursă sau un consumator; numărul de laturi se notează cu **l**;
- **noduri:** punctele de întâlnire (legătură sau conexiune electrică) a cel puțin trei laturi; numărul de noduri se notează cu **n**;
- **bucle (ochiuri de circuit):** porțiuni închise de circuit electric, formate din laturi și noduri; numărul de bucle se notează cu **b** sau **o**.

În analiza c ircuitelor e lectrice c u a jutorul te oremelor K irchhoff, prezentăm câteva considerații privind aplicarea practică a teoremelor Kirchhoff. Problema analizei circuitelor se enunță astfel:

“Cunoscând structura topologică a circuitului (laturi, noduri, ochiuri) și elementele de circuit de pe fiecare latură (rezistențe, bobine, condensatoare, surse), trebuie să se determine curenții tuturor laturilor și tensiunile la bornele elementelor de circuit.”

Toate acestea pot fi calculate cu ajutorul teoremelor Kirchhoff ?

Răspunsul este afirmativ, deoarece numărul necunoscutelor este dat de numărul laturilor din circuit. Deoarece numărul laturilor este egal cu numărul ramurilor și joncțiunilor (coardelor), iar teorema I Kirchhoff (T_{1K}) se aplică pe numărul de ramuri, iar teorema II Kirchhoff (T_{2K}) pe numărul

de ochiuri (bucle, coarde), rezultă un sistem de "l" ecuații cu "l" necunoscute.

$$l = r_a + b = \underbrace{(n-1)}_{T_{1K}} + \underbrace{b}_{T_{2K}}, \quad (2.2)$$

Sistemul celor "l" ecuații se compune din:

- (n-1) - ecuații nodale (T_{1K});
- b - ecuații de ochiuri (bucle) (T_{2K}).

Pentru rezolvare trebuie ales sensul curenților și tensiunilor prin elementele de circuit.

Se ia un sens de referință arbitrar ales pentru fiecare latură ca fiind *sensul curentului*.

Indicații:

1 - pentru laturile ce conțin surse sensul curentului se consideră în sensul sursei;

2 - în celelalte laturi se ia sensul curentului cât mai apropiat de cel fizic.

3 - se asociază fiecărei laturi regula de la receptoare (ambele mărimi intră sau ies din nod fig.2.5).

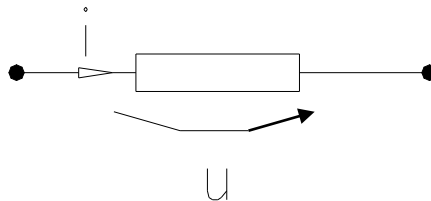


Fig. 2.5

Dacă, în urma calculului, curentul în laturile a rezultat pozitiv, atunci sensul, arbitrar ales, este sensul real. Dacă a rezultat negativ, atunci în latura sau laturile respective, sensul real este opus celui arbitrar ales.

Se alege pe fiecare ochi (bucă) un sens arbitrar de parcurs. Semnul tensiunii de la bornele elementelor de circuit este pozitiv dacă, sensul tensiunii coincide (cu regula asociată de la receptoare) cu sensul de parcurs. În caz contrar, semnul tensiunii este negativ.

2.2.1 Scrierea matriceală a teoremelor lui Kirchhoff

A. Teorema I Kirchhoff:

Teorema ne arată că suma algebrică a intensităților curenților din laturile concurente unui nod este nulă.

$$\sum_{j \in (k)} i_j = 0, \quad (j - \text{latura}), \quad (2.3)$$

Această teoremă poate fi formulată în așa fel încât să intervină numai valorile absolute ale tuturor curenților laturilor din circuit și anume:

$$\sum_{j=1}^l \alpha_{K,j} \cdot i_j = 0, \quad (2.4)$$

unde: $\alpha_{Kj} = \begin{cases} +1, & \text{dacă, curențul din latura } j \text{ iese prin nodul } k \\ -1, & \text{dacă, curențul din latura } j \text{ intră prin nodul } k \\ 0, & \text{dacă latura } j \text{ nu concură în nodul } k \end{cases}$

Relația de mai sus (T_{1K}) este valabilă în orice nod și întrucât T_{1K} se aplică pe cele $(n-1)$ noduri, rezultă (orice combinație liniară de sume nule = sumă nulă):

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^l \alpha_{K,j} \cdot i_j = 0 \quad (2.5)$$

relație ce se poate exprima desfășurat astfel:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} \cdot i_1 + \alpha_{1,2} \cdot i_2 + \alpha_{1,3} \cdot i_3 + \dots + \alpha_{1,l} \cdot i_l &= 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{n-1,1} \cdot i_1 + \alpha_{n-1,2} \cdot i_2 + \alpha_{n-1,3} \cdot i_3 + \dots + \alpha_{n-1,l} \cdot i_l &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

sau matriceal:

$$[\alpha_{k,j}]_{(n-1) \times l} \cdot [i_j]_{l \times 1} = 0 \quad (2.7)$$

Forma matriceală a teoremei I *Kirchhoff* se poate scrie:

$$[A]_{(n-1) \times l} \cdot [i] = 0 \quad (2.8)$$

unde: - $[A]$ - matricea redusă de incidență a laturilor la noduri, matrice cu dimensiunea $[(n-1) \times l]$;

- $[i]$ - matricea coloană a curenților din laturile circuitului, dimensiunea matricii fiind $l \times 1$.

B. Teorema II *Kirchhoff*

Enunț: "Suma tensiunilor la bornele laturilor j ce formează un ochi este nulă."

$$\sum_{j \in (m)} u_j = 0 \quad (2.9)$$

(numai laturile $j \in (m)$, m-ochi)

Și această teoremă poate fi formulată în funcție de valorile absolute ale tensiunilor tuturor laturilor astfel:

$$\sum_{j=1}^l \beta_{mj} u_j = 0 \quad (2.10)$$

unde:

$$\beta_{mj} = \begin{cases} +1, & \text{sensul tensiunii din latura } j \text{ este identic cu sensul de parcurgere} \\ -1, & \text{sensul tensiunii din latura } j \text{ este opus sensului de parcurgere} \\ 0, & \text{daca latura } j \text{ nu apartine ochiului } m \end{cases}$$

Întrucât T2K se aplică tuturor celor “o” ochiuri independente, rezultă următorul sistem de ecuații de ochiuri.

$$\sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l \beta_{mj} u_j = 0 \text{ sau matriceal } [B]_{o \times l} [u_j]_{l \times 1} = 0 \quad (2.11)$$

unde $[B]_{o \times l}$ este matricea de incidență a laturilor la ochiuri.

C. Ecuația Joubert sub formă matriceală

Considerând latura j a unui circuit ce conține t.e.m. e_j și operator de impedanță z_j , c urentul i_j prin latura i_j asociat conform regulii de la receptoare, prin aplicarea teoremei II Kirchhoff, și considerând tensiunea U_j la bornele laturii rezultă:

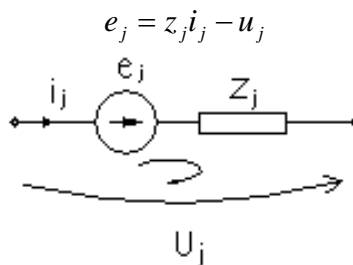


Fig. 2.6

Ecuația de mai sus poate fi scrisă și în forma:

$$e_j + U_j = z_j i_j \quad (2.12)$$

denumită “*ecuația Joubert a laturii j*”.

Discuție:

Ecuția exprimă dependența curentului prin latură de t.e.m. a laturii și tensiunea la bornele acesteia. Practic printr-o latură j a unui circuit închis circulă curent dacă în latură există surse sau / și tensiune la bornele laturii j . Afirmatia este valabilă numai dacă operatorul laturii este definit ($z_j \neq 0, \infty$).

Ecuția Joubert aplicată celor l laturi ale unui circuit conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} e_1 + u_1 = z_1 i_1 \\ e_2 + u_2 = z_2 i_2 \\ \vdots \\ e_l + u_l = z_l i_l \end{cases} \quad (2.13)$$

sau în formă matriceală:

$$[e_j]_{l \times 1} + [u_j]_{l \times 1} = \begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_l \end{bmatrix}_{l \times l} \cdot [i_j]_{l \times 1} \Leftrightarrow [e_j] + [u_j] = [z_j] \cdot [i_j] \quad (2.14)$$

unde: $[e_j]_{l \times 1}$ - reprezintă matricea t.e.m. ale laturilor;

$[u_j]_{l \times 1}$ - reprezintă matricea coloană a tensiunilor la bornele laturilor;

$[z_j]_{l \times l}$ - matricea operatorilor de impedanță proprii ai laturilor;

$[i_j]_{l \times 1}$ - matricea curenților laturilor.

Obs: Matricea operatorilor de impedanță conține elemente supradiagonale sau subdiagonale nenule dacă laturile circuitului sunt cuplate magnetic.

D. A doua formulare matriceală a teoremei II Kirchhoff

Înlocuind ecuația matriceală Joubert în prima formulare a teoremei II Kirchhoff, rezultă:

$$\sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l \beta_{mj} u_j = \sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l \beta_{mj} (z_{jj} i_j - e_j) = 0 \quad (2.15)$$

$$\sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l \beta_{mj} e_j = \sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l z_{jj} i_j \quad (2.16)$$

sau în forma matriceală:

$$[B]_{o \times l} [e_j]_{l \times 1} = [B]_{o \times l} [z_{jj}]_{l \times l} [i_j]_{l \times 1} \quad (2.17)$$

Notând:

- $[B]_{o \times l} [e_j]_{l \times 1} = [e^s]_{o \times 1}$ - matricea surselor pe ochiurile independente.

- $[B]_{o \times l} [z_{jj}]_{l \times l} = [z_{mj}]_{o \times l}$ - matricea operatorilor de impedanță ai laturilor

- se obține a doua formă a teoremei II Kirchhoff în exprimare matriceală scrisă matematic astfel:

$$[e^s]_{o \times 1} = [z_{mj}]_{o \times l} [i_j]_{l \times 1} \quad (2.18)$$

2.2.2 Consecințe ale teoremelor Kirchhoff și a relației fundamentale a teoriei grafurilor

Numărul laturilor unui circuit notat “l” este compus din ramuri “ r_a ” și joncțiuni “b”. Pentru rezolvarea acestui circuit numărul ecuațiilor trebuie să fie egal cu numărul necunoscutelor. Sistemul de ecuații ce redă soluțiile circuitului se obține din aplicarea teoremelor Kirchhoff. Întrucât $l = r_a + b = (n-1) + b$, iar T1K se aplică nodurilor și T2K se aplică pe ochiuri (bucle), rezultă aplicarea de (n-1) ori a teoremei I Kirchhoff și de b ori a T2K:

$$l = \underbrace{(n-1)}_{T1K} + \underbrace{b}_{T2K} \quad (2.19)$$

A. Curenții independenți ai unui circuit electric

Aplicarea T1K furnizează (n-1) ecuații nodale ce reprezintă relații de dependență între curenții celor “l” laturi ale unui circuit. Întrucât numărul ecuațiilor din circuit este l iar (n-1) curenții sunt dependenți, rezultă b curenți liniar independenți.

Orice circuit electric este caracterizat prin graful său. Alegând un arbore rezultă $r_a = n-1$ ramuri. Construind ochiurile (buclele) “i” independente obținem din graful circuitului b subgrafuri de ochiuri parcurse de curenți independenți i_m (curenți de ochiuri). Acești curenți de ochiuri pot fi determinați din b ecuații de ochiuri din aplicarea T2K întrucât aceasta se aplică pe ochiuri. Curenții reali din laturile circuitului sunt combinații liniare ale curenților independenți (ochiuri).

Cu alte cuvinte se poate considera că circuitul electric analizat se compune din superpoziția topologică a b circuite elementare. Exemplificăm circuitele elementare pe circuitul din fig.2.7a

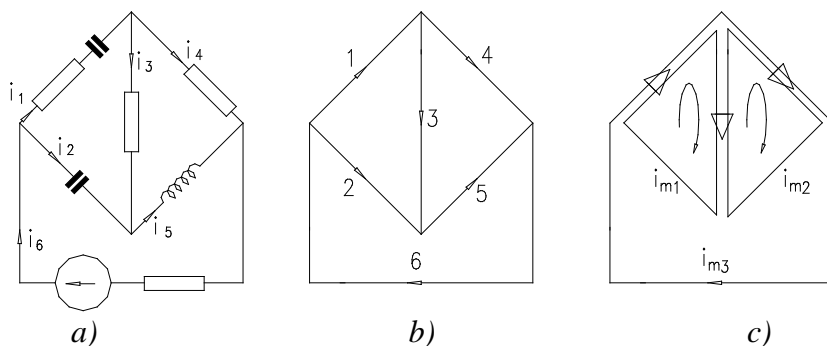


Fig. 2.7

În fig. 2.7.b a fost trasat arborele circuitului iar în fig. 2.7.c subgraful ochiurilor independente. Curenții independenți din subgraful ochiurilor au sensul asociat de parcurgere al ochiului conform figurii.

Întrucât din superpoziția subgrafurilor o chiurilor se reconstituie circuitul electric, rezultă faptul că intensitățile curenților reali din laturile circuitului sunt superpoziția curenților din ochiurile (buclele) independente:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_{m_1} + i_{m_3} \\ i_2 &= -i_{m_1} \\ i_3 &= i_{m_1} - i_{m_2} \\ i_4 &= i_{m_2} - i_{m_3} \\ i_5 &= -i_{m_2} \\ i_6 &= i_{m_3} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{exprimat matriceal} \\ \Leftrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{m_1} \\ i_{m_2} \\ i_{m_3} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

- Obs:
1. Curențul real din latura j este suma algebrică a curenților din ochiurile cărora latura j le aparține.
 2. Dacă curențul de ochi (buclă) are sensul cu curențul real el se consideră pozitiv altfel negativ.
 3. Întrucât graful se obține din superpoziția ochiurilor (buclelor) elementare, rezultă relația de dependență dintre curenții reali din latură și curenții independenți:

$$i_j = \sum_{m=1}^o i_m \quad (2.21)$$

care generalizată pentru toate laturile “ j ” ale circuitului conduce la forma matriceală :

$$\sum_{i=1}^l \beta_j i_j = \sum_{j=1}^l \sum_{m=1}^o \beta_j i_m \quad \text{sau în forma matriceală} \quad [i_j]_{l \times 1} = [B]_{l \times o}^t \cdot [i_m]_{o \times 1}$$

Consecințe:

1) Aplicarea în tr-un circuit a teoremei I Kirchhoff în exprimarea curenților din laturi funcție de curenții independenți, conduce la:

$$[A]_{n-1 \times l} [i_j]_{l \times 1} = [A]_{n-1 \times l} [B]'_{l \times v} [i_m]_{o \times 1} = 0 \quad (2.22)$$

Întrucât curenții independenți sunt diferiți de zero $[i_m] \neq 0$ rezultă:

$$[A][B]' = 0 \quad (2.23)$$

adică matricele topologice ale unui circuit sunt ortogonale.

2) Înlocuind curenții de contur în forma matriceală a teoremei II Kirchhoff, rezultă un sistem de b ecuații cu b necunoscute. Soluționarea acestui sistem permite determinarea curenților independenți respectiv a curenților din laturile circuitului:

$$\begin{cases} [B]_{o \times l} [z_{jj}]_{l \times l} [i_j]_{l \times 1} = [e^s]_{o \times 1} \\ [i_j]_{l \times 1} = [B]'_{l \times o} [i_m]_{o \times 1} \end{cases} \quad (2.24)$$

Ecuația matriceală a curenților de contur este: $[B]_{o \times l} [z_{jj}]_{l \times l} [B]'_{l \times o} [i_m]_{o \times 1} = [e^s]_{o \times 1}$, unde matricea: $[z_{m,b}]_{o \times o} = [B]_{o \times l} [z_{jj}]_{l \times l} [B]'_{l \times v}$ reprezintă matricea operatorilor de impedanță ale ochiurilor independente. Scrierea dezvoltată a sistemelor ecuațiilor de ochiuri conduce la un sistem de b ecuații cu b necunoscute i_{m_j} .

$$\begin{cases} z_{11}i_{m_1} + z_{12}i_{m_2} + \dots + z_{1o}i_{m_o} = e_1^s \\ z_{21}i_{m_1} + z_{22}i_{m_2} + \dots + z_{2o}i_{m_o} = e_2^s \\ \vdots \\ z_{o1}i_{m_1} + z_{o2}i_{m_2} + \dots + z_{oo}i_{m_o} = e_o^s \end{cases} \quad (2.25)$$

Observatii:

1) Termenii din membrul drept de tip e_o^s reprezintă suma t.e.m. întâlnite la parcurgerea ochiului "o".

2) Matricea operatorilor de impedanță ai ochiurilor este o matrice pătratică cu dimensiunea " $o \times o$ " și conține termeni de forma z_{mb} și z_{mm} .

3) Termenii de forma z_{mb} din matricea operatorilor de impedanță obținuți la intersecția liniei "m" cu coloana "b" reprezintă operatorii de impedanță comuni celor două ochiuri și are forma: $z_{m,b} = \sum_j \beta_{mj} z_j \beta_{b,j}$

- unde: $-\beta_{mj}$ este coeficient al laturilor j ce aparțin ochiului m .

- z_j este operatorul de impedanță al laturii j , latură ce aparține atât ochiului "m" cât și ochiului "b".

- $\beta_{b,j}$ este coeficient al laturii j , ce aparține ochiului b .

Întrucât coeficienții $\beta_{m,j}$ și $\beta_{b,j}$ sunt ai matricii topologice $[B]$ și indică apartenența laturii j la ochiul m și b , ei pot fi $+1, 0, -1$ după cum latura orientată j aparține ochiului în același sens de parcurgere, nu aparține, sau aparține ochiului dar are sens opus parcurgerii acestuia.

În concluzie, operatorul de impedanță comun ochiurilor m și b poate fi:

$$z_{m,b} = \sum_j \beta_{m,j} z_j \beta_{b,j} \begin{cases} > 0, \text{daca curentii ciclici parcurg latura } j \text{ in acelasi sens} \\ & (\beta_{m,j} < 0, \beta_{b,j} < 0) \text{ sau } (\beta_{m,j} > 0, \beta_{b,j} > 0); \\ < 0, \text{daca curentii ciclici parcurg latura } j \text{ in sensuri opuse} \\ & (\beta_{m,j} < 0, \beta_{b,j} > 0) \text{ sau } (\beta_{m,j} > 0, \beta_{b,j} < 0); \\ = 0, \text{daca int re cele doua ochiuri nu exista nici} \\ & \text{o latura comuna.} \end{cases} \quad (2.26)$$

3) Dacă între laturile ce aparțin ochiului m și laturile ce aparțin ochiului b sunt cuplaje magnetice, atunci operatorul de impedanță comun celor două ochiuri conține și eventualele cuplaje magnetice cu semnul operatorului de impedanță stabilit la cuplaje magnetice (funcție de bornele polarizate și sensul curenților ciclici).

4) Termenii de forma $z_{m,m}$ din matricea operatorilor de impedanță reprezintă suma operatorilor de impedanță întâlniți la parcurgerea ochiului propriu m . Semnul acestuia este

$$\text{întotdeauna pozitiv întrucât } z_{m,m} = \sum_j \beta_{m,j} z_j \beta_{m,j} = \sum_j \beta_{m,j}^2 z_j > 0. \quad (2.27)$$

4') Dacă între laturile ce aparțin aceluiași ochi (aceleiași bucle) sunt cuplaje magnetice, operatorul de impedanță al ochiului conține și cuplajele dintre laturile ce aparțin aceluiași ochi. Semnul operatorului datorat cuplajului dintre laturile ce aparțin aceluiași ochi se stabilește în funcție de sensul de trecere al curentului de contur față de bornele polarizate ale elementelor de circuit.

B. Ecuații nodale ale unui circuit electric (potențiale nodale)

Efectuând o analiză similară cu a curenților de contur privind aplicarea teoremelor Kirchhoff pentru rezolvarea unui circuit electric constatăm:

- aplicarea teoremei II Kirchhoff pe un circuit cu l laturi conduce la un sistem de b ecuații de dependență între tensiunile de la bornele laturilor. Întrucât numărul de tensiuni la bornele laturilor este l , rezultă $(n-1)$ tensiuni independente.

Determinarea celor $(n-1)$ tensiuni independente se face pornind de la definiția tensiunii la bornele unei laturi. Orice latură j este conectată între două noduri k și $k+1$ și în consecință tensiunea la bornele laturii poate fi scrisă ca diferență de potențiale ale nodurilor:

Fiecărui nod k ($k=1, \dots, n$) al circuitului electric i se asociază un potențial v_k conform definiției potențialului. Alegerea nodului “ n ” de potențial v_n ca nod de referință nu modifică tensiunile la bornele laturilor:

$$v'_k = v_k - v_n, v'_{k+1} = v_{k+1} - v_n, \text{ etc.}$$

Tensiunea unei laturi j , definită ca diferență de potențial a nodurilor de conectare, este independentă de alegerea potențialului de referință (v_n sau punctul de la ∞):

$$v_j = v_k - v_{k+1} = (v'_k + v_n) - (v'_{k+1} + v_n) = v'_k - v'_{k+1} \quad (2.28)$$

În consecință, $(n-1)$ potențiale atașate nodurilor circuitului sunt independente iar cu ajutorul lor se pot determina tensiunile la bornele tuturor laturilor.

Exemplificăm această constatare pe circuitul din figura 2.8. Definind fiecărui nod A, B, C, D potențialele v_A, v_B, v_C, v_D , tensiunile la bornele laturilor sunt redată în fig.2.8:

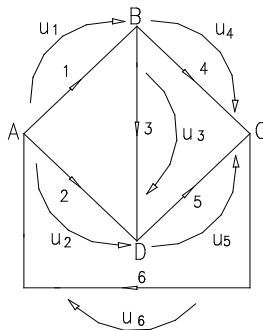


Fig. 2.8

$$\begin{cases} u_1 = v_A - v_B \\ u_2 = v_A - v_D \\ u_3 = v_B - v_D \\ u_4 = v_B - v_C \\ u_5 = v_D - v_C \\ u_6 = v_C - v_A \end{cases} \Leftrightarrow \text{sau matriceal} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

În final rezultând:

$$\begin{bmatrix} u_j \end{bmatrix}_{l \times 1} = \begin{bmatrix} A_0 \end{bmatrix}_{l \times n}^t \cdot \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (2.30)$$

Alegerea unui nod de potențial dat ca nod de referință implică suprimarea unei coloane din matricea de incidență a laturilor la n oduri. Rezultă astfel relația de dependență dintre tensiunile la bornele laturilor j și potențialele celor (n-1) noduri:

$$\begin{bmatrix} u_j \end{bmatrix}_{l \times 1} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{l \times (n-1)}^t \cdot \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix}_{(n-1) \times 1} \quad (2.31)$$

Rezolvarea unui circuit electric ce conține l laturi implică aplicarea TIK de (n-1) ori și a teoremei II Kirchhoff de b ori rezolvare posibilă dacă între tensiunile la bornele laturilor și curenții din laturi este stabilită dependența prin ecuația Joubert:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_j \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_j \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} e_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_j \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.32)$$

Utilizarea v ariabilelor a uxiliare v_k în r ezolvarea si stemului d e ecuații reduce numărul de ecuații al sistemului la (n-1) ecuații nodale întrucât:

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix} = 0 \text{ cu } \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix} \neq 0 \text{ implică } \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^t = 0 \quad (2.33)$$

Înmulțind la stânga ecuația Joubert matriceală cu matricea $\begin{bmatrix} z_j \end{bmatrix}^{-1}$

rezultă:

$$\begin{bmatrix} z_j \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_j \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_j \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Notând: $\begin{bmatrix} z_j \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} y \end{bmatrix}$ - matricea operatorilor de admitanță;

$\begin{bmatrix} y_j \end{bmatrix}_{l \times l} \cdot \begin{bmatrix} e_j \end{bmatrix}_{l \times 1} = \begin{bmatrix} i_{g_j} \end{bmatrix}_{l \times 1}$ - matricea injecțiilor de curent ale laturilor

circuitului;

ecuația matriceală a nodurilor devine:

$$\begin{aligned}
 [A]_{(n-1) \times l} \cdot [i_{g_j}]_{l \times 1} + [A]_{(n-1) \times l} \cdot [y_j]_{l \times 1} \cdot [A]_{l \times (n-1)}^t \cdot [v_k]_{(n-1) \times 1} = 0 \text{ sau} \\
 [A] \cdot [y_j] \cdot [A]^t \cdot [v_k] = -[A] \cdot [i_{g_j}]
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Notând: - $[A]_{(n-1) \times l} \cdot [y_j]_{l \times 1} \cdot [A]_{l \times (n-1)}^t = [y_{k,s}]_{(n-1) \times (n-1)}$ - matricea admitanțelor nodurilor;

- $[A]_{(n-1) \times l} \cdot [i_{g_j}]_{l \times 1} = [i_{g_k}^s]_{(n-1) \times 1}$ - matricea injecțiilor de curent sau matricea curenților injectați de surse în noduri, rezultă ecuația matriceală a nodurilor:

$$[y_{k,s}]_{(n-1) \times (n-1)} [v_k]_{(n-1) \times 1} = -[i_{g_k}^s]_{(n-1) \times 1}
 \tag{2.36}$$

Consecințe:

1) Ecuația *Joubert* a unei laturi exprimă dependența tensiunii de la bornele laturii de t.e.m. din latură și căderea de tensiune de pe latură:

$$e_j + u_j = z_j i_j$$

Aplicând teorema de echivalență a surselor reale de tensiune în surse reale de curent se poate defini ecuația *Joubert* în curent.

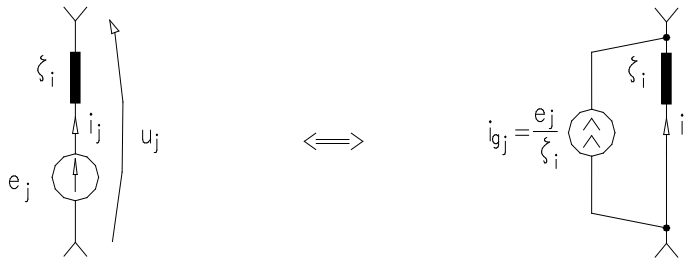


Fig. 2.9

$$e_j + u_j = z_j i_j \quad \frac{e_j}{z_j} + \frac{u_j}{z_j} = i_j \Rightarrow i_j = y_j u_j + i_{g_j}
 \tag{2.37}$$

ecuația Joubert în tensiune *ecuația Joubert în curent*

Formele matriceale ale celor două ecuații pentru un circuit cu l laturi sunt:

- $[e_j]_{l \times 1} + [u_j]_{l \times 1} = [z_j]_{l \times l} \cdot [i_j]_{l \times 1}$ - ecuația matriceală Joubert în tensiune;
- $[i_j]_{l \times 1} = [y_j]_{l \times l} \cdot [u_j]_{l \times 1} + [i_{g_j}]_{l \times 1}$ - ecuația matriceală Joubert în curent.

2) Între matricea operatorilor de impedanță ai laturilor și matricea operatorilor de admitanță ai laturilor există relația:

$$[z_j]_{l \times l} \cdot [y_j]_{l \times l} = 1
 \tag{2.38}$$

3) Matricele topologice ale circuitului sunt ortogonale: $[B] \cdot [A]^t = 0$

$$([B] \cdot [A]^t)^t = [B]^t \cdot [A] = 0 \quad (2.39)$$

4) Scrierea dezvoltată a sistemului de ecuații nodale conduce la:

$$\begin{cases} y_{11}v_1 + y_{12}v_2 + \dots + y_{1,n-1}v_{n-1} = -i_{g_1}^s \\ y_{21}v_1 + y_{22}v_2 + \dots + y_{2,n-1}v_{n-1} = -i_{g_2}^s \\ \vdots \\ y_{n-1,1}v_1 + y_{n-1,2}v_2 + \dots + y_{n-1,n-1}v_{n-1} = -i_{g_{n-1}}^s \end{cases} \quad (2.40)$$

ceea ce evidențiază:

- termenii din membrul drept reprezintă suma curenților de scurtcircuit ce alimentează nodul k. Curentul de scurtcircuit al unei laturi reprezintă curentul ce trece prin latură, ca rezultat al decuplării acesteia din circuit și scurtcircuitării capetelor laturii (aducerii în contact al nodurilor).

- termenii de forma $y_{k,s}$ din matricea operatorilor de admitanță reprezintă operatorii de admitanță ai laturilor comune nodurilor k și s și are forma:

$$y_{k,s} = \sum_j \alpha_{kj} y_j \alpha_{sj} \quad (2.41)$$

unde: - α_{kj} - coeficient de incidență al laturii j la nodul k;

- y_j - operator de admitanță al laturii j;

- α_{sj} - coeficient de incidență al laturii j la nodul s.

Întrucât $y_{k,s}$ este operatorul laturii ce conectează nodurile k și s, iar curentul printr-o latură nu schimbă de sens, rezultă $y_{k,s} = \sum_j \alpha_{kj} y_j \alpha_{sj} < 0$.

- termenii de forma $y_{k,k}$ reprezintă suma operatorilor de admitanță ai laturilor ce converg în nodul k. Conform relației $y_{k,k} = \sum_j \alpha_{kj} y_j \alpha_{kj} = \sum_j \alpha_{kj}^2 y_j > 0$ acești termeni sunt întotdeauna pozitivi.

Observații:

În cazul existenței cuplajelor magnetice între laturile unui circuit aplicarea metodei potențialelor nodale este dificilă din cauza semnului cuplajului în expresia termenilor $y_{k,s}$ de admitanță dintre noduri.

Observații generale referitoare la aria de aplicabilitate a ecuațiilor de ochiuri și ecuațiilor nodale:

1) Sistemul ecuațiilor de ochiuri rezultă din aplicarea teoremei II Kirchhoff pe ochiurile independente ale unui circuit: Întrucât în formularea T2K intervin numai tensiuni (la borne, t.e.m., căderi de tensiuni) aplicarea metodei curenților de contur în circuite ce conțin *surse de curent* se face numai după echivalența acestora cu surse de tensiune. Dacă sursele de curent sunt ideale graful circuitului degenerează.

2) Sistemul ecuațiilor nodale rezultă din aplicarea T1K în cele (n-1) noduri ale circuitului. În formularea T1K intervin numai curenții din laturile circuitului, motiv pentru care sursele de tensiune se vor echivala cu surse de curent. În circuitele ce prezintă surse ideale de tensiune sistemul ecuațiilor nodale își reduce numărul de ecuații.

3) În circuitele ce conțin surse comandate pentru rezolvarea circuitului, indiferent de metoda abordată, sistemul de ecuații trebuie completat cu relațiile de dependență introduse de sursele comandate.

2.3 Tehnica analizei în curent. Metoda curenților de contur.

A. Analiza în curent utilizând teoremele Kirchhoff.

Această analiză presupune asocierea variabilelor în întreg circuitul a curenților din laturi. Pentru rezolvare avem două posibilități:

- utilizarea sistemelor de ecuații rezultat din aplicarea teoremelor Kirchhoff I și II;

- rezolvarea sistemului de ecuații al curenților independenți.

În primul caz, sistemul matricial al ecuațiilor este:

$$[A]_{(n-1) \times l} \cdot [i_j]_{l \times 1} = 0 \quad (2.42)$$

$$[B]_{o \times l} \cdot [z_{jj}] \cdot [i_j]_{l \times 1} = [B]_{o \times l} [e_j]_{l \times 1} \quad (2.43)$$

Exemplificăm metoda pe circuitul următor:

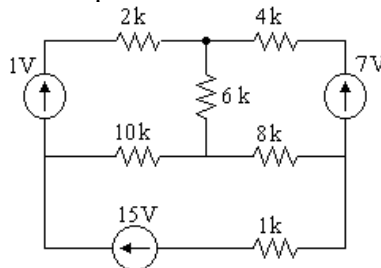


Fig. 2.10

Pentru rezolvarea circuitului se alege un sens arbitrar pentru curenții din laturi respectând indicațiile din § 2.2.

- se asociază fiecărei laturi regula de la receptoare;

- se identifică și numerează fiecare latură a circuitului;
- se identifică numărul de noduri ale circuitului, alegând un nod de referință.

După parcurgerea acestor etape circuitul devine:

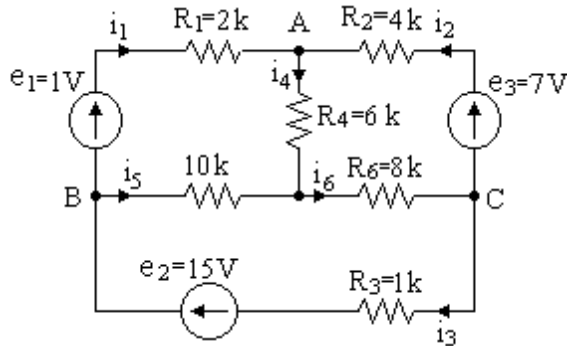


Fig. 2.11

Se trasează în continuare graful orientat al c ircuitului a legând arborele (4,5,6) și construind ochiurile (buclele) independente.

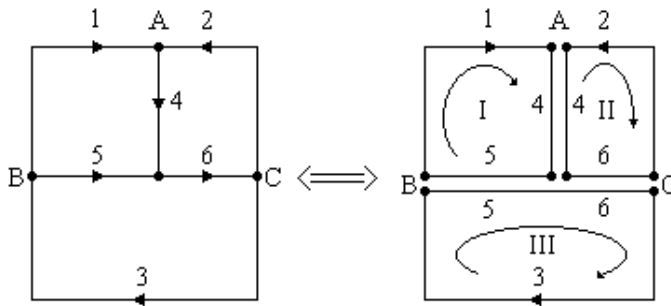


Fig. 2.12

Se alege un sens de parcurgere al ochiurilor independente. Pe baza grafului se determină matricile de incidență a laturilor la noduri și de apartenență a laturilor la ochiuri.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{laturi} \\
 \hline
 \text{A} & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \text{B} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 \text{C} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 \hline
 \text{noduri} & & & & & & &
 \end{array} \\
 [A]_{3 \times 6} = B \\
 \\
 \begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{laturi} \\
 \hline
 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\
 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
 \hline
 \text{laturi} & & & & & & &
 \end{array} \\
 [Z_{i,j}] =
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{laturi} \\
 \hline
 \text{I} & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 \text{II} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 \text{III} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 \text{ochiuri} & & & & & & &
 \end{array} \\
 [B]_{3 \times 6} =
 \end{array}
 \qquad
 [e_j]_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \tag{2.44}$$

Matricea impedanțelor ochiurilor este:

$$[Z_{m,j}]_{3 \times 6} = [B] \cdot [Z_{i,j}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 8 \end{bmatrix}
 \tag{2.45}$$

iar matricea surselor este:

$$[e_j^s]_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 6} \cdot [e_j]_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix}
 \tag{2.46}$$

Notă: Indicele inferior al matricii indică dimensiunea acesteia (linii x coloane). Spre exemplificare, matricea $[Z_{mj}]_{3 \times 6}$ are 3 linii și 6 coloane.

Înlocuind în ecuația matriceală a teoremelor Kirchhoff și rezolvând, se obțin curenții din laturi: $i_1 = 1,5\text{mA}$; $i_2 = -1\text{mA}$; $i_3 = 2\text{mA}$; $i_4 = 0,5\text{mA}$; $i_5 = -0,5\text{mA}$; $i_6 = 1\text{mA}$. Semnul minus al curenților i_2 și i_5 ne arată faptul că aceștia au sens opus față de cel adoptat.

Consecințele analizei în curent la rezolvarea circuitelor prin utilizarea teoremelor Kirchhoff

Ecuația matriceală :

$$[k_i]_{1 \times 1} \cdot [i_j]_{1 \times 1} = [S]_{1 \times 1}
 \tag{2.47}$$

conține:

- $[k_i]_{1 \times 1}$ - matricea parametrilor circuitului;
- $i_j = 2\text{mA}$ - matricea necunoscutelor;
- $[S]_{1 \times 1}$ - matricea surselor.

Soluția ecuației matriceale este:

$$[i_j]_{l_i \times 1} = [k_i]_{l_i \times 1}^t \cdot [S]_{l_i \times 1} \quad (2.48)$$

Dacă circuitul conține surse de tensiune și de curent, din cele "l" necunoscute ale circuitului, numai "l-l_i" reprezintă curenți prin laturile circuitului întrucât "l_i" curenți ai surselor de curent sunt cunoscuți.

Necunoscutele sistemului de ecuații sunt, în acest caz "l-l_i" curenți și "l_i" tensiuni la bornele generatoarelor de curent. Sistemul matriceal al ecuațiilor circuitului se obține prin evidențierea în teoremele Kirchhoff a laturilor ce conțin surse de curent.

Astfel, presupunând "l_i" laturile ce conțin surse de curent în graful asociat circuitului, aceste laturi nu intervin întrucât impedanța internă a surselor de curent este infinită. Notând [A₁] matricea de incidență a celor "l-l_i" laturi la nodurile circuitului, respectiv [B₁] matricea de apartenență a laturilor la ochiurile (buclele) independente dimensiunile acestor matrici fiind:

$$[A_1]_{(n-1) \times (l-1)} \quad \text{respectiv} \quad [B_1]_{g \times (l-1)}$$

Aceste matrici sunt denumite matrici reduse de incidență a laturilor la noduri respectiv de apartenență a laturilor la ochiuri.

Evidențiem în matricea circuitului de incidență a laturilor la noduri, matricea redusă presupunând că laturile ce conțin surse de curent au fost ultimele numerotate.

$$[A]_{(n-1) \times l} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \dots l-1 & l \\ \text{noduri} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{laturi} \\ \text{unde:} \end{matrix} \quad (2.49)$$

$$- [A_1] = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \dots l-1 \\ \text{laturi} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{k,j} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.50)$$

$$- [A_2] = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \dots l-1 \\ \text{laturi cu surse de curent} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{k,j} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.51)$$

Cu aceste notații teorema I Kirchhoff în forma matriceală devine:

$$[A]_{(n-1) \times l} \cdot [i]_{l \times 1} = [A_1 \ A_2] \cdot \begin{bmatrix} i_j \\ \vdots \\ i_{g_j} \end{bmatrix} = [A_1]_{(n-1) \times (l-1)} [i_j]_{(l-1) \times 1} + [A_2]_{(n-1) \times 1} \cdot [i_{g_j}]_{1 \times 1} \quad (2.52)$$

unde am evidențiat curenții necunoscuți i_j prin laturile cu impedanțe și curenți injectați din laturile l_i .

Grupând termenii necunoscuți și cunoscuți în ecuația matriceală de mai sus, obținem pentru teorema I Kirchhoff expresia:

$$[A_1] \cdot [i_j] = -[A_2] \cdot [i_{g_i}] \quad (2.53)$$

Procedând similar în construcția matricii de apartenență a laturilor la ochiuri pentru întreg circuitul, obținem:

$$[B]_{o \times l} = \begin{matrix} \text{ochiuri} \\ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{respectiv} \quad [U]_{l \times l} = \begin{bmatrix} U_j \\ U_i \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Teorema II Kirchhoff are, în acest caz, forma:

$$[B] \cdot [U] = [B_1]_{o \times (l-l_i)} [U_j]_{(l-l_i) \times l} + [B_2]_{o \times l_i} [U_i]_{l_i \times l} = 0 \quad (2.55)$$

Rezolvarea circuitului implică cuplarea ecuațiilor matriceale rezultate din:

- teorema I Kirchhoff : $[A_1] \cdot [i_j] = -[A_2] \cdot [i_{g_i}] ; \quad (2.56)$

- teorema II Kirchhoff : $[B_1] \cdot [u_j] + [B_2] \cdot [u_i] = 0 ; \quad (2.57)$

- ecuația Joubert : $[e_j]_{(l-l_i) \times 1} + [U_j]_{(l-l_i) \times 1} = [Z_j]_{(l-l_i) \times (l-l_i)} \cdot [i_j]_{(l-l_i) \times 1} \quad (2.58)$

Grupând ecuațiile matriceale și separând termenii necunoscuți după înlocuirea ecuației Joubert în teorema II Kirchhoff, va rezulta și stemul matriceal:

$$\begin{bmatrix} [A_1] & 0 \\ [B_1] \cdot [z_j] & [B_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_j \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[A_2] \cdot [i_{g_i}] \\ [B_1] \cdot [i_j] \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad [K_m] \cdot [N_m] = [S_m] \quad (2.59)$$

B. Metoda curenților de contur

B1. Circuite ce conțin surse reale

Analiza în curent, din prezentarea făcută la punctul a, se bazează pe aplicarea teoremelor Kirchhoff. Această tehnică conduce la rezolvarea unui sistem de ecuații egal cu numărul laturilor unui circuit electric.

O reducere semnificativă a sistemului de ecuații, respectiv a timpului de calcul se obține prin utilizarea ecuațiilor curenților de contur.

Metoda de rezolvare implică înlocuirea variabilelor reale (curenții din laturi) cu variabilele în dependente [curenții de ochi (buclă), independenți sau de contur].

Analiza circuitelor prin curenții de contur indică o descompunere topologică a circuitelor complicate în circuite simple numite ochiuri (bucle) din a căror reunire se reconstituie circuitul inițial.

Sistemul matriceal al ecuațiilor curenților de contur conduce la rezolvarea a “b” ecuații de ochiuri (bucle) de forma:

$$\begin{cases} z_{1,1} \cdot i_{m,1} + z_{1,2} \cdot i_{m,2} + \dots + z_{1,o} \cdot i_{m,o} = \sum_{j \in (1)} e_j \\ z_{2,1} \cdot i_{m,1} + z_{2,2} \cdot i_{m,2} + \dots + z_{2,o} \cdot i_{m,o} = \sum_{j \in (2)} e_j \\ \vdots \\ z_{o,1} \cdot i_{m,1} + z_{o,2} \cdot i_{m,2} + \dots + z_{o,o} \cdot i_{m,o} = \sum_{j \in (o)} e_j \end{cases} \quad (2.60)$$

- unde:
- $z_{1,1}$ - suma operatorilor de impedanță întâlniți la parcurgerea ochiului (1);
 - $\sum_{j \in (1)} e_j$ - suma algebrică a t.e.m. a surselor întâlnite la parcurgerea ochiului (1);
 - $z_{1,2}$ - suma operatorilor de impedanță ai laturilor ce aparțin atât ochiului (1) cât și ochiului (2). Semnul operatorului poate fi pozitiv sau negativ, după cum curenții de contur parcurg latura comună ochiurilor, în același sens sau în sensuri opuse.

Întrucât în scrierea directă a ecuațiilor de ochiuri intervin căderile de tensiune pe elementele de circuit și t.e.m. ale surselor, sursele de curent trebuie transformate în surse de tensiune.

Exemplul 1:

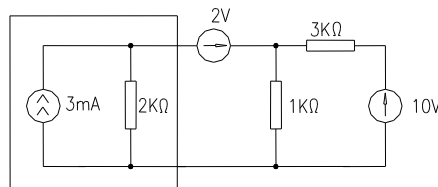


Fig. 2.13

Pentru aplicarea metodei curenților de contur, se echivalează sursa reală de curent cu sursa reală de tensiune. După aplicarea teoremei de echivalență a surselor, circuitul devine:

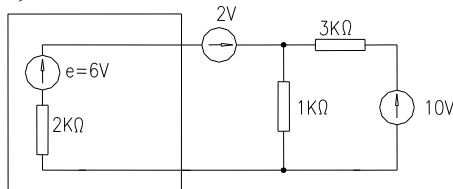


Fig. 2.14

Circuitul obținut conține 3 laturi și două noduri. Asociind sensuri de trecere a curentului prin laturile circuitului, se poate trasa graful orientat al circuitului, respectiv bucele (ochiurile) independente:

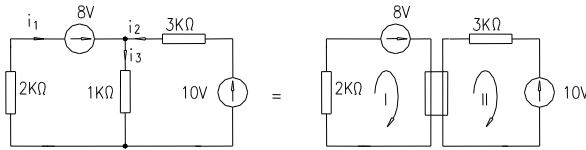


Fig. 2.15

Identificând operatorii de impedanță ai sistemului ecuațiilor de contur obținem $z_{1,1} = 3K\Omega$, $z_{1,2} = 1K\Omega$, $z_{2,1} = z_{1,2}$, $z_{2,2} = 4K\Omega$, $i_1 = i_{m,1}$, $i_2 = i_{m,2}$, $i_3 = i_{m,1} + i_{m,2}$. Rezultă astfel următorul sistem de ecuații de soluționat:

$$\begin{cases} 3 \cdot i_{m,1} + 1 \cdot i_{m,2} = 8 \\ 1 \cdot i_{m,1} + 4 \cdot i_{m,2} = 10 \end{cases} \quad (2.61)$$

Metoda a II-a

Această metodă de rezolvare a circuitului presupune determinarea grafului orientat al circuitului și având în vedere că în graful asociat sursele de tensiune se înlocuiesc prin scurtcircuite (dacă sunt surse ideale), iar sursele de curent prin rezistență infinită (borne în gol). Prin această metodă se obțin bucele (ochiurile) independente ale circuitului.

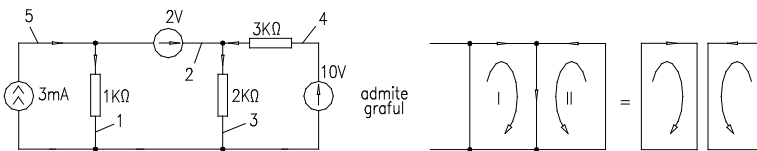


Fig. 2.16

Observație:

Graful unui circuit electric ce conține sursă de curent se reduce. Graful permite determinarea bucelor (ochiurilor) independente necunoscute. Reducerea numărului laturilor circuitului este evidentă prin echivalența sursei de curent în sursă de tensiune.

Întrucât circuitul real nu poate fi reconstituit din curenții de buclă (ochi) ai grafului rezultă că circuitul real mai conține un curent de buclă

(ochi) cunoscut, curent impus de sursa de curent dacă ea ar acționa singură pe acel contur.

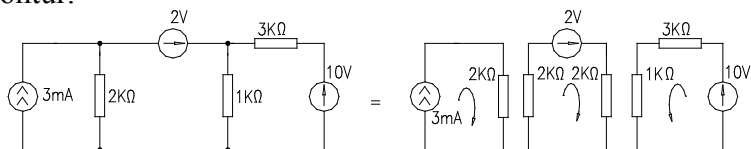


Fig. 2.17

Circuitul real este format din trei bucle (ochiuri) parcurse de curenții:

- i_{m1} și i_{m2} - necunoscuți;

- $i_{m3} = i_g = 3\text{mA}$ cunoscut (impus de sursa de curent).

Sistemul ecuațiilor de ochiuri este, în acest caz, următorul:

$$\begin{cases} \text{ochiul (I)} & \left\{ \begin{array}{l} 2 = i_{m1}(2+1) + i_{m2}(1) + i_{m3}(-2) \\ 10 = i_{m1}(1) + i_{m2}(3+1) + i_{m3}(0) \\ i_{m3} = 3\text{mA} \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.62)$$

echivalent, după înlocuiri, cu:

$$\begin{cases} 8 = 3 \cdot i_{m1} + 1 \cdot i_{m2} \\ 10 = 1 \cdot i_{m1} + 4 \cdot i_{m2} \end{cases} \quad (2.63)$$

Concluzii:

1. Ori de câte ori într-un circuit electric debitează o sursă de curent, se construiește o buclă (un ochi) ce va conține numai această sursă. Curentul din această buclă (acest ochi), este cunoscut fiind impus de sursa de curent.

2. Graful asociat circuitului permite determinarea celorlalți curenți independenți (necunoscuți) ai circuitului.

B.2 Circuite ce conțin surse ideale de curent.

Se consideră circuitul din figura următoare ce conține pe una din laturi o sursă ideală de curent. Rezolvarea acestui circuit prin metoda curenților de contur presupune determinarea buclilor (ochiurilor) independente pentru care să se scrie ecuațiile de ochiuri (bucle).

Analiza topologică a circuitului indică:

- $l = 6$;

- $n = 4$;

- $o = l - (n - 1) = 3$.

Întrucât graful asociat circuitului nu conține latura sursei de curent, rezultă că pentru reconstituirea circuitului real, sursa de curent debitează pe o buclă independentă (un ochi independent).

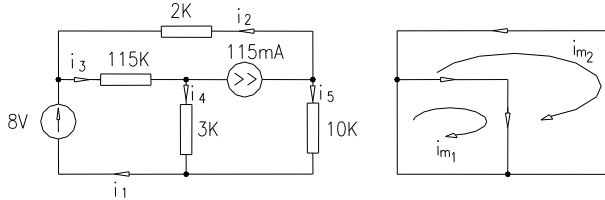


Fig. 2.18

Obs: Graful orientat admite două bucle (ochiuri) independente.

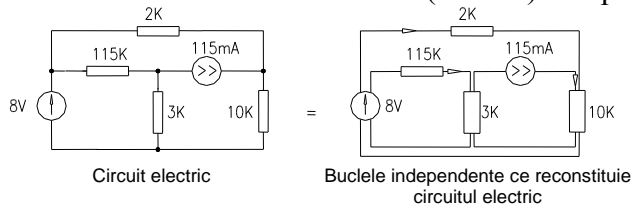


Fig. 2.19

Sistemul ecuațiilor de ochiuri (bucle) conține doi curenți independenți necunoscuți i_{m1} și i_{m2} și un curent independent impus de sursa de curent $i_{m3}=0,5$ mA. Sistemul de ecuații al circuitului este:

$$\begin{cases} I : 8 = i_{m1}(4,5) + i_{m2}(0) + i_{m3}(-3) \\ II : 8 = i_{m1}(0) + i_{m2}(12) + i_{m3}(10) \\ III : i_{m3} = 0,5 \end{cases} \quad (2.64)$$

iar relațiile între curenții independenți și curenții reali sunt:

$$i_1 = i_{m1} + i_{m2} ; i_2 = -i_{m2} ; i_3 = i_{m1} ; i_4 = i_{m1} - i_{m3} ; i_5 = i_{m2} + i_{m3} \quad (2.65)$$

Concluzie:

Ori de câte ori avem o sursă independentă de curent sistemul ecuațiilor de ochiuri se reduce.

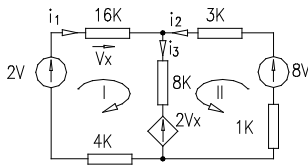
B.3 Circuite ce conțin surse dependente

Sursele de pendente pot fi de tensiune sau de curent cu control în tensiune sau curent. Analiza circuitelor prin metoda curenților de contur aplicându-se pe ochiuri, prezența surselor dependente de tensiune cu control în curent sau tensiune nu ridică probleme în scrierea ecuațiilor de ochiuri.

Întrucât sistemul ecuațiilor de ochiuri are dimensiunea b , egală cu numărul de ochiuri independente, iar sursa dependentă introduce o necunoscută (mărimea prin care este controlată sursa) pentru rezolvare sistemul trebuie completat cu relația de dependență a sursei controlate.

Exemplul 1:

Evidențiem prin circuitul următor modul de tratare al sursei dependente în scrierea sistemului de ecuații al curenților de contur:



Analiza topologică:

- $l=3$;
- $n=2$;
- $o=l-n+1=2$.

În ecuațiile ochiurilor sursa dependentă o tratăm ca pe o sursă independentă iar apoi scriem ecuația de dependență. Pentru circuitul analizat putem defini:

$$I : 2 - 2 \cdot v_x = i_{m1} \cdot (16 + 8 + 4) + i_{m2} \cdot (8)$$

$$II : 8 - 2 \cdot v_x = i_{m1} \cdot 8 + i_{m2} \cdot (3 + 8 + 1)$$

Relația de dependență introdusă de sursa controlată este :

$$v_x = 16 \cdot i_1 = 16 \cdot i_{m1}$$

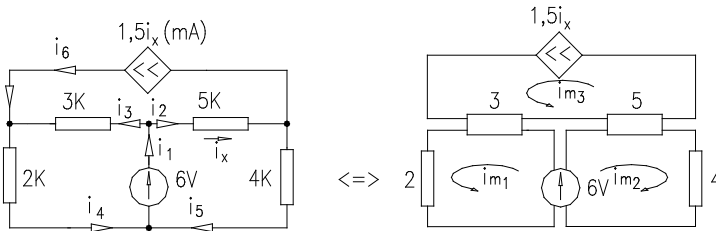
Concluzii:

1. O sursă dependentă conduce la creșterea numărului de necunoscute și implicit a numărului de ecuații pentru soluționarea circuitului.

2. În scrierea sistemului ecuațiilor de ochiuri sursa dependentă este tratată ca o sursă de t.e.m. cu valoare cunoscută (ex: $2v_x$), urmând ca apoi să-i fie redată dependența printr-o ecuație suplimentară.

Exemplul 2

În circuitele ce conțin surse de curent controlate în curent sau tensiune, tehnica rezolvării este similară celei prezentate la surse independente de curent. În principiu, aceasta tehnica presupune evitarea laturii sursei de curent. În acest caz graful asociat circuitului degenerază, iar sistemul ecuațiilor de ochiuri își reduce ordinul.



Sistemul ecuațiilor ochiurilor este :

I) $6 = i_{m1} \cdot (2+3) + i_{m2} \cdot (0) + i_{m3} \cdot (3)$

II) $6 = i_{m1} \cdot (0) + i_{m2} \cdot (5+4) + i_{m3} \cdot (5)$

$i_{m3} = 1,5 \cdot i_x$ cu $i_x = i_2 = i_{m2} + i_{m3}$

Obținem astfel sistemul de ecuații de 3 ecuații cu trei necunoscute:

$6 = i_{m1} \cdot 5 + (1,5i_x) \cdot 3$

$6 = i_{m2} \cdot 9 + (1,5i_x) \cdot 5$

$1,5i_x = i_{m2} + i_{m3}$

Observații

1⁰ - Prezența sursei de curent reduce numărul ecuațiilor de ochiuri, dar dependența sursei introduce o ecuație suplimentară.

2⁰ - Sursa dependentă a fost tratată în rezolvarea problemei ca o sursă independentă, după care sistemul ecuațiilor a fost completat cu relația de dependență introdusă de sursă.

Temă: - Să se rezolve prin metoda curentilor de contur circuitele:

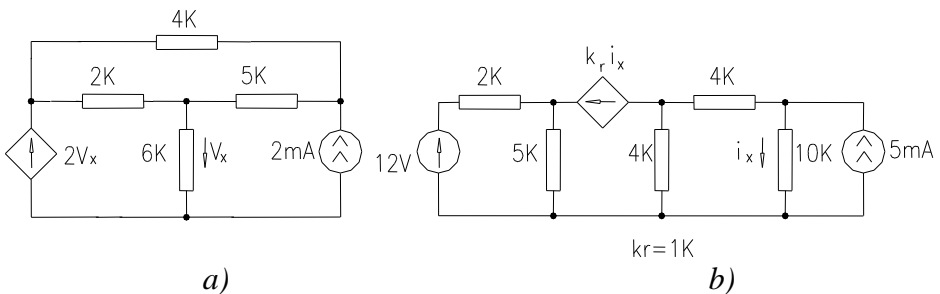


Fig. 2.20

2.4 Tehnica analizei în tensiune a circuitelor electrice

Acest tip de analiză presupune asocierea variabilelor independente pe întreg circuitul, a tensiunilor de la bornele laturilor. Cunoașterea acestor

tensiuni conduce la determinarea curenților din laturile circuitului, din ecuația Joubert în curent. Analiza în tensiune a circuitelor se poate face din sistemul ecuațiilor Kirchhoff sau cu ecuațiile nodale.

A. Analiza în tensiune utilizând teoremele Kirchhoff

Sistemul matriceal al teoremelor lui Kirchhoff pentru un circuit cu "l" laturi conduce la un sistem de "l" ecuații cu (n-1) necunoscute furnizate de T1k și "b" necunoscute furnizate de T2k.

Utilizarea ecuației Joubert matriceală în curent :

$[i_j]_{lx1} = [y_{jj}]_{lx1} \cdot [u_j]_{lx1} + [i^S_{gj}]_{lx1}$ în T1k conduce la un sistem de ecuații cu "l" tensiuni necunoscute la bornele laturilor "j" necunoscute. Sistemul matriceal al analizei în tensiune este:

$$\begin{cases} [A]_{(n-1)xl} \cdot [y_{jj}]_{lx1} \cdot [u_j] = [A]_{(n-1)xl} [i^S_{gk}]_{lx1} = -[i^S_{gk}]_{(n-1)xl} \\ [B]_{oxl} \cdot [u_j] = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Notând $[y_{k,j}]_{(n-1)xl} = [A]_{(n-1)xl} \cdot [y_{jj}]_{lx1}$ - matricea operatorilor de admitanță ai laturilor "j" conectate în nodurile "k", rezultă ecuația matriceală:

$$[K_u]_{kxl} \cdot [u_j]_{lx1} = [S]_{kxl}$$

matricea surselor
matricea necunoscutelor

matricea parametrilor

Deoarece analiza în tensiune cu ajutorul teoremelor Kirchhoff nu reduce numărul ecuațiilor și implicit al necunoscutelor, nu insistăm în prezentarea rezolvării acestei metode. Ea se pretează numai în rezolvarea numerică.

B. Metoda potențialelor nodale de analiză a circuitelor.

B.1 Circuite cu surse reale independente

Metoda potențialelor nodale de analiză a circuitelor electrice presupune înlocuirea variabilelor reale cu variabilele auxiliare (independente), care sunt potențialele atașate nodurilor. Sistemul ecuațiilor nodale conduce la rezolvarea a (n-1) ecuații obținute prin aplicarea teoremei "T" a lui Kirchhoff.

Întrucât ecuațiile nodale sunt obținute din T1k rezultă că forma directă de scriere a sistemului ecuațiilor nodale este folosită numai în circuitele ce conțin surse de curent. Dacă circuitul conține surse de tensiune, acestea vor fi transformate prin teoremele de echivalență în surse de curent.

Sistemul ecuațiilor de ochiuri în formă directă este:

$$\begin{cases} y_{1,1} \cdot v_1 - y_{1,2} \cdot v_2 - y_{1,3} \cdot v_3 - \dots - y_{1,n-1} \cdot v_{n-1} = - \sum_{j \in (1)} i_{g1}^s \\ - y_{2,1} \cdot v_1 + y_{2,2} \cdot v_2 - \dots - y_{2,n-1} \cdot v_{n-1} = - \sum_{j \in (1)} i_{g2}^s \end{cases} \quad (2.67)$$

unde: - $y_{k,k}$ - suma operatorilor de admitanță ai laturilor conectate în nodul k ;

- $y_{k,s}$ - suma operatorilor de admitanță ai laturilor ce leagă nodurile k și s ;

- $\sum_{j \in (k)} i_{gk}^s$ - suma curenților de scurtcircuit ce alimentează nodul k sau suma surselor de curent ce alimentează nodul k .

Exemple:

- În circuitul din figura de mai jos sunt cunoscute sursele și parametrii circuitului. Să se determine potențialele nodurilor, respectiv tensiunile la bornele laturilor.
-

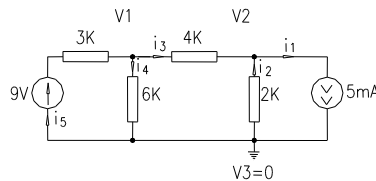


Fig. 2.21

Analiza topologică:

- $l=5$; - $n=3$; - $o=l-n+1=3$.

Metoda de rezolvare.

- Identificăm dacă sursele de tensiune pot fi transformate în surse de curent. Circuitul obținut este redat în figura 2.22

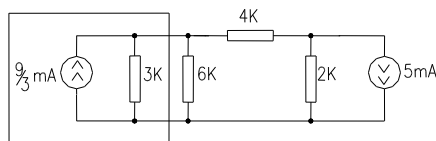


Fig. 2.22

2. Atașăm fiecărui nod k un potențial v_k și alegem un nod de referință cu potențial identic nul ($v_3=0$).

3. Dacă sursele de tensiune pot fi transformate în surse de curent, aplicăm în formă directă ecuațiile nodale atașate nodurilor v_1 și v_2 .

$$y_{11} \cdot v_1 - y_{21} \cdot v = -\sum_{j \in (1)} i_{g1}^s \quad ; \quad -y_{21} \cdot v_1 + y_{22} \cdot v_2 = -(\sum i_{g2}^s); \quad (2.68)$$

unde: - y_{11} - suma conductanțelor laturilor conectate în nodul 1;
 - y_{21} - suma conductanțelor laturilor dintre nodurile 1 și 2.

Identificând operatorii de admitanță obținem:

$$y_{1,1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}, \quad y_{2,2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$y_{2,2} = \frac{1}{4} \quad (2.69)$$

$$\sum_{j \in (1)} i_{g_j}^s = \frac{9}{3}, \quad \sum_{j \in (2)} i_{g_j}^s = -5$$

Observație:

Tensiunile sunt exprimate în V, rezistențele în $K\Omega$, iar curenții în mA. Sistemul ecuațiilor nodale atașat circuitului este:

$$\begin{cases} \frac{9}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) \cdot v_1 - \frac{1}{4} \cdot v_2 \\ -5 = -\frac{1}{4} \cdot v_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot v_2 \end{cases} \quad (2.70)$$

Rezolvat prin eliminare gaussiană admite soluțiile: $v_1 = 2V$, $v_2 = -6V$.

B.2 Circuite ce conțin surse ideale

Deoarece sistemul ecuațiilor nodale se obține din aplicarea T1K, existența sursei ideale de curent în circuitul analizat nu creează probleme de aplicare a metodei potențialelor nodale. Sursa de tensiune ideală într-un astfel de circuit, pentru neinițiați, poate constitui un obstacol.

O aprofundare a rolului și funcționării acestei surse constituie un prim pas în depășirea acestui obstacol. Al doilea pas în rezolvarea problemei de analiză îl constituie aprofundarea metodei potențialelor nodale, și anume trebuie reținută ideea că metoda provine din aplicarea T1K în cele $n-1$ noduri ale circuitului. Să detaliem aceste afirmații.

Sursa ideală de tensiune, conform celor expuse în capitolul 1, are proprietatea că debitează t.e.m. indiferent de încărcare (curent). În consecință, t.e.m. a acestei surse este impusă. Întrucât sursa este conectată la

două noduri, potențialele atașate acestor noduri sunt dependente, relația de dependență dintre ele este dată de t.e.m. a sursei ideale. Exemplificăm această afirmație pe circuitul următor:

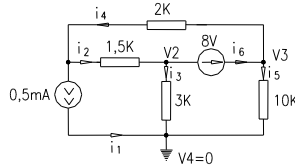


Fig. 2.23

Ecuția Joubert în tensiune a laturii 6 este:

$$e_6 + u_6 = z_6 \cdot i_6, \text{ cu } z_6 = 0 \text{ (rezistență nulă).}$$

rezultând: $e_6 + v_2 - v_3 = 0$ sau $e_6 + v_2 = v_3 = 8 + v_2$.

Dacă acest circuit este pasivizat, nodurile 2 și 3 constituie un singur nod fictiv. Aplicarea metodei de scriere directă a sistemului de ecuații nodale nu este posibilă, deoarece admitanța laturii 6 este infinită. În acest caz trebuie să depășim al doilea obstacol în rezolvarea circuitului și anume să pornim de la bazele metodei (teoremele Kirchhoff).

Alegând $v_4 = 0$ rezultă, din analiza topologică a circuitului numărul de noduri în care se aplică teorema I Kirchhoff ($n-1=3$). Întrucât prin pasivizare avem un nod fictiv (între nodurile 2 și 3 (o latură cu impedanță nulă), aplicăm T1K în nodurile:

$$(1) : i_1 + i_2 - i_4 = 0; \quad (2 \text{ și } 3) : \begin{cases} i_2 - i_3 = i_6 \\ i_6 = i_5 + i_4 \end{cases} \Rightarrow i_2 - i_3 = i_5 + i_4. \quad (2.71)$$

Cu alte cuvinte considerăm nodul 2 suprapus nodului 3 și scriem T1K. Explicităm în sistemul de ecuații al circuitului, curenții din laturi prin ecuația Joubert (numai pentru laturile ce conțin operatori de impedanță (laturile 2, 3, 4, 5)) :

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= 1,5 \cdot i_2 \\ v_2 - 0 &= 3 \cdot i_3 \\ v_3 - v_1 &= 2 \cdot i_4 \\ v_3 - 0 &= 10 \cdot i_5 \end{aligned} \quad (2.72)$$

În plus ținem cont de relația de dependență introdusă între potențiale de sursa ideală de t.e.m. $v_3 = v_2 + 8$. Înlocuind în T1K obținem un sistem de 2 ecuații cu necunoscutele (v_1 și v_2).

Concluzii:

1. Prezența unei surse ideale de tensiune într-un circuit electric reduce numărul potențialelor necunoscute și implicit a ecuațiilor nodale.

2. Potențialele nodurilor la care se conectează sursa ideală de tensiune pot fi cunoscute dacă unul din noduri este ales de referință.

B.3 Analiza nodală în circuitele ce conțin surse dependente

Sursele de curent controlate în curent sau tensiune nu ridică probleme în rezolvarea nodală a circuitelor. Ele sunt tratate în scrierea T1K ca surse de curent independente, urmând a completa sistemul ecuațiilor nodale cu relațiile de dependență introduse de surse.

Exemplul 1

Circuite ce conțin surse de curent comandate în tensiune (VCCS).

Să se determine potențialele nodurilor pentru circuitul din figura următoare:

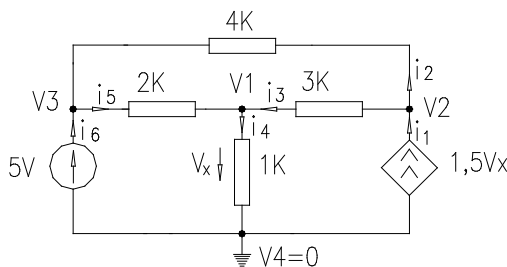


Fig. 2.24

Analiza topologică:

$$- l=6; \quad - n=4; \quad - b=l-n+1=3;$$

Impunem potențial de referință $v_4=0$. Ecuația Joubert a laturii 6 ce conține sursa ideală de tensiune conduce la: $5+0-v_3=0 \Rightarrow v_3=5V$, potențial impus de sursa independentă de tensiune. Pentru rezolvarea circuitului prin potențiale nodale se aplică T1K în nodurile necunoscute (v_1 și v_2).

$$(v_1) : -i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

$$(v_2) : -i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Sistemul este completat cu relația de dependență a sursei comandate:

$$i_1 = 1,5 \cdot v_x = 1,5 \cdot (i_4 \cdot 1) = 1,5 \cdot (v_1 - 0) \text{ întrucât } v_x = (v_1 - 0).$$

Din ecuațiile Joubert ale laturilor ce conțin operatori de admitanță (conductanță) se determină curenții funcție de potențiale astfel:

$$i_2 = \frac{v_2 - v_3}{4}; \quad i_3 = \frac{v_2 - v_1}{3}; \quad i_4 = \frac{v_1 - 0}{1}; \quad i_5 = \frac{v_3 - v_1}{2}. \quad (2.73)$$

$$\begin{cases} \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1}{1} + \frac{v_1 - v_3}{2} = 0 \\ \frac{v_2 - v_3}{4} + \frac{v_2 - v_1}{3} = 1,5 \cdot v_1 \\ v_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - v_2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{5}{2} \\ -v_1 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1,5 \right) + v_2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4} \end{cases} \quad (2.74)$$

Se obține sistemul de 3 ecuații ce admite soluțiile $v_1=3V$, $v_2=9V$:

Exemplul 2

Circuite ce conțin surse de tensiune comandate în curent (CCVS)

Urmărim să aplicăm metoda potențialelor nodale pe circuitul de mai jos.

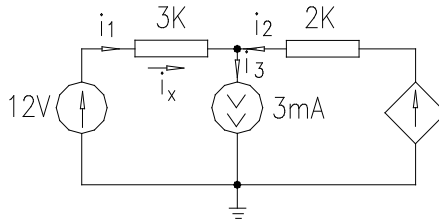


Fig. 2.25

Aplicând T1K în nodul 1 rezultă:

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0, \text{ cu: } i_1 = \frac{12 - v_1}{3}, \quad i_2 = \frac{4 \cdot i_x - v_1}{2}, \quad i_3 = 3. \quad (2.75)$$

Înlocuind obținem ecuația:

$$\frac{v_1 - 12}{3} + \frac{v_1 - 4 \cdot i_x}{2} + 3 = 0 \quad (2.76)$$

completată cu relația de dependență: $i_x = i_1 = \frac{12 - v_1}{3}$.

Sistemul de ecuații este echivalent cu cel obținut prin aplicarea directă a metodei potențialelor nodale tratând sursa de tensiune dependentă ca o sursă reală de tensiune.

$$\begin{cases} v_1 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{12}{3} - 3 + \frac{4 \cdot i_x}{2} \\ i_x = \frac{12 - v_1}{3} \end{cases} \quad (2.77)$$

Soluția sistemului de ecuații este: $v_1=6V$, $i=2mA$.

Exemplul nr.3

Circuit ce conține surse de tensiune comandate în tensiune (VCVS)

Prin acest exemplu evidențiem analiza prin metoda potențialelor nodale a circuitelor ce conțin surse ideale de tensiune comandate în tensiune.

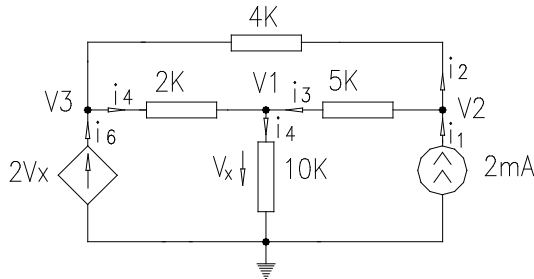


Fig. 2.26

Întrucât circuitul conține o sursă ideală de tensiune potențialul v_3 este impus de această $v_3 = 2v_x$. Pentru rezolvarea circuitului presupunem cunoscut acest potențial în scrierea ecuațiilor nodale. Aplicarea T!K în nodul 1 și 2.determină:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 - i_4 + i_5 = 0 \\ 2v_x = 2v_1 \end{cases} \quad (2.78)$$

echivalent cu

$$\begin{cases} -v_1 \cdot \frac{1}{5} + v_2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = 2 + \frac{2v_x}{4} \\ -v_2 \frac{1}{5} + v_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) = \frac{2v_x}{2} \\ v_x = v_1 \end{cases} \quad (2.79)$$

Concluzii:

1. Tratarea sursei dependente ca o sursă independentă conduce la reducerea sistemului de ecuații nodale. Teorema I Kirchhoff se aplică numai în nodurile la care nu se conectează sursele ideale de tensiune.
2. Ecuațiile nodale pentru a fi rezolvate trebuie completate cu relațiile de dependență impuse de sursele comandate

2.5 Analiza circuitelor electrice utilizând principiul superpoziției

Principiul superpoziției este larg folosit în explicarea fenomenelor fizice complicate. El presupune descompunerea fenomenului într-o sumă de fenomene simple. Acest principiu a fost utilizat și în analiza circuitelor prin metoda curenților de contur. Superpoziția folosită a fost una topologică unde circuitul este o superpoziție a buclelor (ochiurilor) independente, elementele de circuit aparținând mai multor bucle (ochiuri). Superpoziția buclelor (ochiurilor) independente reconstituie circuitul analizat.

În electrotehnică, principiul superpoziției se aplică și în cazul excitațiilor (surselor) păstrând topologia circuitului. El are următoarea formulare “*răspunsul stabilit de generatoare într-o rețea liniară este egal cu suma răspunsurilor stabilite de fiecare generator dacă ar acționa singur în rețea*”.

Practic pentru o rețea ce conține mai multe surse, răspunsul pe o latură pasivă este egal cu suma răspunsurilor fiecărei surse dacă celelalte surse sunt pasivizate. Pasivizarea surselor unui circuit electric presupune înlocuirea surselor cu rezistențele (sau impedanțele) interne. Astfel:

- sursele ideale de tensiune sunt înlocuite printr-o latură cu rezistență nulă (scurtcircuit)
- sursele reale de tensiune sunt înlocuite prin impedanță (rezistență) internă
- sursele de curent prin borne în gol (circuit deschis)

Această pasivizare este posibilă numai pentru sursele independente fie de tensiune fie de curent (*Observație: Sursele dependente nu pot fi pasivizate*).

Exemple de aplicare a principiului superpoziției. În circuitul următor acționează două surse. Conform principiului expus avem:

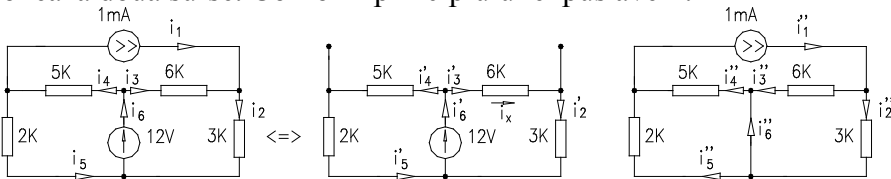


Fig. 2.27

Rezolvarea circuitului inițial (ce conține mai multe surse) presupune rezolvarea circuitelor elementare ce conțin o singură sursă.

Curentul sau tensiunea la bornele unei laturi este suma algebrică a curenților din aceeași latură, latură ce aparține tuturor circuitelor elementare. Astfel:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= i'_1 + i''_1 \text{ cu } i'_1 = 0 \text{ (sursa de curent pasivizata)} \\
 i_2 &= i'_2 + i''_2 \\
 i_3 &= -i'_3 + i''_3 \\
 i_4 &= i'_4 + i''_4 \\
 i_5 &= i'_5 - i''_5 \\
 i_6 &= i'_6 + i''_6 \text{ cu } i''_6 = i''_2 - i''_5 \text{ (sursa de tensiune pasivizata)}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Circuitul ce conține sursa de t.e.m. conține două bucle (ochiuri). Pentru a rezolva se aplică metodele prezentate (Kirchhoff, curenți contur, potențiale nodale). Aplicăm curenți contur:

$$\begin{aligned}
 12 = i_{m1}(6+3) &\Rightarrow i_{m1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \text{ mA} & i'_3 = i'_2 = \frac{4}{3} \text{ mA} \\
 12 = i_{m2}(5+2) &\Rightarrow i_{m2} = \frac{12}{7} \text{ mA} & i'_4 = i'_5 = \frac{12}{7} \text{ mA} \\
 & & i'_6 = i_{m1} + i_{m2} = \frac{4}{3} + \frac{12}{7} = \frac{64}{21} \text{ mA}
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Circuitul ce conține sursa de curent poate fi rezolvat aplicând tehnica transfigurării și reducerii, astfel:

$$\begin{aligned}
 i''_2 &= i''_1 \frac{6}{6+3} = 1 \cdot \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ mA} \\
 i''_3 &= 1 \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ mA} \\
 i''_4 &= \frac{2}{7} \text{ mA} \\
 i''_5 &= \frac{5}{7} \text{ mA} \\
 i''_6 &= \frac{2}{3} - \frac{5}{7} = \frac{14-15}{21} = -\frac{1}{21} \text{ mA} \text{ (sens opus)}
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Curenții reali ai circuitului sunt:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= 1mA, \\
 i_2 &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2mA, \\
 i_3 &= -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -1mA \text{ (sens opus prin latura)}, \\
 i_4 &= \frac{12}{7} + \frac{2}{7} = 2mA, \\
 i_5 &= \frac{12}{7} - \frac{5}{7} = 1mA, \\
 i_6 &= \frac{64}{21} - \frac{1}{21} = 3mA
 \end{aligned}
 \tag{2.83}$$

Principiul superpoziției se aplică când în circuit acționează surse de frecvențe diferite. În acest caz fiecare circuit elementar conține surse de aceeași frecvență.

CAPITOLUL 3.

TEOREMELE CIRCUITELOR ELECTRICE

3.1 Teorema substituției

Circuitele electrice sunt formate din elemente de circuit prevăzute cu legături conductoare între ele. O latură “j” a unui circuit electric este un dipol și este complet definită de caracteristica $i_j - u_j$. Acest dipol poate fi pasiv (conține numai elemente R,L,C) sau activ. Față de bornele unei laturi rețeaua electrică la rândul ei poate fi privită ca un dipol activ sau pasiv.

Să considerăm o latură oarecare “j” dintr-o rețea, căreia i se aplică tensiunea “ u_j ” la borne și este parcursă de curentul “ i_j ”.

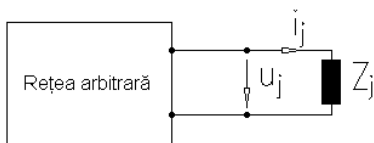


Fig. 3.1

Enunț:

“Într-un circuit electric o latură pasivă parcursă de curentul “ i_j ” și având la borne tensiunea “ u_j ”, poate fi substituită (înlocuită) fie cu un generator de tensiune fie cu un generator de curent.”

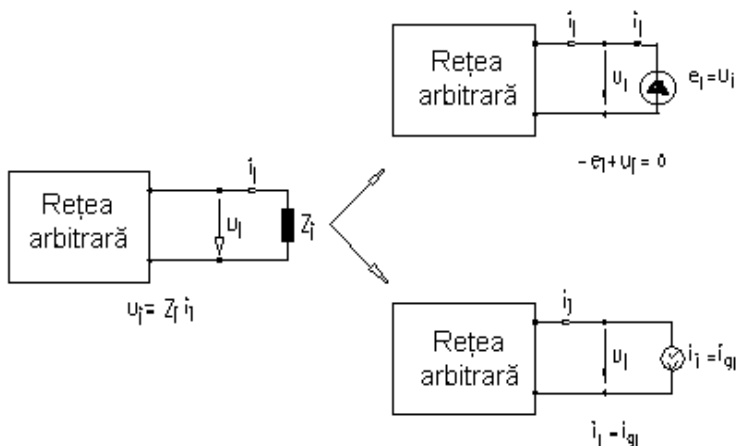


Fig. 3.2

Demonstrație:

Întrucât latura “j” selectată este un dipol receptor ecuația Joubert în tensiune cu regula de l a r eceptoare est e: $u_j = z_j \cdot i_j$, s au f orma

echivalentă $-z_j \cdot i_j + u_j = 0$. Comparând cu ecuația generală *Joubert* pentru laturi active rezultă:

$$-e_j = z_j \cdot i_j \text{ sau } -e_j + u_j = 0, \quad (3.1)$$

Aceasta reprezintă ecuația *Joubert* a laturii “j” ce conține numai sursa ideală de tensiune electromotoare “ e_j ”.

Ecuația *Joubert* în curent a unei laturi “j” de operator y_j este:

$$i_j = y_j u_j + i_{gi}, \quad (3.2)$$

Această ecuație presupune existența în paralel la aceeași tensiune “ u_j ” a două laturi parcurse de curenții i_{gi} și $y_j u_j$. O sursă ideală de curent are admitanța $y_j = 0$, iar curentul injectat sub tensiunea u_j are valoarea $i_j = i_{gi}$.

În concluzie, o latură pasivă poate fi înlocuită :

- cu o sursă ideală de tensiune ($e_j = -z_j i_j$) sursa ce are sens opus curentului din latură;

- cu o sursă ideală de curent ($i_{gi} = i_j$) având orientarea în sensul curentului din latură.

3.2 Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare. Rezistența internă a unui dipol

3.2.1 Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare.

Într-o rețea electrică orice element de circuit poate fi considerat conectat împreună cu alte elemente de circuit și în ansamblu formând rețeaua complexă. Putem să punem problema și invers și anume că orice element de circuit poate fi selectat dintr-o rețea complicată.

În consecință rețeaua este formată din module de circuit, module ce pot fi desenate, construite, analizate, testate și reparate separat. Un sistem familiar este oferit de elctronica si stemelor au dio u nde su nt co nectate împreună, prin cablu, casetofonul, aparatul de radio, pick-up-ul și stația de amplificare.

Oricare dintre aceste module (a parate p rivite in dividual) sunt alcătuite din subansamble numite circuite. Unele dintre aceste module sunt foarte mici și constituie circuitele integrate. Aceste circuite integrate sunt alcătuite din zeci sau chiar sute de elemente de circuit precum rezistoare, capacitatoare, bobine, diode, tranzistoare fabricate în cip-ul de siliciu.

Indiferent de structură și complexitate, circuitului la ieșire i se cuplează o sarcină. Față de bornele sarcinii, circuitul poate fi privit ca un dipol activ. Acestui dipol asociat rețelei sau circuitului trebuie să-i determinăm parametrii. Conform clasificării prezentate în capitolul 1

elementele dipolare active conțin o tensiune electromotoare echivalentă și un operator de impedanță internă Z_{ech}

Să presupunem că circuitul arbitrar ales conține surse de tensiune și surse de curent. Interesează în continuare să determinăm valorile limită ale curentului, respectiv ale tensiunii ce pot fi aplicate unei sarcini conectate la bornele dipolului. Cu alte cuvinte căutăm să determinăm caracteristica “i-u” a dipolului activ.

Pentru a rezolva problema să considerăm conform figurii următoare drept sarcină latura “j” cu operatorul de impedanță Z_j .

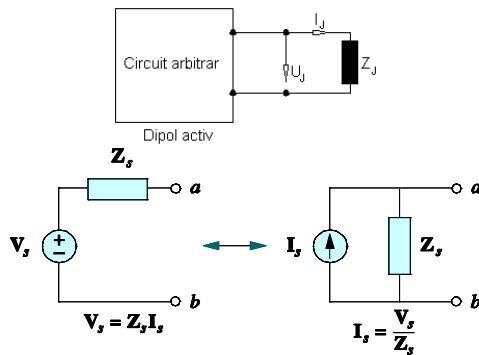


Fig.3.3

Așa cum am menționat, urmărim să echivalăm, față, de bornele sarcinii, circuitul cu un dipol activ. Pentru aceasta aplicăm pentru latura “j” teorema substituției, latura ce o putem înlocui printr-o sursă de curent $i_{gi}=i_j$, ce are la bornele tensiunea u_j . Circuitului astfel obținut îi aplicăm pentru determinarea curentului debitat principiul superpoziției:

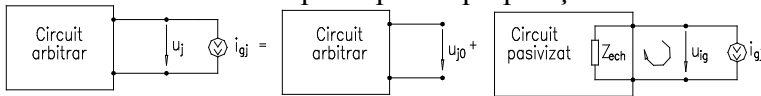


Fig. 3.4

Conform principiului superpoziției tensiunea u_j este egală cu suma contribuțiilor fiecărei surse la bornele laturii “j” dacă fiecare ar acționa singură în rețea cealaltă fiind pasivizată: $u_j=u_{jo}+u_{ig}$, unde:

- u_{ig} se determină prin aplicarea teoremei II Kirchhoff pe circuitul pasivizat,

$$0 = u_{ig} + Z_{ech} i_{gi}; \quad (3.3)$$

Înlocuind rezultă;

$$u_j = u_{jo} - Z_j i_j, \quad (3.4)$$

Caracteristica i_j - u a dipolului are forma prezentată în figura 3.5:

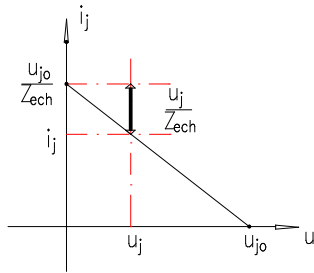


Fig. 3.5

Analiza curbei i - u la bornele dipolului activ evidențiază:

- tensiunea la bornele dipolului este cuprinsă între 0 și tensiunea de mers în gol u_{j0} ; $u \in (0, u_{j0})$.
- funcționarea în gol a dipolului implică $z_j \rightarrow \infty$, iar tensiunea la borne este t.e.m. furnizată de dipolul activ.
- în funcționarea în scurtcircuit a dipolului, curentul este limitat de operatorul de impedanță internă al dipolului Z_{ech} . În n.c.c. acest operator reprezintă rezistența internă a dipolului.

Concluzii:

1. - Orice circuit electric față de două borne poate fi reprezentat printr-un dipol echivalent. T.e.m. a dipolului este tensiunea de mers în gol a dipolului, iar rezistența internă (operatorul de impedanță intern) este rezistența față de cele două borne a circuitului pasivizat.
2. - Regimul de funcționare al oricărui dipol electric este cuprins între mersul în gol și scurtcircuit.

Latura pasivă “j” cu operatorul de impedanță z_j poate fi înlocuită în circuit și printr-o sursă de t.e.m. având sens opus curentului din circuit. Aplicând acestui circuit principiul superpoziției, curentul debitat de dipolul activ este superpoziția curenților din latura “j” dacă în circuit ar acționa câte o singură sursă, conform schemei următoare:

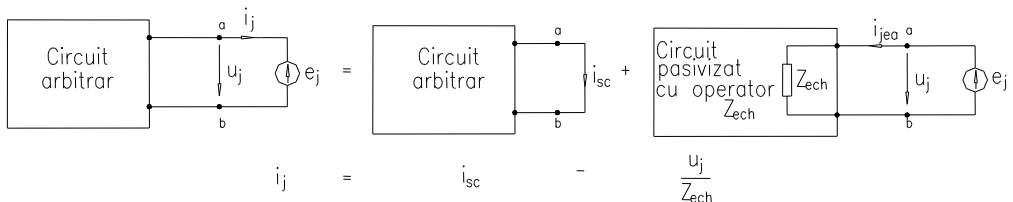


Fig. 3.6

Se obține astfel relația curentului debitat de un dipol activ:

$$i_j = i_{sc} - \frac{u_j}{Z_{ech}}, \quad (3.5)$$

Identificând cu relația curentului debitat din primul caz, rezultă:

$$i_{sc} = \frac{u_{j0}}{Z_{ech}} - \text{valoarea curentului de scurtcircuit între bornele unui dipol.}$$

Concluzie:

1. Curentul debitat de un dipol activ poate lua valori (la sarcină variabilă) între 0 (mersul în gol) și valoarea de scurtcircuit (borne scurtcircuitate)
2. Rezistența internă a unui dipol activ poate fi determinată ca raport între tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit față de bornele analizate
3. În rețelele pasive (ce nu conțin surse în interior) tensiunea la mersul în gol este nulă, dar și curentul de scurtcircuit este nul. În această situație, rezistența (impedanța) internă a dipolului se poate determina alimentând bornele dipolului de la o sursă u_j ce debitează curentul i_j . Rezistența echivalentă (operatorul de impedanță echivalent) a rețelei este raportul dintre tensiunea aplicată și curentul absorbit de circuit.

$$z_{ech} = \frac{u_j}{i_j} \quad (3.6)$$

Concluzie generală:

O rețea oarecare (cu sau fără surse în interior) față de două borne de acces poate fi considerată un dipol echivalent care are ecuația:

$$i_j = i_{sc} - \frac{u_j}{z_{ech}} = \frac{u_{j0}}{z_{ech}} - \frac{u_j}{z_{ech}} \quad (3.7)$$

3.2.2 Determinarea rezistenței echivalente a dipolului activ

Pentru un circuit (rețea) oarecare față de două borne de acces poate fi determinată rezistența internă (operatorul de impedanță internă) a rețelei prin două relații și anume:

$$R_{ech} = \frac{u_{j0}}{i_{scj}} \quad \text{sau} \quad R_{ech} = \frac{u_j}{i_j} \quad \text{pentru dipol pasiv} \quad (3.8)$$

Cele două relații ale rezistenței interne a unui dipol implică două metode de determinare a acestuia și anume:

1. rezistența internă a unui dipol este raportul dintre *tensiunea de mers în gol* între cele două borne și *curentul de scurtcircuit*,
2. rezistența internă a unui dipol se obține prin pasivizarea tuturor surselor independente din circuit și aplicarea la bornele de acces a unei surse de t.e.m. cunoscută și măsurarea(determinarea) curentului absorbit de circuit.

$$R_{ech} = \frac{u_j}{i_j} \quad (3.9)$$

A) *Determinarea rezistenței echivalente în circuitele ce conțin surse independente*

Exemplul 1

- Metoda I

Să considerăm divizorul de tensiune din figura următoare, alimentat de la o sursă de 24V c.c. Tensiunea de ieșire a acestui circuit este tensiunea de pe rezistorul $R_2 = 10k\Omega$

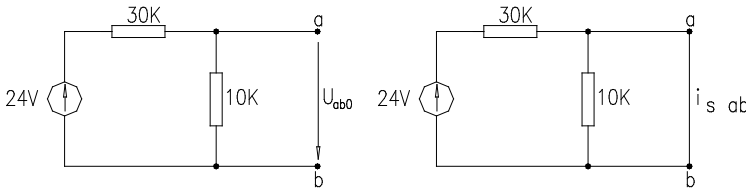


Fig. 3.7

Tensiunea de mers în gol pe rezistorul de $10k\Omega$ este:

$$u_{ab0} = 24V \frac{10k\Omega}{(10 + 30)k\Omega} = 6V \quad (3.10)$$

Curentul de scurtcircuit între bornele a,b, are valoarea:

$$i_{sab} = \frac{24V}{30k\Omega} = 0,8mA; \quad R_{ech} = \frac{u_{ab0}}{i_{sab}} = \frac{6V}{0,8mA} = 7,5k\Omega \quad (3.11)$$

- Metoda a II-a

Pasivizând circuitul față de bornele a,b, rezistența echivalentă este egală cu rezistența circuitului:

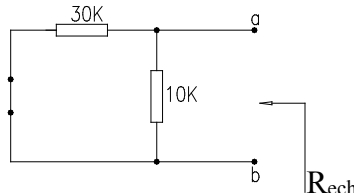
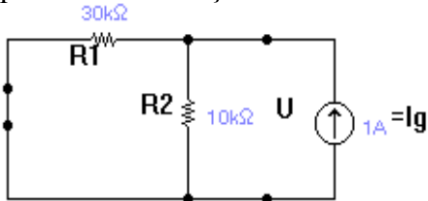


Fig. 3.8

$$R_{ech} = 10 \parallel 30 = \frac{10 \cdot 30}{10 + 30} = \frac{300}{40} = 7,5 \text{ k}\Omega \quad (3.12)$$

cea ce este echivalent cu alimentarea circuitului pasivizat de la o sursă exterioară de tensiune Raportul dintre tensiunea aplicată și curentul debitat reprezintă rezistența circuitului.



$$R_{ech} = \frac{u}{i} = R_1 \parallel R_2 \quad (3.13)$$

Fig.3.9

Exemplul 2

- Metoda I

Se consideră circuitul din figura următoare și se urmărește determinarea rezistenței echivalente a circuitului față de bornele A - B.

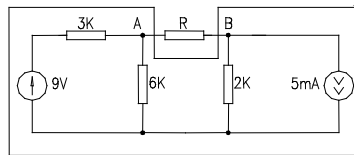


Fig. 3.10

Metoda I de determinare a rezistenței echivalente presupune determinarea tensiunii de mers în gol și a curentului de scurtcircuit între A și B.

Determinarea tensiunii de mers în gol între bornele A și B presupune aflarea potențialelor punctelor A și B din circuitul obținut prin scoaterea din circuitul inițial a rezistenței R.

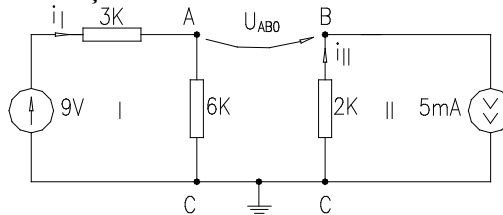


Fig. 3.11

Prin înlăturarea rezistenței R, circuitul se simplifică degenerând în două bucle independente parcurse de curenții $i_I = \frac{9}{6+3} = 1mA$ și $i_{II} = 5mA$ impus de sursa independentă de curent.

Tensiunea între bornele A și B se determină ca diferență a potențialelor punctelor A și B, potențiale obținute din căderea de tensiune pe rezistențele de $6\text{ k}\Omega$ respectiv $2\text{ k}\Omega$. Asociind regula de la receptoare între tensiune și curent pe o rezistență obținem:

$$\left. \begin{aligned} U_{A_0C} &= V_A - V_C = I_I \cdot 6 \\ -U_{B_0C} &= -V_B + V_C = -I_{II} \cdot 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{A_0C} - U_{B_0C} = V_{A_0} - V_{B_0} = 6 \cdot I_I + 2 \cdot I_2 = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 16\text{V} \quad (3.14)$$

Curentul de scurtcircuit între bornele A și B se determină prin scurtcircuitarea bornelor A și B în circuitul inițial și rezolvarea circuitului obținut

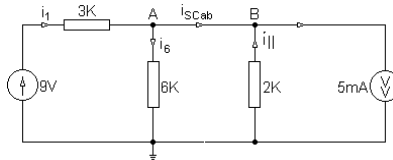


Fig. 3.12

Curentul de scurtcircuit se determină din T1K aplicată în nodul A (sau în nodul B) $I_{scAB} = I_1 - I_6$, unde I_1 și I_6 se determină rezolvând circuitul. Aplicând metoda potențialelor nodale se deduce:

$$V_A \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{3} - 5 \text{ sau } V_A = -2\text{V} \quad (3.15)$$

valoarea potențialului după scurtcircuitare. Curenții au următoarele valori:

$$I_1 = \frac{9 + V_A}{3} = \frac{11}{3} \text{ mA}; \quad I_6 = \frac{V_A}{6} = \frac{-2}{6} \text{ mA}; \quad I_{scAB} = \frac{11}{3} + \frac{2}{6} = \frac{24}{6} = 4\text{mA} \quad (3.16)$$

Rezistența echivalentă va fi:

$$R_{ech} = \frac{U_{AB_0}}{I_{scAB}} = \frac{16\text{V}}{4\text{mA}} = 4\text{k}\Omega \quad (3.16)$$

- Metoda I I-a presupune pasivizarea surselor ideale obținând circuitul de mai jos:

$$R_{ech} = (3\parallel 6) + 2 = \frac{3 \cdot 6}{9} + 2 = 4\text{k}\Omega \quad (3.17)$$

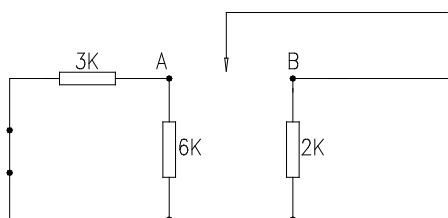


Fig. 3.13

Aceeași valoare a rezistenței se obține dacă în circuitul de mai sus se aplică o tensiune u de la o sursă care debitează curentul “ i ”.

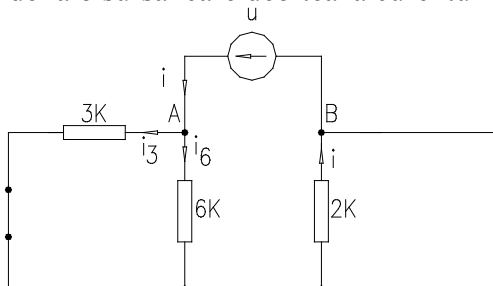


Fig. 3.14

Rezolvarea acestui circuit conduce la expresia rezistenței echivalente:

$$R_{ech} = \frac{U}{I} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} + 2 = 4k\Omega. \quad (3.18)$$

B) Determinarea rezistenței echivalente în circuitele care conțin surse dependente

Rezistența echivalentă a unui circuit față de două borne ale unei laturi pasive se determină cu relațiile prezentate mai sus. În determinarea rezistenței echivalente trebuie să se țină seama că sursa dependentă nu se pasivizează deoarece aceasta debitează numai în prezența mărimii de control. Să considerăm circuitul din figura următoare și să exemplificăm determinarea rezistenței echivalente față de bornele A și B, prin cele două metode :

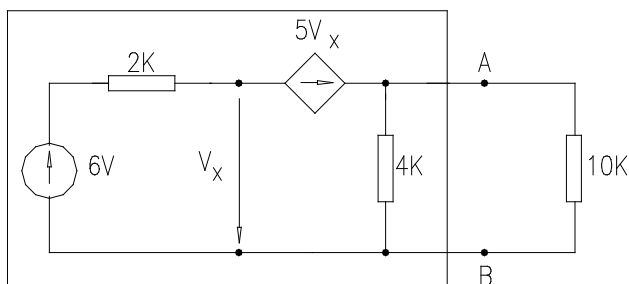


Fig. 3.15

- Metoda I de determinare presupune calculul tensiunii de mers în gol (în absența rezistorului de $10k\Omega$) față de bornele A și B și a curentului de scurtcircuit rezultat al scurtcircuitării bornelor A,B. Cele două mărimi se determină din circuitele de mai jos.

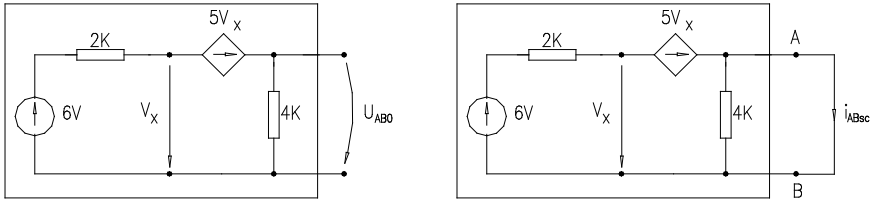


Fig. 3.16

◆ Determinarea tensiunii de mers în gol

În primul circuit *tensiunea de mers în gol* reprezintă tensiunea de pe rezistorul de $4k\Omega$, conform relației lui Ohm, $U_{AB_0} = 4 \cdot i$.

Curentul i se determină din aplicarea T2K pe ochiul format din sursele de t.e.m. $6V$ și $5V_x$ și rezistențele de $2k\Omega$ și $4k\Omega$. Întrucât t.e.m. a sursei dependente este necunoscută (controlată de V_x) ecuația obținută din T2K trebuie completată cu relația de dependență $6 - 5V_x = (2 + 4) \cdot I$ sau $V_x = 6 + 2 \cdot I$.

Rezultă astfel sistemul :

$$\begin{cases} 6 + 5V_x = (2 + 4) \cdot I \\ V_x = 6 \cdot 2I \end{cases} \quad \text{cu soluțiile:} \quad \begin{cases} V_x = \frac{12}{8} = 1,5V \\ I = \frac{9}{4} mA \end{cases} \quad (3.19)$$

Se obține astfel tensiunea de mers în gol: $U_{AB_0} = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9V$. (3.20)

◆ Determinarea curentului de scurtcircuit

Curentul de scurtcircuit între bornele A,B se determină din circuitul din figura “b”. Întrucât rezistența de $4k\Omega$ este scurtcircuitată, curentul prin circuit este curentul de scurtcircuit dintre bornele A și B. Aplicând T2K rezultă: $I_{scAB} \cdot 2 = 6 + 5V_x$, relație ce trebuie completată cu ecuația de dependență a sursei comandate:

$$5V_x = -V_x \quad \Rightarrow \quad V_x + 5V_x = 0 \quad \text{cu soluția} \quad V_x = 0 \quad \text{cu soluția:} \quad V_x = 0 \quad (3.21)$$

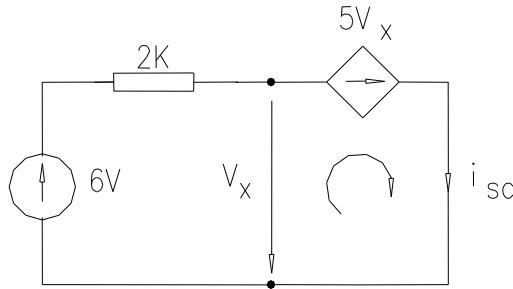


Fig. 3.17

În consecință:
$$I_{scAB} = \frac{6 - 5V_x}{2} = \frac{6 - 5 \cdot 0}{2} = \frac{6}{2} = 3mA. \quad (3.22)$$

Rezistența echivalentă a circuitului este:
$$R_{ech} = \frac{U_{AB_0}}{I_{scAB}} = \frac{9}{3} = 3K\Omega. \quad (3.23)$$

- Metoda a II-a presupune pasivizarea surselor independente și alimentarea circuitului de la o sursă pe la bornele A,B.

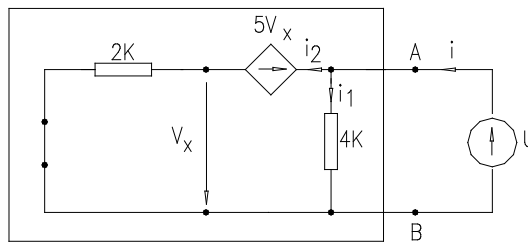


Fig. 3.18

Presupunând sursa de alimentare o sursă test cu t.e.m. egală cu unitatea, rezistența echivalentă este dată de relația:
$$R_{ech} = \frac{U}{I}. \quad (3.24)$$

Determinarea rezistenței echivalente presupune rezolvarea circuitului de mai sus determinând dependența dintre tensiunea “U” aplicată și curentul absorbit de circuit.

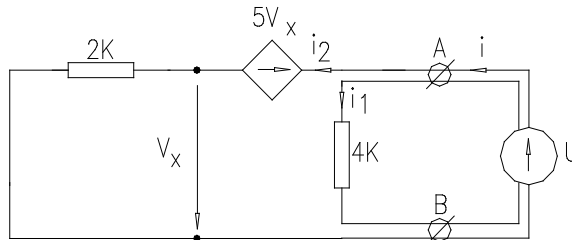


Fig. 3.19

În acest sens, aplicând metoda curenților independenți, rezultă:

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{cu} \quad I_1 = \frac{U}{4} \quad \text{iar} \quad I_2 = \frac{U - 5V_x}{2} \quad (3.25)$$

completată cu relația de dependență a sursei comandate: $U - 5V_x = V_x$.

Utilizând metoda eliminării, rezultă:

$$I = \frac{U}{4} + \frac{4 - 5 \cdot \frac{U}{6}}{2} = U \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1 - \frac{5}{6}}{2} \right) \quad (3.26)$$

$$I = U \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = U \cdot \left(\frac{4}{12} \right) = U \cdot \left(\frac{1}{3} \right) \quad \text{sau} \quad U = 3 \cdot I$$

Înlocuind în relația rezistenței echivalente, se obține:

$$R_{ech} = \frac{U}{I} = \frac{3 \cdot I}{I} = 3k\Omega \quad (3.27)$$

Observație:

În circuitele dipolare ce nu conțin surse independente, tensiunea la mers în gol și curentul de scurtcircuit sunt nule. În acest caz, pentru determinarea rezistenței echivalente se aplică a doua metoda (a alimentării de la o sursă test).

3.3 Teorema generatoarelor echivalente (*Thévenin, Norton*)

Așa cum am arătat, o rețea electrică față de bornele unei laturi pasive oarecare poate fi considerată un dipol activ. Curentul prin latura pasivă este dat de relațiile:

$$i_j = \frac{u_{j0}}{z_{ech}} - \frac{u_j}{z_{ech}} = \frac{u_j}{z_j} \quad (3.28)$$

În baza relațiilor de mai sus, unei rețele liniare oarecare, i se pot atașa două reprezentări echivalente.

3.3.1 Teorema generatorului echivalent de tensiune (*Thévenin*)

Enunț:

Într-o rețea liniară activă răspunsul în curent printr-o latură pasivă ”j” de operator Z_j este dat de relația: $i_j = \frac{u_{j0}}{z_{eh} + z_j}$.

Demonstrație:

Considerând latura “j” de operator z_j aparținând unei rețele liniare active căreia i se aplică teorema substituției tensiunea la borne satisface relația:

$$u_j = u_{j0} - z_{eh} \cdot i_j \quad \text{sau} \quad i_j = \frac{u_{j0}}{z_{eh}} - \frac{u_j}{z_{eh}} \quad (3.29)$$

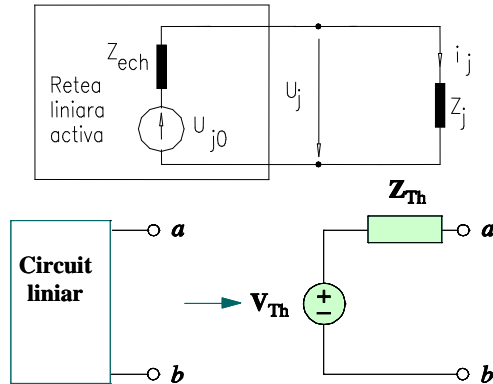


Fig. 3.20

Întrucât $U_j = Z_j i_j$, rezultă:
$$i_j = \frac{u_{j0}}{z_{eh} + z_j} \quad (3.30)$$

În consecință, unei rețele liniare active față de două borne i se poate atașa un dipol echivalent de tensiune electromotoare U_{j0} și operator de impedanță internă Z_{ech} . Ecuația tensiunii la bornele sarcinii este:
 $u_j = u_{j0} - z_{eh} \cdot i_j$.

Observații:

1. Generatorul echivalent de tensiune permite determinarea curentului într-o latură pasivă Z_j fără a necesita rezolvarea completă a circuitului.
2. Orice rețea față de două borne poate fi echivalată printr-un generator echivalent.

3.3.2 Teorema generatorul echivalent de curent (Norton)

Enunț:

"Într-o rețea liniară activă răspunsul în tensiune printr-o latură pasivă “j” de operator Y_j este dat de relația:
$$u_j = \frac{i_{scj}}{y_j + y_{ech}} \text{."}$$

Demonstrație:

Considerând o rețea liniară activă din care a fost selectată o latură “j” de o perator Z_j curentul prin latura “j”, după aplicarea teoremei substituției și a principiului superpoziției este dat de relația: $i_j = i_{sc} - \frac{U_j}{Z_{ech}}$.

Conform acestei relații rezultă curentul din latura “j”, care este diferența dintre curentul de scurtcircuit în absența încărcării și curentul ce se scurge prin operatorul impedanței echivalente a dipolului. În consecință, dipolul este prezentat printr-o sursă reală de curent, conform figurii următoare:

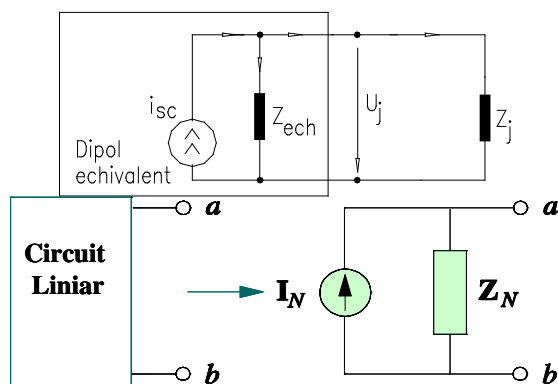


Fig. 3.21

$$i_j = i_{sc} - \frac{u_j}{Z_{ech}}, \text{ dar } i_j = \frac{u_j}{Z_j}. \text{ Înlocuind rezultă: } u_j = \frac{i_{sc}}{\frac{1}{Z_j} + \frac{1}{Z_{ech}}} = \frac{i_{sc}}{y_j + y_{ech}} \quad (3.31)$$

Observații:

1. Trecerea din dipol echivalent de tensiune în dipol echivalent de curent se poate face utilizând teorema de echivalență a surselor reale de tensiune în surse reale de curent în baza relațiilor: $i_{sc} = \frac{u_{j0}}{Z_{eh}}$;

$$Z_{eh} = Z_{ech}.$$

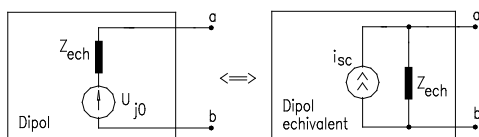


Fig. 3.22

2. Aplicarea practică a generatorului de tensiune și curent se face ori de câte ori dorim să simplificăm rezolvarea unui circuit prin descompunerea

acestui în circuite elementare echivalente, sau când se urmărește răspunsul fie în curent fie în tensiune pe o singură latură.

3. Din cele prezentate rezultă că orice rețea poate fi reprezentată printr-un dipol echivalent de tensiune sau de curent. Se pune problema când este util a reprezenta o rețea printr-un dipol echivalent de tensiune și când printr-un dipol echivalent de curent? Răspunsul îl găsim dacă analizăm eficiența transferului de putere către sarcină (sau r andament). Dacă operatorul de impedanță al sarcinii este mult mai mic decât operatorul echivalent al dipolului, atunci redăm dipolul prin generator echivalent de curent.

$$Z_j \ll Z_{ech}, \text{ iar } i_j \cong i_{sc} \text{ (curenți mari)}. \quad (3.32)$$

Dacă $Z_j \ll Z_{ech}$ atunci schema echivalentă asociată dipolului este de tip generator echivalent de tensiune, întrucât căderea de tensiune internă pe dipol este mică și $u_j = u_{j0}$.

3.3.3 Exemple de transformare a circuitelor în dipol echivalent

A) Circuite ce conțin surse independente

Circuitul din figura următoare să se reducă la dipol echivalent față de rezistența de $1k\Omega$ conectată între bornele A și B.

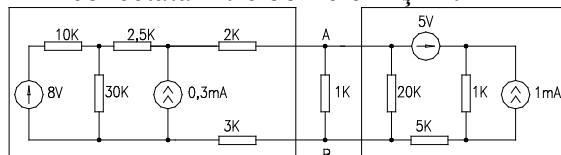


Fig. 3.23

Față de rezistența de $1k\Omega$ conectată între bornele A și B circuitul se descompune în doi dipoli echivalenți. În consecință, zona din stânga rezistenței respectiv din dreapta poate fi echivalată prin dipol echivalent de tensiune sau de curent. Reprezentarea dipolilor în circuit echivalent de tensiune sau de curent este funcție de rezistența internă echivalentă a dipolului. Presupunem că reprezentăm circuitul în dipoli echivalenți de tensiune (*Thévenin*). În această situație avem pentru circuitul din stânga, respectiv din dreapta bornelor A,B de determinat tensiunile de mers în gol și rezistențele echivalente ale dipolilor. Reducerea la dipol echivalent a circuitului din stânga sarcinii presupune rezolvarea circuitului din figura 3.24.

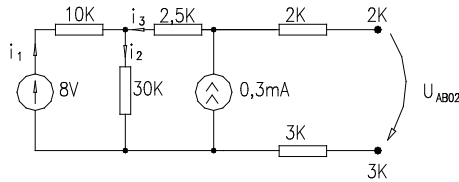


Fig. 3.24

Tensiunea U_{AB0} este tensiunea de pe sursa de curent întrucât căderile de tensiune pe rezistențele de 2 kΩ, respectiv 3kΩ sunt nule. Aplicând T2K rezultă: $U_{AB0} = i_2 \cdot 30 + i_3 \cdot 2,5$ cu i_2 și i_3 necunoscute ce urmează a fi determinate din rezolvarea circuitului următor:

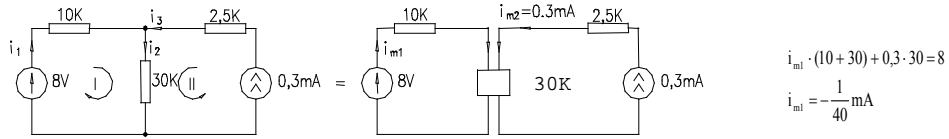


Fig. 3.25

Trecând în variabile reale, rezultă:

$$i_1 = -\frac{1}{40} \text{ mA}; \quad i_2 = i_{m2} + i_{m1} = 0,3 - \frac{1}{40} = 0,275 \text{ mA}; \quad i_3 = 0,3 \text{ mA} \quad (3.33)$$

$$\text{respectiv: } U_{AB01} = 30 \cdot 0,275 + 0,3 \cdot 2,5 = 8,25 + 0,75 = 9 \text{ V}. \quad (3.34)$$

Rezistența echivalentă a dipolului din stânga se poate determina alegând metoda pasivizării circuitului, rezultând:

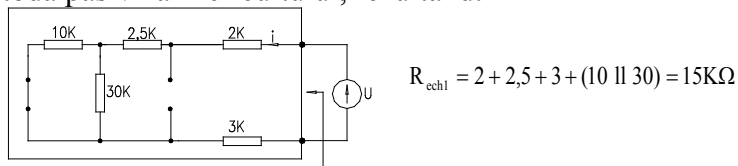


Fig. 3.26

Reducerea la dipol echivalent al circuitului din dreapta sarcinii presupune determinarea tensiunii de mers în gol și a rezistenței echivalente atașate circuitului din figura 3.27

Dipolul echivalent din dreapta bornelor A,B conține necunoscutele U_{AB02} și R_{ech2} . Tensiunea electromotoare a dipolului se determină din rezolvarea următorului circuit:

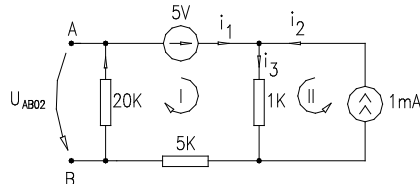


Fig. 3.27

Asociind curenții i_1 , i_2 și i_3 prin laturile circuitului de mai sus rezultă prin aplicarea relației lui Ohm: $U_{AB02} = -20i_1$, unde ne cunoscuta i_1 se determina din aplicarea metodei curenților independenți:

$$\begin{aligned} i_{m1} \cdot (5 + 20 + 15) + i_{m2} \cdot 15 &= 5 \\ i_{m2} &= 1mA \end{aligned} \quad (3.35)$$

În urma rezolvării obținem: $i_{m1} = -\frac{10}{40}mA$; $i_1 = i_{m1} = -0,25mA$;

$$U_{AB02} = -(-0,25) = 5V.$$

Pentru a determina rezistența internă R_{ech2} se aplică metoda pasivizării surselor față de bornele A,B, obținând:

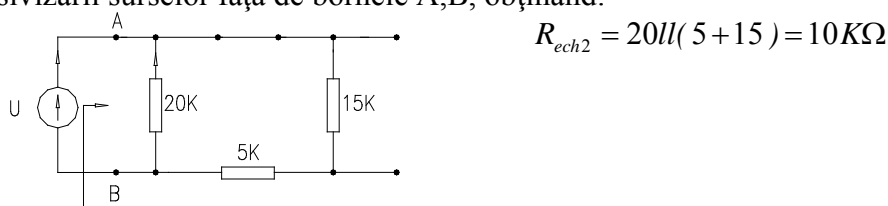


Fig. 3.28

În consecință, dipolii echivalenți ai circuitului analizat sunt:

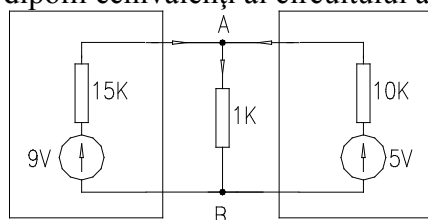


Fig. 3.29

Curentul total prin rezistența de 1 kΩ este suma algebrică a curenților debitați de dipolii echivalenți conform relației:

$$i_{AB} = \frac{9}{15+1} + \frac{5}{10+1} \approx 1,017mA \quad (3.36)$$

B) Circuite ce conțin surse dependente

În circuitul din figura următoare să se determine dipolul echivalent față de bornele (A,B) laturii ce conține rezistența de 5kΩ.

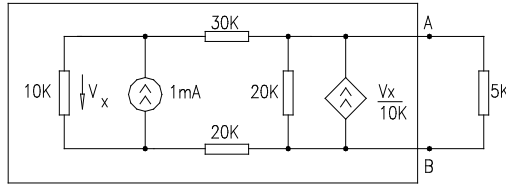


Fig. 3.30

Dipolul echivalent asociat circuitului față de bornele A,B este redat în figura următoare:

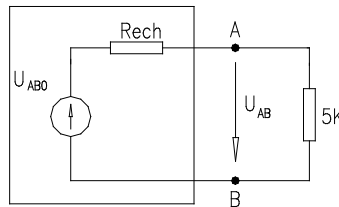


Fig. 3.31

Acest dipol conține necunoscutele U_{AB0} și R_{ech} . D eterminarea acestora se face din circuitul inițial în absența rezistenței de 5kΩ.

Determinarea tensiunii de mers în gol U_{AB0}

- se face din rezolvarea următorului circuit:

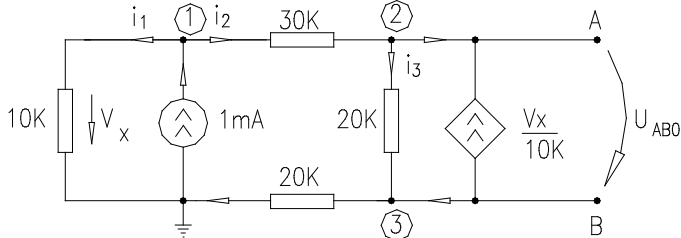


Fig. 3.32

Tensiunea U_{AB0} reprezintă tensiunea de pe rezistorul de 20kΩ sau tensiunea de la bornele sursei de curent controlată în tensiune.

$U_{AB0} = I_3 \cdot 20$ cu I_3 necunoscută ce se determină prin rezolvarea circuitului de mai sus. Analiza topologică a circuitului indică $l=6$, $n=4$, $b=l-n+1=3$. Metoda de rezolvare cea mai simplă este a curenților de contur întrucât din cele trei ecuații de ochiuri, un curent este impus de sursa independentă de curent. Curenții independenți asociați circuitului sunt redați în figura următoare, iar sistemul ecuațiilor de bucle este:

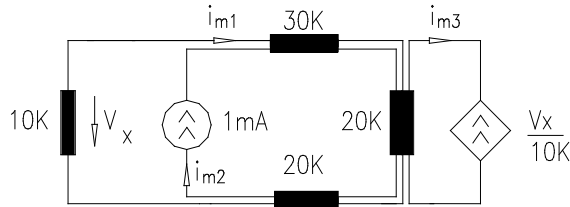


Fig. 3.33

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{m1}(30 + 20 + 20 + 10) + i_{m2}(20 + 20 + 30) - i_{m3}(20) = 0 \\ i_{m2} = 1mA \\ i_{m3} = \frac{V_x}{10} \\ V_x = -i_{m1} \cdot 10 \end{array} \right\} \Rightarrow i_{m3} = -i_{m1} \quad (3.37)$$

Utilizând metoda eliminării necunoscutelor, obținem:

$$i_{m1} = -0.7mA, i_{m2} = 0.7mA, V_x = 7V, i_3 = -0.4mA \quad (3.38)$$

Tensiunea de mers în gol va fi: $U_{AB0} = -0,4 \cdot 20 = -8V$, care are polaritate opusă față de bornele A,B.

Determinarea rezistenței echivalente a dipolului generator - se poate face prin metoda pasivizării circuitului și alimentării pe la bornele A,B de la o sursă independentă de curent "i_g" care are la borne tensiunea u_g, conform figurii următoare:

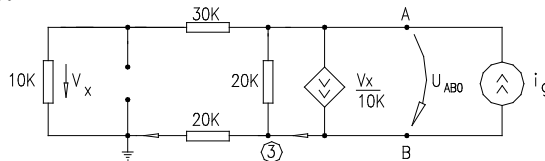


Fig. 3.34

Circuitul poate fi reprezentat și în forma următoare:

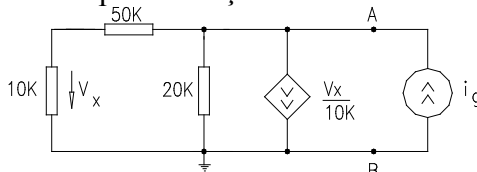


Fig. 3.35

Alegând potențialul bornei B de referință ($V_B=0$) atunci potențialul bornei A este egal cu tensiunea sub care sursa ideală de curent i_g debitează $V_A=U$

Rezolvarea circuitului prin metoda potențialelor nodale permite determinarea dependenței dintre tensiunea U și curentul i_g de pe generatorul ideal de curent. Se obțin:

$$U \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{20} \right) = -\frac{V_x}{10} + i_g \quad (3.39)$$

cu tensiunea V_x exprimată prin divizorul de tensiune:

$$V_x = U \cdot \frac{10}{10+50} = U \cdot \frac{10}{60} \quad (3.40)$$

Înlocuind, rezultă:

$$U \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{20} \right) = -\frac{U}{60} + i_g \quad \text{sau} \quad U \cdot \frac{50}{600} = i_g \quad (3.41)$$

Rezistența echivalentă a circuitului dipolar este:

$$R_{ech} = U/I = 12 \text{ k}\Omega \quad (3.42)$$

Circuitul analizat se comportă față de bornele A,B ale rezistenței de $5\text{k}\Omega$ ca un dipol echivalent cu t.e.m. $=8\text{V}$ și rezistență internă de $12\text{k}\Omega$, reprezentat conform figurii următoare:

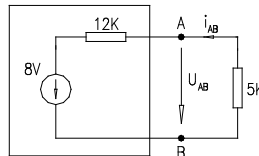


Fig. 3.36

3.4 Teorema de conservare a puterii instantanee în circuitele electrice

Puterea instantanee a unui dipol reprezintă variația energiei în timp și este egală în orice moment cu produsul tensiune-curent l a bornele dipolului.

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = v(t) \cdot i(t) \quad (3.43)$$

$$\text{sau } p(t) = \frac{dW}{dt} = u(t) \cdot i(t) \quad (3.44)$$

Puterea instantanee la bornele unui dipol este pozitivă sau negativă, funcție de tipul dipolului (generator sau receptor). Astfel ea este pozitivă dacă este cedată de dipolul generator și primită de dipolul receptor sau negativă, dacă este cedată de dipolul receptor și primită de dipolul generator. În rețelele electrice cu l laturi și n noduri, puterea instantanee a rețelei este suma puterilor instantanee din toate laturile circuitului.

3.4.1 Teorema de conservare a puterii instantanee în rețelele închise (izolate) conexe și fără cuplaje magnetice cu alte rețele.

Enunț:

“Puterea instantanee a unei rețele izolate egală cu suma puterilor instantanee din laturile circuitului este nulă.”

$$p_r(t) = \sum_{j=1}^l u_j \cdot i_j \equiv 0 \quad (3.45)$$

Demonstrație:

Relația puterii instantanee a unei rețele poate fi exprimată matriceal sub forma:

$$p_r(t) = [u_j]_{j \times l} \cdot [i_j]_{l \times l}^t = [u_j]_{j \times l}^t \cdot [i_j]_{l \times l} \quad (3.46)$$

unde:

$$[u_j]_{j \times l} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_j \end{bmatrix}; [i_j]_{l \times l} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_l \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Întrucât curenții reali din laturile circuitului pot fi exprimați prin curenți de bucle iar tensiunile de la bornele laturilor prin potențiale independente:

$$[i_j]_{l \times l} = [B]_{l \times v}^t \cdot [i_m]_{v \times l}; [u_j]_{j \times l} = [A]_{l \times (n-1)}^t \cdot [v_k]_{(n-1) \times l} \quad (3.48)$$

rezultă:

$$p_r(t) = [A]^t \cdot [v_k] \cdot [B]^t \cdot [i_m] = [A] \cdot [B]^t \cdot [v_k] \cdot [i_m] = 0 \quad (3.49)$$

Matricile topologice ale circuitului sunt ortogonale și-n consecință produsul lor este nul.

Consecință:

Teorema de conservare a puterii instantanee a unei rețele permite formularea ecuației de bilanț a puterilor (bilanț energetic). Această formulare se obține prin înlocuirea ecuației Joubert în teorema de conservare a puterii instantanee a rețelei.

$$p(t) = [u_j]^t \cdot [i_j]^t = 0 \quad \text{dar} \quad [e_j] + [u_j] = [z_j] \cdot [i_j] \quad (3.50)$$

Înlocuind rezultă:

$$([z_i] \cdot [i_j] - [e_j]) \cdot [i_j]^t = 0 \quad (3.51)$$

$$\text{echivalentă cu: } [z_j]_{l \times l} \cdot [i_j]_{l \times l} \cdot [i_j]_{l \times l}^t = [e_j]_{l \times l} \cdot [i_j]_{l \times l}^t \quad (3.52)$$

Produsul din membrul drept, ținând cont de matricea operatorilor de impedanță ai laturilor poate fi exprimată în forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_l & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_l \end{bmatrix} \cdot [i_1, i_2, \dots, i_l] = z_1 \cdot i_1^2 + z_2 \cdot i_2^2 + \dots + z_l \cdot i_l^2 = \sum_{j=1}^l z_j \cdot i_j^2 \quad (3.53)$$

respectiv membrul drept:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_l \end{bmatrix} \cdot [i_1, i_2, \dots, i_l] = e_1 \cdot i_1 + e_2 \cdot i_2 + \dots + e_l \cdot i_l = \sum_{j=1}^l e_j \cdot i_j \quad (3.54)$$

Întrucât operatorul de impedanță al unei laturi este:

$$z_j = R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_j} \int dt \quad (3.55)$$

rezultă ecuația de bilanț energetic a puterilor:

$$\sum_{j=1}^l R_j \cdot i_j^2 + \sum_{j=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{L_j \cdot i_j^2}{2} \right) + \sum_{j=1}^l \left(\frac{1}{C_j} \int i_j dt \right) \cdot i_j = \sum_{j=1}^l e_j \cdot i_j \quad (3.56)$$

ce sintetic poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{j=1}^l \left(p_j + \frac{dW_{mj}}{dt} + \frac{dW_{ei}}{dt} \right) = \sum_{j=1}^l e_j \cdot i_j \quad (3.57)$$

Particularizând pentru rețele de curent continuu ecuația de bilanț a puterilor devine:

$$\sum_{j=1}^l R_j \cdot I_j^2 = \sum_{j=1}^l E_j \cdot I_j \quad (3.58)$$

3.4.2. Teorema de conservare a puterii instantanee în rețele deschise cu n borne de acces

Fie o rețea deschisă cu n_e borne de acces prin care se injectează curenții i_k , iar bornele au potențialele v_k .

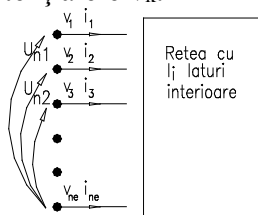


Fig. 3.37

Alegând potențialul bornei n_e ca potențial de referință rezultă tensiunile dintre bornele exterioare: $u_{nk} = v_n - v_k$.

Conform teoremei substituției orice latură prin care trece curent și are la borne tensiune poate fi înlocuită fie printr-o sursă de curent, fie printr-o sursă de tensiune rezultă că cele n_e-1 laturi exterioare corespunzătoare bornelor de acces pot fi înlocuite prin generatoare de curent.

Aceste generatoare injectează în noduri curenții i_k și au la borne tensiunile U_{nk} . În acest mod rețeaua deschisă cu l_i laturi și n_e borne de acces a fost transformată într-o rețea închisă cu $l_i+(n_e-1)$ laturi. Aplicând teorema de conservare a puterii instantanee în rețeaua închisă rezultă:

$$p(t) = \sum_{j=1}^{l_i+(n_e-1)} u_j \cdot i_j = 0 = \sum_{j=1}^{l_i} u_j \cdot i_j + \sum_{k=1}^{n_e-1} u_{nk} \cdot i_k \quad (3.59)$$

Primul termen din relația de mai sus exprimă puterea instantanee din laturile interioare ale rețelei iar al doilea termen puterea instantanee injectată pe la bornele de acces. Relația de mai sus este echivalentă cu:

$$\sum_{j=1}^{l_i} u_j \cdot i_j + \sum_{k=1}^{n_e-1} (v_n - v_k) \cdot i_k = 0 \quad (3.60)$$

$$\sum_{j=1}^{l_i} u_j \cdot i_j + v_n \sum_{k=1}^{n_e-1} i_k - \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k \cdot i_k = 0$$

Rețeaua cu n_e borne de acces constituie un multiport iar suma curenților incidenti în bornele de acces este nulă și rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n_e-1} i_k = -i_n \quad (3.61)$$

Alegerea potențialului bornei n_e potențial de referință pentru întreaga rețea rezulta că *puterea instantanee a unei rețele interioare este egală în orice moment cu puterea instantanee injectată pe la bornele de acces.*

$$\sum_{j=1}^{l_i} u_j \cdot i_j = \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k \cdot i_k \quad (3.62)$$

Observație:

Întrucât rețeaua deschisă analizată este arbitrară rezultă conform relației de mai sus că izolând o porțiune de circuit dintr-o rețea în orice moment puterea instantanee a porțiunii izolate este egală cu puterea injectată prin cele n_e-1 borne de acces.

Consecință:

Înlocuirea ecuației Joubert, definită între tensiunile și curenții de pe laturile interioare ale rețelei, în relația de conservare a puterii instantanee conduce la definirea ecuației de bilanț a puterilor:

$$[z_i][i_j][i_j]^t - [e_j][i_j]^t = \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k \cdot i_k \quad (3.63)$$

Notând:

$$p_b = \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k \cdot i_k \quad \text{- suma puterilor instantanee injectate pe la bornele de acces.}$$

$$p_s = \sum_{j=1}^{n_e-1} e_j \cdot i_j = [e_j][i_j]^t \quad \text{- puterea surselor din rețeaua închisă.}$$

$$p_j = \sum_{k=1}^{n_e-1} R_j \cdot i_j^2 \quad \text{- pierderile Joule-Lentz din rețeaua închisă}$$

obținem:
$$p_j + \frac{dW_{em}}{dt} = p_b + p_s$$

3.4.3. Puterea maximă transferată dipolului echivalent în curent continuu

În acest capitol se tratează numai transferul maxim de putere în rețele de c.c. Nu tratăm pentru cazul general întrucât operatorul de impedanță al unei laturi poate fi $z_j = R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_j} \int dt$, iar inversul acestui operator în prezența unei excitații variabile în timp presupune definirea relației de inversiune: $y_j = 1/z_j$.

Revenind la puterea transferată în c.c. apare necesitatea definirii condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească sarcina R_L pentru ca puterea debitată de rețea pe această sarcină să se maximizeze. Orice rețea, față de bornele unei laturi pasive, poate fi considerată un dipol echivalent fie de tensiune (*Thévenin*) fie de curent (*Norton*).

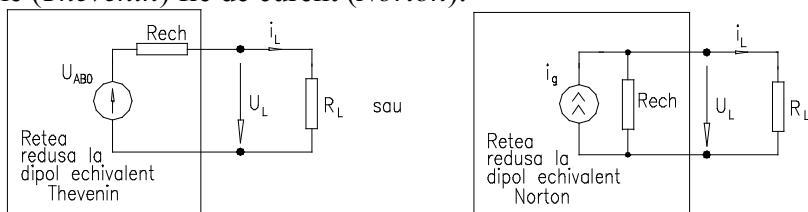


Fig. 3.38

Puterea instantanee transferată sarcinii este egală cu produsul dintre tensiunea la bornele sarcinii și curentul absorbit de sarcină, având expresia:

$$P_L = U_L \cdot I_L = R_L \cdot I_L^2 = \frac{U_L^2}{R_L} \quad (3.64)$$

Exprimând curentul din circuit cu ajutorul teoremei II Kirchhoff și înlocuind rezultă pentru dipolul echivalent de tensiune:

$$I_L = \frac{U_{AB_0}}{R_{ech} + R_L}; P_L = U_{AB_0}^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{ech})^2} \quad (3.65)$$

Puterea exprimată prin relația de mai sus admite un maxim pentru:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0; R_L = R_{ech} \quad (3.66)$$

Înlocuind în expresia puterii condiția $R_L = R_{ech}$ rezultă puterea maximă transferată unui dipol în c.c.

$$P_{max} = \frac{U_{AB_0}^2}{4R_L} = \frac{U_{AB_0}^2}{4R_{ech}} \quad (3.67)$$

Concluzie:

Condiția de maximizare a puterii transferate unui dipol de c.c. este ca rezistența dipolului echivalent să fie egală cu rezistența laturii (sarcinii).

Numim eficiență a transferului de putere (sau randament) raportul dintre puterea debitată pe consumator și puterea sursei:

$$\eta = \frac{P_L}{P_S} \quad (3.68)$$

În continuare analizăm eficiența transferului de putere (sau randamentul) pe o rezistență de sarcină când circuitul de alimentare este reprezentat prin dipol echivalent de tensiune sau de curent:

a. Circuitul echivalent reprezentat prin dipol echivalent de tensiune (Thévenin)

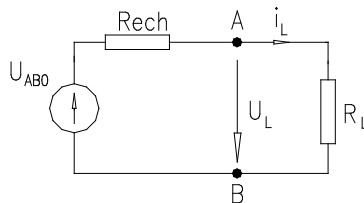


Fig. 3.39

$$P_L = R_L I_L^2$$

$$P_S = U_{AB_0} I \quad \text{dar} \quad I = \frac{U_{AB_0}}{R_L + R_{ech}} \Rightarrow P_S = I^2 (R_L + R_{ech}) \quad (3.69)$$

Eficiența transferului de putere (sau randamentul) este exprimată prin raportul rezistență de sarcină pe rezistență totală a circuitului:

$$\eta_T = \frac{P_L}{P_S} = \frac{R_L}{R_L + R_{ech}} \quad (3.70)$$

Pentru putere maximă transferată sarcinii, $R_L = R_{ech}$ iar eficiența transferului (randamentul) este de 50%. Pentru ca randamentul puterii transferate să fie între 50 și 100% trebuie ca $R_L > R_{ech}$.

În consecință, ori de câte ori rezistența echivalentă este mai mică decât rezistența de sarcină dipolul echivalent este de tensiune. În acest caz eficiența transferului este cuprinsă între $\eta_T \in (0,5 - 1)$.

b. Circuite de alimentare reprezentate prin dipol echivalent de curent (Norton)

Utilizarea dipolului de curent în reprezentarea circuitelor de alimentare a sarcinii conduce la următoarea relație a puterii debitată pe sarcină:

$$p_L = I_L^2 \cdot R_L \quad \text{cu} \quad I_L = I_g \cdot \frac{R_{ech}}{R_{ech} + R_L} \quad \text{obținem:} \quad p_L = I_g^2 \cdot \frac{R_L \cdot R_{ech}^2}{(R_{ech} + R_L)^2} \quad (3.71)$$

Condiția de maximizare ($\frac{\partial p_L}{\partial R_L} = 0$) a acestei puteri la sarcină variabilă conduce la $R_{ech} = R_L$ iar valoarea puterii maxime transferate este

$$p_{max} = \frac{R_L \cdot I_g^2}{4}$$

Eficiența transferului de putere pentru dipolul echivalent de curent este:

$$\eta_i = \frac{P_L}{P_S} = \frac{R_{ech}}{R_{ech} + R_L} \quad \text{unde} \quad P_L = I_g^2 \cdot \frac{R_L \cdot R_{ech}^2}{(R_L + R_{ech})^2}, \quad P_S = I_g \cdot U_i = I_g^2 \cdot \frac{R_L \cdot R_{ech}}{R_L + R_{ech}} \quad (3.72)$$

La putere maximă transferată eficiența dipolului echivalent de curent este de 50%. Pentru ca eficiența dipolului să fie între 0,5-1 trebuie ca $R_L < R_{ech}$. În aceste condiții ori de câte ori rezistența de sarcină are valori mai mici decât rezistența de sarcină alimentarea trebuie făcută printr-un dipol echivalent de curent.

3.5. Teoremele de transfigurare și reducere a rețelelor electrice

3.5.1. Teorema Millman

Se consideră o rețea cu $n+1$ noduri și n ramuri conectate în stea având potențialele v_j , ($j=1,2,\dots,n$) și v_0 potențialul punctului comun.

Teoremă:

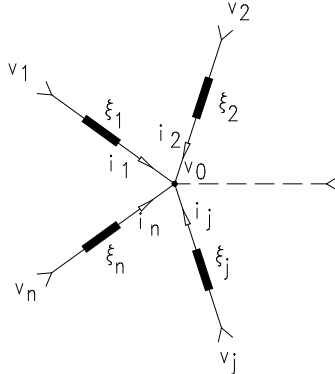


Fig. 3.40

"Potențialul v_0 al punctului comun al rețelei conectate în stea este dependent de potențialelor celor n noduri prin relația:

$$v_0 = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{v_j}{z_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j}} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j \cdot v_j}{\sum_{j=1}^n y_j} \quad (3.73)$$

Demonstrație:

Aplicând teorema I Kirchoff în nodul 0 obținem:

$$\sum_{j=1}^n i_j = 0 \quad \text{dar} \quad i_j = \frac{v_j - v_0}{z_j} = \frac{v_j}{z_j} - \frac{v_0}{z_j} \quad (3.74)$$

Înlocuind rezultă:

$$\sum_{j=1}^n \frac{v_j}{z_j} - v_0 \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j} = 0 \quad (3.75)$$

3.5.2. Teorema de transfigurare a rețelei stea în rețea triunghi sau Y-Δ

Fie o rețea deschisă în stea cu potențiale nodurilor v_1, v_2, v_3, v_0 iar curenți i_1, i_2, i_3 ce parcurg operatorii de impedanță z_1, z_2, z_3 . Ne interesează să determinăm condiția necesară și suficientă pentru a transfigura rețeaua stea în rețea poligon (triunghi).

Izolând rețeaua printr-o suprafață închisă, această suprafață intersectează rețeaua în trei borne de acces. În interiorul suprafeței închise Σ figurăm păstrând aceleași borne de acces o subrețea poligon (triunghi).

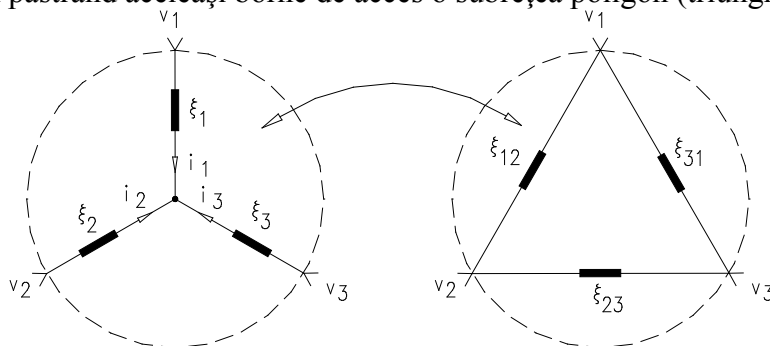


Fig. 3.41

Conform teoremei de conservare a puterii instantanee, puterea din interiorul suprafeței Σ este egală cu puterea injectată pe la bornele de acces. Pentru configurația stea:

$$p_{\Sigma Y} = \sum_{j=1}^3 v_j \cdot i_j = p_{\Sigma \Delta} \quad (3.76)$$

Din punct de vedere energetic orice element din circuit este complet definit de puterea instantanee egală cu produsul curent-tensiune. În consecință, *puterea dezvoltată în interiorul suprafeței Σ* , egală cu suma produselor dintre potențiale și curenții injectați pe la bornele de acces, trebuie să fie aceeași indiferent de configurația rețelei din interiorul suprafeței Σ .

Înlocuind potențialele bornelor de acces prin surse de tensiune cu menținerea potențialului bornelor de acces și a curenților injectați prin noduri, în interiorul suprafeței Σ obținem pentru cele două configurații:

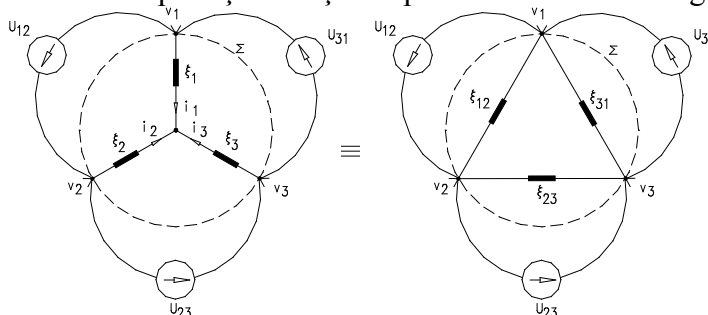


Fig. 3.42

Întrucât rețelele deschise stea sau triunghi au fost transformate în rețele închise alimentate de la cele trei surse pentru determinarea relațiilor de transfigurare aplicăm principiul superpoziției.

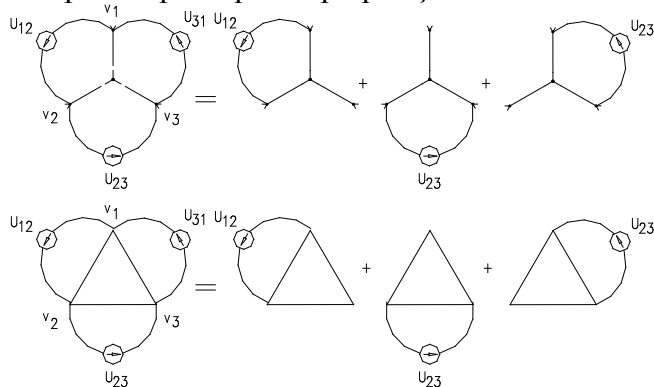


Fig. 3.43

Alimentarea pe la bornele 1-2:

- pentru stea: $v_1 - v_2 = (z_1 + z_2) \cdot i$;

- pentru triunghi: $v_1 - v_2 = [z_{12} / (z_{23} + z_{21})] \cdot i$;

Impunând condiția de egalitate a potențialelor și curenților injectați prin nodurile de acces rezultă:

$$(1) \quad z_1 + z_2 = z_{12} / (z_{23} + z_{31}) = \frac{z_{12}(z_{13} + z_{23})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}}$$

Procedând similar pentru alimentarea pe la bornele 2-3 respectiv 3-1 rezultă:

$$(2) \quad z_2 + z_3 = z_{23} / (z_{12} + z_{13}) = \frac{z_{23}(z_{12} + z_{13})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}}$$

$$(3) \quad z_1 + z_3 = z_{13} / (z_{12} + z_{23}) = \frac{z_{13}(z_{12} + z_{23})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}}$$

Se obține un sistem de trei ecuații ce trei necunoscute.

Relațiile pentru transformarea triunghi - stea se obțin scăzând relația (2) din relația (1) și însumând rezultatul cu relația (2):

$$(1)-(2) \Rightarrow z_1 - z_3 = \frac{z_{12} \cdot z_{31} - z_{23} \cdot z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (4)$$

$$(2)+(4) \Rightarrow 2z_1 = \frac{2 \cdot z_{12} \cdot z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}}$$

Obținem astfel:

$$z_1 = \frac{z_{12} \cdot z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.77)$$

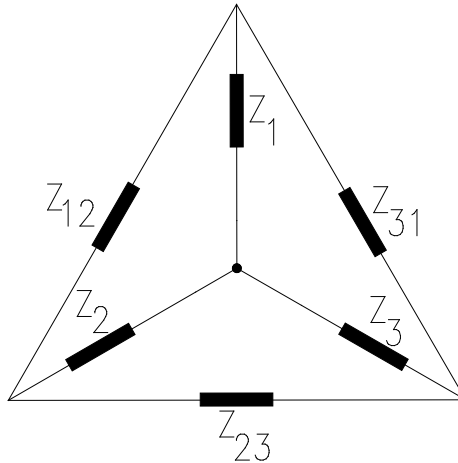


Fig. 3.44

Procedând similar rezultă:

$$z_2 = \frac{z_{12} \cdot z_{23}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.78)$$

$$z_3 = \frac{z_{31} \cdot z_{23}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.79)$$

Relațiile pentru transformarea stea - triunghi se obțin astfel:

$$z_1 + z_2 = \frac{z_{12} \cdot (z_{23} + z_{31})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.80)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_{13}}{z_{23}} \quad (3.81)$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_{12}}{z_{23}} \Rightarrow z_{23} = z_{12} \cdot \frac{z_3}{z_1} \quad (3.82)$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_{12}}{z_{13}} \Rightarrow z_{13} = z_{12} \cdot \frac{z_3}{z_2} \quad (3.83)$$

Înlocuind rezultă:

$$z_1 + z_2 = \frac{z_{12} \cdot \left(z_{12} \cdot \frac{z_3}{z_1} \cdot z_{12} \cdot \frac{z_3}{z_2} \right)}{z_{12} + z_{12} \cdot \frac{z_3}{z_1} + z_{12} \cdot \frac{z_3}{z_2}} \quad (3.84)$$

$$(z_1 + z_2) \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) = z_{12} \cdot \left(\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) \quad (3.85)$$

$$(z_1 + z_2) + (z_1 + z_2) \cdot \left(\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) = z_{12} \cdot \left(\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right)$$

$$\Rightarrow z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 + z_2}{\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2}} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 + z_2}{\frac{z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1}{z_1 \cdot z_2}} \quad (3.86)$$

$$z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2)}{z_3 \cdot (z_1 + z_2)} \quad (3.87)$$

$$z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} \quad (3.88)$$

Similar:

$$z_{13} = z_1 + z_3 + \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} \quad (3.89)$$

$$z_{23} = z_2 + z_3 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1} \quad (3.90)$$

Observație:

Operatorul de impedanță al laturii particularizat pentru laturi rezistive $z_j=R_j$ respectiv p entru la turii in ductive $z_j = L \frac{d}{dt}$ sau $z_j = s \cdot L_j$

permite determinarea relațiilor de transfigurare a rezistentelor r respectiv a inductivităților. În cazul condensatoarelor, operatorul de impedanță al laturii este produsul a doi scalari $1/C_j$ și integrala în raport cu timpul $z_1 = \frac{1}{C_j} \int dt$

sau $z_1 = \frac{1}{s \cdot C_j}$. A stfel $1/C_{23}=1/C_2+1/C_3+(1/C_2C_3)/(1/C_1)$ ce după efectuarea calculelor rezultă $C_{23}=C_2C_3/(C_1+C_2+C_3)$

3.5.3 Teoremele de reducere a rețelelor la dipol echivalent

A. Reducerea rețelei serie la dipol echivalent

A.1 Fie o rețea cu s elemente cuplate magnetic conectată în serie:

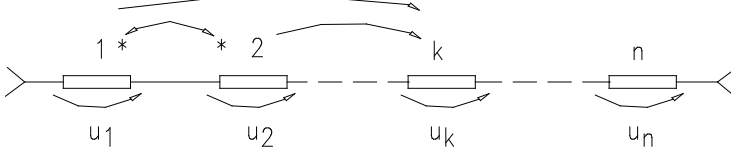


Fig. 3.45

Tensiunea pe elementul k cuplat magnetic cu $(s-1)$ elemente este:

$$u_k = z_{kk}i_k + \sum_{j=1}^{s-1} z_{kj}i_j \quad \text{sau:} \quad \sum_{j=1}^s z_{kj}i_j = \sum_{j=1}^s z_{kj}i_k \quad \text{dar} \quad i_j = i_k \quad (3.91)$$

Întrucât tensiunea unei bobine necuplate magnetic poate fi scrisă în forma: $u_k = z_{k0}i_k$ rezultă operatorul atașat acesteia: $z_{k0} = \sum_{j=1}^s z_{kj}$.

În consecință, rețeaua cu s elemente cuplate magnetic este transformată într-o rețea fără cuplaje magnetice de operatori z_{k0} .

În rețeaua fără cuplaje tensiunea la bornele dipolului este:

$$u_e = \sum_{k=1}^s u_k = z_e i_e; \quad \sum_{k=1}^s z_{k0}i_k = z_e i_e \quad \text{dar} \quad i_k = i_e \quad (3.92)$$

rezultând operatorul echivalent al rețelei:

$$z_e = \sum_{k=1}^s z_0 = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^s z_{jk} \right) = z_e \quad (3.93)$$

A.2 Circuit serie cu surse și cuplaje

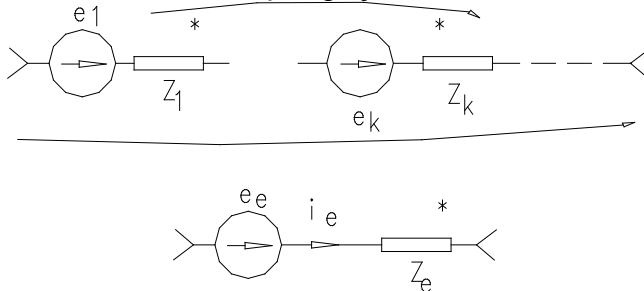


Fig. 3.46

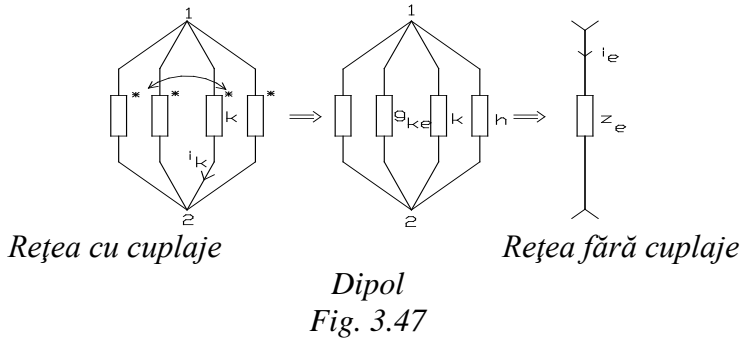
Rețeaua cu cuplaje se poate transforma în rețea fără cuplaje de operatori $z_{k0} = \sum_{j=1}^s z_{kj}$. Aplicând ecuația Joubert atât rețelei cât și dipolului

$\sum e_k + U_{12} = \sum_{k=1}^s z_{k0} i_k$ - rețea fără cuplaje; $e_e + U_{12} = z_e i_e$ - element dipolar echivalent.

Rezultă, prin identificare tensiunea electromotoare echivalentă $e_e = \sum_{k=1}^n e_k$ și operatorul de impedanță echivalent $z_e = \sum_j \sum_k z_{jk}$.

Aplicație:

Se consideră o latură ce conține două bobine cuplate magnetic conectate în serie cu un condensator de capacitate C_3 încărcat cu tensiunea U_{c0} , și un rezistor de rezistență R_3 . Să se determine dipolul echivalent asociat acestei laturi.



În baza relațiilor stabilite determinăm inițial operatorul de impedanță $z_{k0} = \sum_{j=1}^s z_{kj} = z_{11} - z_{31}$ al bobinelor fără cuplaje magnetice, operatori ce au forma:

$$L_{10} = (L_1 - L_{12}) \frac{d}{dt} \tag{3.94}$$

$$L_{20} = (L_2 - L_{12}) \frac{d}{dt}$$

Condensatorul încărcat este transformat într-un condensator fără condiții inițiale în serie cu o sursă $e_e = U_{10} h(t)$ (fig.3.47b). Operatorul de impedanță al dipolului este:

$$z_e = \sum_{k=1}^y \sum_{j=1}^2 z_{kj} = (L_1 + L_2 - 2L_{12}) \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_4} \int_0^t dt + R_4 \tag{3.95}$$

B. Reducerea rețelei paralel la dipol echivalent

B.1 Rețea paralel cu cuplaje

Se consideră n elemente legate în paralel din care s elemente sunt cuplate magnetic

Exprimăm curentul prin elementul k cuplat magnetic, respectiv necuplat magnetic și identificăm $i_k = \sum_{j=1}^s y_{kj} u_k; i_k = y_{k0} u_k \Rightarrow y_{k0} = \sum_{j=1}^s y_{kj}$.

Curentul total al dipolului este:

$$y_e u_e = i_e = \sum_{k=1}^s i_k = \sum_{k=1}^n y_{k0} u_k \Rightarrow y_e = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s y_{kj} \Rightarrow \frac{1}{z_e} = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{1}{z_{kj}} \quad (3.96)$$

B.2. Rețea paralel cu cuplaje și generatoare de tensiune

În principiu, se transformă rețeaua cuplată magnetic într-o rețea fără cuplaje iar apoi în dipol echivalent.

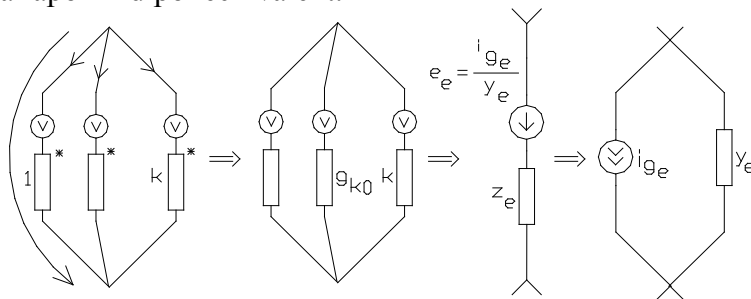


Fig. 3.48

În rețeaua paralel fără cuplaje avem ecuația Joubert:

$$e_k \mp u_k = z_k i_k \text{ sau } i_k = y_k e_k + y_k u_k \quad (3.97)$$

Aplicând teorema I Kirchhoff identificând rezultă:

$$i_e = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n y_k e_k + \sum_{k=1}^n y_k u_k \Rightarrow \text{Dipol}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{de curent : } i_e = i_{ge} + y_e U \Rightarrow i_{ge} = \sum_{k=1}^n y_k e_k \\ \text{de tensiune : } e_e = \frac{i_{ge}}{y_e} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k e_k}{\sum_{k=1}^n y_k} \end{array} \right. \quad (3.98)$$

$$y_e = \sum_{k=1}^n y_k \text{ cu } y_k = \sum_{j=1}^n y_{kj}; \quad e_k + U_k = z_{k_v} i_k \Rightarrow U_k = z_{k_v} i_k - e_k \quad (3.99)$$

CAPITOLUL 4.

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM ARMONIC PERMANENT

4.1. Semnale periodice, alternative și sinusoidale. Definiții.

În regim variabil valoarea $a(t)$ la un moment dat, a unui semnal oarecare (t.e.m, curent, tensiune la borne) poartă denumirea de “*valoare instantanee*”.

Numim “*semnal periodic*” un semnal variabil în timp care la intervale egale de timp trece prin aceleași valori luate în același sens. Un astfel de semnal satisface relația:

$$a(t) = a(t + kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.1)$$

unde: - T - este perioada ce reprezintă intervalul de timp între două treceri consecutive, ale semnalului considerat, prin aceeași valoare și în același sens.

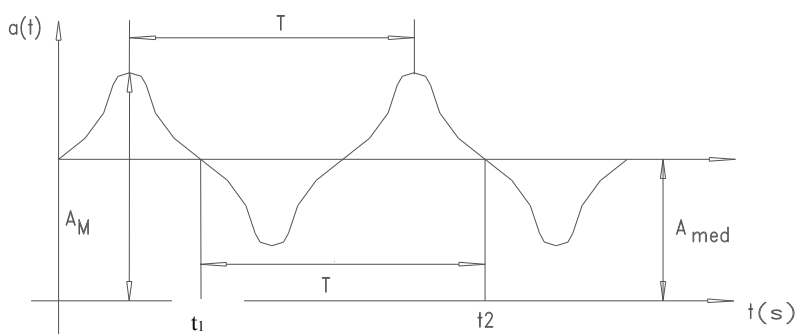


Fig. 4.1

Inversul perioadei poartă denumirea de frecvență și reprezintă numărul de treceri efectuate în unitatea de timp. Unitatea de măsură în Sistemul Internațional este Hertz-ul:

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Hz}] \quad (4.2)$$

Valoarea medie a semnalului este egală cu media aritmetică a valorilor instantanee pe o perioadă și este exprimată matematic prin relația:

$$A_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a(t) \cdot dt \quad (4.3)$$

Un semnal periodic a cărui valoare medie pe o perioadă este nulă poartă denumirea de “*semnal alternativ*” (fig. 4.2).

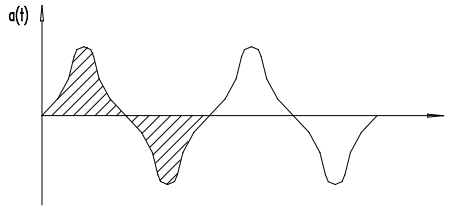


Fig. 4.2

Valoarea efectivă (eficace) a unui semnal alternativ este dată de relația:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t) dt} \quad (4.3)$$

Sensul fizic al valorii efective al curentului îl reprezintă *valoarea curentului continuu* ce ar dezvolta aceeași cantitate de căldură într-un rezistor liniar în intervalul considerat (de obicei pe o perioadă).

$$Q_I = R \cdot I^2 \cdot (t_2 - t_1) = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt} \quad (4.4)$$

$$\text{dacă } t_2 - t_1 = T \text{ atunci } I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2 \cdot dt} \quad (4.5)$$

“Mărimea sinusoidală” este o mărime alternativă a cărei expresie analitică poate fi pusă sub forma de “sinus”:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.6)$$

unde: - A_m - valoarea maximă (amplitudinea semnalului);

- *pulsăția* $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ rad/s, sau viteza unghiulară a fazorului

(vectorul rotitor)

- $\omega t + \gamma$ - argumentul sau faza semnalului;

- γ - faza inițială.

Faza inițială se măsoară de la ultima trecere zero în sens crescător până la originea sistemului de coordonate. Faza inițială este pozitivă ($\gamma > 0$), dacă la $t=0$ mărimea sinusoidală avea valoarea instantanee pozitivă. Faza inițială este funcție de momentul alegerii sistemului de coordonate ($t=0$).

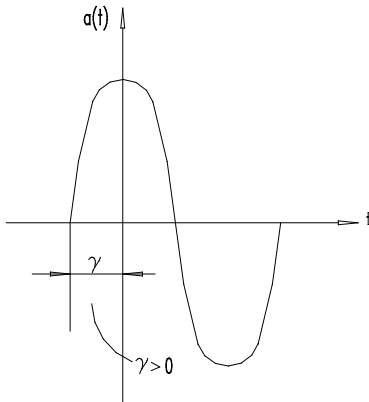


Fig. 4.3

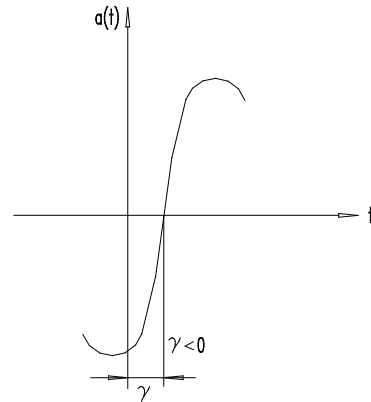


Fig. 4.4

Relații de fază (numai pentru semnalele care au aceeași frecvență)

Două mărimi sinusoidale de aceeași frecvență, $a_1(t)=A_{1m}\sin(\omega t+\gamma_1)$ și $a_2(t)=A_{2m}\sin(\omega t+\gamma_2)$ se numesc defazate dacă, diferența fazelor lor egală cu diferența fazelor inițiale este nenulă.

$$\omega t+\gamma_1-(\omega t+\gamma_2)=\gamma_1-\gamma_2 \neq 0 \quad (4.7)$$

Diferența fazelor inițiale se numește "defazaj" (notată $\varphi = \gamma_1 - \gamma_2$) și se măsoară în "radiani".

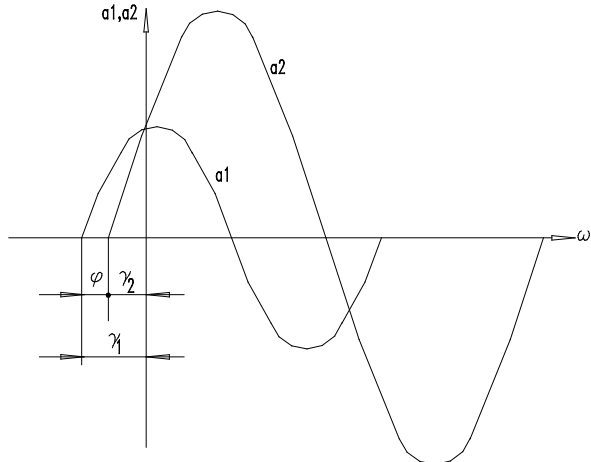


Fig. 4.5

Defazajul dintre mărimi poate fi:

$\varphi = \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ - semnalul a_1 defazat înaintea semnalului a_2 (trece înaintea lui a_2 prin 0)

$\varphi = \gamma_1 - \gamma_2 < 0$ - semnalul a_1 defazat în urma semnalului a_2 ;

$\varphi = 0$ - semnale în fază;

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ - semnale în cvadratură;

$\varphi = \pm \pi$ - semnale în opoziție de fază.

Operații cu mărimi sinusoidale:

- derivata unui semnal sinusoidal este tot un semnal sinusoidal:

$$\frac{da_1}{dt} = \omega A_{1m} \cos(\omega t + \gamma_1) = \omega A_{1m} \sin(\omega t + \gamma_1 + \frac{\pi}{2}) \quad (4.8)$$

dar defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ și cu modulul de ω ori mai mare.

- integrala unui semnal sinusoidal este tot un semnal sinusoidal:

$$\int a \cdot dt = \int A_{1m} \sin(\omega t + \gamma_1) = -\frac{A_{1m}}{\omega} \cos(\omega t + \gamma_1) = \frac{A_{1m}}{\omega} \sin(\omega t + \gamma_1 - \frac{\pi}{2}) \quad (4.9)$$

dar defazat în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ și cu modulul redus de ω ori.

4.1.1. Producerea t.e.m sinusoidale. Valori caracteristice.

Cel mai simplu procedeu de obținere a unei t.e.m. sinusoidale constă în rotirea uniformă a unei spire conductoare într-un câmp magnetic omogen de inducție B.

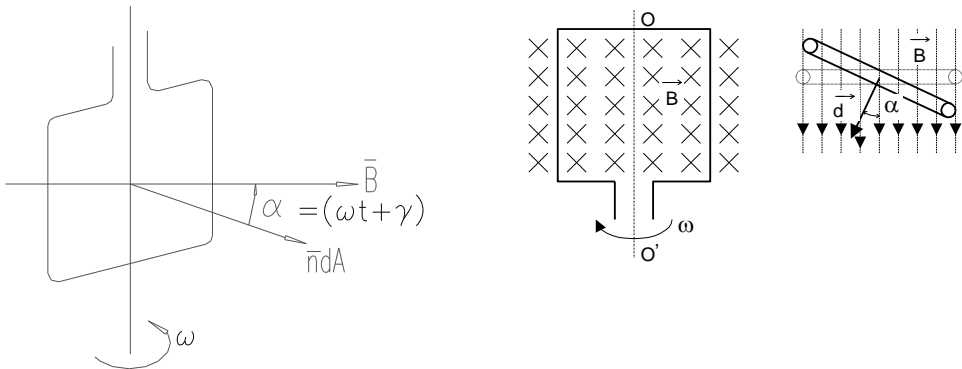


Fig. 4.6

Conform legii inducției electromagnetice, t.e.m. indusă în spirală este:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_p} \vec{B} \cdot \vec{n} dA = -\frac{d}{dt} [N \cdot B \cdot A \cos(\vec{B} \cdot \vec{n})] \quad (4.10)$$

$$e = -\frac{d}{dt} [N \cdot B \cdot A \cos \alpha] = -N \cdot B \cdot A (-\sin \alpha) \frac{d\alpha}{dt} \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow e = \omega \cdot \underbrace{B \cdot A}_{\Phi_{\max}} \sin(\omega t + \gamma) = \omega \cdot \Phi_{\max} \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.12)$$

Expresia t.e.m. induse poate fi scrisă și sub forma:

$$e = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin(\omega t + \gamma) = E_{\max} \cdot \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.13)$$

cu: $E = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \Phi_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\sqrt{2}} \cdot N \cdot B \cdot A = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B \cdot A \quad (4.14)$

Valori caracteristice semnalelor sinusoidale:

- valoarea medie pe o perioadă prin definiție este nulă:

$$E_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_m \sin(\omega t + \gamma) dt = \frac{1}{T} \cdot E_m \cdot \left. \frac{-1}{\omega} \cos(\omega t + \gamma) \right|_0^T \quad (4.15)$$

- valoarea medie pe o semialternanță:

$$E_{\text{med}_{T/2}} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{\frac{\gamma}{\omega}}^{\frac{\gamma}{\omega} + \frac{T}{2}} E_m \sin(\omega t + \gamma) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{E_m}{\omega} \cos(\omega t + \gamma) \Bigg|_{\frac{\gamma}{\omega}}^{\frac{\gamma}{\omega} + \frac{T}{2}} ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.16)$$

$$E_{\text{med}_{T/2}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{E_m}{2\pi} \cdot \left[\cos 0 - \cos \frac{T}{2} \right] = \frac{2}{T} \cdot \frac{E_m}{2\pi} \cdot [1 + 1] = \frac{2 \cdot E_m}{\pi} \quad (4.17)$$

- valoarea efectivă:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (E_m \sin \omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \sin^2 \omega t dt} \quad (4.18)$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \frac{1}{2} dt - \frac{1}{T} \int_0^T (E_m^2 \cos 2\omega t dt)} = \sqrt{\frac{1}{T} E_m^2 \frac{T}{2}} \quad (4.19)$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad (4.20)$$

În regim sinusoidal se definesc următorii factori:

- factor de amplitudine: $K_a = \frac{E_m}{E} = \sqrt{2} \quad \frac{\text{val. max.}}{\text{val. efect}} \quad (4.21)$

- factor de formă:

$$K_f = \frac{E}{E_{\text{med}_{T/2}}} = \frac{\frac{E_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} E_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\text{val. efect.}}{\text{val. medie pe semialternanta}} \quad (4.22)$$

4.2 Reprezentări simbolice ale semnalelor sinusoidale

La o frecvență dată orice semnal sinusoidal este complet determinat de două mărimi scalare:

- amplitudine (sau valoare efectivă)
- fază inițială.

Metodele de reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale constau în stabilirea unor reguli ce asociază fiecărei mărimi sinusoidale o imagine în următoarele condiții:

- reprezentarea să fie biunivocă (fiecărei mărimi i se asociază o singură imagine și invers);
- operațiilor de derivare și integrare să le corespundă operații simple cu imagini;
- transformarea să fie cât mai simplă (în ambele sensuri).

4.2.1. Reprezentarea geometrică (prin fazori)

Cuprinde două aspecte:

I) Reprezentarea cinematică (nesimplificată)

În această reprezentare, unei mărimi sinusoidale:

$$a(t) = \sqrt{2} \cdot A \cdot \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.23)$$

îi corespunde un vector de modul egal cu amplitudinea $\sqrt{2} \cdot A$ care se rotește în plan în sens trigonometric cu viteza unghiulară egală cu pulsația ω și formează în fiecare moment t cu o axă de referință un unghi egal cu argumentul $(\omega t + \gamma)$.

Notăm Ox o axă ce formează cu vectorul $\sqrt{2} \cdot A$ unghiul γ , axa care se rotește cu viteza ω . Aceasta se numește "axă origine de fază".

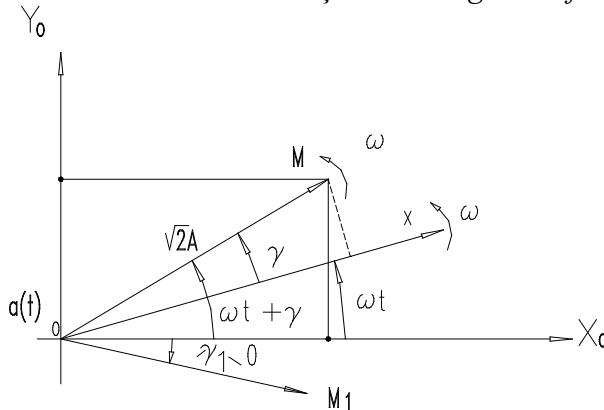


Fig. 4.7

"Vectorul rotitor de modul $\sqrt{2} \cdot A$ și argument $(\omega t + \gamma)$ se numește fazor cinematic iar proiecția lui pe axa Oy este egală cu mărimea instantanee. Notăm fazor cinematic al mărimii $a(t)$:

$$F[a(t)] \vec{\zeta} = \sqrt{2}A \mid \omega t + \gamma = F_g \quad \text{Notația Kennelly} \quad (4.24)$$

Operații cu fazori

a) amplificarea cu un scalar a unui fazor este un fazor cu modulul mărit de λ ori:

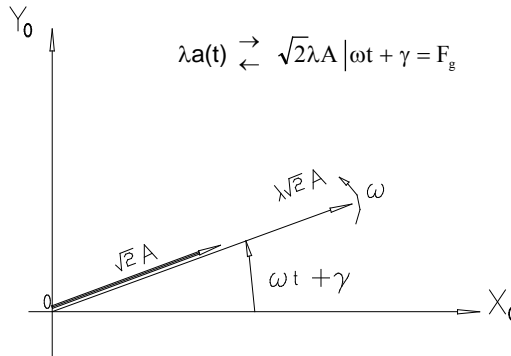


Fig. 4.8

b) adunarea a doi fazori este tot un fazor :

$$a_1 + a_2 \vec{\zeta} \overline{OA_1} + \overline{OA_2} = \sqrt{2}A_1 \mid \omega t + \gamma_1 + \sqrt{2}A_2 \mid \omega t + \gamma_2 = F_{g_1} + F_{g_2} \quad (4.25)$$

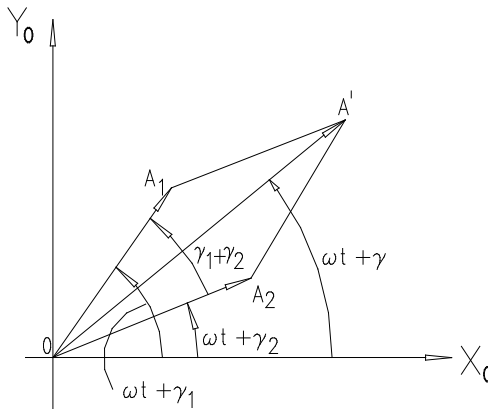


Fig. 4.9

Rezultatul adunării este o mărime sinusoidală de amplitudine:

$$\sqrt{2}A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)} \quad (4.26)$$

$$\text{iar argumentul este: } \operatorname{tg} \gamma = \frac{A_1 \sin \gamma_1 + A_2 \sin \gamma_2}{A_1 \cos \gamma_1 + A_2 \cos \gamma_2} \quad (4.27)$$

c) operațiilor de derivare și integrare a mărimilor sinusoidale le corespund următorii fazori geometrici:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}A \sin(\omega t + \gamma)) = \sqrt{2}\omega A \cos(\omega t + \gamma) = \sqrt{2}\omega A \sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}) \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt}(a) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sqrt{2}\omega A \left| \omega t + \gamma + \frac{\pi}{2} = F_{gd} \right. \quad (4.29)$$

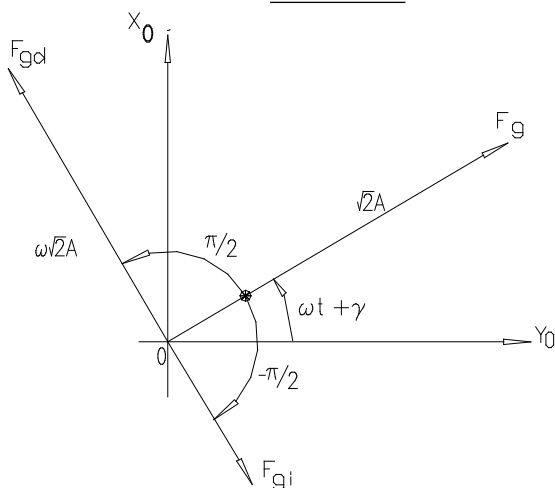


Fig. 4.10

Similar integrării îi corespunde un fazor geometric

$$\int_0^t a dt \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{2} \frac{A}{\omega} \left| \omega t + \gamma - \frac{\pi}{2} = F_{gi} \right. \quad (4.30)$$

II) Reprezentarea polară

În reprezentarea cinematică vectorul se rotește cu ω față de axa fixă Ox_0 (vectorul rotitor se numește fazor). Întrucât axa origine de fază se rotește cu aceeași viteză ω (axa Ox) reprezentarea acestui vector față de axa origine de fază conduce la exprimarea mărimii printr-un vector fix de argument egal cu faza inițială și modul egal cu valoarea efectivă numit fazor polar

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \gamma) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} A \gamma = F_p(a(t)) \text{ fazor polar} \quad (4.31)$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{2}\omega A \sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \omega A \gamma + \frac{\pi}{2} \quad (4.32)$$

$$\int a dt = \sqrt{2} \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{A}{\omega} \gamma - \frac{\pi}{2} \quad (4.33)$$

4.2.2 Reprezentarea analitică (în complex)

Dacă planului geometric y_0Ox_0 i se atașează planul complex cu axa imaginară Oy_0 și reală Ox_0 avem reprezentarea în complex nesimplificat a mărimilor sinusoidale. Vârfului vectorului A îi corespunde un punct în planul complex iar vectorul \overline{OA} un vector în planul complex. Dacă axei origine de fază Ox i se atașează axa reală a planului complex (axă ce se rotește cu ω atunci vectorul din planul polar îi corespunde un fazor fix de modul egal cu valoarea eficace și argument egal cu fază inițială (complex simplificat).

a) Reprezentarea în complex nesimplificat

Oricărei mărimi sinusoidale $a(t) = A \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)$ îi corespunde în planul complex mărimea: $\underline{a} = A \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j(\omega t + \gamma)}$

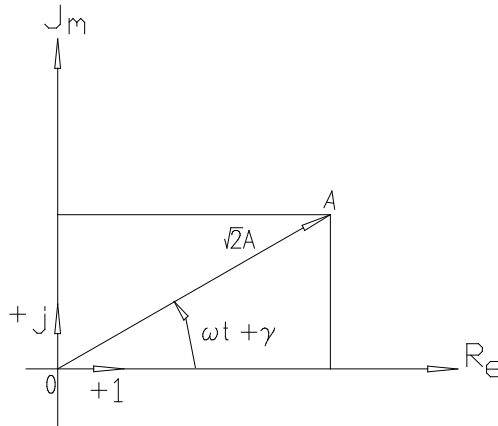


Fig. 4.11

Trecerea inversă (proiecția pe axa imaginară).

$$a(t) = \text{Im}\{\underline{a}\} = \text{Im}\{A \cdot \cos(\omega t + \gamma) + j \cdot A \cdot \sin(\omega t + \gamma)\} = \sqrt{2} \cdot A \cdot \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.34)$$

Dacă: $a(t) = A \cdot \cos(\omega t + \gamma) \Rightarrow \underline{a} = \sqrt{2} \cdot A \cdot e^{j(\omega t + \gamma)}$, iar trecerea inversă implică:

$$a(t) = \text{Re}\{\underline{a}\} .$$

Operații în complex:

$$1) \text{Înmulțirea cu un scalar: } \lambda \cdot \underline{a} = \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot A \cdot e^{j(\omega t + \gamma)} \quad \hat{=} \quad \lambda \cdot a \quad (4.35)$$

$$2) \text{Derivarea: } \frac{da}{dt} = j\omega \sqrt{2} A e^{j(\omega t + \gamma)} = j\omega \underline{a} \quad (4.36)$$

- transformă operația de derivare în operație algebrică de înmulțire cu $j\omega$. *Versorii atașați planului complex sunt +1 - pentru axa reală*

și $+j$ - pentru axa imaginară, și redă rotirea cu 90 grade a versorului axei reale.

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j; \quad \frac{d}{dt} \rightarrow j\omega \quad (4.37)$$

3) Integrarea unui număr complex transformă operația de integrare a mărimii sinusoidale în împărțire la $j\omega$.

$$\int \underline{a} dt = \frac{1}{j\omega} \sqrt{2} A e^{j(\omega t + \gamma)} = \frac{1}{j\omega} \underline{a}; \quad \int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega} \quad (4.38)$$

Avantaj: - operațiile integro-diferențiale sunt transformate în operații algebrice.

b) Reprezentarea în complex simplificat

Întrucât în teoria circuitelor avem mărimi de aceeași pulsație, utilizăm reprezentarea în complex simplificat - ce renunță la $\sqrt{2}$ în reprezentarea vectorului complex și la viteza de rotire ω . Fazorii complecși sunt în repaus relativ față de axa origine de fază.

O astfel de reprezentare se obține identificând planul complex cu planul abstract al fazorilor polari (axa reală atașată axei origine de fază).

În concluzie oricărui semnal de forma:

$$a(t) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \gamma) \text{ îi corespunde în planul complex mărimea } \underline{A} = A e^{j\gamma}$$

Mărimea complexă \underline{A} are modulul egal în valoare efectivă și argument egal cu faza inițială γ . Între valoarea instantanee complexă \underline{a} și valoarea efectivă complexă \underline{A} există relația

$$\underline{a} = \underline{A} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (4.39)$$

Trecerea de la valoarea efectivă complexă la semnalul sinusoidal (reprezentarea în domeniul timp) se face utilizând relațiile:

$$a(t) = \begin{cases} R_e \left\{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{A} \right\} & \text{dacă } a = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \gamma) \\ I_m \left\{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{A} \right\} & \text{dacă } a = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \gamma) \end{cases} \quad (4.40)$$

4.3. Parametrii circuitelor liniare de curent alternativ

Parametrii unui circuit sunt:

- R - rezistența;
- L - inductivitatea (M - și mutuală pentru cuplaje);
- C - capacitatea;

Să considerăm un dipol liniar pasiv căruia i se aplică tensiunea
 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \gamma_u)$ (4.41)

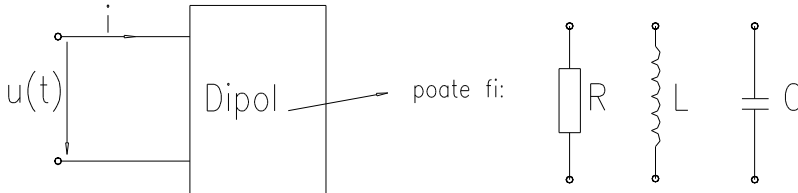


Fig. 4.12

Dipolul fiind liniar ($y = k \cdot x$) rezultă că este străbătut de un curent de aceeași formă cu excitația (tensiunea) adică tot sinusoidal de forma:
 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \gamma_i)$. (4.42)

4.3.1 Răspunsul circuitelor liniare în curent alternativ (analiza comparativă)

Excitând un dipol liniar pasiv cu un semnal sinusoidal răspunsul acestuia depinde de parametrii dipolului dar are aceeași formă de variație sinusoidală. Parametrii dipolului în instantaneu sunt rezistența, inductivitatea și capacitatea. Căutăm să determinăm răspunsul dipolului pentru o excitație sinusoidală cunoscută, când dipolul conține rezistență, capacitate, inductivitate sau combinații de tip R-C, R-L, RLC.

4.3.1.1 Răspunsul în c.a. al elementelor simple de circuit

A. Răspunsul în c.a. al rezistenței

A.1 Răspunsul în domeniul timp

Aplicând o tensiune alternativă: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma_u)$ unei rezistențe în baza ecuației caracteristice $u = R \cdot i$ rezultă curentul prin rezistență:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega t + \gamma_u) = I_m \cdot \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.43)$$

$$\text{Identificând obținem: } I_m = \frac{U_m}{R}, \gamma_i = \gamma_u, \varphi = \gamma_u - \gamma_i = 0. \quad (4.44)$$

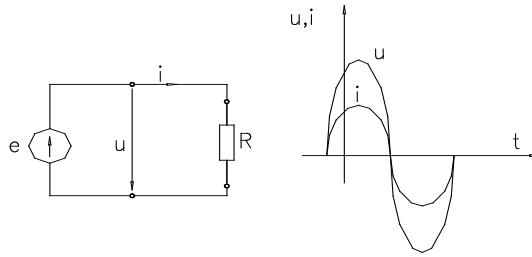


Fig. 4.13

Pentru o rezistență amplitudinea tensiunii și curentului satisfac relația Ohm ($U_m = R \cdot I_m$) și întotdeauna curentul și tensiunea rămân în fază.

A.2 Analiza prin reprezentări simbolice

Utilizând reprezentările polare și în complex simplificat obținem următoarele diagrame pentru tensiunea și curentul unui rezistor.

- reprezentarea polară

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow F_p(u) = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle \gamma_u \quad (4.45)$$

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow F_p(i) = \frac{U_m}{\sqrt{2}R} \angle \gamma_u = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \gamma_i \quad (4.46)$$

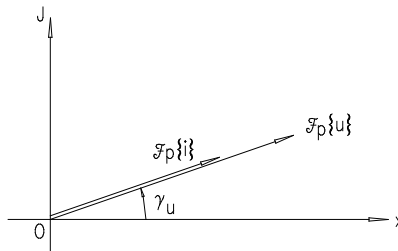


Fig. 4.14 a

- reprezentarea în complex:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_u} \quad (4.47)$$

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow \underline{I} = \frac{U_m}{\sqrt{2}R} e^{j\gamma_u} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_i} \quad (4.48)$$

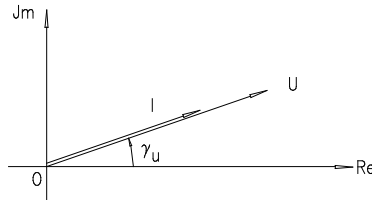


Fig. 4.14 b

cu relațiile inverse:

$$\begin{aligned} u &= R_e \left\{ \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \sqrt{2} \right\} \\ i &= R_e \left\{ \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \sqrt{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Concluzie:

Indiferent de tipul analizei (în domeniul timp sau simbolică) răspunsul rezistorului în curent alternativ este definit de rezistența R . Relația dintre semnalul de excitație și răspuns este liniară mărimile fiind în fază.

B. Răspunsul condensatorului în c.a.

B.1 Analiza în domeniul timp

Presupunând aceeași tensiune:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \quad (4.50)$$

care excită un condensator liniar, răspunsul în curent este dat de relația:

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \gamma_u) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \gamma_u + \frac{\pi}{2}\right) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.51)$$

$$\gamma_u + \frac{\pi}{2} = \gamma_i, \quad \varphi = \gamma_u - \gamma_i = -\frac{\pi}{2}. \quad (4.52)$$

S-a utilizat identitatea trigonometrică: $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ putem scrie:

$$i = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \gamma_u + \frac{\pi}{2}\right) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.53)$$

Curentul prin condensator în c.a. are amplitudinea și faza:

$$\begin{aligned} I_m &= \omega C U_m \\ \gamma_i &= \gamma_u + 90^\circ \end{aligned} \quad (4.54)$$

Între amplitudinea curentului și a tensiunii există o dependență liniară în orice moment dată de valoarea capacității înmulțită cu frecvența unghiulară (sau pulsația).

Defazajul, între răspuns $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \gamma_y)$ și excitație $x(t) = X_m \sin(\omega t + \gamma_x)$, prin definiție este: $\varphi = \gamma_y - \gamma_x$ (defazajul fazelor inițiale dintre răspuns și excitație).

În cazul exemplului considerat excitația este tensiunea iar răspunsul este curentul implicând: $\varphi = \gamma_i - \gamma_u = 90^\circ$.

Pentru o capacitate rezultă o defazare cu 90° înainte, a curentului față de tensiune.

B.2 Analiza prin reprezentări simbolice

Reprezentările în coordonate polare și complex simplificat conduc la următoarele diagrame între tensiune și curent:

- reprezentarea polară:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow Fp\{u\} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \Big| \gamma_u$$

$$i = \omega \cdot C \cdot U_m \sin(\omega t + \gamma_u + 90^\circ) \rightarrow Fp\{i\} = \frac{\omega \cdot C \cdot U_m}{\sqrt{2}} \Big| \gamma_u + 90^\circ$$
(4.55)

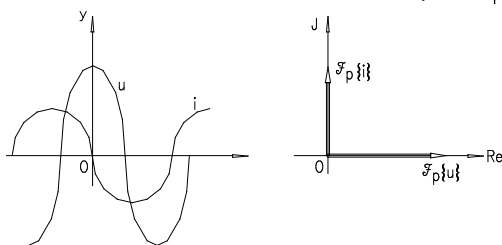


Fig. 4.15

- reprezentarea în complex simplificat

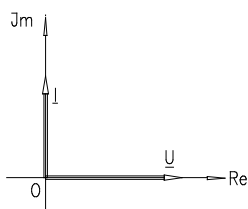


Fig. 4.16

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\gamma_u}$$

$$\underline{I} = \frac{\omega \cdot C \cdot U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(\gamma_u + 90^\circ)}$$

Concluzie:

Răspunsul condensatorului în curent alternativ este definit de două mărimi și anume amplitudine și defazaj.

C. Răspunsul bobinei în c.a.

C.1 Analiza în domeniul timp

Considerând excitația în tensiune de forma $u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u)$ dependența curent - tensiune este dată de relația:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t') dt = \frac{1}{L} \int_0^t U_m \sin(\omega t + \gamma_u) dt = \frac{-1}{\omega \cdot L} U_m \cos(\omega t + \gamma_u) \quad (4.56)$$

adică

$$i(t) = \frac{1}{\omega \cdot L} U_m \sin(\omega t + \gamma_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.57)$$

Amplitudinea curentului și faza inițială sunt date de relațiile:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega \cdot L} \quad (4.58)$$

$$\gamma_i = \gamma_u - 90^\circ$$

Constanta de proporționalitate dintre amplitudinea curentului și a tensiunii aplicate este dependentă de frecvență. Întotdeauna c urentul pr in bobină este defazat în urma tensiunii.

Defazajul $\varphi = \gamma_i - \gamma_u = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$. Dacă semnalul aplicat este un curent rezultă tensiunea defazată înaintea curentului cu 90° și cu amplitudinea $U_m = \omega \cdot L \cdot I_m$.

C.2 Analiza prin reprezentări simbolice

Reprezentarea polară și reprezentarea în complex simplificat conduc la următoarele diagrame:

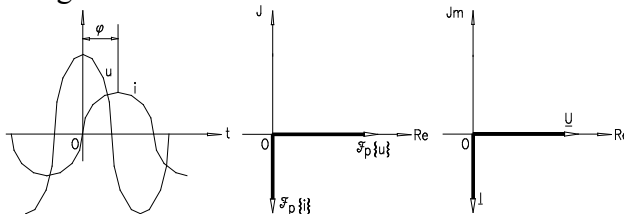


Fig. 4.17

Cazuri limită ale bobinei si condensatorului

a)	<i>Condensator</i>	<i>Bobina</i>
$\omega \rightarrow 0$ (<i>circ. de c.c.</i>)	$I_m = \omega \cdot C \cdot U_m \rightarrow 0$	$I_m = \frac{U_m}{\omega \cdot L} \rightarrow \infty$
b)		
$\omega \rightarrow \infty$ (<i>frecvente inalte</i>)	$I_m = \omega \cdot C \cdot U_m \rightarrow \infty$	$I_m = \frac{U_m}{\omega \cdot L} \rightarrow 0$

Concluzii:

1. La frecvențe joase (sau în c.c.) condensatorul se comportă ca un circuit deschis iar la frecvențe înalte ca un scurtcircuit.
2. Bobina în c.a. la frecvențe joase se comportă ca un scurtcircuit iar la frecvențe înalte ca un circuit deschis.

D. Concluzii ale analizei comparative

Analiza comparativă a celor trei elemente simple de circuit indică până în prezent:

- ◆ *în domeniul timp:* - parametrii dipolului sunt amplitudinea răspunsului și defazajului
- ◆ *în reprezentarea simbolică:* - parametrii dipolului pot fi definiți prin generalizarea relației Ohm. Dacă în c.c. $U = R \cdot I$ atunci în c.a. între valorile maxime ale tensiunii și curentului constanta de proporționalitate este dependentă de natura dipolului (R, C, sau L) dar și de frecvența semnalului de excitație.

O generalizare a relației Ohm impune introducerea unui parametru al dipolului ca să exprime abilitatea acestuia de a se opune trecerii curentului (similar definiției R în c.c.).

Numim *impedanță raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii și*

$$\begin{aligned}
 & \text{valoarea efectivă a curentului:} \\
 & Z = \frac{U}{I} > 0 \quad (\Omega) \\
 & Z \hat{=} \frac{U}{I} > 0 \quad (\Omega)
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

iar $Y = \frac{1}{Z} (S)$, numită *admitanță*, reprezintă, din punct de vedere fizic, *raportul valorilor efective ale curentului și tensiunii de la bornele dipolului*.

Obs: - Dipolul poate fi caracterizat în coordonate polare prin impedanță Z și prin defazaj.

În concluzie perechea impedanță-defazaj sau admitanță-defazaj caracterizează dipolul.

4.3.1.2 Răspunsul în c.a. al unui dipol de ordinul I

A. Analiza în domeniul timp

Numim dipol de ordinul I acea latură din circuit ce conține combinații între un element de circuit disipativ (R) și un element de circuit ce acumulează energie (C sau L).

A.1 Dipol R-C alimentat de la o sursă de tensiune

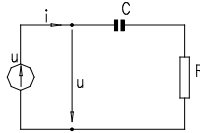


Fig. 4.18

$u = U_m \cos \omega t$ aleasă origine de fază excită dipolul ce reacționează modificând răspunsul (curentul) atât în privința valorii efective cât și a defazajului.

Aplicând teorema Kirchhoff II și ținând cont de conexiunea serie:

$$i = C \frac{du_c}{dt} \text{ iar } u = u_R + u_C = Ri + u_C \text{ rezultă } u_C = (u - Ri) \text{ rezultă}$$

$$i = C \frac{d}{dt}(u - Ri) = C \frac{du}{dt} - R \cdot C \frac{di}{dt} \text{ ecuație diferențială de ordinul I}$$

în raport cu curentul:

$$R \cdot C \frac{di}{dt} + i = C \frac{du}{dt} \quad (4.60)$$

Întrucât: $u = U_m \cos \omega t$, $\frac{du}{dt} = -\omega U_m \sin \omega t$, curentul ca răspuns al excitației în tensiune are valoarea: $i = I_m \cos(\omega t + \gamma_u + \varphi) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

și satisface ecuația diferențială de mai sus. Înlocuind în ecuația diferențială obținem:

$$-\omega RC I_m \sin(\omega t + \varphi) + I_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega C U_m \sin \omega t \quad (4.61)$$

Utilizând identitatea:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \varphi) &= \sin \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \omega t \quad \text{și} \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.62)$$

înlocuind și identificând:

$$-\omega RC I_m (\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \omega t) + I_m (\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi) = -\omega C U_m \sin \omega t \quad (4.63)$$

$$\text{obținem: } \begin{cases} \cos \varphi - \omega RC \sin \varphi = 0 \\ I_m (\sin \varphi + \omega RC \cos \varphi) = \omega C U_m \end{cases} \quad (4.64)$$

Din prima ecuație rezultă defazajul :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC} \quad (4.65)$$

iar din a doua valoarea amplitudinii curentului:

$$I_m = \frac{U_m \omega C}{\sin \varphi + \omega RC \cos \varphi} \quad \text{sau} \quad I_m = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{U \cdot \omega C}{\sqrt{1 + (RC)^2 \omega^2}} \quad (4.66)$$

Utilizând identitatea trigonometrică:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad \text{cu} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC} \quad (4.67)$$

$$\text{rezultă: } \cos \varphi = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (4.68)$$

Amplitudinea curentului devine:

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{U_m \omega C}{\cos \varphi [\operatorname{tg} \varphi + \omega RC]} = \frac{U_m \omega C}{\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \left[\frac{1}{\omega RC} + \omega RC \right]} = \frac{U_m}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ I_m &= \frac{U_m}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_m}{R} H(\omega) = I_m \end{aligned} \quad (4.69)$$

iar defazajul:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = \arctg 1 - \arctg(\omega RC) = 90^\circ - \arctg(\omega RC) \quad (4.70)$$

Notând c u $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ - frecvența caracteristică (sau pulsație) dependentă numai de parametrii dipolului, atunci funcția $H(\omega)$ denumită *magnitudine* reflectă mărimea răspunsului în c.a. față de răspunsul dipolului în c. c., iar defazajul $\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ cu dependențele funcției de frecvență redată în fig. 4.19.

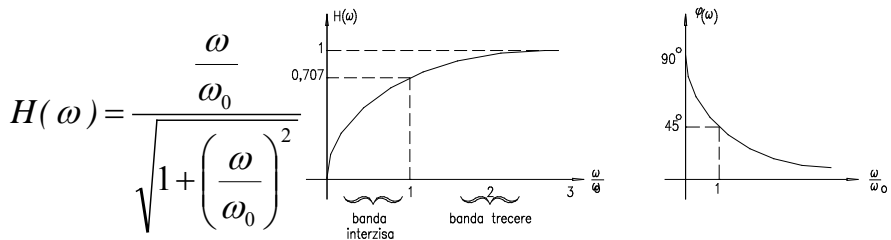


Fig. 4.19

Cazuri particulare:

1) $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

Funcționarea la frecvențe înalte conduce la $H(\omega) \rightarrow 1$, și în consecință capacitatea se comportă ca un scurtcircuit, defazajul $\varphi(\omega) \rightarrow 0$, iar circuitul se comportă rezistiv. Întreaga tensiune a sursei se aplică rezistenței. Dipolul are comportament rezistiv. Fizic, la frecvențe înalte condensatorul nu are timp să se încarce cu sarcină.

2) $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$, implică funcționarea la frecvențe joase, și în consecință

condensatorul are timp să acumuleze sarcini, mărimea $H(\omega) \rightarrow 0$; $\varphi(\omega) \rightarrow 90^\circ$; $z \rightarrow \infty$, di polul are un c omportament capacitiv, echivalent cu circuitul din fig. 20b.

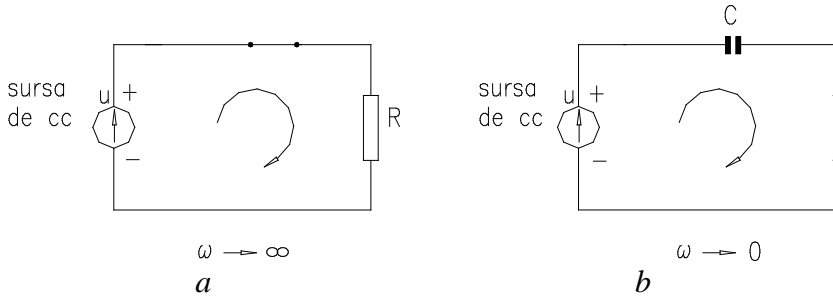


Fig. 4.20

$$3) \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1, \quad H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707; \quad \varphi = 45^\circ; \quad I_m = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Funcționarea circuitului RC la frecvență variabilă este de tip filtru trece-sus în privința curentului. Puterea disipată pe rezistență are un maxim pentru frecvență limită superioară

$$P = R \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 = R \left(\frac{U_m}{2R} \right)^2 \quad (4.71)$$

cu valoarea: $P_{max} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R}$.

- la $\omega = \omega_0$, $I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{2}}$ iar puterea disipată $P_{\omega_0} = R \left(\frac{U_m^2}{R\sqrt{2}\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} P_{max}$

și, în consecință, frecvența caracteristică ω_0 se mai numește și frecvența înjumătățirii puterii.

Concluzie:

Perechea “magnitudine - frecvență caracteristică”, caracterizează răspunsul dipolului R-C în domeniul timp.

A.2 Dipolul R-L alimentat de la o sursă de tensiune

Considerăm un circuit RL serie alimentat de la o sursă de tensiune cu frecvență variabilă: $U = U_m \cos \omega t$. Aplicând teorema Kirchhoff II rezultă:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \frac{u}{R} = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} \quad (4.72)$$

Răspunsul $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ conduce prin înlocuire în ecuația diferențială de ordinul I la:

$$\frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\omega L}{R} I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.73)$$

sau la sistemul:
$$\begin{cases} \sin \varphi + \frac{\omega L}{R} \cos \varphi = 0 \\ \left(\cos \varphi + \frac{\omega L}{R} \sin \varphi \right) I_m = \frac{U_m}{R} \end{cases} \quad \text{din care rezultă:}$$

$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}$. Deci :

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad \text{respectiv:} \quad I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{U_m}{R} H(\omega). \quad (4.74)$$

Funcționarea ca filtru a circuitului R-L serie implică analiza în funcție de frecvența caracteristică, $\omega_{0L} = \frac{R}{L}$, a magnitudinii și a defazajului.

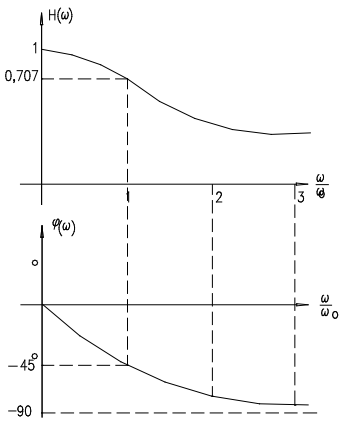


Fig. 4.21

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Cazuri particulare de funcționare:

a) $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1, H(\omega) \rightarrow 1, Z = \frac{R}{H(\omega)} = R, \varphi \rightarrow 0$ (4.75)

Circuitul se comportă rezistiv, întreaga tensiune se aplică rezistenței, bobina se comportă ca un scurtcircuit, amplitudinea curentului din circuit

fiind $I_m = \frac{U_m}{R}$.

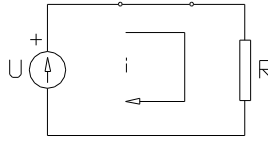


Fig. 4.22

$$b) \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1, H(\omega) \rightarrow 0, \varphi \rightarrow -90^\circ \quad (4.76)$$

Bobina se comportă ca un circuit deschis comparativ cu R sau văzut invers rezistența ca un scurtcircuit. Caracterul circuitului este inductiv. Schema echivalentă este:

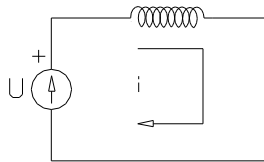


Fig. 4.23

$$c) \frac{\omega}{\omega_0} = 1, H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}, Z = \frac{R}{H(\omega)} = \sqrt{2}R \text{ majorare de rezistență:}$$

$$I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{2}}, P = \frac{1}{2} P_{max} \text{ cu } P_{max} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R} \quad (4.77)$$

Concluzii:

1) Circuitul R-L se comportă în frecvență ca un filtru trece jos pentru semnalele a căror frecvență este în gama $0 < \omega < \omega_0$ (un răspuns semnificativ numai în banda $(0, \omega_0)$ îl oferă circuitul R-L).

2) Banda de frecvență $\omega_0 < \omega < \infty$ se numește bandă interzisă;

3) Frecvența $\omega_0 = \frac{R}{L}$ se numește frecvență caracteristică (de tăiere).

4.3.1.3 Răspunsul în c.a. al circuitelor de ordinul II.

A. Analiza în domeniul timp

A.1 Analiza dipolului echivalent RLC serie

Dipolul *serie RLC* este excitat de tensiunea $u = U_m \cos \omega t$. Aplicând teorema Kirchhoff II și ținând cont de relația $i = C \frac{du_c}{dt}$ și condiția de conexiune serie obținem următoarea ecuație de ordinul doi:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c \quad \text{sau} \quad u_c = u - Ri - L \frac{di}{dt}, \quad \text{iar ecuația}$$

$i = C \frac{d}{dt}(u_c) = C \frac{du}{dt} - RC \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2i}{dt^2}$ este echivalentă cu:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{dU}{dt} \quad (4.78)$$

Considerând răspunsul de tip sinusoidal: $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ prin înlocuire în ecuația diferențială de ordinul doi se obține:

$$-\omega^2 LC I_m \cos(\omega t + \varphi) - \omega RC I_m \sin(\omega t + \varphi) + I_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega C I_m \cos \omega t$$

Separând componentele în $\sin \omega t$ și $\cos \omega t$ rezultă:

$$\cos \varphi - \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \sin \varphi = 0 \quad (4.79)$$

$$\left(\sin \varphi - \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \cos \varphi \right) I_m = \frac{\omega C U_m}{1 - \omega^2 LC} \quad (4.80)$$

Aceste ecuații au forma identică cu ecuațiile circuitului R-C cu schimbarea de variabilă: $\omega RC \rightarrow \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$.

Avem astfel expresia defazajului și a magnitudinii:

$$I_m = \frac{U_m}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1 - \omega^2 LC)^2}{(\omega RC)^2}}} = \frac{U_m}{R} \cdot H(\omega) \quad (4.81)$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right) \quad (4.82)$$

Funcționarea la frecvență variabilă a dipolului

Expresia:
$$\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{1}{\omega \sqrt{LC}} - \omega \sqrt{LC} \right),$$

prin introducerea parametrului $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (pulsatie frecvență caracteristică)

și numărul adimensional $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ (factor de calitate al circuitului RLC serie), poate fi scrisă în forma: $\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} = Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$.

Înlocuind în expresia amplitudinii și a defazajului obținem:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctg Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (4.83)$$

Observație:

- Răspunsul în c.a. al circuitelor de ordinul I a fost caracterizat prin parametrii amplitudine și frecvență caracteristică ω_0 ; iar pentru circuitele de ordinul II prin amplitudine și doi parametrii ω_0 și Q .

În aceste condiții în loc de o singură curbă avem o familie de curbe cu Q parametru a atât pe pentru magnitudine $H(\omega)$ cât și pentru defazaj $\varphi(\omega)$ (fig. 4.22)

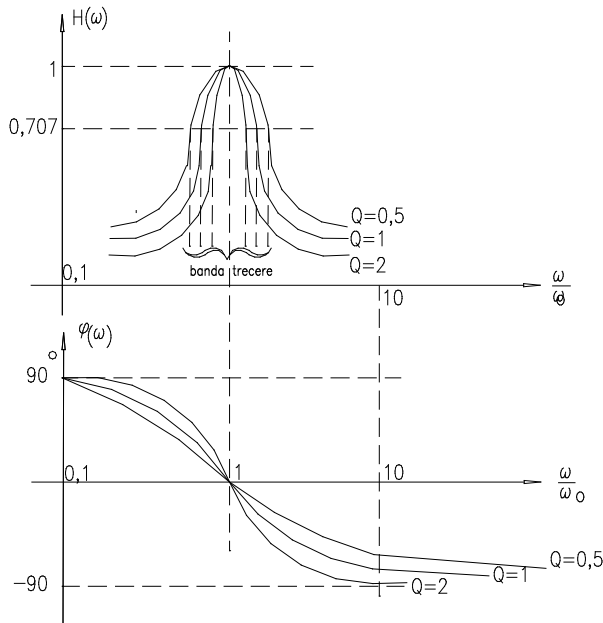


Fig. 4.24

Cazuri de funcționare la frecvență variabilă:

- a) $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ - la frecvențe joase capacitatea se comportă ca un circuit deschis comparativ cu L și R ; $H \rightarrow 0$; $\varphi \rightarrow 90^\circ$ - rezultând o funcționare tip capacitiv a circuitului.
- b) $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ - la frecvențe înalte inductivitatea se comportă ca un circuit deschis comparativ cu C și R ; $i \rightarrow 0$; $H \rightarrow 0$; $\varphi \rightarrow -90^\circ$ - rezultând o funcționare tip inductiv a circuitului.
- c) $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ - apare fenomenul de rezonanță, motiv pentru care ω_0 - se numește frecvență unghiulară (sau pulsație) de rezonanță. $H \rightarrow 1$; $\varphi \rightarrow 0$, $I_m = \frac{U_m}{R}$. Bobina și condensatorul se comportă ca un scurtcircuit, *circuitul având caracter rezistiv*. Puterea transferată atinge valoarea maximă.

Valoarea frecvenței la care puterea disipată este jumătate din puterea maximă determină frecvența de tăiere a filtrului. Rezultă că vor exista două frecvențe, una inferioară ω_L și una superioară ω_H (LOW și HIGH). Frecvențele de înjumătățire ale puterii maxime trebuie să fie date de condiția: $H(\omega_L) = H(\omega_H) = \frac{H(\omega_0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Impunerea acestei condiții implică: $1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 2$ ecuație de

ordinul II ce rezolvată în raport cu $\frac{\omega}{\omega_0}$ conduce la soluțiile:

$$\frac{\omega_L}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \quad \text{cu} \quad \omega_L \cdot \omega_H = \omega_0^2 \quad (4.84)$$

$$\frac{\omega_H}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}$$

Concluzie:

1°. - pentru $0 < \omega < \omega_L$ și $\omega_H < \omega < \infty$ - banda de frecvență se numește bandă de blocare;

2°. - $0 < \omega < \omega_L$ - banda de frecvență în această gamă se numește bandă de trecere. Lățimea benzii este dată de relația:

$$BW = \omega_H - \omega_L = \frac{\omega_0}{Q} \quad (4.85)$$

A.2 Răspunsul dipolului echivalent RLC paralel.

În acest caz se consideră excitația de la o sursă de curent iar răspunsul este tensiunea la bornele dipolului:

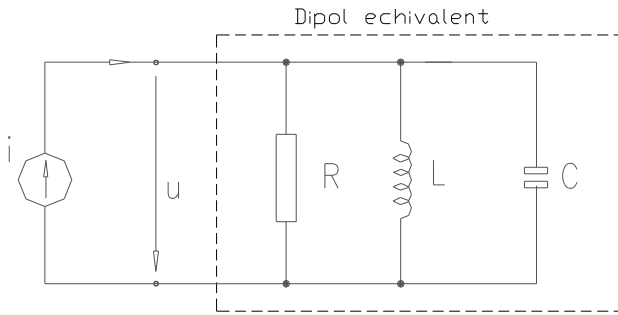


Fig. 4.25 Sursa de curent alimentează un circuit RLC paralel

Pentru $\omega \rightarrow \infty$ bobina se comportă ca un scurtcircuit conducând la $u \rightarrow 0$ iar

pentru $\omega \rightarrow 0$ condensatorul se comportă ca un scurtcircuit și $u \rightarrow 0$, deci există o frecvență la care se obține acel clopot al magnitudinii. Aplicând Kirchhoff rezultă ecuația de ordinul II:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u = L \frac{di}{dt} \quad (4.86)$$

Soluția se determină utilizând considerentele dualității i și u , L și C respectiv R cu $\frac{1}{R}$ între RLC serie și RLC paralel. Rezultă astfel:

$$U_m = R I_m H(\omega) \quad (4.87)$$

$$\text{cu: } - H(\omega) = \frac{\omega \frac{L}{R}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC) + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \quad (4.88)$$

$$- \varphi(\omega) = \arctg \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega \frac{L}{R}} \quad (4.89)$$

Parametrii ce caracterizează dipolul vor fi:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ și } Q_p = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.90)$$

Concluzie:

Analiza în domeniul timp este sugestivă dar laborioasă atunci când dipolul are o structură mai complexă. Dacă dipolul este de ordinul I caracterizarea acestuia este posibilă printr-un singur pa rametru ω_0 - frecvența unghiulară caracteristică. Dacă ordinul crește caracterizarea acestuia este posibilă prin frecvența caracteristică $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ și factorul de calitate $Q=f(R,L,C)$.

B. Analiza în complex a dipolului de ordinul II

Analiza unui circuit și implicit caracterizarea lui în reprezentarea polară implică doi parametrii Z și defazaj φ . Analiza cea mai simplă și comodă este în *complex simplificat* unde *mărimile de c.a. sunt transformate în mărimi de c.c.:*

$$U = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u} \quad (4.91)$$

în planul complex. Analiza este posibilă însă numai pentru mărimile de aceeași frecvență.

Numim impedanță complexă raportul dintre tensiunea complexă și curentul complex:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = |Z| \cdot e^{j\varphi} \quad (4.92)$$

- cu modulul egal cu raportul valorii efective ale semnalelor;
- φ - defazajul între semnale.

Analiza în complex a mărimilor sinusoidale este o analiză în domeniul frecvență unde semnalele sunt reduse la semnale continue iar parametrul dipolului (impedanță complexă), este dependentă de frecvență.

Impedanța complexă reprezintă o generalizare în formă fazorială a relației Ohm.

Pentru elementele simple de circuit impedanța complexă are forma:

- pentru dipol rezistiv: $\underline{Z}_R = R$;

- pentru dipol pur inductiv: $\underline{Z}_L = j\omega L$;

- pentru dipol pur capacitiv: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$.

Pentru rezistență impedanța \underline{Z}_R este ideală și independentă de frecvență, iar pentru condensator și bobină impedanța indică dependența de frecvență prin $L\omega$ sau $\frac{1}{\omega C}$ iar prin j sau $-j$ defazajul între curent și tensiune. Sintetic în planul Re-Im, $\Re - \Im$, impedanța complexă are valori în semiplanul $\Re > 0$.

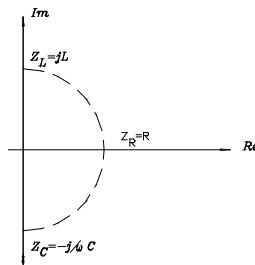


Fig. 4.26

Cazuri limită pentru $\omega \rightarrow 0$ și respectiv $\omega \rightarrow \infty$:

- bobină: $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_L = 0$ (scurtcircuit)

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_L = \infty$ (circuit deschis)

- condensator: $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_C = \infty$ (circuit deschis)

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_C = 0$ (scurtcircuit)

B.1 Impedanță complexă a dipolului echivalent RLC serie

Pentru un dipol echivalent RLC serie sau paralel analizăm modul de obținere al impedanței complexe.

Dipolul RLC serie:

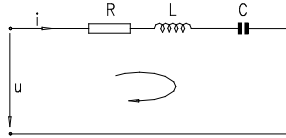


Fig. 4.27

Aplicând teorema Kirchhoff II rezultă:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (4.93)$$

Trecând în complex simplificat:

$$\underline{U} = R\underline{I} + Lj\omega\underline{I} + \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} \underline{I} = \underline{I} \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right); \quad (4.94)$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX \quad (4.95)$$

unde: $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ reactanță.

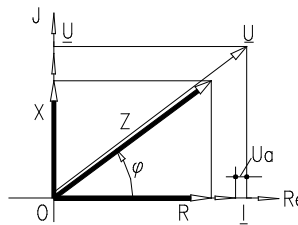


Fig. 4.28

Considerând $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, curentul prin dipolul RLC este de formă sinusoidală: $i = I_m \cos \omega t$, unde: $\varphi = \gamma_{\text{rasp}} - \gamma_{\text{excitatie}} = \text{defazaj}$.

Trecând în complex: $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$, $\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi \quad (4.96)$$

Identificând, rezultă:

$$R = Z \cos \varphi = \frac{U \sin \varphi}{I} = \frac{U_{\text{activ}}}{I} > 0$$

$$X = Z \sin \varphi = \frac{U \cos \varphi}{I} = \frac{U_{\text{reactiv}}}{I} > 0 \quad (4.97)$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Concluzie:

- 1) Rezistența în c.a. reprezintă partea reală a impedanței complexe Z , rezistență ce poate fi sau nu dependentă de frecvență. Nu întotdeauna ea coincide cu rezistența ohmică a circuitului. Rezistența în c.a. reprezintă raportul dintre proiecția tensiunii pe axa curentului și valoarea curentului din circuit.
- 2) Reactanța X reprezintă partea imaginară a impedanței complexe și este dependentă întotdeauna de frecvență, indicând prezența elementului de stocare a energiei în circuit. Pentru acest aspect inductivitatea și capacitatea se numesc elemente reactive. Ea reprezintă raportul dintre proiecția tensiunii pe o axă perpendiculară pe a curentului și valoarea curentului din circuit.

Din punct de vedere al reactanței, mai precis al rotirii ei cu j sau $-j$ distingem (fig.4.27):

- a) $\underline{Z} = R + jX$ aparține cadranelui I al planului complex, impedanța este de tip inductiv, $\varphi > 0$ și curentul este defazat în urma tensiunii.
- b) $\underline{Z} = R - jX$ aparține cadranelui II al planului complex, impedanța este de tip capacitiv, $\varphi < 0$ și curentul este defazat înaintea tensiunii.
- c) $\underline{Z} = R$ circuit pur rezistiv, regim de rezonanță pe care-l analizăm separat.

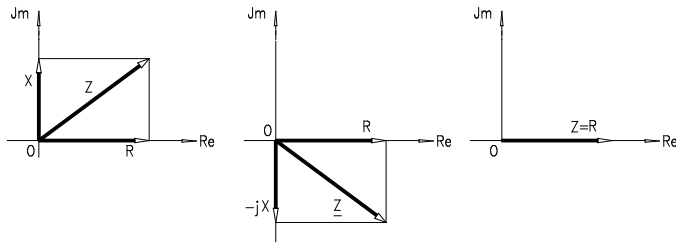


Fig. 4.29

Concluzie:

3) Dipolul RLC serie admite o schemă echivalentă serie și este caracterizat de impedența complexă $\underline{Z} = R + jX$

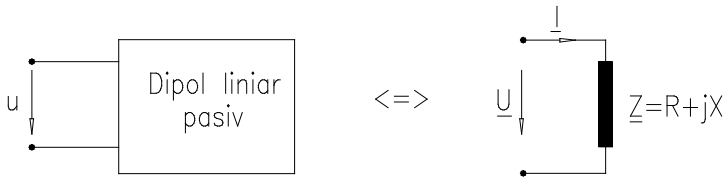


Fig. 4.30

B.2 Dipol echivalent RLC paralel

Dipolului RLC paralel, (4.31) prin aplicarea teoremei I Kirchhoff ii putem determina curentul absorbit:

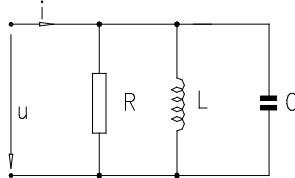


Fig. 4.31

$$i = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + C \frac{du}{dt} \quad (4.98)$$

Trecând în complex simplificat dependenta curent - tensiune este:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{1}{j\omega L} \underline{U} + j\omega C \underline{U} \quad (4.99)$$

$$\underline{I} = \underline{U} \left[\frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right] \quad (4.100)$$

Raportul $\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \underline{Y} = G(\omega) - jB(\omega)$ se numește admitanță complexă

de modul $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ și defazaj $\varphi = -\arctg \frac{B}{G}$,

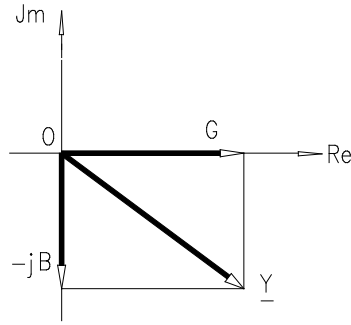


Fig. 4.32

unde: - $G = \frac{I_{activ}}{U} = \frac{I \cos \varphi}{U} > 0$ - conductanță;

- $B = \frac{I_{reactiv}}{U} = \frac{I \sin \varphi}{U} > 0$ - susceptanță.

Concluzie:

1) Dipolul RLC paralel admite schema echivalentă:

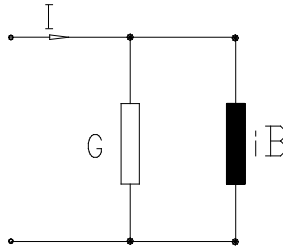


Fig. 4.33

Echivalența unui dipol în schema serie sau paralel este dată de relația de echivalență ce presupune egalitatea tensiunilor și a curenților ai dipolului:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}; \\ \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}; \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{U} \Rightarrow ZY = 1 \text{ sau } \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \quad (4.101)$$

$$R - jX = \frac{1}{G - jB} \quad (4.100)$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \text{ sau } G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2} \text{ sau } B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$
(4.102)

4.4. Puteri în circuite liniare de c.a. monofazat

4.4.1 Puterea instantanee a dipolului echivalent

Considerăm un dipol linear cărui i se aplică tensiunea sinusoidală $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \gamma_u)$ și prin care trece curentul $i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i)$.

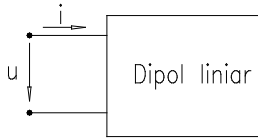


Fig. 4.34

Puterea instantanee are expresia:

$p(t) = u(t)i(t) = 2UI \sin(\omega t + \gamma_u) \sin(\omega t + \gamma_i)$. Utilizând relația trigonometrică:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \begin{cases} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$
(4.103)

rezultă: $p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i)$.

Expresia puterii instantanee conține doi termeni(fig.4.33):

- $P = UI \cos \varphi > 0$ - termen denumit putere activă;
- $p_0 = UI \sin\left(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i - \frac{\pi}{2}\right)$ denumit putere oscilantă.

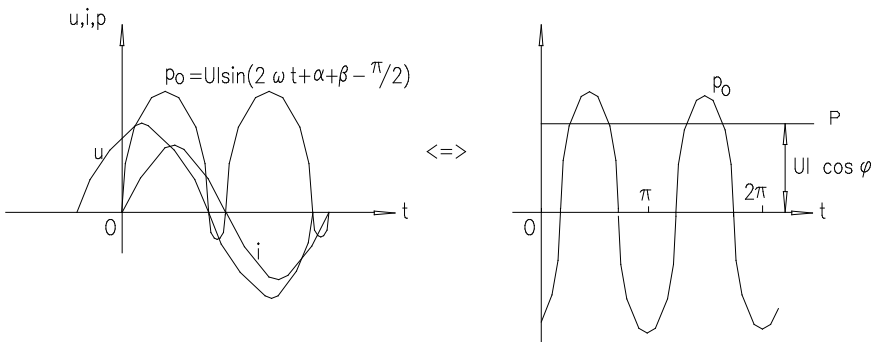


Fig. 4.35

4.4.2 Puterea activă

Energia pe o perioadă capabilă a se transforma în altă formă de energie inclusiv în lucrul mecanic este:

$$W = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T (UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i)) dt = UI \cos \varphi \cdot T \quad (4.104)$$

respectiv puterea:

$$P = \frac{W}{T} = \tilde{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \quad (4.105)$$

unde: - \tilde{p} - reprezintă puterea activă egală cu valoarea medie a puterii instantanee pe o perioadă sau pe un număr întreg de perioade.

Utilizând convenția de semne pentru dipolul generator respectiv receptor avem:

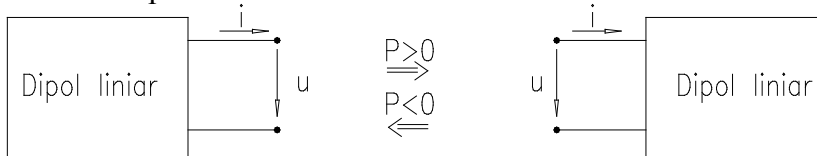


Fig. 4.36

$$P = UI \cos \varphi \text{ iar } Z = \frac{U}{I} \Rightarrow P = I^2 Z \cos \varphi = RI^2 = GU^2 \quad (4.106)$$

4.4.3 Puterea aparentă

Valoarea maximă a puterii active reprezintă puterea aparentă ($S=UI > 0$) și este egală cu produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului. Puterea aparentă caracterizează limitele de funcționare ale mașinilor și aparatelor electrice.

Ținând cont de definiția impedenței $Z = \frac{U}{I} > 0$ rezultă:

$$\begin{aligned} S = UI = ZI^2 > 0 \quad \text{sau} \quad Y = \frac{I}{U} > 0 \\ S = UI = YU^2 > 0 \end{aligned} \quad (4.107)$$

Numim factor de putere raportul dintre puterea activă și puterea aparentă:

$$K_p = \frac{P}{S} \quad ; \quad 0 < K_p < 1 \quad ; \quad (K_p = \cos \varphi \text{ în regim sinusoidal})$$

4.4.4 Puterea reactivă

Introducem, matematic, o putere complementară puterii active prin relația:

$$Q = UI \sin \varphi = \sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.108)$$

iar similar pentru puterea reactivă și puterea activă $S = ZI^2, P = RI^2$, și introducem mărimea:

$$X = \frac{Q}{I^2} = Z \sin \varphi - \text{reactanță}, \left(\frac{1}{X} = B - \text{susceptanță} \right) \quad (4.109)$$

$$\text{Rezultă astfel: } Q = XI^2 = BU^2 \quad (\text{volt} - \text{amper} - \text{reactiv}) \quad (4.110)$$

Să analizăm ce reprezintă această putere reactivă pornind de la expresia puterii instantanee: $p = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i)$ în care înlocuim $\varphi = \gamma_u - \gamma_i \Rightarrow \gamma_u = \varphi + \gamma_i$

$$\Rightarrow p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi + 2\gamma_i) = \quad (4.111)$$

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos[2(\omega t + \gamma_i) + \varphi]$$

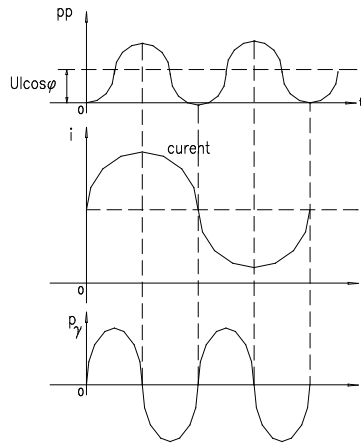
$$\Rightarrow p = UI \cos \varphi - UI [\cos 2(\omega t + \gamma_i) \cos \varphi - \sin 2(\omega t + \gamma_i) \sin \varphi] =$$

$$p = \underbrace{UI \cos \varphi [1 - \cos 2(\omega t + \gamma_i)]}_{p_p - \text{putere instantanee de pulsație}} + \underbrace{UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \gamma_i)}_{p_o - \text{putere instantanee de oscilație}}$$

$$\Rightarrow p_p = UI \cos \varphi \cdot 2 \sin^2(\omega t + \gamma_i) = Z \cos \varphi \cdot 2I^2 \sin^2(\omega t + \gamma_i) \Rightarrow$$

$$p_p = Ri^2$$

unde: $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i)$ - valoarea instantanee a curentului, iar reprezentările grafice sunt date în fig.4.37. În baza demonstrației de mai sus putem defini "Puterea activă" (P), ce reprezintă valoarea medie a puterii instantanee de pulsație și este definită de relația:



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_p dt$$

$$p_v = UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \gamma_i)$$

Fig. 4.37

- $UI \sin \varphi$ - este amplitudinea puterii de oscilație și reprezintă puterea reactivă Q .

$$Q = \max \{p_v\} = UI \sin \varphi \quad (4.112)$$

Fizic, în dipol pe lângă puterea instantanee de pulsație a cărei valoare medie este o măsură a puterii electromagnetice ce se transformă în alte forme de energie (căldură, lucru mecanic, etc.) există și o putere de oscilație (ce oscilează neamortizat în dipol) ce blochează încărcarea dipolului cu putere activă maximă. Amplitudinea de oscilație a acestei puterii reprezintă puterea reactivă.

4.4.5 Expresiile puterilor pentru circuitele dipolare simple

a) Rezistorul

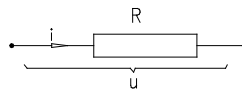


Fig. 4.38

$$I_R = \frac{U}{R}, \varphi = 0$$

Puteri: - activă - $P_R = UI \cos \varphi_S = UI = RI^2 > 0$;

- aparentă - $S_R = P_R = UI$;

- reactivă - $Q_R = 0$.

b) Bobina ideală

$$I_L = \frac{U}{\omega L}, \varphi_s = \frac{\pi}{2}$$

Puteri: - activă: $P_L = UI \cos \varphi_s = 0$

- aparentă: $S_L = UI = \omega LI^2 > 0$

- reactivă: $Q_R = XI^2 = \omega LI^2 > 0$

- factorul de putere: $K_L = \cos \varphi = 0$

Alegând tensiunea origine de fază, curentul este defazat în urmă cu $\frac{\pi}{2}$. Puterea instantanee la bornele bobinei ideale conține numai componenta de oscilație.

$$p_L = ui = p_p + p_o = UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \gamma_i) = UI \sin(2\omega t + \pi) \quad (4.113)$$

$$p_L = -UI \sin 2\omega t = Q_L \sin 2\omega t \quad (4.114)$$

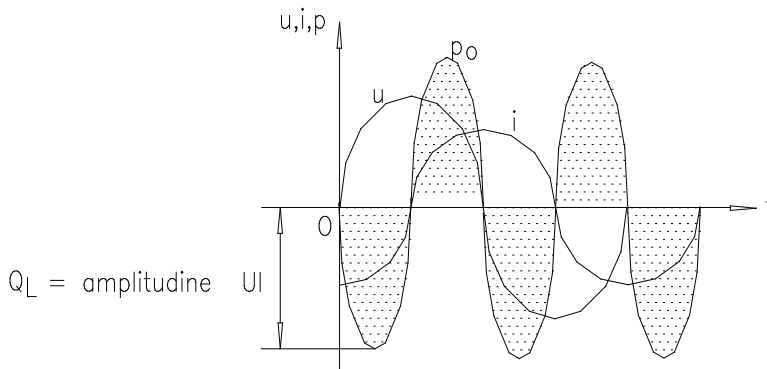


Fig. 4.39

Energia magnetică a bobinei:

$$W_L = \int_0^t p_L dt = \int_0^t -Q_L \sin 2\omega t dt = \frac{Q_L}{2\omega} \cos 2\omega t \Big|_0^t \quad (4.115)$$

$$W_L = \frac{Q_L}{2\omega} (\cos 2\omega t - 1)$$

Valoarea medie a energiei magnetice într-o perioadă:

$$\tilde{W}_L = \frac{1}{T} \int_0^t W_L dt = \frac{1}{T} \int_0^t \frac{Q_L}{2\omega} (\cos 2\omega t - 1) dt = \frac{Q_L}{2\omega} \quad (4.116)$$

$$\tilde{W}_L = W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{Q_L}{2\omega}$$

W_m - energia magnetică medie a bobinei sub tensiunea sinusoidală este egală cu valoarea energiei magnetice a bobinei parcursă de c.c. cu valoarea acestui curent egală cu valoarea efectivă a curentului sinusoidal.

Q_L - puterea reactivă este proporțională cu energia magnetică a bobinei.

(puterea de magnetizație a bobinei)

$$Q_L = 2\omega W_m \quad (4.117)$$

c) Condensatorul

Presupunând condensatorul excitat de o tensiune sinusoidală curentul este:

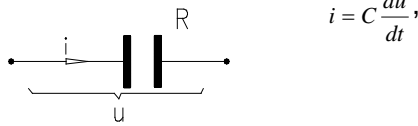


fig. 4.40

Puteri: - $P_C = UI \cos \varphi = 0$

$$- S_C = UI = X_C I^2 = \omega C U^2 = B U^2 > 0 \quad (4.118)$$

$$Q_C = UI \sin \varphi = -\omega C U^2 < 0$$

- factorul de putere al condensatorului: $K_C = 0 = \cos \varphi$. (4.119)

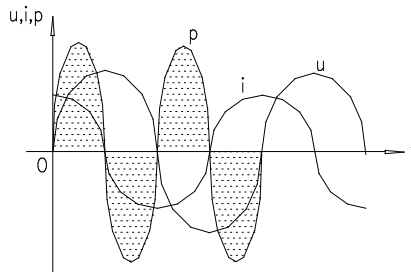


Fig. 4.41

Particularizând, expresia puterii instantanee pentru condensator și reprezentând componentele acesteia (fig.4.41) se poate defini:

- *energia electrică pe condensator*

$$W_C = \int_0^t p dt = \frac{Q_C}{2\omega} (1 - \cos 2\omega t) \quad (4.120)$$

cu valoarea medie pe o perioadă: $\tilde{W}_l = \frac{1}{T} \int_0^T W_C dt = \frac{Q_C}{2\omega} = \frac{C U^2}{2\omega} = W_{\text{condensator}}$

Energia electrică medie a condensatorului sub tensiune sinusoidală este egală cu energia electrică a condensatorului sub tensiune continuă egală cu valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale.

$$Q_C = 2\omega W_i \quad (4.121)$$

Putere reactivă este egală proporțională cu energia condensatorului (puterea de încărcare a condensatorului).

Concluzie: Pentru un dipol echivalent (serie sau paralel), avem:

serie

$$\underline{U} = U_a + jU_{\text{reactiv}}$$

$$U_a = U \cos \varphi$$

$$U_{\text{reactiv}} = U \sin \varphi$$

$$P = UI \sin \varphi_S = RI^2$$

$$S = UI = ZI^2$$

$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 = (X_L - X_C)I^2 < 0$$

paralel

$$\underline{I} = I_a + jI_{\text{reactiv}}$$

$$I_a = I \cos \varphi_P$$

$$I_{\text{reactiv}} = I \sin \varphi_P$$

$$P = UI \sin \varphi_P = GU^2$$

$$S = UI = YU^2$$

$$Q = UI \sin \varphi = UI \sin \varphi_P$$

$$Q = UI \sin \varphi_P = -(B_C - B_L)U^2$$

$$(4.122)$$

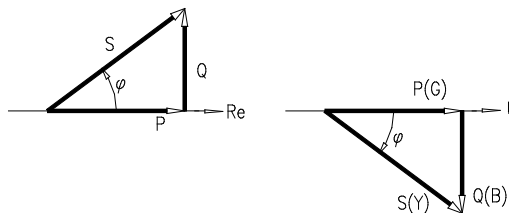


Fig. 4.42

4.4.6 Reprezentarea în complex a puterii (puterea complexă)

Puterea instantanee $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ nefiind o mărime sinusoidală de aceeași pulsație cu tensiunea și curentul din circuit, nu se poate reprezenta în același plan complex.

Este însă posibil să se definească o mărime complexă ce înglobează într-o expresie unică puterea activă, reactivă și aparentă numită puterea complexă. Mărimile tensiune și curent admit imaginile complexe:

$$\underline{u} = \sqrt{2}Ue^{j(\omega t + \gamma_u)} \quad (4.123)$$

$$\underline{i} = \sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \gamma_i)}$$

Mărimea putere complexă se definește pornind de la expresia puterii instantanee:

$$p = \underbrace{UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t)}_{P_p} + \underbrace{UI \sin \varphi \sin 2\omega t}_{P_o} \quad (4.124)$$

Întrucât în expresia puterii instantanee intervine defazajul dintre tensiune și curent ($\cos \varphi$). Produsul a două mărimi complexe ce conține diferența de fază inițială poate fi scris în complex numai prin înmulțirea unei mărimi cu mărimea a doua conjugată.

$$\text{ex: } \underline{a} = ae^{j\gamma_a}, \underline{b} = be^{j\gamma_b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b}^* = abe^{j(\gamma_a - \gamma_b)} \quad (4.125)$$

Definim, în complex nesimplificat, puterea aparentă complexă prin relația:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \gamma_u)} \cdot \sqrt{2} I e^{-j(\omega t + \gamma_i)} = UI e^{j(\gamma_u - \gamma_i)}$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi \quad (4.126)$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

iar în complex simplificat, puterea aparentă complexă:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U e^{j\gamma_u} I e^{-j\gamma_i} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi \quad (4.127)$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

Atât P cât și Q pot fi pozitive sau negative în funcție de dipol receptor sau generator.

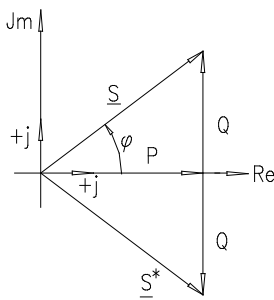


Fig. 4.43

$$P = \text{Re}\{\underline{S}\}$$

$$Q = \text{Im}\{\underline{S}\}$$

Pentru dipol echivalent serie, expresia puterii este:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I}^2 = (R + jX) I^2 = RI^2 + jXI^2 \quad (4.128)$$

iar pentru dipolul echivalent paralel:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB, \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \Rightarrow \underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y}, \underline{I}^* = \underline{U}^* \cdot \underline{Y}^*$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U}(\underline{U}^* \cdot \underline{Y}^*) = \underline{Y}^* \cdot \underline{U} \cdot \underline{U}^* = \underline{Y}^* \cdot \underline{U}^2 \quad (4.129)$$

$$\underline{S} = (G + jB)\underline{U}^2 = GU^2 + jBU^2 = P + jQ$$

4.5. Teoremele circuitelor liniare în formă complexă

4.5.1. Forma complexă a ecuațiilor Joubert

Considerând o latură j parcursă de i_j sub tensiunea la borne u_j , latură de operator z_j , ecuația *Joubert* este:

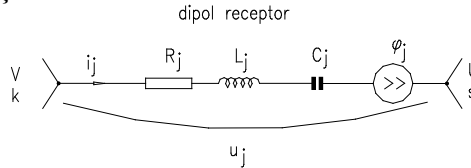


Fig. 4.44

$$e_j \pm u_j = z_j i_j = \left(R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t dt \right) i_j \quad \text{- ecuația în tensiune cu}$$

mărimi instantanee.

Trecând mărimile în complex:

$$\begin{cases} e_j \rightarrow \underline{E}_j = E_j e^{j\phi_j} \\ u_j \rightarrow \underline{U}_j = U_j e^{j\gamma_u} \\ i_j \rightarrow \underline{I}_j = I_j e^{j\gamma_i} \end{cases} \quad (4.130)$$

Rezultă că imaginea în complex a laturii este redată prin impedanța complexă \underline{Z}_j .

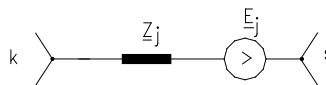


Fig. 4.45

Forma complexă a ecuației *Joubert* în tensiune este:

$$\underline{E}_j \pm \underline{U}_j = \underline{Z}_j \cdot \underline{I}_j \text{ cu } \begin{cases} \underline{Z}_j = R + j(X_L - X_C) = Ze^{j\phi} \\ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \phi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \end{cases} \quad (4.131)$$

Forma complexă a ecuației *Joubert* în curent se obține prin aplicarea teoremei de echivalență a surselor sau pornind de la forma instantanee a ecuației *Joubert* în curent.

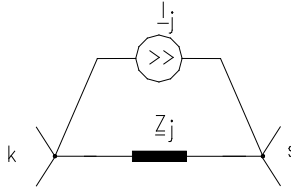


Fig. 4.46

$$y_j e_j + y_j u_j = i_j \quad \text{sau} \quad i_{gi} + y_j u_j = i_j \quad (4.132)$$

$$\underline{I}_{gi} + \underline{Y}_i \cdot \underline{U}_i = \underline{I}_i \quad \text{cu} \quad \underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_j}, \quad \underline{I}_{gi} = \underline{Y}_i \cdot \underline{E}_i \quad (4.133)$$

4.5.2. Teoremele Kirchhoff în formă complexă

a) **Teorema I Kirchhoff** - (enunțată pe mărimi instantanee)

"Suma algebrică a valorilor instantanee a curenților din laturile concurente unui nod este nulă."

$$\sum_{j \in (k)} i_j = 0 \rightarrow \sum_{j \in (k)} I_j = 0 \quad (4.134)$$

are următorul enunț în complex:

"Suma algebrică a imaginilor în complex ale curenților din laturilor concurente unui nod este nulă."

b) **Teorema II Kirchhoff** are următorul enunț în complex:

"Suma algebrică a imaginilor în complex a tensiunilor la bornele laturilor ce aparțin unui ochi este nulă."

$$\sum_{j \in (m)} u_j = 0 \rightarrow \sum_{j \in (m)} U_j = 0 \quad (\text{prima formulare}) \quad (4.135)$$

- a doua formulare, ținând cont de ecuația *Joubert* are următoarea scriere matematică:

$$\sum_{j \in (m)} \underline{Z}_j \cdot \underline{I}_j = \sum_{j \in (m)} \underline{E}_j \quad (4.136)$$

Obs: Teoremele generale ale circuitelor sunt valabile pe imagini complexe atașate mărimilor instantanee.

4.5.3. Impedanțe echivalente

a) Reducerea la dipol echivalent a rețelei serie

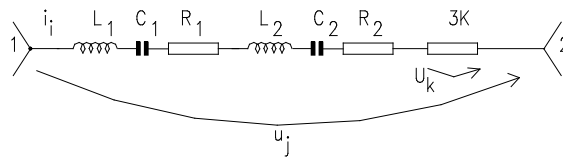


Fig. 4.47

În instanțaneu: $u_j = \sum_{k=1}^n u_k$ unde $u_k = z_k i_k$

Trecând în complex: $\underline{U}_j = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k \leftarrow \underline{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k$ dar:

$\underline{U}_i = \underline{Z}_e \cdot \underline{I} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k$ impunând condiția de conexiune serie: $\underline{I} = \underline{I}_k$

(aceiași curent, aceeași imagine în complex) rezultă:

$$\underline{Z}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{Z}_e = R_e + jX_e \\ \text{dar} \\ \underline{Z}_k = R_k + jX_k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_e = \sum_{k=1}^n R_k \\ X_e = \sum_{k=1}^n X_k \end{array} \right. \quad (4.137)$$

a) Rețea serie cu elemente cuplate magnetic

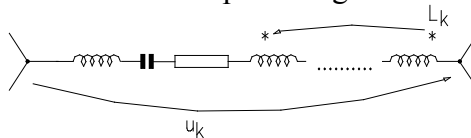


Fig. 4.48

Instantaneu:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{u}_k = \sum_{k=1}^n z_{kj} i_j = \sum_{k=1}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt} \\ \text{dar } \underline{u}_k = y_{k0} i_k \\ \text{si } i_k = i_j \end{array} \right\} \Rightarrow z_{k0} = \sum_{j=1}^n z_{kj} \quad (4.138)$$

$$\underline{U}_k = j\omega \sum_{j=1}^n L_{kj} \underline{I}_j = j\omega L_{k0} \underline{I}_k \Rightarrow \omega L_{k0} = \omega \sum_{j=1}^n L_{kj} \quad (4.139)$$

Apoi trecând din rețea fără cuplaje în dipol echivalent:

$$z_e = \sum_{k=1}^n z_{k0} \quad \leftrightarrow \quad \underline{Z}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_{kj} \quad (4.140)$$

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k \quad (4.141)$$

$$X_e = \sum_{k=1}^n X_{k0} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n X_{kj}$$

modulul impedanței $Z_e \leq \sum_{k=1}^n Z_{k0}$ suma modulelor impedanțelor

b) Reducerea rețelei paralel la dipolul echivalent

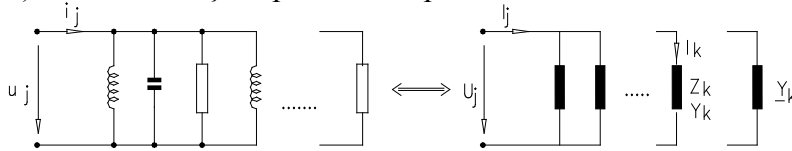


Fig. 4.49

$$i_k = y_k \cdot u_k \rightarrow \underline{I}_k = \underline{Y}_k \cdot \underline{U}_k$$

$$i_j = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n y_k \cdot u_k \rightarrow \underline{I}_k = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \cdot \underline{U}_k = \underline{Y}_e \cdot \underline{U}_e \quad (4.142)$$

Impunând condiția de legare în paralel rezultă:

$$\underline{Y}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \Rightarrow \begin{cases} G_e = \sum_{k=1}^n G_k \\ B_e = \sum_{k=1}^n B_k \end{cases} \quad (4.143)$$

4.5.4. Teorema transferului maxim al puterii active în regim permanent sinusoidal

Să considerăm un generator de tensiune \underline{E}_i și impedanță internă \underline{Z}_i debitând pe o rețea de impedanță \underline{Z}_s :

Aplicând teorema II Kirchhoff rezultă:

$$\underline{E} = \underline{I}(\underline{Z}_g + \underline{Z}_s) \quad (4.144)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_s} = \frac{\underline{E}}{R_g + R_s + j(X_g + X_s)} \quad (4.145)$$

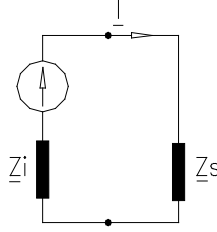


Fig. 4.50

Puterea activă transferată sarcinii este:

$$P_s = R_s I^2 = R_s \frac{E^2}{(R_g + R_s)^2 + (X_g + X_s)^2} \quad (4.146)$$

a) Sarcina R_s variabilă. Maximizarea puterii transferate implică:

$$\frac{\partial P_s}{\partial R_s} = E^2 \frac{(R_g + R_s)^2 + (X_g + X_s)^2 - 2R_s(R_g + R_s)}{((R_g + R_s)^2 + (X_g + X_s)^2)^2} = 0 \quad (4.147)$$

$$\text{de unde rezultă: } R_s = \sqrt{R_g^2 + (X_g + X_s)^2} \quad (4.148)$$

Dacă: $-X_g = X_s$ (egale și opuse), atunci: $R_s = R_g \Rightarrow P_{max} = \frac{E^2}{4R_g}$

b) X_s variabil. Maximizarea puterii transferate implică:

$$\frac{\partial P}{\partial X_s} = -E^2 \frac{2R_s(X_g + X_s)}{((R_g + R_s)^2 + (X_g + X_s)^2)^2} = 0 \quad (4.145)$$

$$\Rightarrow X_g = -X_s \Rightarrow P_{max} = R_s I_{rezistenta}^2 = R_s \frac{E^2}{(R_s + R_g)^2} \quad (4.146)$$

c) R_s și X_s variabile. Maximizarea puterii transferate implică:

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_g^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{Z}_s = R_s + jX_s \\ \underline{Z}_g = R_g - jX_g \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Z}_s = \underline{Z}_g^* \text{ transfer maxim al puterii. } (4.147)$$

4.5.5. Analiza în complex a circuitelor de curent alternativ monofazat

Analiza în complex a circuitelor electrice permite transformarea sistemului de ecuații integro-diferențial al circuitului într-un sistem de ecuații a cărui rezolvare este mult mai simplă. Procesul de transformare a sistemului de ecuații integro-diferențiale în sistem algebric necesită asocierea unor imagini complexe aferente mărimilor reale (tensiuni, curenți, t.e.m.) dar și asocierea unor impedanțe complexe sau admitanțe complexe pentru operatorii de impedanță respectiv de admitanță ai laturilor circuitului. Sintetic această transformare este redată de tabelul următor.

<u>Mărimi reale instantanee</u>	<u>Imagine în complex</u>
i - curent	\underline{I}
u - tensiune	\underline{U}
e - t.e.m.	\underline{E}
R - rezistență	R
L - inductanță	L
C - capacitate	C
$\frac{d}{dt}$ - operator de derivare	$j\omega$
$\int dt$ - operator de integrare	$\frac{1}{j\omega}$
$z_j = R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_j} \int dt$	$\underline{Z}_j = R_j + jX_j + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$
$y_j = G_j + \frac{1}{L_j} \int dt + C_j \frac{d}{dt}$	$\underline{Y}_j = G - jB_j$ (4.148)

A. Analiza în complex a circuitelor ce conțin surse independente

Transformarea mărimilor și operatorilor din domeniu timp în domeniul complex conduce la asocierea imaginii circuitului în complex. Considerăm circuitul următor în domeniul timp parcurs de mărimile instantanee indicate în figura 4.51;

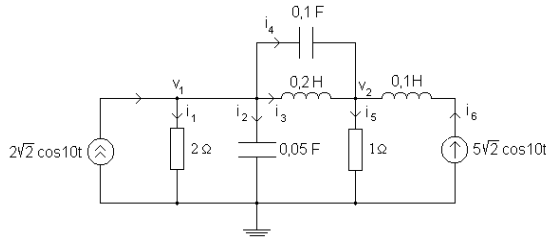


Fig. 4.51

Imaginea în complex a circuitului, obținută prin aplicarea restricțiilor prezentate, este:

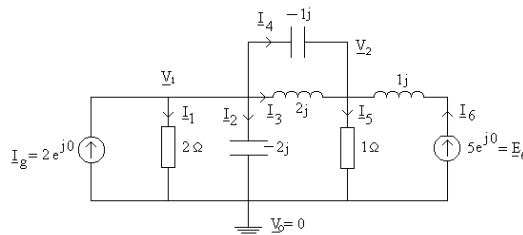


Fig. 4.52

Analiza topologică a circuitului conduce la $n=3$, $l=7$, $b=l-n+1=5$. Rezolvarea circuitului este posibilă prin metodele enumerate în capitolul 2. În prezentului circuit $n < b$ deci este indicat să se aplice analiza nodală ce conduce la un sistem de două ecuații cu necunoscutele complexe \underline{V}_1 și \underline{V}_2 .

Circuitul poate fi restrâns ca număr de laturi ($l=5$) prin utilizarea teoremelor de reducere. Astfel latura 1 și 2 fiind în paralel are impedanța echivalentă:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{2(-2j)}{2-2j} = \frac{-2j}{1-j}; \quad \underline{Z}_{12} = \frac{-2j(1+j)}{2} = 1-j \quad (4.149)$$

iar laturile 3 și 4 au impedanța echivalentă: $\underline{Z}_{34} = \frac{2j(-j)}{2j-j} = \frac{2}{j} = -2j$.

Obținem circuitul:

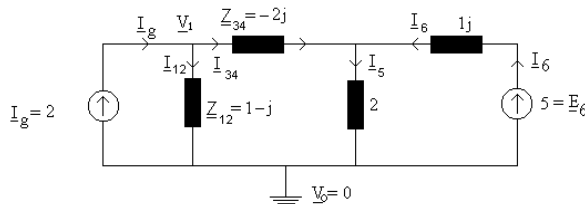


Fig. 4.53

Sistemul de ecuații nodale în complex are forma:

$$\begin{cases} V_1 \left(\frac{1}{1-j} + \frac{1}{-2j} \right) - V_2 \left(\frac{1}{-2j} \right) = 2 \\ -V_2 \left(\frac{1}{-2j} \right) + V_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j} + \frac{1}{-2j} \right) = 5/j \end{cases} \quad (4.150)$$

soluțiile fiind:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{7-11j}{4-j} = \sqrt{10} e^{-j43,5^\circ} \\ V_2 &= \frac{7-13j}{4-5} = 3,58 e^{-j47,6^\circ} \end{aligned} \quad (4.151)$$

În domeniul timp potențialele nodale sunt:

$$\begin{aligned} v_1 &= \operatorname{Re}\{V_1 e^{j10t} \sqrt{2}\} = \sqrt{2} \cos(10t - 43,5^\circ) \text{ (V)} \\ v_2 &= \operatorname{Re}\{V_2 e^{j10t} \sqrt{2}\} = 3,58 \sqrt{2} \cos(10t - 47,6^\circ) \text{ (V)} \end{aligned} \quad (4.152)$$

B. Analiza circuitelor în c.a. ce conțin surse dependente

Sursa dependentă fiind controlată de o mărime instantanee din circuit, imaginea atașată sursei dependente este imaginea în complex a mărimii ce o controlează. Spre exemplificare să considerăm circuitul din fig.4.54. Imaginea în complex a acestui circuit este prezentată în fig. 4.55.

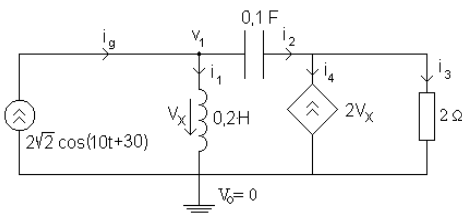


Fig. 4.54

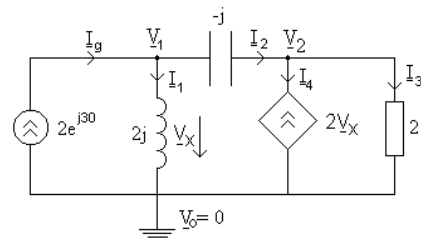


Fig. 4.55

Aplicând metoda potențialelor nodale pentru rezolvarea circuitului se obține sistemul:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 \left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{-j} \right) - \underline{V}_2 \left(\frac{1}{-j} \right) = 2e^{j30} \\ -\underline{V}_2 \left(\frac{1}{-j} \right) + \underline{V}_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-j} \right) = 2\underline{V}_x \\ \underline{V}_x = \underline{V}_1 \end{cases} \quad (4.153)$$

cu soluțiile complexe:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= 1,2e^{j167,5^\circ} \\ \underline{V}_2 &= 2,4e^{j130,6^\circ} \end{aligned} \quad (4.154)$$

Aplicarea *metodei curenților de contur* în analiza circuitelor este similară celei prezentate în capitolul 2. Exemplificăm această metodă pe circuitul din fig.4.56.

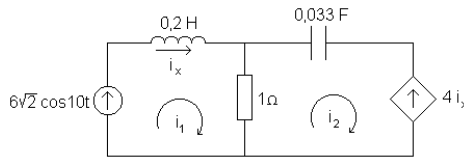


Fig. 4.56

Imaginea în complex a circuitului este:

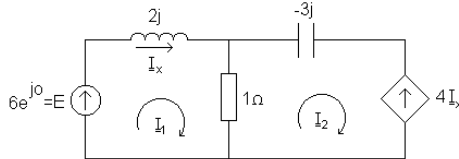


Fig. 4.57

Sistemul de ecuații al curenților independenți este:

$$\begin{cases} 6 = \underline{I}_1(2j+1) - \underline{I}_2 \cdot 1 \\ -4\underline{I}_x = \underline{I}_2(1-3j) - \underline{I}_1(1) \\ \underline{I}_x = \underline{I}_1 \end{cases} \quad (4.155)$$

cu soluțiile complexe:

$$\underline{I}_1 = 1,8e^{-j65,8^\circ} \text{ (A)}; \underline{I}_2 = 1,79e^{-j174,3^\circ} \text{ (A)} \quad (4.156)$$

C. Reducerea circuitelor electrice de curent alternativ prin generatoarele echivalente Thevenin și Norton

Aplicarea teoremei generatoarelor echivalente circuitelor ce funcționează în c.a. monofazat implică determinarea față de bornele analizate a tensiunii de mers în gol, a curentului de scurtcircuit și a operatorului de impedanță intern al circuitului.

Întrucât rezolvarea se face în domeniul complex, iar mărimilor li se atașează imagini complexe rezultă că raportul imaginilor complexe dintre tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit față de două borne se va numi impedanță complexă internă a circuitului.

$$Z_{ech} = \frac{U_{ABo}}{I_{SCAB}} \tag{4.157}$$

A doua metodă de determinare a impedanței complexe atașate unui dipol echivalent, implică pasivizarea tuturor surselor independente de tensiune și curent și alimentarea pe la bornele de acces de la o sursă test. Raportul tensiune complexă aplicată circuitului pe curent complex definește impedanța complexă conform figurii următoare:

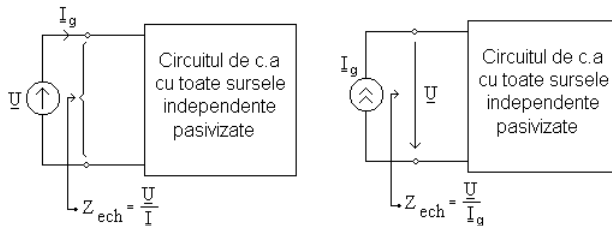


Fig. 4.58

Exemplificăm reducerea unei rețele ce conține sursă comandată la dipol echivalent *Thévenin* pe circuitul următor:

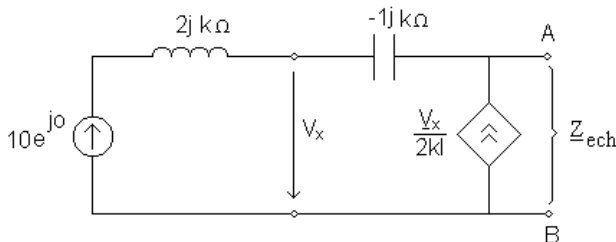


Fig. 4.59

Reducerea la dipol echivalent de tensiune implică determinarea impedanței interne echivalente a circuitului și tensiunea de mers în gol la

bornele AB. Aplicând metoda pasivizării pentru determinarea impedanței echivalente obținem:

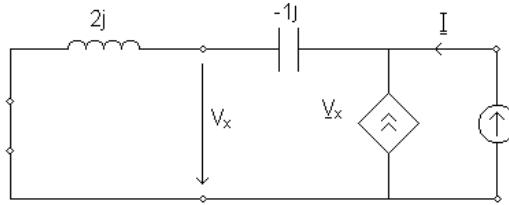


Fig. 4.60

respectiv tensiunea de mers în gol de la bornele \underline{U}_{ABo} este tensiunea de la bornele sursei dependente $\underline{U}_{ABo} = 7,9 \cdot e^{j18,5}$.

În concluzie circuitul de mai sus poate fi echivalat prin următorul generator echivalent:

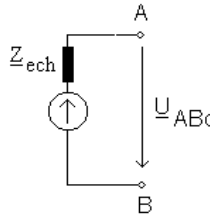


Fig. 4.61

4.6 Circuite cu elemente reale în regim sinusoidal

4.6.1. Bobina reală

a) Bobina liniară reală fără miez

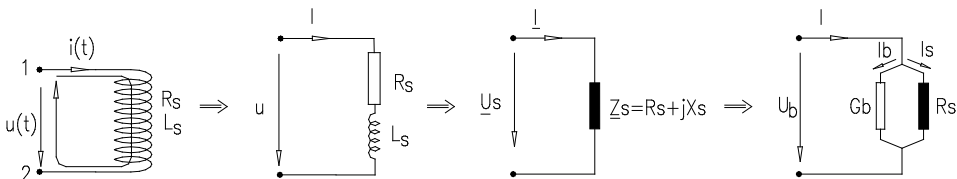


Fig. 4.62

Aplicând legea inducției pe Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} ds = -\frac{d\phi_{sp}}{dt} \Rightarrow \int_1^2 \vec{E} ds + \int_2^1 \vec{E} ds = -\frac{d}{dt}(Li) \Rightarrow R_b i - u_L = -L \frac{di}{dt} \quad (4.158)$$

Ecuția în tensiune cu valori instantanee ale mărimilor trecută în complex de vine $\underline{U}_b = R_b \underline{I} + j\omega L_b \underline{I}$ careia îi corespunde următoarea diagramă de fazori:

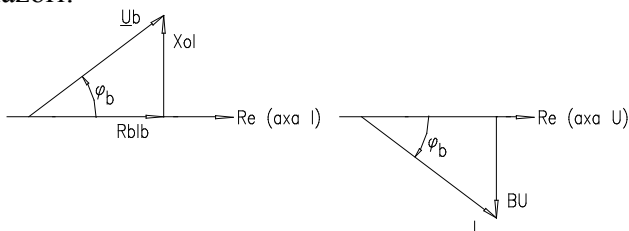


Fig. 4.63

$$\text{dar: } \underline{U}_b = \underline{Z}_b \underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_b = R_b + j\omega L_b = R_b + j\underline{X}_b = \underline{Z}_b e^{j\varphi_b} \quad (4.159)$$

$$\text{cu } \varphi_b = \text{arctg} \frac{X_b}{R_b} \quad (4.160)$$

Admitanța complexă a bobinei este dată de relația:

$$Y_b = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{R_b}{Z_b^2} - j \frac{X_b}{Z_b^2} = G_b - jB_b \quad (4.161)$$

b) Bobina liniară cu miez conductor

Aplicând tensiune sinusoidală la bornele unei bobine de rezistență neglijabilă, bobina ce conține un circuit magnetic din material conductor, pe baza legilor inducției și circuitului magnetic avem:

- din legea inducției: $\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\varphi}{dt}$ rezultă ecuația în tensiune a bobinei.

$$R_b i - u_L = -\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \underline{U}_L = j\omega N \underline{\Phi} \quad (4.162)$$

- din legea fluxului magnetic: $\varphi = \iint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{A}$, $\underline{\phi} = \underline{B} A$ - rezultă fluxul în fază cu inducția.

- din legea circuitului magnetic: $\oint \vec{H} ds = i \Rightarrow \underline{H} = \underline{I} \frac{N}{l}$, rezultă intensitatea câmpului magnetic H în fază cu I .

Din cauză curenților turbionari induși în miezul conductor bobina absoarbe de la rețea o putere activă egală cu puterea de pierderi în miezul conductor. Puterea din miezul conductor în timp, se transformă ireversibil în

căldură. Deoarece absoarbe putere activă de la rețea rezultă că între curent și tensiune există un defazaj diferit de $\frac{\pi}{2}$.

Presupunem ϕ în axa reală iar inducția și intensitatea câmpului magnetic decalate prin unghiul δ_{Fe} . Trecând în complex ecuațiile bobinei cu miez conductor putem construi diagrama de fazori din fig.4.64.

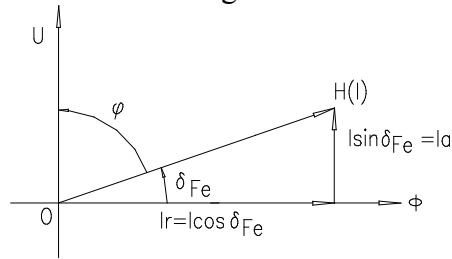


Fig.4.64

Locul geometric al dependenței inducției de intensitatea câmpului magnetic este o elipsă redată în figura 4.65, de ecuație:

$$\frac{B^2}{B_m^2} + \frac{H^2}{H_m^2} - \frac{2HB}{H_m B_m} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (4.163)$$

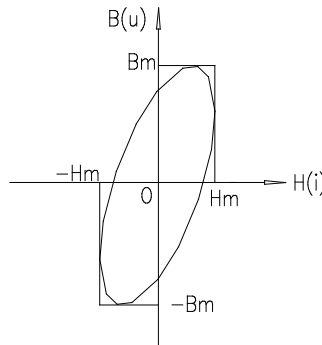


Fig.4.65

Consecințe:

1) Energia magnetică transformată prin efect electrocaloric datorită curenților induși în miezul conductor este: $W_m = \oint_{\Gamma} H dB$.

$$H = H_m \sin(\omega t + \delta)$$

$$B = B_m \sin \omega t \Rightarrow dB = \omega B_m \cos \omega t dt \quad (4.164)$$

$$W_m = \oint H dB = \oint H_m \omega B_m \cos \omega t \sin(\omega t + \delta) dt$$

$$W_m = \omega B_m H_m \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t + \delta) dt$$

$$W_m = \omega B_m H_m \left[\cos \delta \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt + \sin \delta \int_0^T \cos^2 \omega t dt \right] \quad (4.165)$$

Introducând relațiile:

$$B'_m = B_m \cos \delta \quad (4.166)$$

$$B''_m = B_m \sin \delta$$

expresia energiei devine : $W = \omega H_m B'' \frac{1}{2} T = \frac{2\pi}{T} H_m B'' \frac{1}{2} T = \pi H_m B''$ (4.167)

2) Deoarece permeabilitatea magnetică în instantaneu este $\mu = \frac{B}{H}$,
 definim permeabilitatea magnetică complexă (pentru $\underline{H} = H e^{j0}$, $\underline{B} = B e^{-j\delta}$):

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{B}}{\underline{H}} = \mu(\cos \delta - j \sin \delta) \quad (4.168)$$

unde: μ' - permeabilitatea magnetică elastică (conservativă)

μ'' - permeabilitatea magnetică vâscoasă (de atenuare)

$$\mu = \mu' - j\mu'' \Rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu''}{\mu'} \Rightarrow \mu_r = \mu'_r - j\mu''_r \quad (4.169)$$

Întrucât $W_m = \pi H_m B'' \Rightarrow W_m = \pi \mu'' H_m^2$ - pierderile sunt proporționale la o anumită amplitudine a câmpului magnetic (H_m) cu permeabilitatea magnetică vâscoasă.

3) Deoarece $\underline{U} = j\omega\phi$, iar între flux și curent există un unghi de pierderi datorat prezenței miezului conductor, atunci $\phi = \underline{L} \cdot \underline{I} = \underline{\mu}_r L_0 \underline{I}$, unde: L_0 - reprezintă inductivitatea bobinei în absența miezului conductor.

Bobinei i se aplică, în acest caz, tensiunea $\underline{U} = j\omega\phi = j\omega L_0 \underline{\mu}_r \underline{I} = jX_0 \underline{\mu}_r \underline{I}$.

$$\underline{U} = jX_0 (\underline{\mu}'_r - j\underline{\mu}''_r) \underline{I} = jX_0 \underline{\mu}'_r \underline{I} + X_0 \underline{\mu}''_r \underline{I} \Rightarrow \underline{U} = jX_m \underline{I} + R_m \underline{I} \quad (4.170)$$

Din diagrama fazorială complexă și ecuația de mai sus rezultă schema echivalentă serie atașată bobinei:

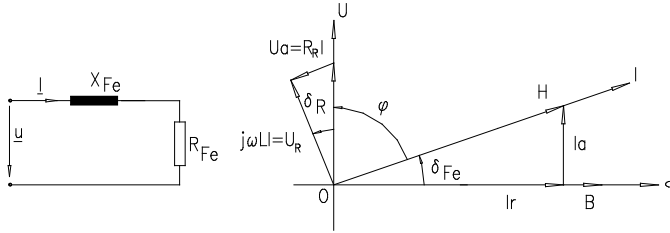


Fig. 4.66

Tensiunea $\underline{U} = U_a + jU_r$ are două componente față de axa curentului și definim:

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{U_a}{I} = \frac{U \sin \delta_m}{I} \\ X_m &= \frac{U_r}{I} = \frac{U \cos \delta_m}{I} \end{aligned} \quad (4.171)$$

4) Descompunerea curentului în două componente, una activă iar a doua reactivă permite asocierea unei *scheme echivalente paralel* pentru bobina cu miez conductor.

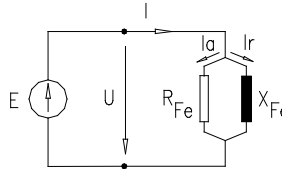


Fig. 4.67

Dacă considerăm:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{jX_0 \underline{\mu}_r} = -j \frac{\underline{U}}{X_0 \underline{\mu}_r} = -j \frac{\underline{U}}{X_0 (\underline{\mu}'_r - j\underline{\mu}''_r)} \\ \underline{I} &= -j \frac{\underline{U}}{X_0} \cdot \frac{\underline{\mu}'_r + j\underline{\mu}''_r}{\underline{\mu}_r^2} = -j \frac{\underline{\mu}'_r}{X_0 \underline{\mu}_r^2} \underline{U} + j \frac{\underline{\mu}''_r}{X_0 \underline{\mu}_r^2} \underline{U} \end{aligned} \quad (4.172)$$

$$\underline{I} = (G_m - jB_m) \underline{U}$$

unde: $-G_m = \frac{R_m}{Z_m^2}$, $B_m = \frac{X_m}{Z_m^2}$.

Puterea absorbită de la rețea:

$$P = R_m I^2 = UI \cos \varphi = G_m U^2 \quad (4.173)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\underline{\mu}''}{\underline{\mu}'} = \frac{P}{Q} = \frac{\text{putere activa}}{\text{putere reactiva}} \quad (4.174)$$

$\frac{1}{\operatorname{tg} \delta}$ = factor de calitate al elementului de circuit.

4.6.2. Condensatorul real în regim permanent sinusoidal

Dacă la bornele unui condensator se aplică o tensiune sinusoidală, există posibilitatea ca această tensiune să fie defazată în urma curentului cu un unghi mai mic de $\frac{\pi}{2}$. În acest caz condensatorul absoarbe putere activă de la rețea și îl numim condensator cu pierderi. Aceste pierderi sunt determinate de imperfecțiunile dielectricului și procesele de polarizare ciclică.

Să considerăm un condensator liniar cu pierderi în dielectric. Curentul prin condensator este dat de legea conservării sarcinii:

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ iar în complex: } \underline{I} = j\omega \underline{Q} \quad (4.175)$$

Considerând sarcina Q în axa reală din legile câmpului electromagnetic rezultă:

- din legea fluxului electric: $\oiint_{\Sigma} \vec{D} d\vec{A} = Q_{\Sigma} \Rightarrow \underline{D}$ inducția electrică în fază cu sarcina \underline{Q} ;

- din definiția tensiunii electrice: $U = \int_1^2 \vec{E} dr \Rightarrow \underline{U}$ tensiunea în fază cu intensitatea câmpului electric \underline{E} . În baza relațiilor definite putem construi următoarea diagramă de fazori:

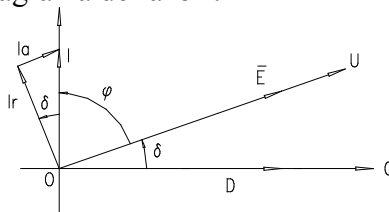


Fig. 4.68

Valorile instantanee pentru $E(t)$ și $D(t)$ sunt (alegând E origine de fază)

$$E = E_m \sin \omega t, \quad D = D_m \sin(\omega t - \delta) \quad (4.176)$$

Eliminând variabila timp, rezultă locul geometric al dependenței $E = E(D)$ de forma:

$$\frac{E^2}{E_m^2} + \frac{D^2}{D_m^2} - \frac{2ED}{E_m D_m} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (4.177)$$

Energia consumată în unitatea de volum a dielectricului este:

$$W_e = \oint_{\Gamma} EdD \quad (4.178)$$

$$W_e = \oint E_m \sin \omega t d [D_m \sin(\omega t - \delta) dt] = \oint E_m \sin \omega t \omega D_m \cos(\omega t - \delta) dt \quad (4.179)$$

Notând: $D'_m = D_m \cos \delta$, $D''_m = D_m \sin \delta$ rezultă $W_e = \pi E_m D''_m$

Raportul dintre inducția electrică complexă și intensitatea complexă a câmpului se numește permitivitatea electrică complexă.

$$\underline{E} = E e^{j\omega t} \quad (4.180)$$

$$\underline{D} = D e^{-j\delta}$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\underline{D}}{\underline{E}} = \frac{D}{E} (\cos \delta - j \sin \delta) = \varepsilon' - j \varepsilon'' \quad (4.181)$$

unde: $\varepsilon' = \varepsilon \cos \delta$ - permeabilitatea elastică (conservativă).

$\varepsilon'' = \omega \sin \delta$ - permeabilitatea vâscoasă (de atenuare).

Se definește permitivitate relativă complexă a condensatorului

$$\varepsilon_r = \frac{\underline{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \varepsilon'_r - j \varepsilon''_r \quad (4.182)$$

Schemele echivalente ale condensatoarelor reale pot fi asociate în baza următoarelor relații:

- schema paralel

$$\underline{I} = j\omega \underline{Q} = j\omega C \underline{U} = j\omega \varepsilon_r C_0 \underline{U} = j\omega C_0 \varepsilon_r \underline{U} = jB_0 \varepsilon_r \underline{U} \quad (4.183)$$

$$\underline{I} = jB_0 (\varepsilon'_r - j \varepsilon''_r) \underline{U} = jB_0 \varepsilon'_r \underline{U} + B_0 \varepsilon''_r \underline{U} \quad (4.184)$$

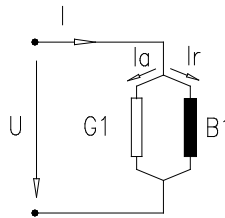


Fig. 4.69

Definind conductanța de pierderi, respectiv susceptanța condensatorului, rezultă:

$$G_1 = \frac{I_u}{U} = \frac{I \sin \delta}{U} \rightarrow P_1 = G_1 U^2 - \text{puterea activă} \quad (4.185)$$

$$B_1 = \frac{I_r}{U} = \frac{I \cos \delta}{U} \rightarrow Q_1 = B_1 U^2 - \text{puterea reactivă} \quad (4.186)$$

Schema echivalentă paralel trece într-o schemă serie în baza relațiilor:

$$\underline{U} = -j \frac{\underline{I}}{B_0 \varepsilon_r} = -j \frac{1}{\omega C_0} \cdot \frac{\underline{I}}{\varepsilon_r} = -j \frac{\underline{I}}{B_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_r - j \varepsilon_r''} = -j \frac{\underline{I}(\varepsilon_r' + j \varepsilon_{2r}'')}{B_0 \varepsilon_r} \quad (4.187)$$

$$\underline{U} = -j \frac{\varepsilon_r'}{B_0 \varepsilon_r^2} \underline{I} + \frac{\varepsilon_r''}{B_0 \varepsilon_r^2} \underline{I} = (R_c - j X_c) \underline{I} \Rightarrow \underline{U} = (R_c - j X_c) \underline{I} \quad (4.188)$$

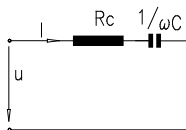


Fig. 4.70

Aceleași scheme echivalente rezultă din diagrama de fazori (fig.4.71):

- descompunând curenții (în două componente perpendiculare și coliniare tensiunii U) rezultă:

$$\begin{cases} G_1 = \frac{I_u}{U} = \frac{I \sin \delta}{U} \\ B_1 = \frac{I_r}{U} = \frac{I \cos \delta}{U} \end{cases} \quad (4.189)$$

- descompunând tensiunea rezultă:

$$\begin{cases} R_c = \frac{U_u}{I} = \frac{U \sin \delta}{I} \\ X_c = \frac{U_L}{I} = \frac{U \cos \delta}{I} \end{cases} \quad (4.190)$$

Puterea $P = UI \cos \varphi = R_c I^2 = G_1 U^2$ este puterea absorbită de rețea.

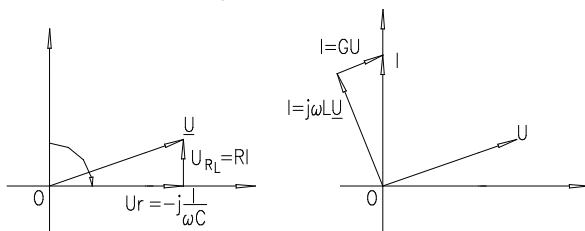


Fig. 4.71

4.7. Circuite cuplate în regim permanent sinusoidal

4.7.1. Tipuri de cuplaje

Două circuite sunt cuplate dacă procesele ce au loc într-unul din circuite influențează desfășurarea proceselor din cel de-al doilea circuit.

Cuplajele sunt de două tipuri:

- galvanic;
- mutual.

Circuitul ce conține sursa este circuit primar iar celălalt secundar.

Ramura comună celor două circuite este element de cuplaj (pentru cele galvanice).

Distingem următoarele tipuri de cuplaje galvanice:

- *cuplaj prin inductivitate proprie*

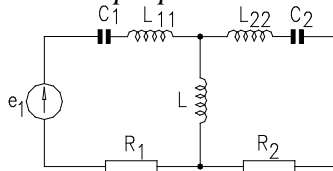


Fig. 4.72

Definim coeficientul de cuplaj:

$$k = \frac{\text{reactanța laturii comune}}{\text{radacina patrata a reactanțelor de același tip cu reactanța comună din cele două circuite}}$$

$$k = \frac{X_{12}}{\sqrt{X_1 X_2}} \quad (4.191)$$

$$X_{12} = \omega L$$

unde: $X_1 = \omega(L_{11} + L)$ (4.192)

$$X_2 = \omega(L_{22} + L)$$

$$k = \frac{L}{\sqrt{(L_{11} + L)(L_{22} + L)}} \quad (4.193)$$

- *cuplaj prin capacitate*

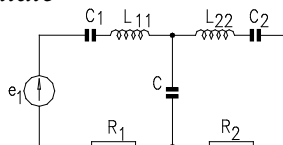


Fig. 4.73

respectiv coeficientul de cuplaj $k = \frac{X_{12}}{\sqrt{X_1 X_2}}$, unde:

$$X_{12} = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_1 = \frac{1}{\omega C_1 + \omega C} = \frac{1}{\omega \left(\frac{C_1 + C}{C_1 C} \right)} = \frac{1}{\omega C_a} \quad (4.194)$$

$$X_2 = \frac{1}{\omega \left(\frac{C_2 + C}{C_2 C} \right)} = \frac{1}{\omega C_b}$$

$$k = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2 \left(\frac{C_1 + C}{C_1 C} \cdot \frac{C_2 + C}{C_2 C} \right)}}} = \frac{\sqrt{C_a C_b}}{C} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{\sqrt{(C_1 + C)(C_2 + C)}} \quad (4.195)$$

- cuplajul mutual realizat prin câmp magnetic

Cuplajul mutual a două circuite are coeficientul de cuplaj

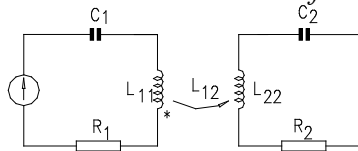


Fig. 4.74

$$k = \frac{X_{12}}{\sqrt{X_1 X_2}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad (4.196)$$

Orice circuit cuplat mutual p oate fi re prezentat p rintr-un c ircuit echivalent cuplat galvanic.

4.7.2 Reducerea cuplajului mutual la cel galvanic

Să considerăm două ramuri de inductivități L_{11} și L_{22} cuplate mutual prin inductivitatea L_{12} , ramuri supuse diferenței de potențial $v_a - v_x$ respectiv $v_a - v_x$ (fig.4.75). Considerând $v_x = v_x = 0$, (același potențial), rezultă că cele două ramuri au un punct comun $v_x = v_x$ (oricare ar fi graf neconex devine conex prin alegerea potențialului de referință) (fig.4.76).

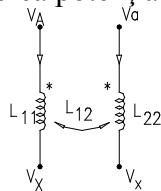


Fig. 4.75

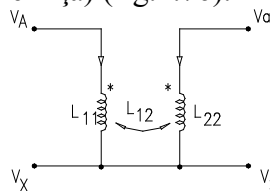


Fig. 4.76

Reducerea cuplajului mutual la unul galvanic este posibilă și prin următorul artificiu matematic:

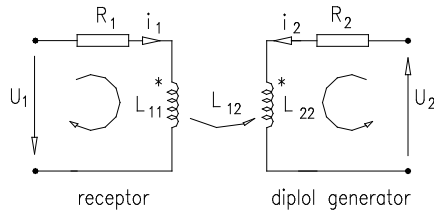


Fig. 4.77

$$u_1 = R_1 I_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} (+L_{12} \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_1}{dt}) \quad (4.197)$$

$$u_2 = R_2 I_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} (+L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}) \quad (4.198)$$

rezultă:
$$u_1 = R_1 I_1 + (L_{11} - L_{12}) \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \quad (4.199)$$

$$u_2 = R_2 I_2 + (L_{22} - L_{12}) \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \quad (4.200)$$

Trecând în complex simplificat:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{11} (L_{11} - L_{12}) + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \quad (4.201)$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_{22} (L_{22} - L_{12}) + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \quad (4.202)$$

Schema echivalentă atașată este:

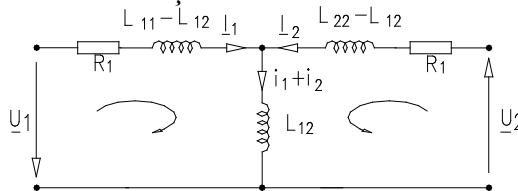


Fig. 4.78

Pentru schema echivalentă în T, factorul de cuplaj este conform definiției:

$$k = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{[\omega(L_{11} - L_{12}) + \omega L_{12}][\omega(L_{22} - L_{12}) + \omega L_{12}]}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad (4.203)$$

Dacă bobinele au bornele polarizate opuse, atunci ecuațiile:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad ; \quad u_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (4.204)$$

conduc la următoarea schemă echivalentă:

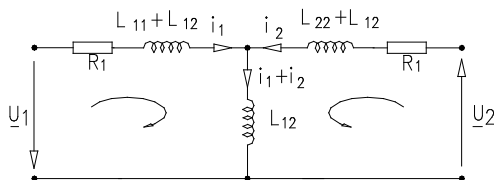


fig. 4.79

Ecuatiile trecute în complex simplificat prin înmulțire cu \underline{I}_1^* respectiv cu \underline{I}_2^* , conduc la ecuația bilanț a puterilor:

$$\underline{U}_1 \underline{I}_1^* = R_1 I_1^2 + j\omega(L_{11} \pm L_{12}) \underline{I}_1^2 + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 \pm \underline{I}_2) \underline{I}_1^* \quad (4.205)$$

$$\underline{U}_2 \underline{I}_2^* = R_2 I_2^2 + j\omega(L_{22} \pm L_{12}) \underline{I}_2^2 + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 \pm \underline{I}_2) \underline{I}_2^* \quad (4.206)$$

$$R\{U_1 I_1^*\} = P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = \operatorname{Re}\{j\omega L_{12} (\underline{I}_2 \underline{I}_1^*)\} + P_{j1} \quad (4.207)$$

$$-P_2 = -U_2 I_2 \cos \varphi_2 = \operatorname{Re}\{j\omega L_{12} (\underline{I}_2 \underline{I}_1^*)\} + P_{j2} \quad (4.208)$$

$R_e\{j\omega L_{12} \underline{I}_2 \underline{I}_1^*\} = P_{em}$ puterea electromagnetică transferată prin câmp electromagnetic între primar și secundar.

4.8 Rezonanța circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal

Se consideră un dipol linear pasiv, având inclus în structura sa atât bobine cât și condensatoare. Dipolul este excitat de un semnal sinusoidal iar răspunsul acestuia are amplitudinea și faza inițială dependentă de frecvența semnalului de excitație. Dacă frecvența semnalului de excitație și / sau parametrii dipolului variază, atunci defazajul dintre semnalul răspuns și de excitație este nul. Regimul de funcționare al dipolului în care defazajul este nul poartă denumirea de regim de rezonanță.

Deoarece $\varphi = \arctg \frac{X_e}{R_e}$ sau $\varphi = \arctg \frac{B_e}{G_e}$ anularea defazajului implică $X_e=0$, sau $B_e=0$, relații ce reprezintă condițiile de rezonanță a unui dipol.

4.8.1 Rezonanța serie (rezonanța tensiunilor)

Un astfel de regim poate fi obținut prin conectarea în serie a unui rezistor, bobină ideală și condensator ideal alimentate fie de la un generator ideal de tensiune, fie de la unul ideal de curent.

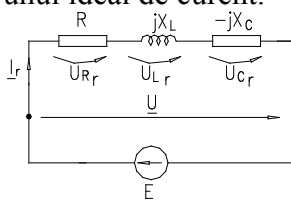


Fig. 4.80

Ecuția în complex a tensiunii la bornele dipolului este:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I} = \underline{Z}\underline{I} \quad \text{unde } \underline{Z} = Z e^{j\varphi} \quad (4.209)$$

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R_c + jX_c \quad (4.210)$$

Condiția de rezonanță: $X_c = 0 \Rightarrow X_L - X_C = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.211)$$

conduce la posibilitățile de realizare a rezonanței prin:

- variația frecvenței semnalului de excitație;
- modificarea inductivității sau capacității.

Diagrama de fazori la rezonanță este:

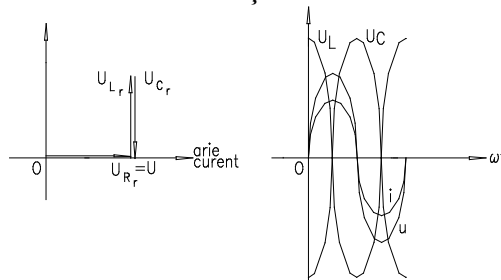


Fig. 4.81

Impedanța circuitului la rezonanță este.

$$Z_{\omega=\omega_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Big|_{\omega=\omega_0} = R \quad (4.212)$$

Curentul din circuit la rezonanță are valoare maximă fiind limitat numai de rezistența circuitului.

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (4.213)$$

Întrucât la rezonanță $U_L|_{\omega=\omega_0} = U_C|_{\omega=\omega_0}$ și sunt independente de tensiunea de alimentare este posibil ca tensiunea pe elementul reactiv să fie mai mare decât tensiunea de alimentare, conducând la aparitia supratensiunilor.

Condiția de existență a supratensiunilor este: $U_L|_{\omega=\omega_0} > U_C|_{\omega=\omega_0}$;

$\omega_0 L I_R > R I_R$ dar $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Numim $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \left(\frac{U_L}{I}\right)_{\omega=0}$ - impedanță caracteristică raportul dintre tensiunea pe elementul reactiv și curentul din circuit la rezonanță. Condiția de apariție a supratensiunilor poate fi exprimată și prin inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} > R, \quad \boxed{Z_0 > Z_R} - \text{apar supratensiuni.} \quad (4.214)$$

Numim factor de calitate al circuitului rezonant raportul dintre tensiunea pe elementul reactiv și tensiunea de alimentare definit de relația:

$$Q_s = \left(\frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C \cdot U_R}{I_R \cdot U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C \cdot \frac{1}{I_R} \cdot \frac{U}{I_R}}{I_R} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{Z_0}{R}. \quad (4.215)$$

Inversul factorului de calitate $\frac{1}{Q_s} = d$ se numește factor de amortizare ce reprezintă, din punct de vedere, fizic raportul dintre tensiunea aplicată circuitului și tensiunea de la bornele elementului reactiv.

Reprezentând grafic (fig,4.82): $U_L = f(\omega)$ și $U_C = f(\omega)$:

$$U_L = \omega LI = \omega L \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (4.216)$$

rezultă maximizarea tensiunii pe bobina ideală pentru pulsația:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2-d^2}} \Rightarrow \omega_L > \omega_0 \quad (4.217)$$

iar maximizarea tensiunii pe capacitate pentru:

$$\frac{\partial U_C}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{2-d^2}{2}} \Rightarrow \omega_c < \omega_0 \quad (4.218)$$

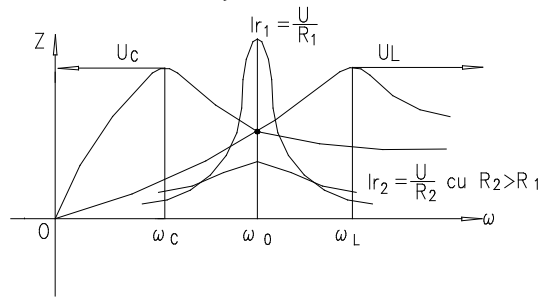


fig. 4.82

Dacă $\omega_c < 0$ atunci nu mai apar supratensiuni $\Leftrightarrow 2-d^2 < 0 \Rightarrow d > \sqrt{2}$ - condiția de inexistență a supratensiunilor.

Oscilații de energie la rezonanța tensiunilor

Valorile instantanee ale energiei înmagazinate în câmpul electric (condensator) respectiv câmpul magnetic sunt:

$$W_e = \frac{1}{2}CU_c^2, W_m = \frac{1}{2}Li^2 \quad (4.219)$$

unde: - $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i)$ iar $u_c = \frac{1}{C} \int i dt = -\sqrt{2} \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t + \gamma_i)$.

Energia totală înmagazinată în circuitul serie este suma energiei din condensator și bobină, iar la rezonanță, energia înmagazinată are valoarea:

$$W_r = (LI^2)_r [\cos^2(\omega t + \gamma_i) + \sin^2(\omega t + \gamma_i)] = (LI^2)_r \quad (4.220)$$

sau funcție de valoarea maximă a curentului: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

$$W_r = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 = ct. \quad (4.221)$$

Concluzie:

La rezonanță au loc oscilații neamortizate ale energiei între bobine și condensatoare. În acest regim nu are loc schimb de energie între surse și câmpul electromagnetic al circuitului. Sursele furnizează energie numai rezistoarelor în care se produc efecte Joule-Lentz.

4.8.2 Rezonanța de curent (paralel)

Acest regim poate fi realizat la bornele unui circuit format din gruparea paralel R, L, C alimentată de la o sursă sinusoidală de tensiune sau de curent (fig.4.83).

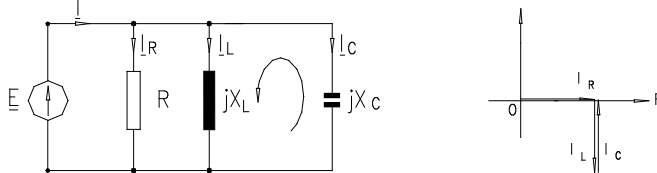


fig. 4.83

Curentul absorbit de dipol este:

$$i = i_R + i_L + i_C$$

$$i = GU + \frac{1}{L} \int i dt + C \frac{du}{dt} \quad (4.222)$$

Trecând în complex relația de mai sus obținem:

$$\underline{I} = \underline{U}[G - j(B_L - B_C)] \quad (4.223)$$

$$\underline{I} = \underline{U}\underline{Y} \text{ cu } I = U\sqrt{G^2 + B^2}$$

Condiția de obținere a rezonanței impusă dipolului conduce la posibilitățile practice de obținere a rezonanței:

$$B = B_L - B_C = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega C} - \omega_0 L = 0 \quad (4.224)$$

Admitanța circuitului: $\underline{Y} = G - jB$ la rezonanță devine: $\underline{Y} = G$.
 Reprezentarea funcție de frecvență a admitanței și susceptanțelor este redată în fig.4.84.

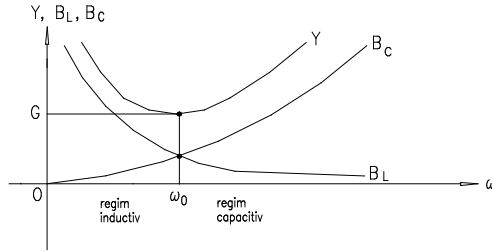


Fig. 4.84

La rezonanță $I_L = -I_C$ iar curentul absorbit de la sursă, $I_r = GU$, - are valoare minimă.

Deoarece $I_L = -I_C$ este posibil în cazul rezonanței paralele ca valoarea efectivă a curentului prin elementul reactiv să fie mult mai mare decât valoarea curentului absorbit de la rețea: $I_C|_{\omega=\omega_0} > I|_{\omega=\omega_0}$; $\omega_0 CU > GU$ dar

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\sqrt{\frac{C}{L}} > G \Rightarrow$ Satisfacerea acestei condiții conduce la apariția supracurenților.

Notând: - $\underline{Y}_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$ - admitanța caracteristică = $\frac{\text{curent pe elementul reactiv}}{\text{tensiunea circuitului}}$.

$$\underline{Y}_0 = \frac{I_C}{U} = \frac{\omega_0 CU_r}{U_r} = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.225)$$

- factorul de calitate al circuitului:

$$Q_p|_{\omega=\omega_0} = \frac{I_C}{I}|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 \cdot C \cdot U_r}{G \cdot U_r} = \frac{Y_0}{G} = 1/d \quad (4.226)$$

condiția de apariție a supracurenților devine: $\sqrt{\frac{C}{L}} > G$

Oscilațiile de energie ce au loc în bobină și condensator conduc la aceleași concluzii ca și în cazul rezonanței tensiunilor.

4.8.3 Rezonanța de curenți în circuitele cu elemente reale

Se consideră circuitul paralel format dintr-o bobină reală (R_1 și L) și condensator real (R_2 și C) cărora li se atașează schema echivalentă serie:

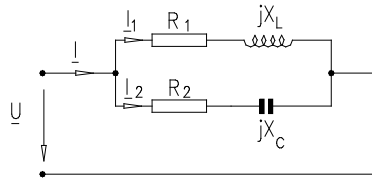


Fig. 4.85

Ecuatiile în domeniul timp și complex ale circuitului sunt:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 & \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ i_1 &= y_1 u & \underline{I} &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U} = \underline{Y}_e \underline{U} \\ i_2 &= y_2 u & \underline{Y}_e &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \end{aligned} \quad (4.225)$$

Admitanța complexă echivalentă a circuitului este :

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (4.226)$$

$$\underline{Y}_e = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} - \left(\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right) = G_e - jB_e \quad (4.227)$$

Impunând condiția de rezonanță $B_e = 0$ rezultă:

$$B_e = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0 \quad (4.228)$$

posibilitățile de obținere a rezonanței prin modificarea: L, C, R_1, R_2, ω - frecvența rețelei.

Diagrama fazorilor la rezonanță poate fi una din variantele expuse în fig.4.85:

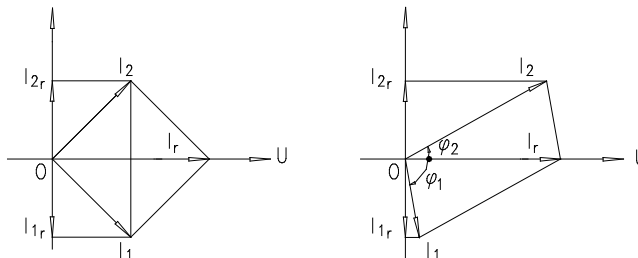


Fig. 4.86

Concluzie:

Din diagrama de fazori rezultă componentele reactive ale curenților egale și opuse (curenții I_1 și I_2 pot fi diferiți).

Este posibil ca ambii curenți (I_1 și I_2) sau unul din curenți să depășească curentul total I_r la rezonanță ceea ce produce supracurenți.

Dacă rezonanța se realizează prin variația frecvenței sursei de excitație, din condiția $B_e=0$ rezultă pulsația de rezonanță:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{\frac{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1}{\omega^2 C^2}} = 0 \quad ; \quad \omega_r^2 LC^2 \left(R_2^2 - \frac{L}{C} \right) = C \left(\frac{L}{C} - R_1^2 \right) \quad (4.229)$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} \quad (4.230)$$

Cazuri de obținere a rezonanței:

a) $R_1 > \sqrt{\frac{L}{C}}$ și $R_2 > \sqrt{\frac{L}{C}}$ atunci ω_r este o mărime reală;

b) $R_1 < \sqrt{\frac{L}{C}}$ și $R_2 < \sqrt{\frac{L}{C}}$ atunci ω_r este o mărime reală;

c) dacă $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ atunci rezonanța are loc la orice frecvență a semnalului de excitație.

În această situație:

- admitanța echivalentă este :

$$\underline{Y}_c \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C} + j\omega L}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{C} - \frac{1}{\omega C}}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{R} = G \quad (4.231)$$

- circuitul este complet aperiodic și curentul este independent de frecvență, având

$$\text{valoarea: } I = \frac{U}{R} .$$

- defazajul dintre I_1 și I_2 în orice moment și la orice frecvență este de 90° .

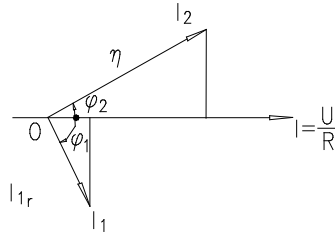


Fig. 4.87

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega L}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \omega\sqrt{LC} \quad (4.232)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\omega C\sqrt{\frac{L}{V}}} = -\frac{1}{\omega\sqrt{LC}} \quad (4.233)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = -1 \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (4.234)$$

- Din diagrama de fazori rezultă că tensiunea pe condensator U_c și curentul prin bobină I_1 sunt în fază iar energiile înmagazinate în elementele reactive sunt:

$$W_e = \frac{1}{2}CU_c^2 \quad \text{și} \quad W_m = \frac{1}{2}Li_1^2 \quad (4.235)$$

Energiile câmpului magnetic și electric oscilează în fază de aceea nu se produc oscilațiile de energie. Dacă U_c și i_1 cresc, at unci su rsele (generatoarele) furnizează energie atât rezistoarelor cât și câmpul electromagnetic al circuitului, când U_c și i_1 descresc energia înmagazinată în câmp se transformă în efect electrocaloric.

4.8.4 Rezonanța în circuite cuplate magnetic

Independent de natura cuplajului a două circuite, este posibil ca prin variația fie a frecvenței semnalului de excitație, fie a parametrilor să se realizeze rezonanța în circuitul primar sau în cel secundar sau simultan în ambele circuite.

Să considerăm circuitul cuplat magnetic din figura 4.88:

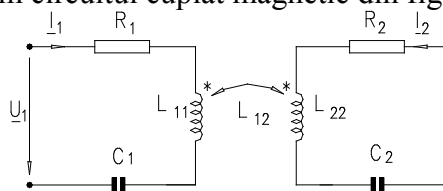


Fig. 4.88

Ecuțiile în complex ale celor două ochiuri furnizează relațiile:

$$\underline{U}_1 = \left[R_1 + j \left(\omega L_{11} - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \underline{I}_1 + j\omega L_{12} \underline{I}_2 \quad (4.236)$$

$$0 = \left[R_2 + j \left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \underline{I}_2 + j\omega L_{12} \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_{11}) \underline{I}_1 + j\omega L_{12} \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = -\frac{j\omega L_{12}}{R_2 + j\omega X_{22}} \underline{I}_1 \quad (4.237)$$

$$\Rightarrow \underline{U}_1 = \left(R_1 + jX_{11} + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 + jX_{22}} \right) \underline{I}_1 \text{ sau:}$$

$$\underline{U}_1 = \left[R_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2 R_2}{R_2 + X_{22}^2} + j \left(X_{11} - \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 + X_{22}^2} X_{22} \right) \right] \underline{I}_1 \quad (4.238)$$

Impedanța echivalentă la poartă de intrare este: $\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_{e1} + jX_{e1}$

unde: - $X_{e1} = X_{11} - \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 + X_{22}^2} X_{22}$ - reprezintă reactanța echivalentă a porții de intrare.

Pentru a obține rezonanța prin variația frecvenței la poarta de acces a circuitului primar este necesar și suficient ca $X_{e1} = 0$: (rezonanța tensiunilor) rezultând:

$$\omega_r L_{11} - \frac{1}{\omega_r C_1} - \frac{\omega_r^2 L_{12}^2}{R_2 + \left(\omega_r L_{22} - \frac{1}{\omega_r C_2} \right)^2} \left(\omega_r L_{22} - \frac{1}{\omega_r C_2} \right) = 0 \quad (4.239)$$

Făcând aproximația $R_2 \ll X_{22}$, rezultă:

$$\omega_r L_{11} - \frac{1}{\omega_r C_1} = \frac{\omega_r^2 L_{12}^2}{\omega_r L_{22} - \frac{1}{\omega_r C_2}} \text{ sau} \quad (4.240)$$

$$\omega_r^4 (C_1 C_2 L_{11} L_{22} - C_1 C_2 L_{12}^2) - \omega_r^2 (L_{11} C_1 + L_{22} C_2) + 1 = 0 \quad (4.241)$$

Înmulțind relația de mai sus cu $\frac{1}{L_{11} L_{22} C_1 C_2}$ rezultă:

$$\omega_r^4 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}} \right) - \omega_r^2 \left(\frac{1}{L_{11} C_1} - \frac{1}{L_{22} C_2} \right) - \frac{1}{L_{11} C_1 L_{22} C_2} = 0 \quad (4.242)$$

Notând $\sigma = 1 - k^2$ denumit coeficient de dispersie ecuația de mai sus poate fi scrisă în forma: $\sigma\omega_r^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\omega_r^2 + \omega_{01}^2\omega_{02}^2 = 0$.

Rădăcinile reale și pozitive ale acestei ecuații sunt:

$$\omega_r', \omega_r'' = \sqrt{\frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 - 4\sigma\omega_{01}^2\omega_{02}^2}}{2}} \quad (4.243)$$

și reprezintă valorile pulsațiilor la care are loc rezonanța tensiunilor.

Dacă cuplajul este slab $\sigma \rightarrow 1$ soluțiile tind la valorile proprii de rezonanță ale circuitului primar respectiv secundar $\omega_r' \rightarrow \omega_{01}$; $\omega_r'' \rightarrow \omega_{02}$. În tre pulsații există inegalitățile:

$$\omega_r' < \omega_r''' < \omega_r'' \quad (4.244)$$

În consecință în astfel de circuite există mai multe frecvențe de rezonanță. Rezonanțele de tensiune și de curent se succed astfel, după o rezonanță a tensiunilor următoarea rezonanță la creșterea frecvenței este de curent.

CAPITOLUL 5. CUADRIPOLUL ELECTRIC

5.1. Generalități

Dintre sistemele tehnice, la care are aplicarea teoriei cuadrupolului prezintă un interes deosebit, pot fi menționate: transformatoarele electrice, filtrele electrice, liniile electrice lungi, amplificatoarele, atenuatoarele, circuitele de corecție ale sistemelor de reglare automată, unele circuite electrice de măsură, mașinile electrice sau combinații ale acestora, etc.

Deoarece în orice cuadrupolul comportarea circuitelor electrice cuadrupolare se urmărește față de bornele de legătură cu exteriorul, pentru studiul circuitelor respective se folosesc semnale care se definesc față de borne, respectiv care se măsoară la borne. Astfel de semnale sunt tensiunile la borne și curenții prin borne. O altă grupă de parametri care se definesc, respectiv se măsoară la borne, o constituie parametrii cuadrupolului, despre care se va vorbi ulterior.

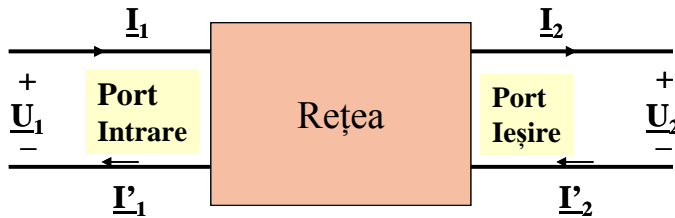


Fig 5.1

În fig.5.1 este prezentat generic un cuadrupol, pentru care au fost indicate semnalele de acces în borne. Dacă pentru fiecare dintre perechile de borne 1-1' și 2-2' ale cuadrupolului curenții prin borne sunt egali și de sens contrar față de cuadrupol, el se numește *cuadrupol* sau *dipol*.

Pentru acesta se pot scrie ecuațiile:

$$I_1 - I_1' = 0 \quad (5.1)$$

$$I_2 - I_2' = 0 \quad (5.2)$$

Denumirea de cuadripol diport provine de la aceea că el poate fi considerat ca având două porți. Prin *poartă* se înțelege o pereche de borne pentru care este îndeplinită condiția ca suma algebrică a curenților din conductoarele circuitului exterior conectate la bornele respective să fie nulă. Generalizând această terminologie, un multipol cu $2n$ borne de acces, grupate în n porți se numește multiport sau n -port.

Bornele cărora li se aplică o tensiune din exterior sunt borne receptoare și se numesc *de intrare* sau *primare*, iar bornele la care sunt conectate circuite receptoare sunt borne *generatoare* și se numesc borne *de ieșire* sau *secundare*. Pentru scrierea ecuațiilor cuadripolului, se adoptă regula de asociere a sensurilor de referință de la receptoare la bornele de intrare și regula de asociere a sensurilor de referință de la generatoare la bornele de ieșire.

Cuadripolii se pot clasifica pe baza aceluiași criterii care se utilizează și în teoria circuitelor electrice. Astfel, cuadripolii pot fi activi sau pasivi după cum conțin sau nu surse de energie; dacă sursele nu sunt independente ei se numesc neautonomi. O clasificare mai largă se face pe baza teoremei reciprocității în cuadripoli reciproci și nereciproci.

După comportarea față de cele două perechi de borne se deosebesc cuadripoli simetrici și nesimetrici.

După caracterul parametrilor elementelor de circuit componente cuadripolii pot fi liniari și neliniari, cu parametri concentrați sau parametri repartizați.

Un cuadripol poate fi *alimentat în sens direct* (pe la poarta de intrare), sau în *sens invers* (la poarta de ieșire).

Circuitelor electrice de tip cuadripol le corespund schemele electrice de cuadripolare, pe baza cărora se studiază aceste circuite. Metodele specifice de rezolvare a structurilor de cuadripolare constituie *teoria cuadripolului*. În această teorie comportarea circuitelor electrice se urmărește față de bornele de legătură cu exteriorul. Această particularitate caracteristică limitează

domeniul de aplicație al teoriei cuadripolului în special la acele probleme la care este suficient să se cunoască curenții și tensiunile la borne.

O particularitate esențială a teoriei cuadripolului constă în aceea că permite rezolvarea circuitelor electrice cuadripolare față de perechile de borne în legătură cu exteriorul, chiar fără cunoașterea în detaliu a structurii lor interioare.

5.2. Multipoli. Cuadripoli generali și cuadripoli diporți

În cel mai general înțeles, *cuadripolul electric* este un circuit electric care are patru borne de acces cu exteriorul. Asupra structurii interne a cuadripolului nu se impune nici o restricție, astfel încât ea poate să fie oarecare. Numai în ceea ce privește legătura cuadripolului cu exteriorul se impune condiția că aceasta să se facă exclusiv pe la borne.

Noțiunea de cuadripol electric nu se referă la un anumit circuit electric. Ea are un domeniu de aplicabilitate foarte larg, referindu-se în principiu la toate circuitele care satisfac definiția dată. Circuitelor electrice cuadripolare le corespund scheme electrice cuadripolare, pe baza cărora se studiază aceste circuite. În unele cazuri structura cuadripolară apare explicit numai în schemele electrice. Circuitele și schemele electrice cuadripolare se întâlnesc într-un număr mare în diferitele domenii ale electrotehnicii și ele se referă la sisteme tehnice de cea mai mare importanță practică. Noțiunea de cuadripol nu trebuie însă înțeleasă numai în sensul simplu al identificării unor structuri cu patru borne de acces. Importanța acestei noțiuni apare în legătură cu existența unei metode specifice de rezolvare a structurii cuadripolare, metodă care se încadrează într-un sistem organizat de cunoștințe, care constituie teoria cuadripolului.

Teoria cuadripolului face parte din teoria circuitelor electrice, fiind caracterizată prin anumite particularități, care determină de altfel și domeniul de probleme unde folosirea ei este cea mai rațională. În teoria cuadripolului comportarea circuitelor electrice se urmărește față de bornele

de legătură cu exteriorul. Această particularitate caracteristică limitează domeniul de aplicație al teoriei cuadripolului în principal la acele probleme, la care este suficient să se cunoască curenții și tensiunile la borne.

Este evident că rezolvarea circuitelor electrice cu adripolare, atunci când structura lor interioară este cunoscută, se poate face și prin metode obișnuite ale teoriei circuitelor electrice. În problemele menționate, aplicarea teoriei cuadripolului conduce în general la o simplificare esențială a operației de stabilire a ecuației schemelor cuadripolare, în principal că nu necesită determinarea curenților și tensiunilor din interior. Acest avantaj devine cu atât mai evident, cu cât schema electrică a circuitului este mai complexă. Teoria cuadripolului conduce deci la o rezolvare expeditivă și prin aceasta la o însemnată economie de timp.

O particularitate esențială a teoriei cuadripolului constă în aceea că permite rezolvarea circuitelor electrice cuadripolare față de perechile de borne în legătură cu exteriorul, chiar fără cunoașterea în detaliu a structurii lor interioare. Această observație se referă la cazul când cuadripolii sunt realizați. Dacă cuadripolul realizat are o structură foarte complicată sau necunoscută, teoria cuadripolului oferă singura metodă de analiză ce poate fi practic aplicată. Permițând tratarea unitară a unor probleme de bază ce intervin la un număr mare de circuite electrice cuadripolare care altfel pot fi diferite atât ca structură cât și ca domenii de aplicație, se poate considera că teoria cuadripolului constituie partea comună a teoriei acestor circuite.

Deoarece în teoria cuadripolului compoziția circuitelor electrice cuadripolare se urmărește față de bornele de legătură cu exteriorul, este natural ca în cadrul acestei teorii să se folosească pentru studiul circuitelor respective mărimi care se definesc față de borne, respectiv care se măsoară la borne dacă cuadripolul este realizat. Astfel de mărimi sunt tensiunile la borne și curenții prin borne. O altă grupă de mărimi care se definesc, respectiv se măsoară la borne, o constituie parametrii cuadripolului. În fig.5.1 se indică curenții prin borne pentru un cuadripol oarecare. În total

sunt pa tru c urenti ($\underline{I}_1, \underline{I}'_1, \underline{I}_2, \underline{I}'_2$), și șase tensiuni la borne ($\underline{U}_{11'} = \underline{U}_1, \underline{U}_{22'} = \underline{U}_2, \underline{U}_{1'2}, \underline{U}_{12'}, \underline{U}_{2'1}, \underline{U}_{21'}$) c orespunzătoare cel or $6 = C_4^2$ perechi de borne care se pot considera. Dintre acestea se consideră principalele perechi de borne 11' și 22'.

Dacă pentru fiecare dintre perechile de borne 11' și 22' a le cuadripolului c urenții pr in bor ne s unt e gali și d e sen s c ontrar față de cuadripol, el se numește cuadripol în înțeles restrâns sau cuadripol diport. Dacă curenții prin borne sunt diferiți el se numeste cuadripol general. În cazul unui cuadripol diport se pot scrie relațiile:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}'_1 = 0 \text{ și } \underline{I}_2 - \underline{I}'_2 = 0 \quad (5.3)$$

care nu sunt satisfăcute de c uadripolul ge neral. A tunci c ând s e f oloosește termenul simplu de cuadripol, fără nici o specificație, se înțelege obișnuit cuadripol diport.

Denumirea de cuadripol diport provine de fapt, din considerația că acest tip de cuadripol poate fi prezentat ca având două porți . Prin poartă se înțelege o pereche de borne la care este îndeplinită condiția că suma algebrică a curenților din conductoarele circuitului exterior conectate la bornele respective să fie nulă – relația (5.3). Generalizând această terminologie, un multipol c u $2n$ borne de a cces, gr upate în n porți se numește multiport sau n -port.

Bornele, cărora li se aplică o tensiune din exterior, sunt bor ne receptoare și se n umesc borne de intrare sau primare, iar bornele, la care sunt co nectate circuite r eceptoare, sunt bor ne ge neratoare și se n umesc borne de ieșire sau secundare. Pentru scrierea ecuațiilor, obișnuit se adoptă regula de asociere a sensurilor de referință de la receptoare la bornele de

intrare și regula de asociație a sensurilor de referință de la generatoare la bornele de ieșire.

Pentru o mai bună înțelegere a noțiunilor de cuadripol diport și cuadripol general sunt necesare unele explicații. Cuadripolul în înțeles restrâns apare în general ca un circuit intermediar între un generator și un receptor, ca re nu su nt l egate d irect în tre e le. O astfel de dispoziție este arătată schematic în fi g.5.2. În această figură se consideră un c uadripol pasiv, f ormat di ntr-o combinație oarecare de rezistențe, inductivități și capacități. La bor nele 1 1', ale c uadripolului este co nectat u n generator de t.e.m. \underline{U}_e și impedență interioară \underline{Z}_i , iar l a b ornele 2 2' est e co nectat circuitul receptor caracterizat prin impedența \underline{Z} . B ornele 1 1' s unt d eci borne de intrare, iar 2 2' sunt borne de ieșire. Se poate observa între generator și receptor nu există nici o altă legătură în afară de cea realizată prin intermediul cuadripolului. Egalitatea curenților pentru fiecare dintre perechile de bor ne 1 1' și 2 2' este astfel evidențiată. La cuadripolul diport schimbul de putere electromagnetic cu exteriorul se face pe la cele două perechi de borne 1 1' și 2 2' (porți), la care sunt conectate circuitele dipolare exterioare.

Pe măsură ce circuitele electrice sunt mai complexe apare necesitatea considerării cazurilor mai generale și anume când curenții prin borne, pentru fiecare din perechile de borne 1 1' și 2 2' ale cuadripolului nu mai sunt egali. Se poate obține în mod simplu o imagine despre cuadripolul general, presupunând că între bornele 1' și 2 a le c uadripolului se c onectează impedența exterioară \underline{Z}_3 . Datorită curenților \underline{I}_3 care se stabilește în impedența \underline{Z}_3 curenții pr in borne \underline{I}_1 și \underline{I}_1' , respective \underline{I}_2 și \underline{I}_2' , nu mai s unt egali. În aceste condiții, cuadripolul încadrat în c henar este un c uadripol general ($\underline{I}_1 \neq \underline{I}_1'$ și $\underline{I}_2 \neq \underline{I}_2'$). Dacă se consideră $\underline{Z}_2 = \infty$, deci $\underline{I}_3 = 0$, cuadripolul devine din nou cuadripol restrâns.

Cuadripolul general presupune deci existența unui schimb de putere electromagnetic cu exteriorul și pe la bornele $1'2'$, la care este conectată impedanța exterioară Z_3 . Deoarece cuadripolul general poate fi prezentat ca având trei porți el se mai numește și cuadripol triport. Deși în cazul cuadripolului general curenții prin borne sunt diferiți, în circuitele exterioare ale fiecăreia dintre cele 3 perechi de borne curenții sunt egali.

La început teoria cuadripolului (diport) a fost formulată în legătură cu rezolvarea unor probleme de telecomunicații. În scurtă vreme ea a fost aplicată în cele mai diferite domenii ale electrotehnicii și chiar în alte domenii. Astfel noțiunea de cuadripol a fost generalizată și pe ntru unele sisteme mecanice. Importanța teoriei cuadripolului diport a fost confirmată pe deplin în cursul celor aproximativ șase decenii de la primele ei formulări. Dintre sistemele tehnice la care aplicarea teoriei cuadripolului diport prezintă un interes deosebit pot fi menționate: linii electrice lungi, *filtre electrice*, amplificatoare, atenuatoare, transformatoare electrice, circuite de corecție ale sistemelor de reglare automată, giratoare, unele circuite electrice de măsură, mașini electrice sau combinații ale acestora etc. Teoria cuadripolului general este dată mai recent. Din punct de vedere al utilității practice, în prezent pe primul plan se găsește încă teoria cuadripolului diport. Problemele legate de rezolvarea schemelor electrice din ce în ce mai complexe deschid însă teoria cuadripolului general un domeniu de aplicație tot mai larg.

Cuadripolii se pot clasifica pe baza aceluiași criterii care se utilizează și în teoria circuitelor electrice. Astfel cuadripolii pot să fie activi sau pasivi, după cum conțin sau nu surse de energie; dacă sursele sunt independente cuadripolii (activi) se numesc autonomi, iar dacă sursele nu sunt independente ei se numesc neautonomi. O clasificare mai largă se face pe baza teoremei reciprocității în cuadripoli reciproci și nreciproci. După comportament față de cele două perechi de borne se deosebesc cu adripoli simetrici și nesimetrici. După caracterul parametrilor elementelor de circuit

componente cuadripolii pot fi: liniari și neliniari; cu parametri concentrați și parametri repartizați. Dacă transferul de energie are loc numai într-un singur sens cuadripolii se numesc unidirecționali, iar dacă are loc în ambele sensuri ei se numesc bidirecționali. Se mai pot deosebi cuadripoli de curent continuu și curent alternativ.

5.3. Cuadripoli rezistivi neliniari

a. Ecuații caracteristice. Cuadripolul rezistiv neliniar se definește la fel ca dipolul rezistiv neliniar; este un element de circuit static; ecuațiile pe care le satisfac tensiunile și curenții sunt ecuații de stare neliniară; în locul curbei caracteristice tensiune-curent sau cu rent-tensiune, intervin suprafețe caracteristice bidimensionale în sisteme de coordonate tridimensionale, iar ecuațiile capătă formele următoare:

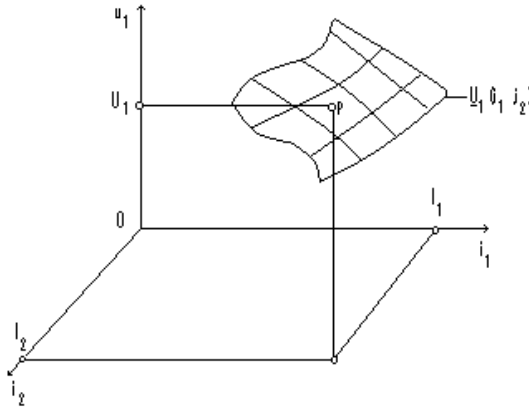


Fig. 5.2

$$i_1 = i_1(u_1, u_2); \quad i_2 = i_2(u_1, u_2) \quad (5.4)$$

pentru cuadripolul cu control de tensiune la intrare și ieșire;

$$u_1 = u_1(i_1, i_2); \quad u_2 = u_2(i_1, i_2) \quad (5.5)$$

pentru cuadripolul cu controlul de curent la intrare și ieșire;

$$u_1 = u_1(i_1, u_2); \quad i_2 = i_2(i_1, u_2) \quad (5.6)$$

pentru cuadripolul cu control de curent la intrare și tensiunea la ieșire;

$$i_1 = i_1(u_1, i_2); \quad u_2 = u_2(u_1, i_2) \quad (5.7)$$

pentru cuadripolul cu control de tensiune la intrare și de curent la ieșire.

De ex emplu, ecu ației $u_1(i_1, i_2)$ îi co respunde suprafața caracteristică reprezentată în fig.5.2.

b. Analiza unui cuadripol rezistiv neliniar prin metoda micilor componente (analiza la semnal mic).

Fie c uadripolul rezistiv n eliniar cu c ontrol d e curent la c are e c onectat la bornele de intrare un generator independent de tensiune electromotoare e , în serie cu rezistorul R_1 , iar la ieșire e conectat rezistorul R_2 . Tensiunile u_1, u_2 și curenții i_1, i_2 sunt soluții ale ecuațiilor cuadripolului.

$$u_1 = u_1(i_1, i_2); \quad u_2 = u_2(i_1, i_2); \quad (5.8)$$

și ale ecuațiilor ochiurilor de la intrare și ieșire,

$$u_1 = e - R_1 i_1; \quad u_2 = R_2 i_2; \quad (5.9)$$

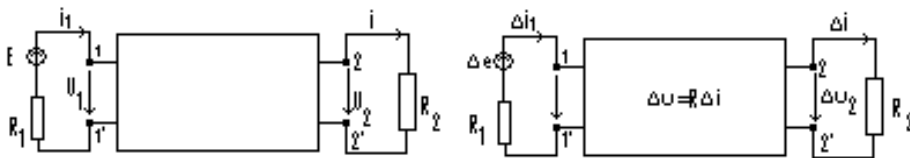


Fig. 5.3

Existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor (5.5-5.6) depinde de neliniaritatea funcțiilor $u_1(i_1, i_2)$ și $u_2(i_1, i_2)$; soluția poate fi unică, să nu existe și pot fi mai multe soluții.

Fie U_1, U_2, I_1, I_2 soluția unică a sistemului de ecuații (5.5-5.6) corespunzând unei t.e.m. continue E :

$$U_1 = U_1(I_1, I_2); \quad U_2 = U_2(I_1, I_2); \quad (5.10)$$

$$U_1 = E - R_1 I_1; \quad U_2 = R_2 I_2; \quad (5.11)$$

Dacă suprafețele caracteristice $u_1(i_1, i_2)$ și $u_2(i_1, i_2)$ s unt s ufcient d e netede, unei mici variații a t ensiunii ge neratorului $\Delta e(t)$, ($|\Delta e(t)| \ll E$), $e(t) = E + \Delta e(t)$, îi corespund mici variații a le te nsiunilor $\Delta u_1(t)$ și $\Delta u_2(t)$, respectiv ale curenților $\Delta i_1(t)$ și $\Delta i_2(t)$, denumite incrementale,

$$u_1(t) = U_1 + \Delta u_1(t); \quad u_2(t) = U_2 + \Delta u_2(t); \quad (5.12)$$

$$i_1(t)=I_1+\Delta i_1(t); i_2(t)=I_2+\Delta i_2(t). \quad (5.13)$$

Analiza c uadripolului rezistiv n eliniar la s emnalul m ic p erturbator $\Delta e(t)$ e similară cu analiza corespunzătoare a re zistorului n eliniar. Înlocuind e xpresiile lui e , u ₁,u₂,i₁,i₂ din (9-10) în ecuațiile (5-6) și ținând seama de (7-8) rezultă:

$$U_1+\Delta u_1=u_1(I_1+\Delta i_1,I_2+\Delta i_2); U_2+\Delta u_2=u_2(I_1+\Delta i_1,I_2+\Delta i_2); \quad (5.14)$$

$$\Delta u_1=\Delta e-R_1 \Delta i_1; \Delta u_2=R_2 \Delta i_2; \quad (5.15)$$

Dacă se dezvoltă în se rie *Taylor* membrii 2 ai ecuațiilor 5-11 și se rețin numai primii trei termeni ai dezvoltării, se obține:

$$u_1(I_1+\Delta i_1,I_2+\Delta i_2) \cong U_1(I_1,I_2) + \frac{\partial u_1}{\partial i_1} \Delta i_1 + \frac{\partial u_1}{\partial i_2} \Delta i_2 \quad (5.16)$$

$$U_1(I_1,I_2) + \frac{\partial u_1}{\partial i_1} \Delta i_1 + \frac{\partial u_1}{\partial i_2} \Delta i_2 = U_1(I_1,I_2) + R_{11}(I_1)\Delta i_1 + R_{12}(I_2)\Delta i_2;$$

$$u_2(I_1+\Delta i_1,I_2+\Delta i_2) \cong U_2(I_1,I_2) + \frac{\partial u_2}{\partial i_1} \Delta i_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} \Delta i_2 \quad (5.17)$$

$$U_2(I_1,I_2) + \frac{\partial u_2}{\partial i_1} \Delta i_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} \Delta i_2 = U_2(I_1,I_2) + R_{21}(I_1)\Delta i_1 + R_{22}(I_2)\Delta i_2;$$

în care s-a notat cu $R_{11}(I_1)$ și $R_{22}(I_2)$ rezistențele dinamice de intrare și cu $R_{12}(I_2)$ și $R_{21}(I_1)$ rezistențe dinamice de transfer:

$$R_{11}(I_1) = \frac{\partial u_1}{\partial i_1}; \quad R_{12}(I_2) = \frac{\partial u_1}{\partial i_2}; \quad (5.18)$$

$$R_{21}(I_1) = \frac{\partial u_2}{\partial i_1}; \quad R_{22}(I_2) = \frac{\partial u_2}{\partial i_2}; \quad (5.19)$$

Înlocuind (5.13) și (5.14) în (5.11) se deduc ecuațiile:

$$\Delta u_1 = R_{11}(I_1)\Delta i_1 + R_{12}(I_2)\Delta i_2; \Delta u_2 = R_{21}(I_1)\Delta i_1 + R_{22}(I_2)\Delta i_2; \quad (5.20)$$

sau matricial:

$$\Delta u = r \Delta i ,$$

în care:

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta i = \begin{bmatrix} \Delta i_1 \\ \Delta i_2 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} R_{11}, R_{12} \\ R_{21}, R_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

La semnal mic, ecuațiile neliniare (5.7) trec în ecuațiile liniare corespunzătoare (5.17) și cuadripolul este linear fig. 5.2. În punctele de funcționare $P_k(U_k, I_1, I_2)$ din spațiul i_1, i_2, u_k suprafețele caracteristice $u_k = u_k(i_1, i_2)$, $k = 1, 2$ se aproximează prin planele tangente.

Rezolvând ecuațiile (5.15) și (5.20), se obțin răspunsurile incrementale $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta i_1$ și Δi_2 la semnal mic Δe ,

$$\Delta i_1 = \frac{R_{22} - R_2}{\Delta} \cdot \Delta e; \quad \Delta i_2 = -\frac{R_{21}}{\Delta} \cdot \Delta e; \quad (5.22)$$

$$\Delta u_1 = \frac{R_{11}(R_{22} - R_2) - R_{12}R_{21}}{\Delta} \cdot \Delta e; \quad \Delta u_2 = -\frac{R_2 R_{21}}{\Delta} \cdot \Delta e; \quad (5.23)$$

$$\Delta = (R_{11} + R_1)(R_{22} - R_2) - R_{12}R_{21}. \quad (5.24)$$

5.4. Elemente cuadripolare de circuit

5.4.1. Surse comandate

Sursele ideale sunt *modele matematice* care modelează generatoarele reale (fizice) de tensiune sau curent.

Sursa ideală de tensiune are impedanță de ieșire nulă.

Sursa ideală de curent are impedanța de ieșire infinită. Simbolul, relațiile matematice și caracteristica (i,u) sunt prezentate în figura de mai jos:

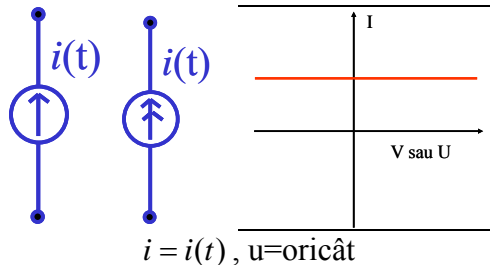


Fig. 5.4

Sursele comandate sunt *modele matematice* ce caracterizează elemente de circuit de tip diport, care la poarta de ieșire pot fi modelate ca surse ideale, valoarea mărimii de ieșire (tensiune sau curent) fiind dependentă de valoarea mărimii de intrare (tensiune sau curent). Ele modelează circuite reale care îndeplinesc funcția de amplificare.

După tipul mărimii comandate (de ieșire) și cel al mărimii de comandă (de intrare) întâlnim 4 tipuri de surse comandate:

- sursa de tensiune comandată în tensiune (STCT):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

- sursa de tensiune comandată în curent (STCC):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

- sursa de curent comandată în curent (SCCC):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

- sursa de curent comandată în tensiune (SCCT):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Amplificatorul operațional (AO) este un circuit (integrat sau discret) prevăzut cu două borne de intrare și o bornă de ieșire, furnizând la ieșire o tensiune (față de masă) egală cu replica amplificată a tensiunii *dintre* cele două borne de intrare. Simbolul utilizat pentru AO este prezentat mai jos:

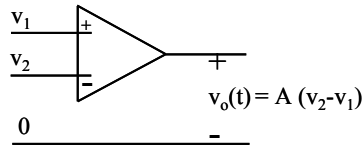


Fig. 5.5

Amplificatorul operațional realizează amplificare mare, bandă de frecvență suficient de largă în aplicații uzuale, impedanță de intrare mare și cea de ieșire mică.

În funcție de aplicația concretă, modelul adoptat pentru AO poate fi diferit. Aceste modele se împart în două categorii: liniare și neliniare.

Cel mai simplu (și mai utilizat) model liniar este cel numit *nulator-norator*, aceste două cuvinte desemnând denumirile *uniporturilor degenerați* ce modelează intrarea, respectiv ieșirea amplificatorului operațional. În acest model, de numit *amplificator operațional ideal*, acceptabil în majoritatea aplicațiilor, se consideră amplificarea, banda de frecvență și impedanța de intrare infinite, iar impedanța de ieșire nulă. Simbolul și relațiile matematice sunt prezentate mai jos:

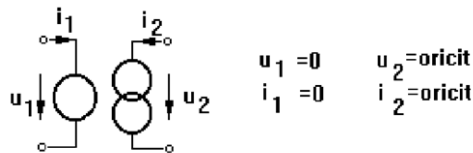


Fig. 5.6

Se pot face o serie de observații în legătură cu acest model:

- nulatorul și noratorul apar întotdeauna în pereche;
- noratorul are întotdeauna un terminal legat la masă;
- nulatorul impune două restricții semnalelor aplicate la bornele sale, iar noratorul nici una;

- pe model nu sunt precizate bornele de intrare inversoare și neinversoare, însă într-o aplicație concretă ele se precizează în așa fel încât *stabilitatea* circuitului să fie asigurată.

Analiza circuitelor cu AO se face în cazurile simple cu legile lui *Kirchoff*, iar în cazuri mai complicate cu metoda *Nathan*, care este în esență o generalizare a teoremei teveninilor nodale pentru circuite cu elemente degenerate. În ambele metode ideea este de a folosi cele 2 restricții pe care le impune nulatorul.

Renunțând pe rând la idealizările făcute în modelul de mai sus se obține o serie de modele liniare care se apropie din ce în ce mai mult de amplificatorul operațional real, care are amplificare finită și dependentă de frecvență, impedanță de intrare mare, dar finită, impedanță de ieșire mică, dar nenulă.

În cazul în care nivelul de intrare este suficient de mare pentru a obliga tensiunea de ieșire să atingă valoarea tensiunii de alimentare este necesară adoptarea unui model neliniar. Două sunt neliniaritățile principale care se manifestă în funcționarea AO: intrarea în saturație și viteza maximă de variație a semnalului la ieșire (slew-rate, viteza de oscilație este definită ca viteza de variație a tensiunii pe unitatea de timp).

Prima este pusă în evidență mai jos cu ajutorul unor caracteristici de tip comparator, respectiv de amplificator cu limitare:

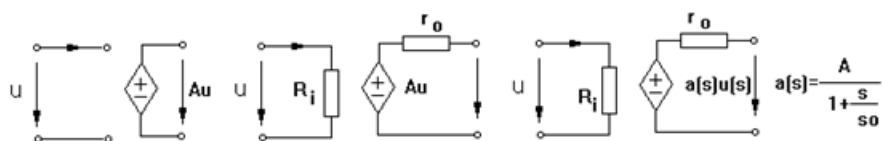


Fig. 5.7

amplificator liniar

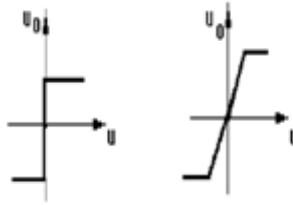


Fig. 5.9

A doua manifestare neliniară constă în aceea că, în funcționarea cu nivel mare al semnalului de intrare și la frecvență ridicată, semnalul de la ieșirea AO nu mai reușește să urmărească variațiile rapide ale semnalului aplicat la intrare, astfel încât forma tensiunii de ieșire apare distorsionată (la frecvențe foarte mari, practic triunghiulară). Se pune astfel în evidență o viteză maximă de variație a semnalului la ieșirea AO, denumită *slew-rate* (SR), măsurată în $V/\mu s$ și care constituie un parametru de catalog. Explicații mai amănunțite asupra originii acestei manifestări vor fi prezentate la cursul de Circuite integrate liniare. Pentru scopul acestei prezentări ne vom mulțumi cu un calcul simplu care ilustrează relația dintre acest parametru și mărimile din circuit. Să presupunem că la ieșirea AO avem un semnal sinusoidal cu amplitudinea V_o și pulsația ω_o :

$$v_o(t) = V_o \sin \omega_o t \quad (5.25)$$

Se știe că viteza de variație a unei mărimi este dată de derivata acesteia în raport cu timpul, în consecință viteza de variație a tensiunii la ieșirea AO se calculează cu relația:

$$\frac{dv_o}{dt} = V_o \omega_o \cos \omega_o t \quad (5.26)$$

de unde rezultă că valoarea maximă a acesteia este:

$$SR = \left(\frac{dv_o}{dt} \right)_{\max} = V_o \omega_o \quad [V/\mu s] \quad (5.27)$$

Se pot face acum o serie de observații:

- această manifestare neliniară apare mai întâi la trecerile prin zero ale semnalului de ieșire;
- SR se determină măsurând panta semnalului triunghiular de la ieșire (la cursul de circuite integrate liniare se va arăta că, în realitate, pantele crescătoare și descrescătoare nu sunt riguros egale);
- într-o aplicație concretă, cunoscând valoarea tensiunii de alimentare (egală cu valoarea maximă la care ar putea ajunge V_o) și citind din catalog valoarea SR pentru amplificatorul operațional folosit se poate determina valoarea maximă a frecvenței de lucru până la care această manifestare neliniară nu va apare, mărime denumită *bandă de câștig integral*:

$$\omega_{\max} = \frac{SR}{V^+} \quad (5.28)$$

5.4.2. Scheme echivalente ale tranzistoarelor bipolare

O aplicație a elementelor active comandate o constituie utilizarea lor în stabilirea schemelor echivalente ale tranzistoarelor NPN și PNP.

Se consideră tranzistorul PNP al cărui simbol, cu borna comună la bază, este reprezentat în fig.5.5, în care s-a adoptat regula de asociere a sensurilor de referință de la receptoare pentru ambele porți ale cuadripolului. Ecuațiile *Ebers-Moll*, ale tranzistorului, considerat element de circuit cuadripolar cu control de tensiune, sunt următoarele:

$$i_e = a_{11}(e^{q_e u_e / kT} - 1) + a_{12}(e^{q_e u_c / kT} - 1); \quad (5.29)$$

$$i_c = a_{21}(e^{q_e u_e / kT} - 1) + a_{22}(e^{q_e u_c / kT} - 1); \quad (5.30)$$

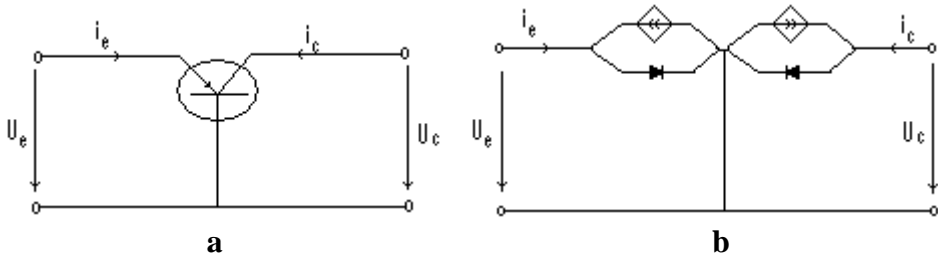


Fig. 5.10

În care s-a notat cu: q_e -sarcina electrică a electronului, k -constanta lui Boltzmann, T -temperatura în grade Kelvin, u_e, u_c -tensiunile la bornele cuadripolului, i_e, i_c - curenții corespunzători și a_{ij} constante. Eliminând între cele doua ecuații termenul $e^{q_e u_e / kT}$ și apoi termenul $e^{q_e u_c / kT}$ se obțin ecuațiile:

$$i_e + \alpha_c i_c = I_{e0} (e^{q_e u_e / kT} - 1) \quad (5.31)$$

$$\alpha_e i_e + i_c = I_{c0} (e^{q_e u_c / kT} - 1). \quad (5.32)$$

în care s-a notat:

$$\alpha_c = -\frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad \alpha_e = -\frac{a_{21}}{a_{11}}; \quad I_{e0} = a_{11} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}}; \quad I_{c0} = a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}}. \quad (5.33)$$

În membrii 2 ai ecuațiilor (5.31-5.32) se regăesc expresiile curenților diodei semiconductoare cu joncțiune PN a vând caracteristica Schotki. Prin urmare I_{e0} este intensitatea curentului invers de saturație a diodei emiter-bază cu colectorul deschis ($i_c=0$), și I_{c0} este intensitatea curentului invers de saturație a diodei colector-bază cu emiterul deschis ($i_e=0$).

Ecuațiilor (5.31-5.32) le corespunde schema echivalentă reprezentată în fig 5.10.b, c conținând 2 diode cu joncțiuni și 2 surse comandate (generatoare de curent cu control de curent). În fig.5.10 .a s-au reprezentat caracteristicile $i_e(u_e)$ pentru diferite valori ale curentului i_c și caracteristicile $i_c(u_c)$ pentru diferite valori ale curentului i_e . Într-o primă aproximație, caracteristicile se înlocuiesc cu segmente de dreaptă.

5.4.3. Transformatorul ideal

Transformatorul ideal este un model idealizat al transformatorului fără pierderi c u c uplaj p erfect. L a acest m odel se aj unge co nsiderând permeabilitatea magnetică relativă a miezului foarte mare. În acest caz reluctanța miezului poate fi considerată nulă și teorema lui *Ampère*:

$$\Phi \mu R_m = N_1 I_1 + N_2 I_2, \quad (5.34)$$

devine:

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0, \quad (5.35)$$

Împărțind ecuația cu N_1 ținând cont de expresia raportului de transformare, se obține expresia simplă:

$$i_1 + n i_2 = 0, \text{ unde } n = \frac{N_2}{N_1} \quad (5.36)$$

La inversarea sensului de înfășurare a l une ia di ntre b obine (de exemplu, una secundară relația dintre curenți se scrie:

$$i_1 - n i_2 = 0, \quad (5.37)$$

De remarcat că puterea totală la bornele transformatorului ideal este nulă:

$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + n i_1 (-i_1/n) = u_1 i_1 - u_1 i_1 = 0, \quad (5.38)$$

Interpretarea acestui rezultat este simplă: energia acumulată în câmpul magnetic din transformatorul ideal este nulă. Simbolul transformatorului ideal este prezentat în figura de mai jos.

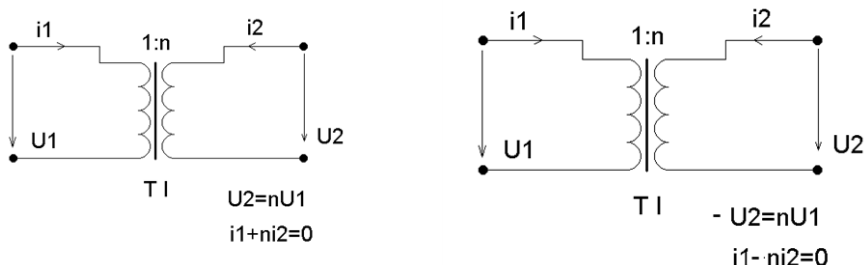


Fig. 5.11

care reprezintă ecuațiile transformatorului ideal, a vând raportul de transformare egal cu raportul rezistențelor de girație,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{r_{g1}}{r_{g2}}; \quad (5.39)$$

a) O bobină de inductivitate $L = r_g^2 \cdot C$, și curent inițial $i_L(0)$ este echivalentă cu un condensator de capacitate C și tensiune inițială $u_c(0) = r_g \cdot i_L(0)$, conectat la bornele unui girator de rezistență de girație r_g .

Înlocuind în ecuațiile caracteristice curentul i_2 prin condensator,

$$i_2 = C \frac{du_2}{dt}, \quad (5.40)$$

se obține:

$$u_1 = r_g C \frac{du_2}{dt}. \quad (5.41)$$

Derivând în raport cu timpul ambii membri ai celei de a doua ecuație caracteristice și înlocuind $\frac{du_2}{dt}$ în ecuația (5.30) rezultă:

$$u_1 = r_g^2 C \frac{di_1}{dt}, \quad (5.42)$$

din care se deduce echivalența:

$$L = r_g^2 C. \quad (5.43)$$

Din a doua ecuație caracteristică scrisă la momentul $t=0$ rezultă $u_c(0) = r_g i_L(0)$;

b) Un condensator de capacitate $C = \frac{L}{r_g^2}$ și tensiune inițială $u_c(0)$ este echivalent cu o bobină de inductivitate L și curent inițial $i_L(0) = \frac{u_c(0)}{r_g}$,

$$\begin{cases} I_1 = I_1' \\ I_2 = I_2' \end{cases} \quad (5.45)$$

Sistemul dat de metoda curenților de buclă se rezolvă de exemplu prin regula lui *Kramer* :

$$I_1' = \frac{1}{\underline{\Delta}} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1 & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1b} \\ -\underline{U}_2 & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \underline{Z}_{b2} & \cdots & \underline{Z}_{bb} \end{vmatrix} = \frac{1}{\underline{\Delta}} \cdot (\underline{U}_1 \cdot \underline{\Delta}_{11} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\Delta}_{12}) \quad (5.46)$$

$$I_2' = \frac{1}{\underline{\Delta}} \cdot \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{U}_1 & \cdots & \underline{Z}_{1b} \\ \underline{Z}_{21} & -\underline{U}_2 & \cdots & \underline{Z}_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{Z}_{b1} & 0 & \cdots & \underline{Z}_{bb} \end{vmatrix} = \frac{1}{\underline{\Delta}} \cdot (-\underline{U}_1 \cdot \underline{\Delta}_{21} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\Delta}_{22}) \quad (5.47)$$

în care s-a notat prin $\underline{\Delta}$ determinantul sistemului:

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1b} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{Z}_{b1} & \underline{Z}_{b2} & \cdots & \underline{Z}_{bb} \end{vmatrix} \quad (5.48)$$

Curenții celor două porți ale cuadripolului analizat se pot scrie deci sub forma:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\underline{\Delta}_{11}}{\underline{\Delta}} \cdot \underline{U}_1 + \frac{\underline{\Delta}_{12}}{\underline{\Delta}} \cdot \underline{U}_2 \\ I_2 = -\frac{\underline{\Delta}_{21}}{\underline{\Delta}} \cdot \underline{U}_1 - \frac{\underline{\Delta}_{22}}{\underline{\Delta}} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \quad (5.49)$$

Coeficienții acestor ecuații au valori complexe și dimensiunea unor admitanțe, așa încât se pot face următoarele notații:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{\Delta}_{11}}{\underline{\Delta}} &= \underline{Y}_{11} & \frac{\underline{\Delta}_{12}}{\underline{\Delta}} &= \underline{Y}_{12} \\ -\frac{\underline{\Delta}_{21}}{\underline{\Delta}} &= \underline{Y}_{21} & -\frac{\underline{\Delta}_{22}}{\underline{\Delta}} &= \underline{Y}_{22} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Cu aceste notații, curenții celor două porți ale cuadripolului iau forma:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \quad (5.51)$$

Sistemul obținut reprezintă *ecuațiile cuadripolului în funcție de parametrii admitanță*. Aceste ecuații pot fi scrise și matricial sub forma:

$$[\underline{I}] = [\underline{Y}] \cdot [\underline{U}] \quad (5.52)$$

în care:

$$[\underline{I}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad [\underline{U}] = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad [\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Sistemul ecuațiilor cuadripolului în raport cu parametrii admitanță se rezolvă funcție de tensiunile celor două porți ale căror tensiuni sunt considerate necunoscute.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \frac{1}{\underline{\Delta Y}} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 & \underline{Y}_{12} \\ \underline{I}_2 & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{\Delta Y}} \cdot \underline{I}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{\Delta Y}} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \frac{1}{\underline{\Delta Y}} \cdot \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{I}_1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{I}_2 \end{vmatrix} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{\Delta Y}} \cdot \underline{I}_1 - \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{\Delta Y}} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.54)$$

unde s-a notat:

$$\Delta \underline{Y} = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} \quad (5.55)$$

Coeficienții curenților din sistemul anterior au dimensiunea unor impedanțe și se notează ca atare:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta \underline{Y}} & \underline{Z}_{12} &= -\frac{\underline{Y}_{12}}{\Delta \underline{Y}} \\ \underline{Z}_{21} &= -\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta \underline{Y}} & \underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta \underline{Y}} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Cu aceste notații sistemul devine:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.57)$$

Sistemul obținut reprezintă *ecuațiile cuadripolului funcție de parametrii impedanță*. Acesta poate fi scris sub formă matricială:

$$[\underline{U}] = [\underline{Z}] \cdot [\underline{I}] \quad (5.58)$$

în care

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Pentru determinarea ecuațiilor fundamentale ale cuadripolului, se rezolvă sistemul ecuațiilor funcție de parametrii impedanță în raport cu tensiunea și curentul la poarta de intrare. Se obțin astfel valorile acestor semnale de forma:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2) \\ \underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \cdot \underline{U}_2 + \left(-\frac{\underline{Z}_{11} \cdot \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} + \underline{Z}_{12} \right) \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.60)$$

în care se notează cu \underline{A}_{11} , \underline{A}_{12} , \underline{A}_{21} , \underline{A}_{22} parametrii fundamentali ai cuadripolului, ale căror valori sunt:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \underline{A}_{12} &= \frac{1}{\underline{Z}_{21}} \\ \underline{A}_{21} &= \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} & \underline{A}_{22} &= -\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Ecuțiile fundamentale ale cuadripolului vor avea forma:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.62)$$

Și acest sistem poate fi scris matricial în funcție de matricile semnalelor de intrare, de ieșire și a matricei parametrilor fundamentali:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

5.5.2. Semnificația fizică și determinarea experimentală a parametrilor cuadripolului

Deoarece doar trei din cei patru parametri ce caracterizează funcționarea unui cuadripol sunt independenți rezultă că sunt necesare trei încercări experimentale pentru determinarea lor.

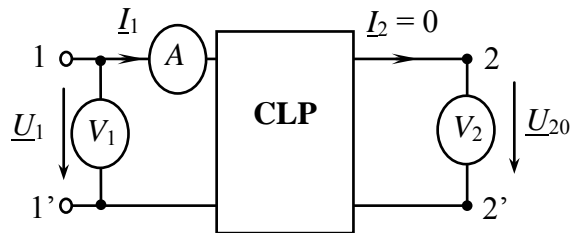


Fig. 5.13

Acestea sunt:

- o încercare de funcționare în gol a cuadripolului alimentat în sens direct
- o încercare de funcționare în scurtcircuit a cuadripolului alimentat în sens direct
- o încercare de funcționare în gol sau în scurtcircuit a cuadripolului alimentat în sens invers.

Se consideră un cuadripol liniar pasiv și reciproc alimentat direct și având poarta de ieșire în gol (fig.5.13).

Se consideră ecuațiile cuadripolului funcție de parametrii impedanță cărora li se adaugă condiția de funcționare cu poarta de ieșire în gol:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_2 = 0 \end{cases} \quad (5.64)$$

Prin urmare ecuațiile devin:

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_{10} \\ \underline{U}_{20} = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_{10} \end{cases} \quad (5.65)$$

de unde se pot determina:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} \quad (5.66)$$

care reprezintă impedanța echivalentă la intrarea cuadripolului la mers în gol,

$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{I}_{10}} \quad (5.67)$$

care reprezintă impedanța de transfer între poarta de ieșire și cea de intrare la mers în gol.

Dacă pentru același cuadripol se consideră ecuațiile funcție de parametrii fundamentali:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.68)$$

căroră li se adaugă aceeași condiție de funcționare cu poarta de ieșire în gol, se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_{20} \\ \underline{I}_{10} = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_{20} \end{cases} \quad (5.69)$$

din care rezultă:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}} \quad (5.70)$$

parametru adimensional având semnificația raportului de transformare între tensiunea de intrare și cea de ieșire la mers în gol,

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{20}} \quad (5.71)$$

are dimensiunea unei admitanțe, numită admitanța de transfer între poarta de intrare și cea de ieșire la mers în gol.

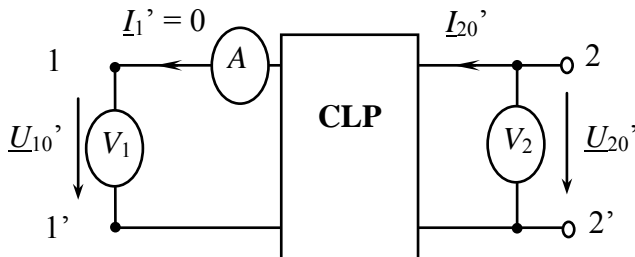


Fig. 5.14

Pentru cuadripolul alimentat invers și având poarta de ieșire în gol (fig.5.14) se pornește de la ecuațiile scrise funcție de parametrii fundamentali.

$$\begin{cases} \underline{U}'_2 = \underline{A}_{22} \cdot \underline{U}'_1 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}'_1 + \underline{A}_{11} \cdot \underline{I}'_1 \end{cases} \quad (5.72)$$

Înlocuind în acestea condiția de funcționare în gol, $\underline{I}'_1 = 0$, se obține:

$$\begin{cases} \underline{U}'_{20} = \underline{A}_{22} \cdot \underline{U}'_{10} \\ \underline{I}'_{20} = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}'_{10} \end{cases} \quad (5.73)$$

deci:

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{U}'_{20}}{\underline{U}'_{10}}, \quad (5.74)$$

parametru care are semnificația raportului de transformare a tensiunilor la gol la alimentare inversă a cuadripolului.

Din condiția de reciprocitate, care se presupune că este îndeplinită pentru cuadripolul analizat, poate fi determinat cel de al patrulea parametru fundamental funcție de ceilalți trei determinați anterior:

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} \quad (5.75)$$

Se consideră un cuadripol linear pasiv și reciproc alimentat în sens direct și cu poarta de ieșire în scurtcircuit (fig.5.15).

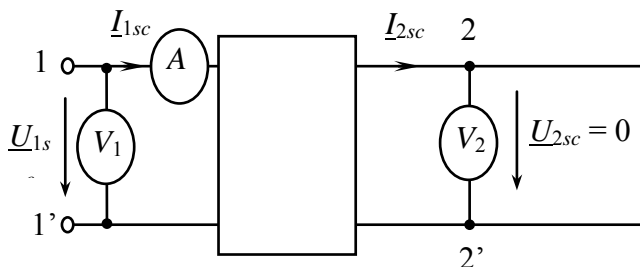


Fig. 5.15

Se consideră ecuațiile cuadripolului funcție de parametrii admitanță:

$$\begin{cases} I_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ I_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \quad (5.76)$$

căroră li se adaugă condiția de funcționare cu poarta de ieșire în scurtcircuit:

$$\underline{U}_2 = 0. \quad (5.77)$$

Sistemul anterior devine:

$$\begin{cases} I_{1sc} = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_{1sc} \\ I_{2sc} = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_{1sc} \end{cases} \quad (5.78)$$

de unde se obțin:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{I_{1sc}}{\underline{U}_{1sc}} \quad (5.79)$$

admitanța la scurtcircuit la poarta de intrare

$$\underline{Y}_{21} = \frac{I_{2sc}}{\underline{U}_{1sc}} \quad (5.81)$$

admitanța de transfer între poarta de ieșire și poarta de intrare a cuadripolului scurtcircuitat

Dacă se consideră ecuațiile fundamentale:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot I_2 \\ I_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot I_2 \end{cases} \quad (5.82)$$

alături de condiția de funcționare în scurtcircuit : $\underline{U}_2 = 0$, se obține sistemul:

$$\begin{cases} \underline{U}_{1sc} = \underline{A}_{12} \cdot I_{2sc} \\ I_{1sc} = \underline{A}_{22} \cdot I_{2sc} \end{cases} \quad (5.83)$$

de unde:

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{I_{2sc}} \quad (5.84)$$

parametru având dimensiunea unei impedanțe, numită impedanța de transfer între poarta de intrare și cea de ieșire la scurtcircuit,

$$\underline{A}_{22} = \frac{I_{1sc}}{I_{2sc}} \quad (5.85)$$

parametru adimensional semnificând raportul de transformare a curenților de scurtcircuit.

5.5.3. Sisteme de parametri ai cuadripolului

Un ansamblu de mărimi care determină în mod univoc comportarea cuadripolului reprezintă un sistem de parametri independenți ai acestuia. În mod evident, cele patru constante care intervin în fiecare din sistemele de ecuații prezentate reprezintă sisteme de parametri independenți ai cuadripolului. Aceste constante nu sunt însă singurii parametri care depind exclusiv de structura interioară a cuadripolului. Alegerea parametrilor independenți ai unui cuadripol este o problemă complexă care trebuie analizată de la caz la caz, deoarece nu există un sistem unic de parametri independenți care să fie avantajos în toate situațiile.

O clasificare mai generală a principalilor parametri ai unui cuadripol se poate face pe baza regimurilor folosite la definirea, respectiv determinarea lor. Din acest punct de vedere se deosebesc:

- - parametri definiți pe baza regimurilor de funcționare în gol și în scurtcircuit a cuadripolului;
- parametri definiți pe baza existenței unui anumit raport între tensiunile de la cele două perechi de borne ale cuadripolului;
- - parametri definiți pe baza existenței unor anumite relații de legătură între impedanțele de intrare și de ieșire ale cuadripolului.

Prima categorie o constituie tocmai sistemele de parametri \underline{A} , \underline{Z} , \underline{Y} . Parametrii din a doua categorie sunt introduși prin alimentarea cuadripolului pe la ambele capete în condiții particulare. Acești parametri sunt admitanțele echivalente care rezultă la cele două porți, atunci când cuadripolul care se

studiază este presupus alimentat pe la ambele capete cu tensiuni egale, în fază și în opoziție (regim de încercare). Într-un caz mai general se poate considera regimul de alimentare al cuadripolului pe la ambele capete tot cu tensiuni în fază și în opoziție dar de valori diferite. În cea de a treia categorie sunt cuprinși parametri iterativi și parametrii caracteristici, la care ne vom referi în continuare.

5.5.3.1. Parametri iterativi

Se consideră un lanț format dintr-un număr teoretic infinit de cuadripoli identici, în general neregiproci și nesimetrice, astfel dispuși încât perechile de borne necorespondente să fie legate împreună. Cele două posibilități sunt indicate în fig.5.16. Impedanța de intrare a lanțului de cuadripoli privit dinspre bornele de alimentare 1-1' (fig.5.16.a) se numește *impedanță iterativă directă*, Z_{1i} . Dacă se consideră lanțul de cuadripoli alimentat în sens invers (fig.5.16.b), impedanța de intrare față de bornele 2-2' se numește *impedanță iterativă inversă*, Z_{2i} . Se poate observa că în cazul unui lanț (teoretic) infinit de cuadripoli, impedanța de intrare este independentă de impedanța receptorului, presupus conectat la capătul lanțului. Deci această mărime depinde numai de structura internă a cuadripolilor din lanț, constituind un parametru pentru cuadripolii componenți.

Impedanțele iterative se pot defini și pentru un singur cuadripol. Ținând seama de faptul că impedanța de intrare a primului cuadripol nu diferă de impedanța de intrare a celui de al doilea cuadripol din lanț, deoarece și față de acesta lanțul se poate considera format dintr-un număr infinit de cuadripoli, impedanțele iterative se definesc pe baza condiției de egalitate a impedanțelor de intrare și de ieșire ale cuadripolului (fig.5.17).

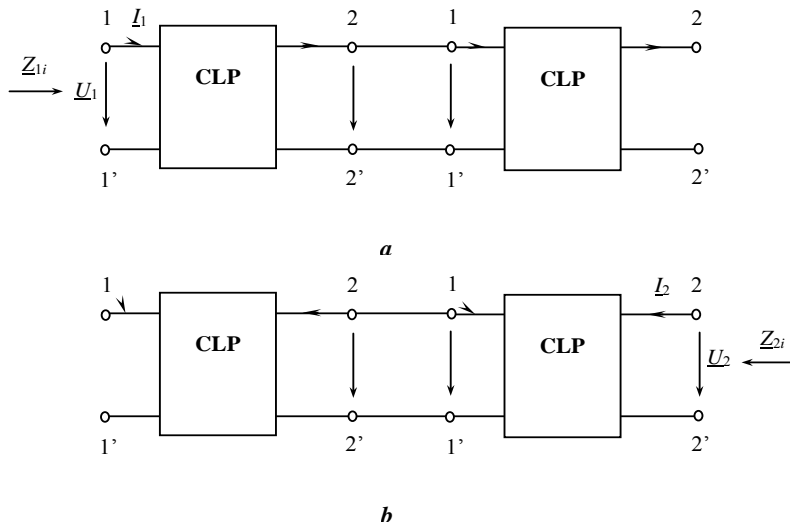


Fig. 5.16

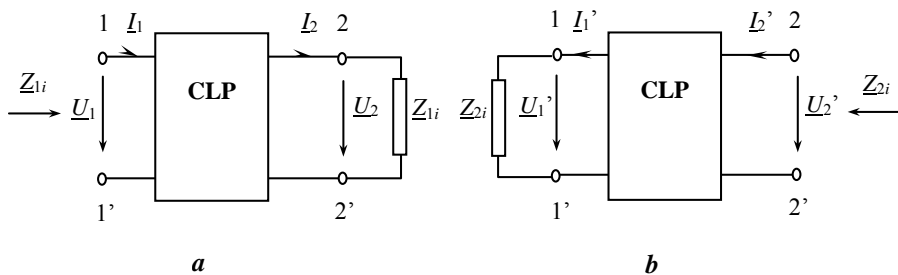


Fig. 5.17

Dacă cuadripolul este alimentat la poarta de intrare rezultă impedanța iterativă \underline{Z}_{1i} , iar dacă cuadripolul este alimentat la poarta de ieșire se obține impedanța iterativă \underline{Z}_{2i} .

Pentru un cuadripol impedanțele iterative se definesc din condițiile:

$$\text{pentru } \underline{Z} = \frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_{1i} \quad \underline{Z}_{1\text{intr}} = \frac{U_1}{I_1} = \underline{Z}_{1i} \quad (5.86)$$

$$\text{pentru } \underline{Z} = \frac{U_1'}{I_1'} = \underline{Z}_{2i} \quad \underline{Z}_{2\text{intr}} = \frac{U_2'}{I_2'} = \underline{Z}_{2i} \quad (5.87)$$

Pe baza acestor condiții se pot obține expresiile impedanțelor iterative în funcție de diferitele constante ale cuadripolului.

Rapoartele de transformare ale tensiunilor, curenților sau puterilor (sau inversele a acestor rapoarte), pe ntru un c uadripol închis pe i mpedanța iterativă sunt de asemenea parametri ai cuadripolului. În teoria cuadripolului se folosesc mai frecvent logaritmi naturali ai inverselor acestor rapoarte. Folosirea logaritmilor naturali este justificată de faptul că duce la introducerea funcțiilor hiperbolice, cu ajutorul cărora diferitele expresii se simplifică. Parametrii care rezultă se numesc *constante de transfer* sau *constante de propagare*.

5.5.3.2. Parametri caracteristici

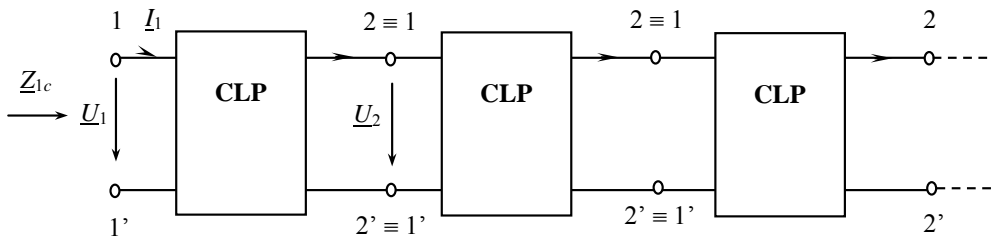


Fig. 5.18

Se presupune un lanț format dintr-un număr infinit de marea de cuadripoli nesimetrice și identici, astfel dispuși încât perechile de borne corespondente să fie legate împreună. (fig.5.18).

În această dispunere, fiecare cuadripol reprezintă imaginea în oglindă a cuadripolului alăturat, față de bornele comune. În acest caz, impedanțele de intrare a primului cuadripol și a celui de al doilea cuadripol din lanțul infinit nu mai sunt egale. Impedanța de intrare \underline{Z}_{1c} a lanțului privit dinspre bornele 1-1' se numește *impedanță caracteristică directă*, iar impedanța de intrare \underline{Z}_{2c} față de bornele 2-2' se numește *impedanță caracteristică inversă*.

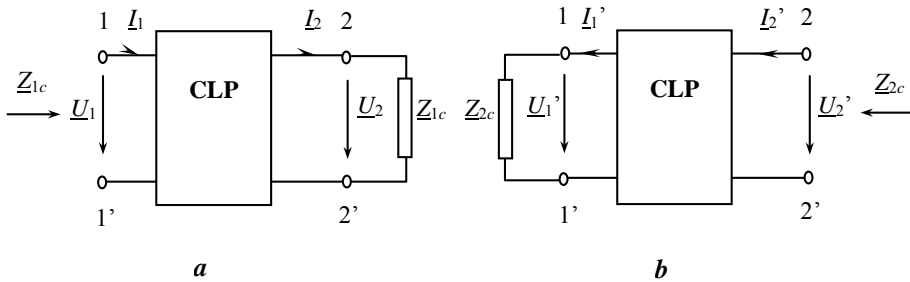


Fig. 5.19

Impedanțele caracteristice se pot defini și pentru un singur cuadripol (fig.5.19). Ele reprezintă o pereche de impedanțe \underline{Z}_{1c} și \underline{Z}_{2c} care să satisfacă următoarele condiții:

- dacă impedanța \underline{Z}_{2c} este conectată la bornele 2-2' a celui de al doilea cuadripolului, impedanța de intrare față de bornele de alimentare 1-1' este \underline{Z}_{1c} , iar
- dacă impedanța \underline{Z}_{1c} este conectată la bornele 1-1', impedanța de intrare față de bornele de alimentare 2-2' este \underline{Z}_{2c} .

Relațiile de definiție pentru impedanțele caracteristice sunt:

$$\text{pentru } \underline{Z} = \frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_{2c} \quad \underline{Z}_{1\text{intr}} = \frac{U_1}{I_1} = \underline{Z}_{1c} \quad (5.88)$$

$$\text{pentru } \underline{Z} = \frac{U'_1}{I'_1} = \underline{Z}_{1c} \quad \underline{Z}_{2\text{intr}} = \frac{U'_2}{I'_2} = \underline{Z}_{2c} \quad (5.89)$$

În literatura de specialitate impedanțele caracteristice se mai numesc și *impedanțe imagini*.

5.5.3.3. Constanta de transfer. Constanta de atenuare. Constanta de fază

Corespunzător impedanțelor caracteristice se definesc *constantele de transfer directă și inversă* \underline{g}_{1c} și \underline{g}_{2c} . Acestea se definesc prin relațiile:

$$\frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2} = e^{2 \cdot \underline{g}_{1c}} \quad (5.90)$$

$$\frac{\underline{U}'_2 \cdot \underline{I}'_2}{\underline{U}'_1 \cdot \underline{I}'_1} = e^{2 \cdot \underline{g}_{2c}}$$

În cazul cuadripolului nerez reciproc parametrii independenți sunt \underline{Z}_{1c} , \underline{Z}_{2c} , \underline{g}_{1c} și \underline{g}_{2c} . Dacă cuadripolul este reciproc constantele de transfer sunt egale $\underline{g}_{1c} = \underline{g}_{2c} = \underline{g}_c$, astfel că sistemul de parametri caracteristici este alcătuit din trei mărimi: \underline{Z}_{1c} , \underline{Z}_{2c} și \underline{g}_c . Dacă cuadripolul este simetric cele două impedanțe caracteristice sunt egale $\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$. Un cuadripol reciproc și simetric este caracterizat deci numai prin parametrii \underline{Z}_c și \underline{g}_c . Se poate observa că la cuadripolii simetrici impedanțele caracteristice și iterative coincid. Impedanța caracteristică reprezintă în acest caz acea impedanță \underline{Z}_c care conectată la bornele de ieșire ale cuadripolului determină o impedanță de intrare egală cu \underline{Z}_c .

Elementele diferitelor matrice ce caracterizează cuadripolul se pot exprima în funcție de parametri caracteristici. Pentru cazul particular al unui cuadripol reciproc și simetric se vor determina în continuare parametrii fundamentali în funcție de cei caracteristici. Din ecuațiile cuadripolului funcție de parametrii fundamentali, impedanța de intrare se exprimă:

$$\underline{Z}_{\text{intr}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{11} \cdot \underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}} \quad (5.91)$$

Ținând seama de faptul că dacă cuadripolul este închis pe impedanța caracteristică $\frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_c$ (cuadripol adaptat) rezultă $\underline{Z}_{intr} = \underline{Z}_c$, deci rezultă:

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_c}}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_c}} \quad (5.92)$$

Ecuția (5.92) este o ecuație de ordin doi în raport cu \underline{Z}_c care se rezolvă ținând seama și de condiția de simetrie a cuadripolului rezultând:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} \quad (5.93)$$

Împărțind cele două ecuații ale cuadripolului funcție de parametrii fundamentali prima la \underline{U}_2 iar a doua la \underline{I}_2 se obțin expresiile:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_c} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} \quad (5.94)$$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A}_{21} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} + \underline{A}_{11} = \underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_c + \underline{A}_{11} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}$$

Se poate deci scrie:

$$e^{g_c} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} \quad (5.95)$$

respectiv

$$\underline{g}_c = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}) \quad (5.96)$$

Este evidentă și relația:

$$e^{-g_c} = \underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} \quad (5.97)$$

pentru obținerea căreia s-a ținut seama de condiția de reciprocitate a cuadripolului $\det[\underline{A}] = 1$.

Prin adunarea respectiv scăderea relațiilor (2.95) și (2.97) se obține:

$$\underline{A}_{11} = \frac{e^{\underline{g}_c} + e^{-\underline{g}_c}}{2} = ch \underline{g}_c \quad (5.98)$$

$$\sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} = sh \underline{g}_c \quad (5.99)$$

Parametrii fundamentali pot fi exprimați funcție de impedanța caracteristică și constanta de transfer sub forma:

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \cdot sh \underline{g}_c \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_c} \cdot sh \underline{g}_c \quad (5.100)$$

Matricea parametrilor fundamentali poate fi scrisă sub forma:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} ch \underline{g}_c & \underline{Z}_c \cdot sh \underline{g}_c \\ \frac{1}{\underline{Z}_c} \cdot sh \underline{g}_c & ch \underline{g}_c \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

Constanta de transfer fiind o mărime complexă poate fi scrisă sub forma

$$\underline{g}_c = \alpha + j \cdot \beta \quad (5.102)$$

în care:

- α este constanta de atenuare
- β este constanta de fază.

Considerând c uadripolul a limentat în regim permanent sinusoidal și tensiunile la cele două porți ale sale exprimate în formă exponențială,

$$\underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{j \cdot \gamma_{u1}} \quad \underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j \cdot \gamma_{u2}} \quad (5.103)$$

pe baza relației (5.103) se poate scrie:

$$e^{\underline{g}_c} = \frac{U_1}{U_2} \cdot e^{j(\gamma_{u1} - \gamma_{u2})} \quad (5.104)$$

respectiv

$$\underline{g}_c = \ln \frac{U_1}{U_2} + j \cdot (\gamma_{u1} - \gamma_{u2}) \quad (5.105)$$

deci:

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} \quad (5.106)$$

$$\beta = \gamma_{u1} - \gamma_{u2}$$

Tot din relația (5.103) tensiunea la ieșirea cuadripolului poate fi exprimată ca:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{e^{\frac{g}{c}}} = U_1 \cdot e^{j \cdot \gamma_{u1}} \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{-j \cdot \beta} = U_1 \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{j \cdot (\gamma_{u1} - \beta)} \quad (5.107)$$

Comparând această expresie cu forma generală exponențială a tensiunii la ieșirea cuadripolului rezultă:

$$U_2 = U_1 \cdot e^{-\alpha} < U_1 \quad (5.108)$$

$$\gamma_{u2} = \gamma_{u1} - \beta$$

adică, de-a lungul cuadripolului tensiunea de alimentare își diminuează amplitudinea, iar tensiunea de ieșire din cuadripol este în întârziere de fază față de tensiunea de intrare cu β .

Dacă se consideră un lanț de n cuadripoli (reciproci și simetrici) identici închis pe impedanța caracteristică \underline{Z}_c , impedanța caracteristică și constanta de transfer a întregului lanț se exprimă funcție de parametrii caracteristici ai unui cuadripol component. Matricea parametrilor fundamentali corespunzătoare lanțului de cuadripoli considerat este:

$$[A] = \begin{bmatrix} ch n \cdot \underline{g}_c & \underline{Z}_c \cdot sh n \cdot \underline{g}_c \\ \frac{1}{\underline{Z}_c} \cdot sh n \cdot \underline{g}_c & ch n \cdot \underline{g}_c \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

5.6. Scheme echivalente ale cuadripolilor

Plecând de la ecuațiile cuadripolului se pot stabili diferite scheme echivalente ale acestuia. Deoarece în ecuațiile cuadripolilor reciproci intervin patru parametri din care doar trei sunt independenți, schemele

echivalente vor conține trei elemente distincte conectate cel mai adesea în **T** sau **Π**.

5.6.1. Schema echivalentă în T

Se consideră un cuadripol reprezentat sub forma unei scheme echivalente în T (fig.5.20), ai cărei parametri sunt \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 și \underline{Z} . Se analizează această schemă cu ajutorul teoremelor lui *Kirchhoff*, pe ntru de terminarea parametrilor schemei echivalente în funcție de parametrii fundamentali și invers. Elementele topologice ale schemei în T sunt:

$$r = 3, n = 2, b = 2.$$

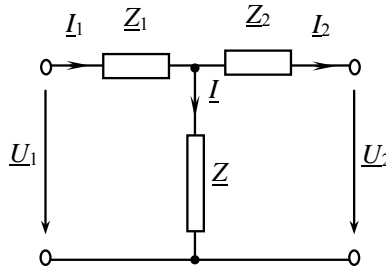


Fig. 5.20

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I \\ \underline{Z}_1 \cdot I_1 + \underline{Z}_2 I_2 + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0 \\ \underline{Z}_2 I_2 + \underline{U}_2 - \underline{Z} \cdot I = 0 \end{cases} \quad (5.110)$$

Rezolvând acest sistem în domeniul complex funcție de semnalele la poarta de intrare a cuadripolului \underline{U}_1 , \underline{I}_1 se obține:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Y}) \cdot \underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y}) \cdot I_2 \\ I_1 = \underline{Y} \cdot \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y}) \cdot I_2 \end{cases} \quad (5.111)$$

unde s-a notat cu \underline{Y} admitanța laturii transversale din schema echivalentă:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

Pentru ca schema în T să fie echivalentă cu schema generală a cuadripolului, acest sistem trebuie să fie echivalent cu ecuațiile cuadripolului funcție de parametrii fundamentali:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.112)$$

Prin identificarea membru cu membru a expresiilor tensiunii și curentului la poarta de intrare a cuadripolului se obțin parametrii fundamentali funcție de cei ai schemei echivalente în T:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Y} & \underline{A}_{12} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y} \\ \underline{A}_{21} &= \underline{Y} & \underline{A}_{22} &= 1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y} \end{aligned} \quad (5.113)$$

sau prin rezolvarea sistemului funcție de necunoscutele \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 și \underline{Z} se determină parametrii schemei echivalente în T funcție de cei fundamentali:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{A}_{21}} \quad (5.114)$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} \quad (5.115)$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} \quad (5.116)$$

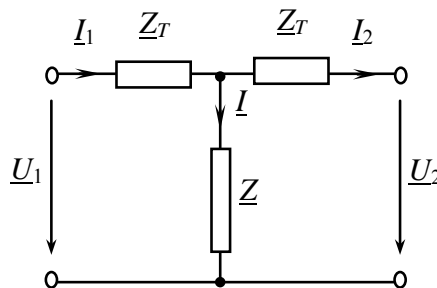


Fig. 5.21

Pornind de la condiția de simetrie ($\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$) se poate determina și structura cuadripolului în T simetric (fig.5.21), care va avea doar doi parametri independenți:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{A}_{21}} \tag{5.117}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_T$$

5.6.2. Schema echivalentă în Π

Se consideră un cuadripol reprezentat sub forma unei scheme echivalente în Π ai cărei parametri sunt: \underline{Z} impedanța longitudinală și \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 admitanțele laturilor transversale (fig.5.22).

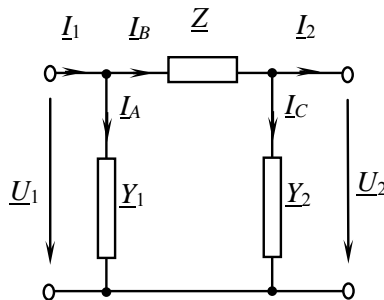


Fig. 5.22

Se analizează schema echivalentă în Π cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff în domeniul complex, pentru determinarea parametrilor schemei echivalente în funcție de parametrii fundamentali și invers.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_B \\ \underline{I}_B = \underline{I}_C + \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_A + \underline{I}_B \\ \underline{Z} \cdot \underline{I}_B + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_C - \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_A = 0 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_C \end{cases} \tag{5.118}$$

Prin rezolvarea sistemului considerând ca necunoscute semnificative la poarta de intrare a cuadripolului, se obține:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (1 + \underline{Z} \cdot \underline{Y}_2) \cdot \underline{U}_2 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z} \cdot \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2) \cdot \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z} \cdot \underline{Y}_1) \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.119)$$

Se compară expresiile tensiunii și curentului determinate cu ecuațiile cuadripolului funcție de parametrii fundamentali.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.120)$$

Prin identificarea termen cu termen a fiecăreia din cele două ecuații se determină valorile parametrilor fundamentali funcție de cei ai schemei echivalente în Π :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1 + \underline{Z} \cdot \underline{Y}_2 & \underline{A}_{12} &= \underline{Z} \\ \underline{A}_{21} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2 \cdot \underline{Z} & \underline{A}_{22} &= 1 + \underline{Z} \cdot \underline{Y}_1 \end{aligned} \quad (5.121)$$

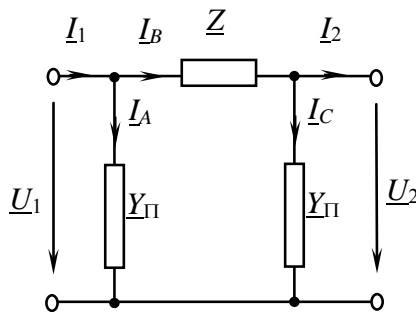


Fig. 5.23

Dacă sistemul obținut se rezolvă considerând ca necunoscute parametrii schemei echivalente în Π , rezultă:

$$\underline{Z} = \underline{A}_{12} \quad (5.122)$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{Z}} \\ \underline{Y}_2 &= \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{Z}} \end{aligned} \quad (5.123)$$

Condiția de simetrie $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ adăugată valorilor determinate a parametrilor cuadripolului arată că în cazul cuadripolului simetric doar doi parametri sunt independenți, deci schema echivalentă va conține doar două elemente distincte (fig.5.23):

$$\underline{Z} = \underline{A}_{12}, \quad \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{Z}}. \quad (5.124)$$

5.7. Interconectarea cuadripolilor

Doi sau mai mulți cuadripoli pot fi interconectați astfel încât gruparea lor să poată fi înlocuită printr-un cuadripol echivalent pentru care regimul de funcționare să nu se modifice.

Vom analiza, în cele ce urmează câteva conexiuni ale cuadripolilor.

5.7.1. Gruparea serie-serie

Se consideră doi cuadripoli liniari pasivi și reciproci, fiecare caracterizat prin parametrii impedanță. În cazul conectării în serie cuadripolii componenți au același curent de intrare și același curent de ieșire, iar tensiunile la borne se însumează (fig.5.23).

Fiecare din cei doi cuadripoli ai grupării poate fi caracterizat prin ecuațiile scrise funcție de parametrii impedanță:

$$\begin{cases} \underline{U}'_1 = \underline{Z}'_{11} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12} \cdot \underline{I}'_2 \\ \underline{U}'_2 = \underline{Z}'_{21} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22} \cdot \underline{I}'_2 \end{cases} \quad (5.125)$$

sau matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}'] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} \quad (5.126)$$

respectiv:

$$\begin{cases} \underline{U}'_1 = \underline{Z}'_{11} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12} \cdot \underline{I}'_2 \\ \underline{U}'_2 = \underline{Z}'_{21} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22} \cdot \underline{I}'_2 \end{cases} \quad (5.126)$$

sau matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}''] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} \quad (5.127)$$

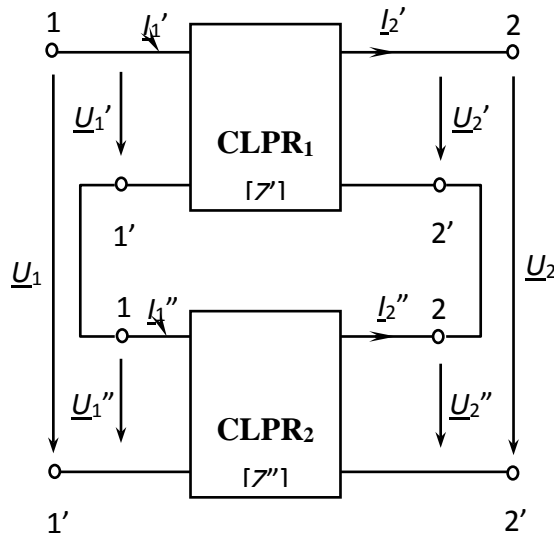


Fig. 5.24

Corespunzător grupării serie-serie tensiunea la bornele porților de intrare și ieșire ale cuadripolului echivalent se obține prin sumarea tensiunilor porților omologe ale cuadripolilor grupării, prin urmare:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1 \\ \underline{U}_2 = \underline{U}'_2 + \underline{U}''_2 \end{cases} \quad (5.128)$$

Înlocuind expresiile tensiunilor celor doi cuadripoli în această ultimă relație se poate scrie matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'_{11} + \underline{Z}''_{11} & \underline{Z}'_{12} + \underline{Z}''_{12} \\ \underline{Z}'_{21} + \underline{Z}''_{21} & \underline{Z}'_{22} + \underline{Z}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5.129)$$

Dacă se consideră că și cuadripolul echivalent grupării este caracterizat tot prin matricea parametrilor impedanță, atunci aceasta este:

$$[\underline{Z}] = [\underline{Z}'] + [\underline{Z}''] \quad (5.130)$$

Matricea impedanță a cuadripolului echivalent grupării serie-serie a doi sau mai mulți cuadripoli este egală cu suma matricelor impedanță ale cuadripolilor conexiunii.

5.7.2. Gruparea paralel-paralel

În cazul acestei conexiuni porțile omoloage ale cuadripolilor conectați sunt legate în paralel, deci tensiunea este aceeași pentru porțile de intrare ale cuadripolilor conexiunii, iar porțile de ieșire au de asemenea aceeași tensiune (fig.5.25). În acest caz este avantajos să caracterizăm cuadripolii prin matricea admitanță.

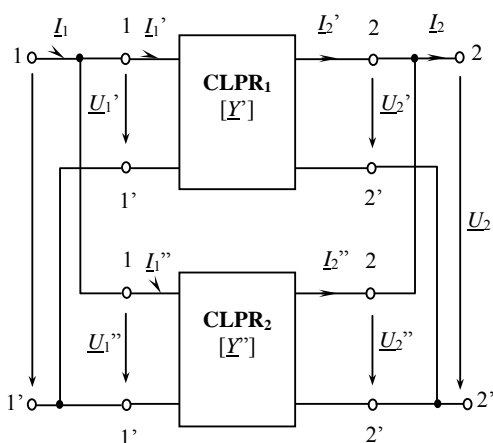


Fig. 5.25

Considerând cazul a doi cuadripoli, pentru fiecare dintre aceștia se vor scrie ecuații funcție de parametri admitanță, sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}'] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}''] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} \quad (5.132)$$

La fiecare dintre cele două perechi de borne curenții cuadripolilor componenți se sumează, deci se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} \quad (5.133)$$

Pe baza relațiilor anterioare se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

sau efectuând operațiile:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (5.135)$$

Dacă se consideră că și cuadripolul echivalent este caracterizat prin matricea admitanță, respectiv ecuațiile corespunzătoare acestuia au forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (5.136)$$

atunci, din compararea ultimelor două relații rezultă:

$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}'] + [\underline{Y}''] \quad (5.137)$$

adică, în cazul cuadripolilor conectați paralel-paralel matricea admitanță a cuadripolului echivalent este egală cu suma matricelor admitanță ale cuadripolilor componenți.

5.7.3. Conectarea în lanț (cascadă)

Doi sau mai mulți cuadripoli sunt conectați în lanț dacă poarta de ieșire a unui cuadripol este legată cu poarta de intrare a

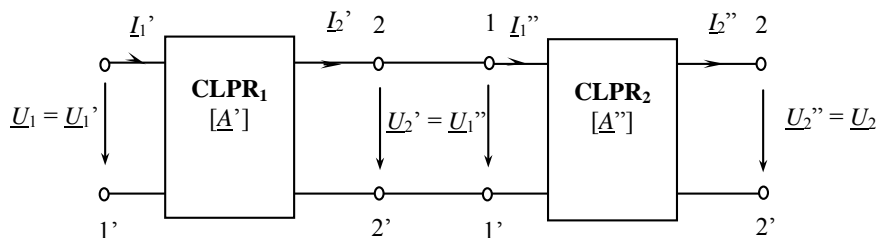


Fig. 5.26

cuadripolului următor (fig.5.26). Pentru studiul acestei conexiuni este util să se folosească ecuațiile cuadripolului funcție de parametrii fundamentali, în care mărimile de intrare sunt exprimate funcție de cele de ieșire.

Se consideră doi cuadripoli conectați în lanț, pentru care ecuațiile funcție de parametrii fundamentali se scriu sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}'' & \underline{A}_{12}'' \\ \underline{A}_{21}'' & \underline{A}_{22}'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2'' \\ \underline{I}_2'' \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

Se pune problema determinării elementelor matricei parametrilor fundamentali corespunzătoare cuadripolului echivalent grupării în lanț, funcție de elementele matricelor parametrilor fundamentali ai cuadripolilor

componenți. Semnalele de ieșire ai primului cuadripol fiind aceleași cu semnalele de intrare ale celui de al doilea cuadripol ($\underline{U}'_2 = \underline{U}''_1$ și $\underline{I}'_2 = \underline{I}''_1$), din cele două relații anterioare se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

Deoarece ecuația funcție de parametrii fundamentali ai cuadripolului echivalent este:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

rezultă că:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{bmatrix} \quad (5.142)$$

sau

$$[\underline{A}] = [\underline{A}'] \cdot [\underline{A}''] \quad (5.143)$$

În cazul conexiunii în lanț a n cuadripoli, se obține în mod analog:

$$[\underline{A}] = \prod_{k=1}^n \underline{A}_k \quad (5.144)$$

Matricea fundamentală a cuadripolului echivalent grupării în lanț este egală cu produsul matricelor fundamentale ale cuadripolilor componenți. La efectuarea produsului dintre matricele cuadripolilor componenți, acestea trebuie să fie introduse în aceeași ordine în care se succed și cuadripolii componenți. Produsul matricelor nefiind comutativ, elementele matricei produs depind de succesiunea factorilor.

5.8. Filtre de frecvență

Circuite simple pentru selectarea frecvențelor

Filtre Trece-Jos sunt utilizate pentru a permite trecerea semnalelor (undelor) de joasă frecvență și atenuează undele sinusoidale de frecvențe înalte. Frecvența de tăiere ω_c este utilizată pentru a face diferența între banda de trecere ($\omega_c < \omega$) și banda de oprire ($\omega_c > \omega$). Un exemplu elementar de două filtre trece jos pasive este prezentat mai jos.

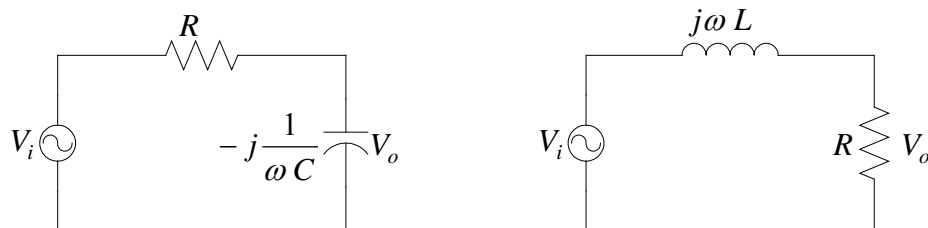


Fig. 5.27

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (1)$$

$$\frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{1}{[1 + (\omega RC)^2]^{1/2}} \quad (2)$$

$$\theta = -\text{tg}^{-1} \omega RC \quad (3)$$

pentru frecvența de tăiere Castiglione este $\omega_c = 1/\sqrt{2}$. Substituind în (2) rezulta

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (4)$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

$$\frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{1}{[1 + (\omega \frac{L}{R})^2]^{1/2}}$$

$$\theta = -\text{tg}^{-1} \omega \frac{L}{R}$$

Din (3), se observa că unghiul de fază pentru frecvența de tăiere este -45°

Raportul $\frac{V_o}{V_i}$ se notează cu $H(j\omega)$, și este denumit *Funcția de transfer a*

filtrului pentru răspunsul la frecvență. Reprezentarea câștigului în funcție de frecvență și unghiul de fază în funcție de frecvență, cunoscute ca răspunsul la frecvență este așa cum se arată în figură.

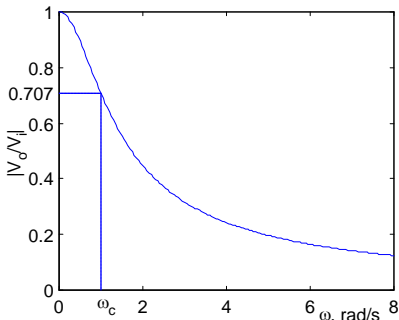


Fig. 5.28

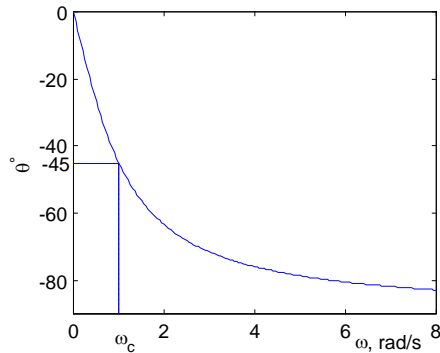


Fig. 5.29

Filtre Trece-Sus este utilizat pentru a stopa (bloca) semnalele sinusoidale de joasă frecvență și a lăsa să treacă semnalele sinusoidale de înaltă. *Pulsația de tăiere* ω_c este utilizată pentru a se face distincția între banda de blocare ($\omega_c < \omega$) și banda de trecere ($\omega_c > \omega$). Un exemplu elementar de două filtre trece-sus pasive este prezentat în figura de mai jos.

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\omega RC}{\omega RC - j1} \quad (5)$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\omega \frac{L}{R}}{\omega \frac{L}{R} - j1}$$

$$\frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{\omega RC}{\left[(\omega RC)^2 + 1 \right]^{1/2}} \quad (6)$$

$$\frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{\omega \frac{L}{R}}{\left[\left(\omega \frac{L}{R} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC} \quad (7)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R}{\omega L}$$

Pentru frecvența de tăiere, Castigul = $1/\sqrt{2}$. Substituitind in (6) rezulta

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$\omega_c = \frac{R}{L}$$

Considerand (7), unghiul de faza pentru frecvența de tăiere 45°

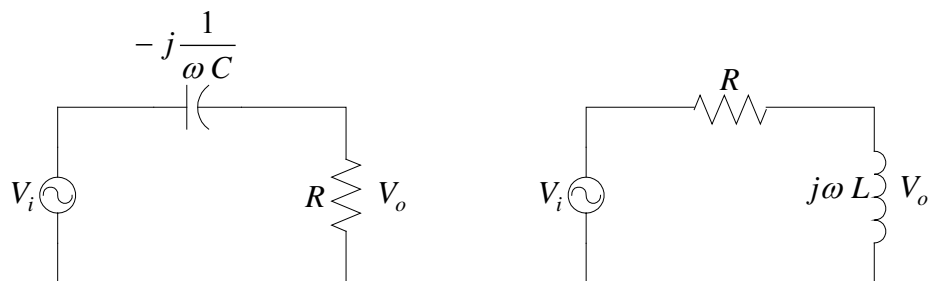


Fig. 5.30

Câștigul în funcție de frecvență, respectiv unghiul de fază în funcție de frecvență cunoscute ca *răspuns în frecvență* este reprezentat în figură.

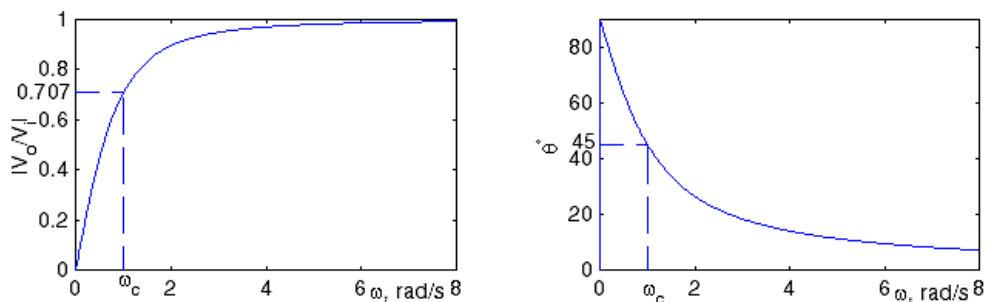


Fig. 5.31

Filtre Trece-Bandă

(a) Rezonanța paralel pentru circuite RLC

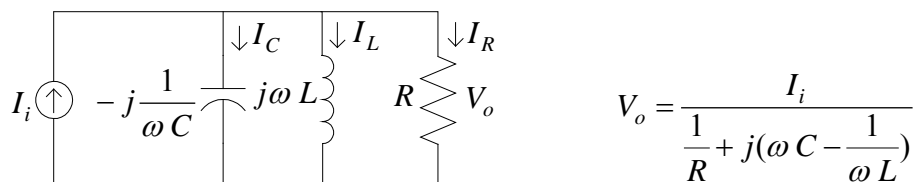


Fig. 5.32

Un circuit electric este în rezonanță atunci când tensiunea la bornele de intrare și curentul prin circuit sunt în fază.

Admitanța circuitului este $Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$. La rezonanță Y este pur conductivă și $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$, și $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Admitanța circuitului este minimă sau impedanța circuitului la rezonanță, dată de $Z(\omega_o) = R$, este maximă. Astfel, tensiunea la ieșire pentru rezonanță este maximă și este dată de $V_o(\omega_o) = RI_i$

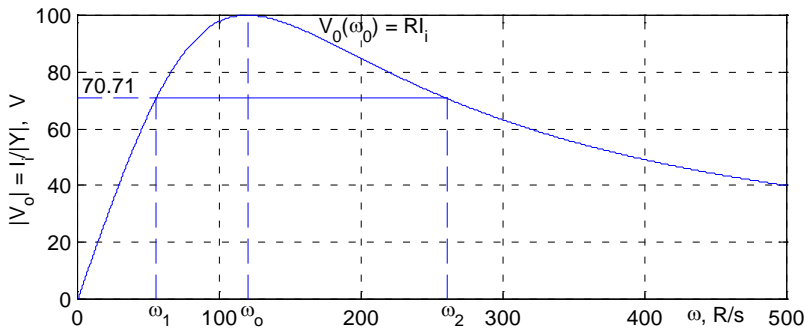


Fig. 5.33

Pulsațiile ω_1 și ω_2 pentru care puterea de ieșire scade la jumătate din valoarea sa pentru frecvența de rezonanță sunt numite *frecvențe pentru jumătate de putere* sau *frecvențe de tăiere*. Pentru aceste frecvențe denumite și *frecvențe de tăiere* sau *frecvențe de colț (unghiulare)*, tensiunea de ieșire este $|V_o(\omega_c)| = 0.707 |V_o(\omega_o)|$. Acest circuit care permite trecerea tuturor frecvențelor aparținând benzii de frecvențe ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) este denumit *filtru trece-bandă*. Circuitul, care funcționează în acest domeniu de frecvențe, este denumit circuit (filtru) *trece-bandă*.

$$\beta = \omega_2 - \omega_1$$

Frecvențele de tăiere sunt obținute din:

$$|V_o(\omega_c)| = \frac{I_i}{\left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} RI_i \quad (5.145)$$

Rezolvând ecuația obținem pentru ω

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC} \right)^2 + \frac{1}{LC}}, \text{ și } \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC} \right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (5.146)$$

Din relațiile de mai sus, se obține, $\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$, sau lățimea de bandă a circuitului este

$$\beta = \frac{1}{RC}$$

Frecvențele de tăiere pot fi scrise în funcție de ω_0 și β astfel:

$$\omega_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2} \right)^2 + \omega_o^2}, \text{ și } \omega_2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2} \right)^2 + \omega_o^2} \quad (5.147)$$

Din aceste relații rezultă că ω_o media geometrică a pulsațiilor ω_1 și ω_2 , i.e.,

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (5.148)$$

Deoarece β este invers proporțional cu R , i.e., dacă R se micșorează, rezultă o lățime de bandă mai mare (largă). Pulsația de rezonanță ($\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) este o funcție de L și C . Astfel, prin ajustarea inductanței L și a capacității C , se poate obține valoarea dorită a pulsației (frecvenței) de rezonanță C ; în timp ce prin ajustarea valorii rezistenței R este reglată lățimea benzii de trecere și înălțimea curbei de răspuns. Finețea (acuitatea) rezonanței este măsurată

cantitativ de *factorul de calitate* Q . Factorul de calitate este definit ca raportul dintre pulsația de rezonanță și lățimea benzii de trecere.

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} \quad (5.149)$$

Substituind pe $\beta = \frac{1}{RC}$ și $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ factorul de calitate poate fi exprimat

$$\text{ca } Q = \omega_o RC = \frac{R}{\omega_o L} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (5.150)$$

La rezonanță I_L și I_C au expresiile

$$I_L = \frac{V_o}{j\omega_o L} = -j \frac{V_o}{R/Q} = -jQI_i \text{ și } I_C = j\omega_o CV_o = j \frac{Q}{R} V_o = jQI_i \quad (5.151)$$

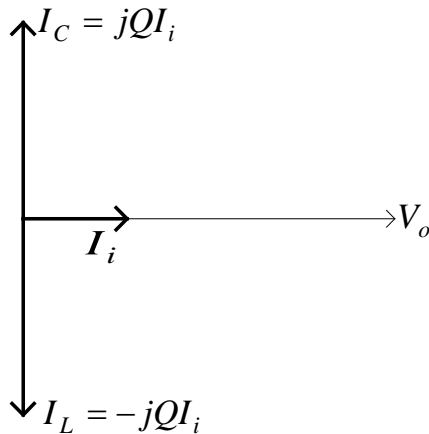


Fig. 5.34

La rezonanță, în funcție de valoarea factorului de calitate Q , I_L și I_C pot fi de câteva ori mai mari decât curentul de sarcină prin circuit (amplificarea curentului).

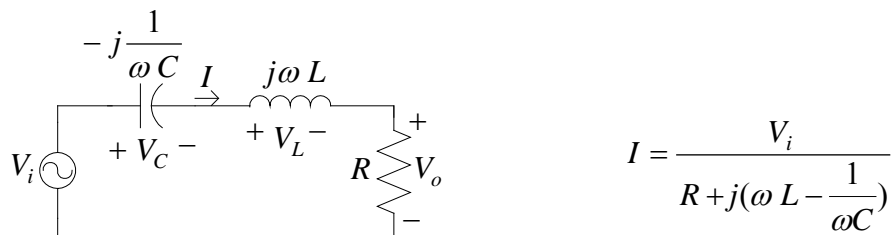
(b) Rezonanța în circuite RLC Serie

Fig. 5.35

Un circuit electric este în rezonanță atunci când tensiunea la bornele de intrare și curentul prin circuit sunt în fază.

Impedanța circuitului este $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$. La rezonanță Z este pur resistiv și $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, rezultând astfel $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Impedanța circuitului la rezonanță, dată de expresia $Z(\omega_o) = R$ este minimă, iar curentul prin circuit are valoare maximă. Astfel, tensiunea de ieșire la rezonanță este maximă și este dată de expresia $V_o(\omega_o) = RI(\omega_o)$.

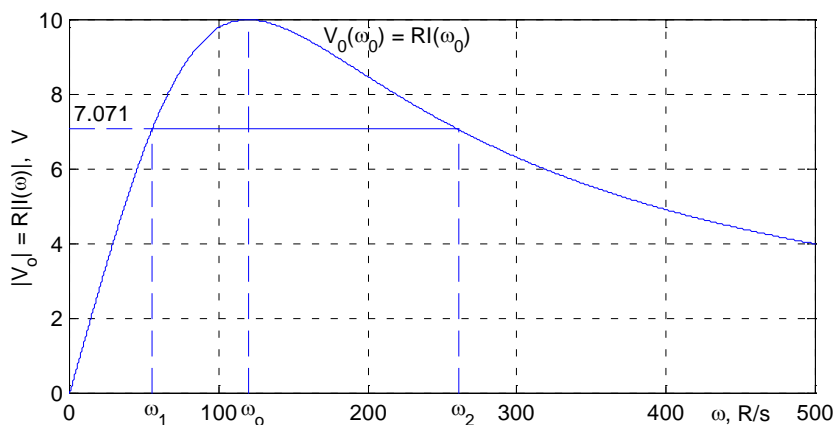


Fig. 5.36

Pulsațiile ω_1 și ω_2 pentru care puterea de ieșire scade la jumătate din valoarea sa pentru frecvența de rezonanță sunt numite *frecvențe pentru jumătate de putere* sau *frecvențe de tăiere*. Pentru aceste frecvențe denumite și *frecvențe de tăiere* sau *frecvențe de colț (unghiulare)*, tensiunea de ieșire este $|V_o(\omega_c)| = 0.707 |V_o(\omega_o)|$. Acest circuit care permite trecerea tuturor frecvențelor aparținând benzii de frecvențe ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) este denumit *filtru trece-bandă*. Circuitul, care funcționează în acest domeniu de frecvențe, este denumit circuit (filtru) *trece-bandă*.

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 \quad (5.152)$$

Frecvențele de tăiere sunt obținute din:

$$|V_o(\omega_c)| = R \frac{V_i}{\left[(R)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_i \quad (5.153)$$

Rezolvând ω se obține

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}, \text{ și } \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (5.154)$$

Din relația de mai sus, se obține, $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$, sau lățimea de bandă a circuitului este

$$\beta = \frac{R}{L}$$

Frecvențele de tăiere pot fi scrise în funcție de ω_o și β sunt:

$$\omega_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}, \text{ și } \omega_2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2} \quad (5.155)$$

Rezultă că ω_o este media geometrică a pulsațiilor ω_1 și ω_2 , i.e.,

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (5.156)$$

Se observă că β este proporțională cu R , i.e., cu cât rezistența este mai mare R lățimea de bandă este mai mare. Pulsăția de rezonanță ($\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) este o funcție care depinde de L și C . Astfel, ajustând L și C se obține frecvența de rezonanță dorită; iar prin ajustarea rezistenței R , se reglează lățimea benzii și înălțimea curbei de răspuns. Acuitatea (fînețea) rezonanței este măsurată cantitativ cu ajutorul *factorului de calitate* Q . Factorul de calitate este definit de raportul dintre pulsăția de rezonanță și lățimea benzii de trecere.

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} \quad (5.157)$$

Substituind $\beta = \frac{R}{L}$ și $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ *factorul de calitate* poate fi exprimat ca

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.158)$$

La rezonanță V_L și V_C sunt exprimate ca fiind egale cu

$$\underline{V}_L = j\omega_o L \underline{I}(\omega_o) = jQ \underline{V}_i$$

$$\underline{V}_C = -j \frac{1}{\omega_o C} \underline{I}(\omega_o) = -jQ \underline{V}_i$$

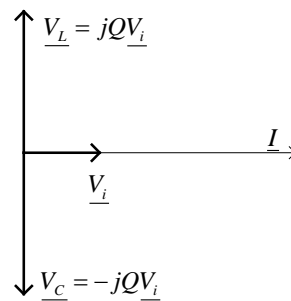


Fig 5.37

După cum se poate observa la rezonanță, în funcție de factorul Q , V_L și V_C poate fi de multe ori mai mare decât tensiunea de alimentare (amplificare de tensiune)

Pentru un circuit cu un factor de calitate foarte înaltă Q , frecvențele de colț pot fi approximate cu ajutorul expresiilor $\omega_1 = \omega_o - \frac{\beta}{2}$, și $\omega_2 = \omega_o + \frac{\beta}{2}$

Filtru Stop-Bandă

Un filtru Stop-Bandă este proiectat pentru a opri toate frecvențele aflate în banda de frecvențe (pulsatii) ($\omega_1 < \omega < \omega_2$). Pentru circuitul RLC serie se iau în considerație bornele de ieșire ale combinației L și C legate în serie.

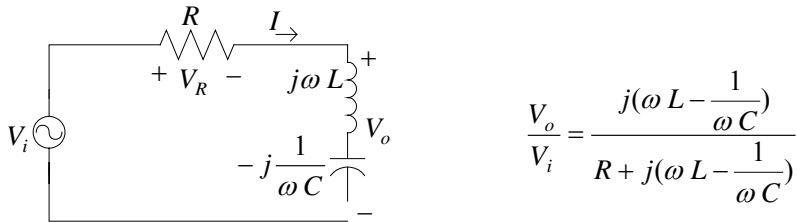


Fig. 5.38

Mărimea câștigului în tensiune este

$$\frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.159)$$

Pentru $\omega = 0$, inductorul se comportă ca un scurt-circuit, iar capacitatea se comportă ca un circuit deschis, $I = 0$ iar $V_o = V_i$, iar câștigul în tensiune este egal cu 1 (unitatea). Pentru $\omega = \infty$, inductorul se comportă ca un circuit deschis iar capacitatea se comportă ca un scurt-circuit, $I = 0$ și $V_o = V_i$, iar câștigul în tensiune este egal cu 1 (unitatea). La rezonanță Z este pur rezistiv și $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, astfel $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Valoarea câștigului în tensiune este zero, pentru ω_o .

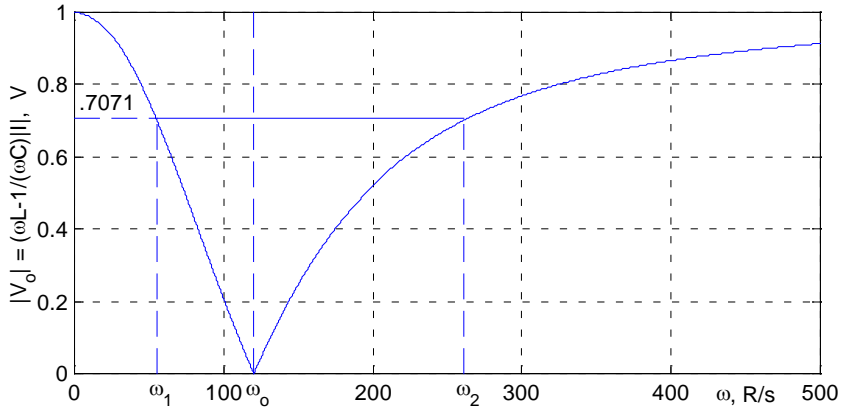


Fig. 5.39

Frecvențele de tăiere, lățimea benzii, și factorul de calitate au aceleași expresii ca în cazul filtrului trece-bandă realizat cu elementele R, L, C

conectate în serie, $\beta = \frac{R}{L}$, $\omega_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$, și

$$\omega_2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

CAPITOLUL 6. CIRCUITE TRIFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

6.1 Transmisia energiei. Caracterizarea sistemului trifazat de transmitere a energiei. Proprietățile sistemelor trifazate.

Energia electrică produsă în centralele electrice prin transformarea altor forme de energie (în special mecanică) se transmite în locurile de utilizare cu ajutorul liniilor electrice. Să analizăm cel mai simplu sistem de transmitere a energiei electrice, și anume cel alcătuit dintr-un generator, două conductoare (linie) și un receptor (fig.6.1).

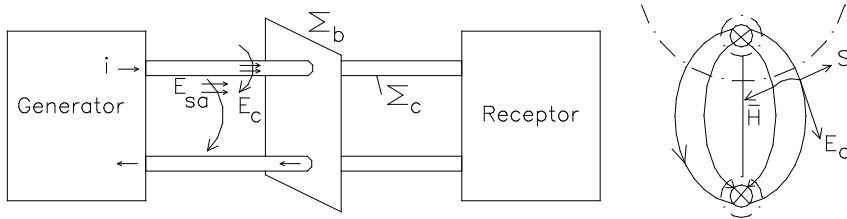


Fig.6.1

Trecerea curentului prin conductorul liniei este datorată acțiunii câmpului electric imprimat ce are direcția axială ($\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$). Conform legii circuitului magnetic o rize cu rent el ectric p roduce câmp m agnetic d e intensitate H . În c oncluzie, în in teriorul c onductorului l iniile c âmpului magnetic sunt cercuri concentrice densității de curent \vec{J} . Aplicând teorema energiei electromagnetice:

$$-\frac{dW_{em}}{dt} = P_J + P_{\Sigma} \quad (6.1)$$

unde: $-P_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{S} dA$;

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ - vector de transmitere a energiei,

rezultă că, în interiorul conductorului, vectorul de transmitere este orientat spre suprafața conductorului.

$$\vec{S}_i = \vec{E}_{ia} \times \vec{H}_i \quad (6.2)$$

iar puterea transmisă este:

$$P_{\Sigma} = \int_{\Sigma_i} \vec{S}_i d\vec{A} = \iint (\vec{E}_{ia} \times \vec{H}_i) \cdot (d\vec{S}_1 \times d\vec{S}_2) \quad (6.3)$$

$$P_{\Sigma} = \int_{\substack{\text{lungime} \\ \text{linie}}} \bar{E}_{ia} d\bar{S}_1 \cdot \oint \bar{H}_i d\bar{S}_2 = U_f \cdot i = P_f$$

În concluzie, conductorul este sediul transformării energiei electrice în căldură, aceasta transmițându-se spre suprafața conductorului. În exteriorul conductorului din legile câmpului electromagnetic rezultă conservarea componentelor tangențiale ale câmpului electric pe suprafața conductorului. Totodată, între cele două conductoare există un câmp electric de natură columbiană (E_c - în interiorul conductorului este nul). Vectorul de transmitere a energiei în exteriorul conductorului este:

$$\bar{S}_e = \bar{E}_e \times \bar{H}_e = (\bar{E}_{ea} + \bar{E}_c) \times \bar{H}_e = \bar{E}_{ea} \times \bar{H}_e + \bar{E}_c \times \bar{H}_e \quad (6.4)$$

Celor două componente ale vectorului de transmitere le corespund puterile:

$$P_{\Sigma_c} = \int_{\Sigma_c} (\bar{E}_{ea} \times \bar{H}_e) d\bar{A}_c = U_f \cdot i \text{ respectiv:}$$

$$P_{\Sigma_b} = \int_{\Sigma_b} (\bar{E}_c \times \bar{H}_e) d\bar{A}_b = \int_{\text{conductor 1 la 2}} \bar{E}_c d\bar{S}_3 \oint \bar{H}_e d\bar{S}_2 = U_b \cdot i \quad (6.5)$$

În consecință, conform primei formule puterea dezvoltată în conductor este transmisă, prin aria laterală a conductorului, mediului iar ceea ce se transmite pe o linie electrică este puterea $P_{\Sigma_b} = U_b \cdot i$ egală cu produsul dintre tensiunea la borne (între conductoare) și curentul liniei.

Observații:

1. Transmiterea energiei electrice nu se realizează prin conductor ci în spațiul din jurul conductorului. Conductorul este sediul transformării energiei electrice în căldură. El are rolul de ghidare al transmisiei între generator și receptor.

2. Orice transmitere de energie se face cu pierderi. Pierderile fiind $R \cdot I^2$ rezultă că prin linie curentul trebuie să aibă valori minime. Transmiterea energiei electrice cu aceeași putere printr-o linie este posibilă cu pierderi mici dacă tensiunea dintre conductoare este ridicată.

În cazul transmisiei energiei electrice monofazate la $\cos\varphi=1$, puterea transmisă ce revine unui conductor este

$$y_{1d}(t) = \sqrt{2}Y_d \sin(\omega t + \gamma_d) ; \quad y_{2d}(t) = \sqrt{2}Y_d \sin\left(\omega t + \gamma_d - \frac{2\pi}{3}\right) ;$$

$$y_{3d}(t) = \sqrt{2}Y_d \sin\left(\omega t + \gamma_d - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (6.6)$$

În cazul unei transmisii trifazate cu conductoarele de linie dimensionate la I_N , puterea activă maximă transmisă este $\sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_N$, unde U_N este tensiunea între conductoarele liniei. Fiecărui conductor îi revine de $2/\sqrt{3}$ mai multă putere transmisă decât pentru o linie monofazată.

Numim *sistem trifazat* un ansamblu de trei sisteme monofazate, în care cele trei tensiuni electromotoare au aceleași pulsație dar faze inițiale diferite. Tensiunile electromotoare sunt produse prin transformarea energiei mecanice în energie electrică în centralele electrice de către generatoarele trifazate.

Numim *sistem trifazat simetric* un ansamblu de trei mărimi sinusoidale ce au aceeași valoare efectivă (amplitudine) și aceeași frecvență și sunt defazate între ele cu un unghi de $2\pi/3$. Într-un sistem trifazat simetric de mărimi sinusoidale suma valorilor instantanee în orice moment este nulă.

Funcție de succesiunea trecerii prin zero a celor trei mărimi sinusoidale y_1, y_2 și y_3 distingem:

- sisteme trifazate de succesiune directă în care mărimea $y_{1h}(t) = \sqrt{2}Y_h \sin(\omega t + \gamma_h)$; $y_{2h}(t) = \sqrt{2}Y_h \sin(\omega t + \gamma_h)$; este $y_{3h}(t) = \sqrt{2}Y_h \sin(\omega t + \gamma_h)$

decalată în urma mărimii $y_1(t)$ cu un unghi de $2\pi/3$. Un **sistem trifazat de succesiune directă** poate fi exprimat matematic prin relațiile:

$$y_1 = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (6.7)$$

$$y_2 = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \sin(\omega \cdot t - 2\pi/3) \quad (6.8)$$

$$y_3 = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \sin(\omega \cdot t - 4\pi/3) \quad (6.9)$$

- sisteme trifazate de succesiune inversă în care mărimea $y_2(t)$ este decalată înaintea mărimii $y_1(t)$ cu un unghi de $2\pi/3$. **Sistemul trifazat de succesiune inversă** este exprimat matematic prin relațiile:

$$y_1 = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (6.10)$$

$$y_2 = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \sin(\omega \cdot t + 2\pi/3) \quad (6.11)$$

$$y_3 = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \sin(\omega \cdot t + 4\pi/3) \quad (6.12)$$

6.2 Reprezentarea în complex a sistemelor trifazate. Proprietăți.

Planul complex atașat reprezentării mărimii sinusoidale este determinat de axa reală și imaginară. Fiecărei axă i se atașează un versor (modul unitate) astfel versorul axei reale este 1 iar al celei imaginare este j.

Sistemul de coordonate ales este ortogonal iar între versori există proprietatea că rotirea cu 90^0 în sens trigonometric al unuia îl determină pe celălalt.

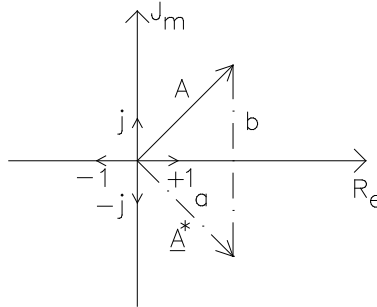


Fig. 6.2

Deoarece în planul complex orice număr are două forme de scriere, forma carteziană redată prin partea reală și imaginară a numărului complex și forma polară unde numărul este complet determinat de modul (argument) și unghiul ce-l face axa reală (fază inițială). Exemplificăm pe un număr

$$\text{complex: } \underline{A} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{b}{a}} = Ae^{j\varphi} \quad (6.13)$$

Dacă mărimea complexă \underline{A} are modulul unitatea $|A|=1$ atunci pentru $\text{Im}\{A\}=0$, $Ae^{j\varphi} = a$, iar pentru $\text{Re}\{A\}=0$, $A \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 0$ ceea ce arată rotire cu $\frac{\pi}{2}$ versorul axei reale determină versorul axei imaginare. În baza acestei constatări deducem:

$$j^2 = e^{j\frac{\pi}{2} \cdot 2}, \quad j^3 = e^{(j\frac{\pi}{2})^3} = -j, \quad j^4 = e^{(j\frac{\pi}{2})^4} = 1 \quad \dots \text{etc.} \quad (6.14)$$

Complex conjugatul unui număr este $\underline{A}^* = a - jb = Ae^{-j \cdot \arctg \frac{b}{a}}$ are același modul dar este rotit în sens invers trigonometric cu unghiul $\arctg(b/a) = \varphi$.

Reprezentarea în același plan complex a unui sistem trifazat de mărimi sinusoidale presupune alegerea uneia dintre mărimi drept origine de fază.

Întrucât defazajul între mărimi este de $2\pi/3$, imaginea în complex a celorlalte se obține prin rotirea cu $2\pi/3$ a mărimii originii de fază. Asociind un sistem trifazat de coordonate în planul complex putem trasa trei axe de versori 1 , $e^{j2\pi/3}$ și $e^{j4\pi/3}$. Notăm versorii acestor axe 1 , a , a^2 conform fig.6.3.

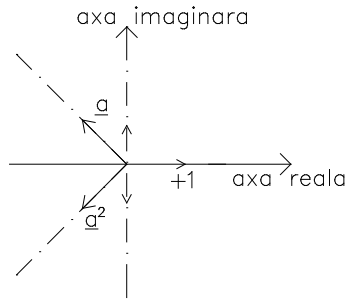


Fig.6.3

Sistemul trifazat de axe definit în planul complex are următoarele proprietăți: $\underline{a} = e^{j2\pi/3}$, $\underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{a} = \underline{a}^*$, $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$, $\underline{a}^3 = 1$, $\underline{a}^4 = \underline{a}$, ... etc. Sistemele trifazate de mărimi directe respectiv inverse admit în planul complex următoarea reprezentare, respectiv scriere:

$$\underline{U}_{1d} = U \cdot e^{j\gamma_i}$$

$$\underline{U}_{1i} = U \cdot e^{j\gamma_i}$$

$$\underline{U}_{2d} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{1d}$$

$$\underline{U}_{2i} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{1i}$$

$$\underline{U}_{3d} = \underline{a} \cdot \underline{U}_{1d}$$

$$\underline{U}_{3i} = \underline{a} \cdot \underline{U}_{1i}$$

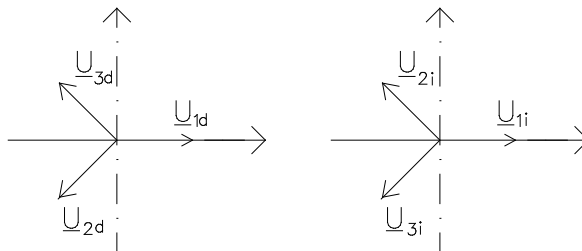


Fig. 6.4

6.3 Conexiunile sistemelor trifazate

Să considerăm trei sisteme monofazate de transmitere a energiei alcătuite din trei surse de tensiuni electromotoare:

$$- e_1 = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin \omega t ; \quad (6.15)$$

$$- e_3 = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin(\omega t - 2\pi / 3) ; \quad (6.16)$$

$$- e_3 = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin(\omega t - 4\pi / 3) . \quad (6.17)$$

Presupunem că fiecare sursă alimentează un consumator de impedanță $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$.

a) Conexiunea stea (Y)

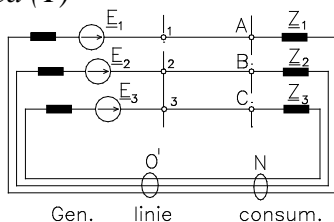


Fig. 6.5

Fiecare circuit component în care acționează o sursă se numește fază.

Dacă $Z_1 = Z_2 = Z_3$, $Z_{1q} = Z_{2q} = Z_{3q}$, $E_1, E_2 = a^2 \cdot E_1$, $E_2 = a \cdot E_1$, $I' = I_2' = I_3' = 0$ atunci prin conductorul de întoarcere a l curentului v a c ircula un c urent $I_N = I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

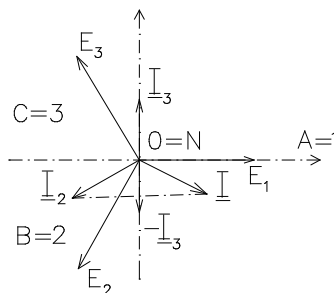


Fig. 6.6

Conexiunea astfel realizată se numește “stea” și pentru transportul energiei a vom maximum pa tru c onductoare. C urentul c e t rece pr într-o impedanță se numește curent de fază, iar curentul ce trece prin linia de transport se numește curent de linie.

Este evident că pentru această conexiune curentul de linie este egal cu cel de fază. Tensiunile definite între bornele 1 - 0, 2 - 0, 3 - 0 se numesc tensiuni de fază. Tensiunile dintre două conductoare ale liniei de transport (1-2, 2-3, 3-1) se numesc tensiuni de linie.

Calculăm tensiunea de linie între conductoarele 1 și 2.

$$U_{1,2} = e_{10} - e_{20} = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin \omega t - \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin(\omega t - 2\pi/3) \quad (6.18)$$

$$U_{1,2} = e_{10} - e_{20} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot \sin(\omega t + \pi/6) \quad (6.19)$$

sau, în mărimi complexe: $\underline{U}_{1,2} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \sqrt{3} \cdot E \cdot e^{j\pi/6} = U_e \cdot e^{j\pi/6}$.

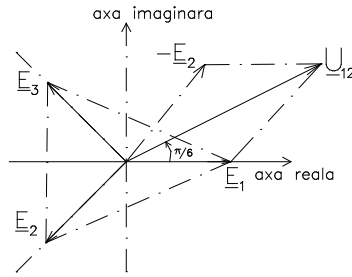


Fig. 6.7

Consecință:

Relațiile între mărimile de fază și cele de linie, pentru conexiunea stea sunt:

$$- I_{linie} = I_{fază} \quad (6.19)$$

$$- U_{linie} = \sqrt{3} \cdot U_{fază} \quad (6.20)$$

b) *Conexiunea triunghi (Δ)*

Să presupunem cele trei circuite monofazate în care acționează tensiunile de fază conectate conform schemei următoare:

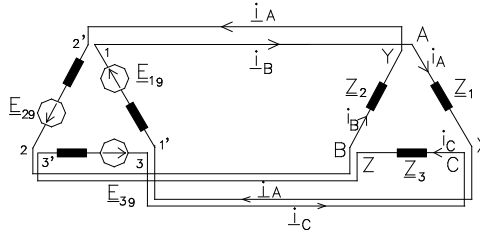


Fig. 6.8

Notăm curenții prin fazele consumatorilor i_A, i_B, i_C , curenți ce formează un sistem trifazat simetric în ipoteza că $Z_1 = Z_2 = Z_3$, și $\underline{E}_1, \underline{E}_2 = a^2 \cdot \underline{E}_1, \underline{E}_3 = a \cdot \underline{E}_1$.

Dacă se realizează conexiunile $A = Y, B = Z, C = X$ la consumator și $1 = 2', 2 = 3'$ respectiv $3 = 1'$ la sursă, se obține conexiunea triunghi atât la consumator cât și la sursă. Prin aceste puncte de conexiune între două conductoare ale liniei de transport, tensiunea de linie este tensiunea de fază a sursei $U_{linie} = U_{fază}$.

Curentul total ce trece printr-un conductor de linie este diferența a doi curenți de fază. Astfel: $\underline{I}_1 = \underline{I}_A - \underline{I}_C$ și are modulul $I_1 = \sqrt{3} \cdot I_A$ conform diagramei fazoriale atașate sistemului trifazat. Valoarea complexă a curentului de linie este: $\underline{I}_1 = \underline{I}_A - \underline{I}_C = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_A \cdot e^{-j\pi/6}$.

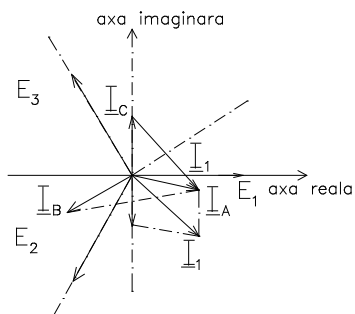


Fig. 6.9

Concluzie:

Conexiunea triunghi a sistemelor trifazate conduce la următoarele relații între mărimile de fază și cele de linie: $I_{linie} = \sqrt{3}I_{fază}$; $U_{linie} = \cdot U_{fază}$.

6.4. Analiza circuitelor trifazate alimentate cu tensiuni simetrice

Consumatorul trifazat poate fi conectat în stea sau în triunghi iar funcția de relația dintre impedanțele fazelor poate fi echilibrat sau dezechilibrat. Numim consumator trifazat echilibrat dacă impedanțele complexe ale fazelor sunt identice: $Z_A = Z_B = Z_C$, altfel el este dezechilibrat.

6.4.1. Consumator trifazat conectat în stea

a) Consumator echilibrat $Z_A = Z_B = Z_C$

Presupunem un consumator trifazat echilibrat conectat în stea cu nul (Y_0) și urmărim să determinăm distribuția tensiunilor, a curenților prin consumator, în cazul alimentării de la un sistem trifazat simetric de tensiuni. (la sursă).

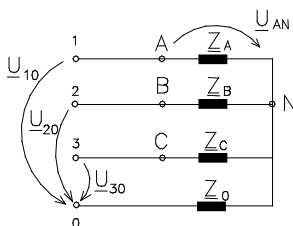


Fig. 6.10

Rezolvarea acestui circuit este similară cu a circuitului de c.a. cunoscând U_{10} , $U_{20}=a^2 U_{10}$, $U_{30}=a U_{10}$, $Z_A = Z_B = Z_C$, și Z_0 - impedanța nulului.

Teorema II *Kirchhoff* afirmă următoarele relații:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{10} &= \underline{U}_{AN} + \underline{U}_O \\ \underline{U}_{20} &= \underline{U}_{BN} + \underline{U}_O \\ \underline{U}_{30} &= \underline{U}_{CN} + \underline{U}_O\end{aligned}\quad (6.21)$$

unde: $\underline{U}_O = \underline{I}_O \cdot \underline{Z}_O$

Curenții prin fazele circuitului sunt dați de relațiile:

$$\underline{I}_{AN} = \frac{\underline{U}_{AN}}{\underline{Z}_A}, \quad \underline{I}_{BN} = \frac{\underline{U}_{BN}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_{CN} = \frac{\underline{U}_{CN}}{\underline{Z}_C} \quad (6.22)$$

Aplicând teorema I *Kirchhoff* în nodul N obținem:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_O \quad (6.23)$$

Scriind teorema I *Kirchhoff* funcție de mărimile și parametrii cunoscuți ai circuitului obținem relația de dependență a tensiunii dintre punctul de nul al sursei și al consumatorului (N) numită tensiune de deplasare a nulului.

$$\underline{U}_O = \frac{\frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_O}} = \underline{Z}_O \cdot \underline{I}_O \quad (\text{relația Millman}) \quad (6.24)$$

Sistemul de alimentare fiind simetric și impedanțele complexe ale fazelor egale, rezultă $\underline{U}_O \equiv 0$ independent de existența sau inexistența conductorului de nul. În consecință, sistemul tensiunilor de alimentare a consumatorului este identic cu sistemul sursei.

b) *Consumator dezechilibrat* $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$

În cazul consumului inegal pe faze prezența sau absența conductorului de nul afectează distribuția tensiunilor și curenților pe consumator.

b1. Stea cu nul de impedanță $\underline{U}_O \equiv 0$

Tensiunea de deplasare a nulului este zero $\underline{U}_O \equiv 0$. Sistemul de tensiuni al sursei este forțat să devină sistem aplicat consumatorului, însă curenții prin faze sunt diferiți. Dezechilibrul acestor curenți este scurs prin conductorul de nul având valoarea $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_O$.

b2. Stea fără nul

În această situație sistemul de tensiuni aplicat consumatorului este diferit de al sursei de alimentare. Tensiunile pe consumator devin nesimetrice, nesimetrie măsurabilă și calculabilă prin tensiunea de deplasare a nulului. Pentru analiza distribuției tensiunilor și curenților se calculează tensiunea de deplasare a nulului cu relația *Millman*.

Se determină tensiunile pe fazele consumatorului cu teorema II Kirchhoff, și, în sfârșit, curenții de fază cu relațiile *Ohm*. Se verifică, în final, teorema I Kirchhoff: $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

6.4.2 Consumator trifazat conectat în triunghi

Conexiunea triunghi implică existența numai a trei tensiuni de linie egale cu tensiunile de fază. Un consumator trifazat conectat în triunghi la rețeaua industrială $3 \times 380\text{V}/50\text{Hz}$ trebuie să reziste la o tensiune aplicată pe fază de 380V. Presupunem un consumator trifazat conectat în triunghi alimentat de la un sistem trifazat simetric de tensiuni (de linie) $\underline{U}_{1,2}$, $\underline{U}_{2,3} = a^2 \cdot \underline{U}_{1,2}$, $\underline{U}_{3,1} = a \cdot \underline{U}_{1,2}$. Urmărim să determinăm distribuția tensiunilor și curenților pe consumator pentru valori diferite ale impedanței de sarcină.

a) *Consumator echilibrat* $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA}$

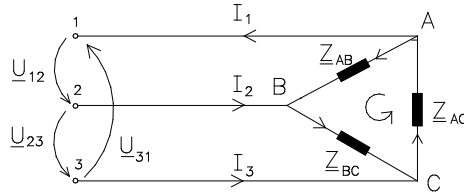


Fig. 6.11

Notăm $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ curenții prin linia de transport și $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_0$ curenții prin fazele consumatorului. Curenții prin fazele consumatorului se pot calcula din relațiile *Ohm*:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{\underline{U}_{1,2}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{\underline{U}_{2,1}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{\underline{U}_{3,2}}{\underline{Z}_{CA}} \quad (6.25)$$

iar cei de linie din aplicarea teoremei I Kirchhoff în nodurile A, B, C:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} \quad (6.26)$$

În consecință în conexiunea triunghi sistemul de tensiuni al sursei este și sistem al consumatorului, iar curenții de fază formează un sistem trifazat simetric.

b) *Consumator dezechilibrat* $\underline{Z}_{AB} \neq \underline{Z}_{BC} \neq \underline{Z}_{CA}$

Relațiile de calcul sunt cele de mai sus singura diferență fiind existența unui curent de circulație în bucla triunghiului. În concluzie, niciodată alternatoarele nu se vor conecta în triunghi.

Observații:

1. Noțiunea de simetrie în sistemele trifazate se referă la semnale ce pot fi curenți sau tensiuni. Pentru ca un sistem trifazat să fie simetric trebuie

ca semnalele să aibă aceeași frecvență, același modul și să fie defazate cu un unghi de $2\pi/3$ între ele.

2. Noțiunea de echilibrat sau dezechilibrat se referă la consumator (impedanță). Consumatorul trifazat este echilibrat dacă impedanțele complexe pe toate fazele sunt identice, deci consumul pe fiecare fază este același.

6.4.3 Puteri în rețele trifazate echilibrate sub tensiuni simetrice

Se consideră un receptor trifazat echilibrat sub tensiuni simetrice \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} , \underline{U}_{30} și curenți \underline{I}_{10} , \underline{I}_{20} , \underline{I}_{30} , \underline{I}_N (fig.6.12)

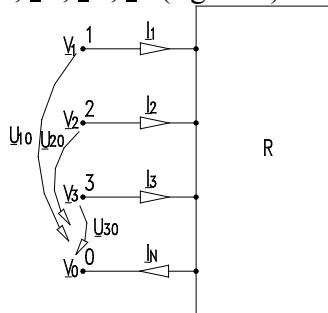


Fig 6.12

Puterea complexă transmisă receptorului pe la bornele 1, 2, 3 și 0 este:

$$\underline{S} = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^* + \underline{V}_0 (-\underline{I}_N^*) \quad (6.27)$$

Deoarece $\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$, înlocuind în relația de mai sus, se obține:

$$\underline{S} = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0) \underline{I}_1^* + (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) \underline{I}_2^* + (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) \underline{I}_3^* = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^* \quad (6.28)$$

Întrucât,

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_1 ; \underline{U}_{20} = \underline{U}_2 ; \underline{U}_{30} = \underline{U}_3 \quad (6.29)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1 ; \underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_1 ; \underline{I}_3 = a \underline{I}_1$$

formula puterii transmise receptorului se transformă astfel:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + a^2 \underline{U}_2 \underline{I}_1^* + (a^*) \underline{U}_3 \underline{I}_1^* = 3 \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = P + jQ \quad (6.30)$$

unde P și Q sunt puterile activă și reactivă,

$$P = 3U_1 I_1 \cos \varphi ; Q = 3U_1 I_1 \sin \varphi \quad (6.31)$$

φ fiind defazajul dintre tensiunea de fază \underline{U}_1 și curentul de fază \underline{I}_1 .

Dacă receptorul e conectat în stea, $U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} U_L$, $I_1 = I_L$ și puterile complexă \underline{S} , activă P și reactivă Q se exprimă în funcție de mărimile U_L și I_L , cum urmează:

$$S = \sqrt{3} U_L I_L^* ; P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi ; Q = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi \quad (6.32)$$

Dacă receptorul e conectat în triunghi $U_l = U_f$, $I_l = \sqrt{3} I_f$, și înlocuind în formula puterii transmise receptorului se regăsesc formulele obținute în cazul conectării în stea.

Pentru măsurarea puterii active este suficient un wattmetru a cărui bobină de tensiune se montează între conductorul fazei întâi și firul neutru iar bobina de curent se conectează în serie cu conductorul primei faze (fig.6.13a). Dacă lipsește firul neutru, se realizează un punct neutru artificial cu trei rezistențe conectate în stea (fig.6.13b). Indicația wattmetrului multiplicată cu trei reprezintă puterea activă.

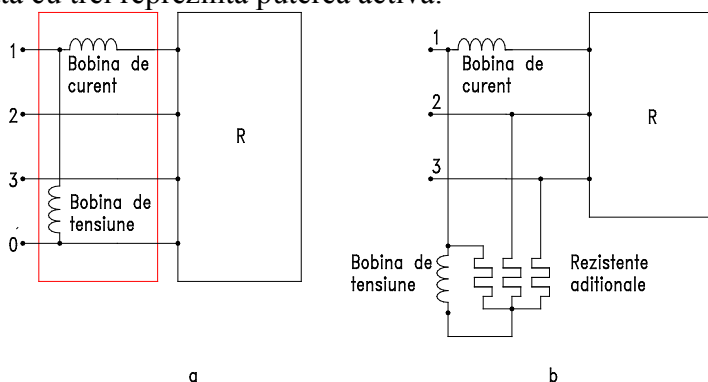


Fig. 6.13

Compensarea puterii reactive în sistemele trifazate echilibrate simetrice

Pentru îmbunătățirea factorului de putere în rețele trifazate echilibrate și simetrice, se pot utiliza trei condensatoare având capacități egale. Dacă se conectează în stea condensatoarele de capacitate C puterea reactivă are expresia: $Q = 3C_\lambda \omega U_f^2$, iar dacă se conectează în triunghi condensatoarele de capacitate C_Δ , se obține: $Q = 3C_\Delta \omega U_l^2$.

La aceeași putere reactivă Q , capacitatea condensatoarelor montate în triunghi C_Δ rezultă de trei ori mai mică decât capacitatea condensatoarelor montate în stea C_λ ,

$$C_\Delta = \frac{C_\lambda}{3} \quad (6.33)$$

Prin urmare este mai avantajos pentru compensarea puterii reactive în rețelele trifazate, să se utilizeze condensatoarele conectate în triunghi.

6.5. Metoda componentelor simetrice

Rețelele trifazate se concep ca sisteme echilibrate în regim simetric de tensiuni și curenți. Generatoarele se construiesc astfel ca tensiunile lor

electromotoare să fie simetrice, iar liniile de transmisie aeriene sau cablurile se dimensionează cu consumatorii distribuiți echilibrat pe fiecare fază încât și curenții să constituie sisteme simetrice.

Datorită conectărilor și deconectărilor diferite pe fiecare fază a consumatorilor precum și avariilor care pot interveni - scurtcircuitate și întreruperi – apar în rețea dezechilibrări și nesimetrii. Analiza rețelelor trifazate dezechilibrate sub tensiuni și curenți nesimetrice, prin metoda directă examinată la capitolul precedent, are dezavantajul că nu pune în evidență pentru elementele de circuit dinamice, abaterile de la regimul simetric. Comportarea înfășurărilor trifazate ale mașinilor electrice sub tensiuni și curenți nesimetrice este diferită de comportarea rezistoarelor, bobinelor și condensatoarelor. Acestea din urmă, denumite *elemente statice*, nu sunt influențate de modul în care se succed tensiunile sau curenții. În schimb, impedanțele înfășurărilor mașinilor electrice sunt diferite dacă tensiunile și curenții sunt de succesiuni diferite: elementele de acest fel se numesc *dinamice*.

Cu metoda componentelor simetrice se analizează pe modelul regimurilor simetrice, regimurile nesimetrice ale circuitelor trifazate conținând elemente statice și dinamice.

6.5.1. Descompunerea unui sistem trifazat nesimetric de mărimi sinusoidale în sisteme simetrice

Teorema Stokvis-Fortescue:

Un sistem trifazat nesimetric de mărimi sinusoidale se descompune în trei sisteme de mărimi sinusoidale: un sistem de succesiune directă, în care fiecare mărime e defazată înaintea celei care îi succede cu $2\pi/3$; un sistem de succesiune inversă, în care fiecare mărime e defazată în urma celei care îi succede cu $2\pi/3$; un sistem homopolar, în care mărimile au amplitudini egale și sunt în fază.

Fie $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, sistemul trifazat nesimetric,

$$y_1(t) = \sqrt{2}Y_1 \sin(\omega t + \gamma_1); \quad y_2(t) = \sqrt{2}Y_2 \sin(\omega t + \gamma_2); \quad y_3(t) = \sqrt{2}Y_3 \sin(\omega t + \gamma_3) \quad (6.34)$$

reprezentat în complex (fig.6.14a):

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_1 e^{j\gamma_1}; \quad \underline{Y}_2 = \underline{Y}_2 e^{j\gamma_2}; \quad \underline{Y}_3 = \underline{Y}_3 e^{j\gamma_3} \quad (6.35)$$

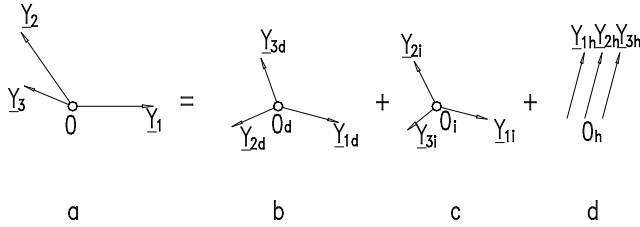


Fig. 6.14

Se notează cu: $y_{1d}(t)$, $y_{2d}(t)$, $y_{3d}(t)$, sistemul trifazat simetric direct,

$$\begin{aligned}
 y_{1d}(t) &= \sqrt{2}Y_d \sin(\omega t + \gamma_d); & y_{2d}(t) &= \sqrt{2}Y_d \sin\left(\omega t + \gamma_d - \frac{2\pi}{3}\right); \\
 y_{3d}(t) &= \sqrt{2}Y_d \sin\left(\omega t + \gamma_d - \frac{4\pi}{3}\right)
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

cu: $y_{1i}(t)$, $y_{2i}(t)$, $y_{3i}(t)$, sistemul trifazat simetric invers,

$$\begin{aligned}
 y_{1i}(t) &= \sqrt{2}Y_i \sin(\omega t + \gamma_i); & y_{2i}(t) &= \sqrt{2}Y_i \sin\left(\omega t + \gamma_i + \frac{2\pi}{3}\right); \\
 y_{3i}(t) &= \sqrt{2}Y_i \sin\left(\omega t + \gamma_i + \frac{4\pi}{3}\right)
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

și cu: $y_{1h}(t)$, $y_{2h}(t)$, $y_{3h}(t)$, sistemul trifazat simetric omopolar (sau homopolar),

$$\begin{aligned}
 y_{1h}(t) &= \sqrt{2}Y_h \sin(\omega t + \gamma_h); & y_{2h}(t) &= \sqrt{2}Y_h \sin(\omega t + \gamma_h); \\
 y_{3h}(t) &= \sqrt{2}Y_h \sin(\omega t + \gamma_h)
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

cu imaginile în complex (fig.5.16 b, c, d),

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_{1d} &= \underline{Y}_d; & \underline{Y}_{2d} &= a^2 \underline{Y}_d; & \underline{Y}_{3d} &= a \underline{Y}_d \\
 \underline{Y}_{1i} &= \underline{Y}_i; & \underline{Y}_{2i} &= a \underline{Y}_i; & \underline{Y}_{3i} &= a^2 \underline{Y}_i \\
 \underline{Y}_{1h} &= \underline{Y}_h; & \underline{Y}_{2h} &= \underline{Y}_h; & \underline{Y}_{3h} &= \underline{Y}_h
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

În conformitate cu teorema S tokvis-Fortescue, relațiile dintre componentele corespunzătoare ale sistemelor direct, invers și omopolar sunt,

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= y_{1d}(t) + y_{1i}(t) + y_{1h}(t); \\
 y_2(t) &= y_{2d}(t) + y_{2i}(t) + y_{2h}(t); \\
 y_3(t) &= y_{3d}(t) + y_{3i}(t) + y_{3h}(t);
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

respectiv în complex,

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1(t) &= \underline{Y}_{1d}(t) + \underline{Y}_{1i}(t) + \underline{Y}_{1h}(t); \\ \underline{Y}_2(t) &= \underline{Y}_{2d}(t) + \underline{Y}_{2i}(t) + \underline{Y}_{2h}(t); \\ \underline{Y}_3(t) &= \underline{Y}_{3d}(t) + \underline{Y}_{3i}(t) + \underline{Y}_{3h}(t); \end{aligned} \quad (6.41)$$

Cele trei mărimi ale fiecăruia dintre sistemele direct și invers se exprimă cu ajutorul operatorului a astfel,

$$Y_{1d} = Y_d ; Y_{2d} = a^2 Y_d ; Y_{3d} = a Y_d \quad (6.42)$$

$$Y_{1i} = Y_i ; Y_{2i} = a Y_i ; Y_{3i} = a^2 Y_i \quad (6.43)$$

în care f azorii \underline{Y}_d , \underline{Y}_i și \underline{Y}_h , se numesc *componenta directă, inversă și omopolară* ale sistemului trifazat nesimetric \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 și \underline{Y}_3 .

6.5.2 Circuite trifazate echilibrate sub tensiuni nesimetrice

Analiza regimurilor nesimetrice din circuitele trifazate liniare cu metoda componentelor și matrice se face pe baza teoremei superpoziției astfel: se consideră separat regimurile stabilite de componentele directe și inverse și omopolare ale tensiunilor și apoi se suprapun răspunsurile corespunzătoare. Circuitele fiind echilibrate și componentele tensiunilor și curenților alcătuind sisteme simetrice, este suficient să se calculeze numai pentru una din faze, utilizând scheme monofilare. Se obțin în acest fel schemele de succesiune directă, inversă și omopolară, iar din superpoziția lor se deduc răspunsurile din rețea.

a. Elementele statice și dinamice. Se consideră trei elemente identice cu impedanță Z (fig.6.15, a), la bornele cărora sistemele componentelor de tensiune directe \underline{U}_d , $a^2 \underline{U}_d$, $a \underline{U}_d$, inverse \underline{U}_i , $a \underline{U}_i$, $a^2 \underline{U}_i$ și omopolare \underline{U}_h , \underline{U}_h , \underline{U}_h stabilesc curenți de succesiune directă \underline{I}_d , $a^2 \underline{I}_d$, $a \underline{I}_d$ inverse \underline{I}_i , $a \underline{I}_i$, $a^2 \underline{I}_i$ și omopolare \underline{I}_h , \underline{I}_h , \underline{I}_h (fig.6.15 b, c, d).

Dacă rapoartele dintre fazorii componentelor de tensiune prin fazorii componentelor de curent sunt:

$$\frac{U_d}{I_d} = \frac{U_i}{I_i} = \underline{Z} - \underline{Z}_m ; \quad \frac{U_h}{I_h} = \underline{Z} + 2\underline{Z}_m \quad (6.44)$$

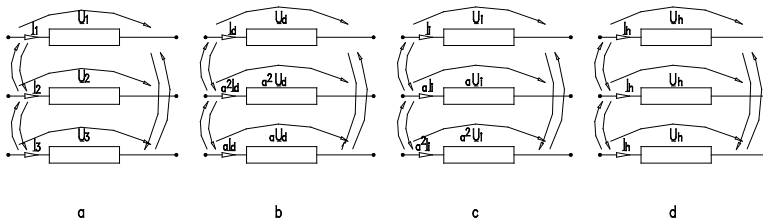


Fig.6.15

Elementele se numesc *statice* și sunt caracterizate de *impedanțele complexe statice propriie* \underline{Z} și *mutuală* \underline{Z}_m . Elementele se numesc *dinamice* dacă rapoartele fazorilor componentelor de tensiune prin fazorii componentelor de curent sunt diferite,

$$\frac{\underline{U}_d}{\underline{I}_d} = \underline{Z}_d ; \frac{\underline{U}_i}{\underline{I}_i} = \underline{Z}_i ; \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = \underline{Z}_h \quad (6.45)$$

și sunt caracterizate de *impedanțele complexe dinamice directă* \underline{U}_d , *inversă* \underline{U}_i și *omopolară* \underline{U}_h .

Rezistoarele, bobinele și condensatoarele sunt elemente statice. Înfașurările statoarelor și rotoarelor mașinilor electrice aflându-se în mișcare relativă nu pot fi caracterizate prin inductivități mutuale statice; de exemplu, inductivitatea mutuală L_{msr} dintre o înfașurare statorică s și una rotorică r nu este egală cu inductivitatea L_{mrs} și în consecință generatoarelor și motoarelor electrice nu li se aplică teorema reciprocității. Un generator electric este caracterizat de tensiunile electromotoare directă \underline{E}_d , inversă \underline{E}_i și omopolară \underline{E}_h și de impedanțele dinamice \underline{Z}_d , \underline{Z}_i , \underline{Z}_h , iar motorul electric este caracterizat de aceasta din urmă. Practic, părțile reale ale componentelor dinamice ale mașinilor electrice sunt neglijabile în raport cu părțile imaginare și impedanțele se pot aproxima prin reactanțele corespunzătoare \underline{X}_d , \underline{X}_i , \underline{X}_h . Reactanțele inversă și omopolară sunt mai mici decât reactanța directă și se dau sub formă de procente în raport cu \underline{X}_d .

b. Receptor trifazat echilibrat cu elementele statice, fără cuplaje magnetice, conectat în stea, cu fir neutru. Fie circuitul trifazat echilibrat constituit din trei elemente statice de impedanțe \underline{Z} conectate în stea, cu fir neutru de impedanță \underline{Z}_N (fig.6.16a), sub tensiuni la borne nesimetrice \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} , \underline{U}_{30} de componente \underline{U}_d , \underline{U}_i , și \underline{U}_h .

În conformitate cu teorema superpoziției, curenții \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 și \underline{I}_N , se obțin însumând curenții care se stabilesc dacă se consideră că la bornele circuitului se aplică tensiunile directe, inverse și omopolare (fig.5.18b,c,d).

În regimurile simetrice direct și invers, componentele curenților \underline{I}_d și \underline{I}_i prin impedanțele primei faze au expresiile:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}} ; \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}} \quad (6.46)$$

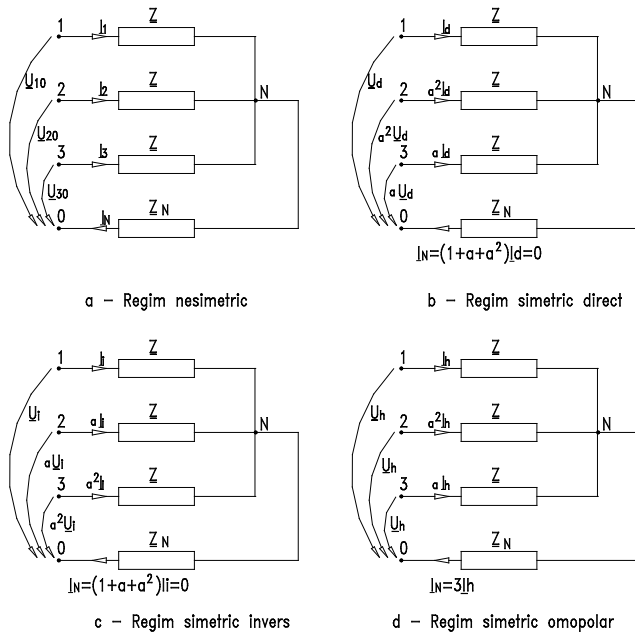


Fig.6.16

și curenții prin firul neutru sunt nuli. Prin impedanțele celorlalte două faze curenții se obțin multiplicând pe I_d și I_i cu a^2 , respectiv cu a , prin urmare e suficient să se calculeze numai pe ntru una di n f aze. S chemele corespunzătoare reprezentate în fig.6.16a,b se numesc *schema de succesiune directă* S_d , respectiv *schema de succesiune inversă* S_i .

În regim simetric omopolar (fig.6.16d), c omponenta I_h se de duce aplicând teorema a doua a lui Kirchoff circuitului $IN01$.

$$\underline{U}_h = \underline{Z}I_h + 3\underline{Z}_N I_h \quad (6.47)$$

din care rezultă:

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_N} \quad (6.48)$$

Schema monofilară conține impedanță \underline{Z} și impedanța firului neutru \underline{Z}_N multiplicată cu 3 și se numește *schema de succesiune omopolară* S_h (fig.6.16c).

Introducând expresiile lui I_d , I_i și I_h , în relațiile dintre componentele corespunzătoare sistemelor direct, invers și omopolar, se obțin curenții I_1 , I_2 și I_3 .

c. Receptor trifazat echilibrat cu elemente statice fără cuplaje magnetice conectate în stea fără fir neutru (fig.6.17a). Se dau tensiunile de

linie nesimetrice \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} și \underline{U}_{31} cu componentele simetrice directă \underline{U}_{ld} și inversă \underline{U}_{li} , componenta omopolară \underline{U}_{lh} , fiind nulă.

În rețimă simetrică directă (fig.6.17b) componenta directă \underline{I}_d se calculează aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff circuitului $1_d N 2_{1d}$: $\underline{U}_{ld} = \underline{Z} \underline{I}_d - \underline{Z} a^2 \underline{I}_d$, din care rezultă:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_{ld}}{(1 - a^2) \underline{Z}} \quad (6.49)$$

Similar, se obține pentru componenta inversă \underline{I}_i expresia (fig.6.17c)

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{U}_{li}}{(1 - a^2) \underline{Z}} \quad (6.50)$$

Notând că $\underline{U}_{fd} = \underline{U}_d$ și $\underline{U}_{fi} = \underline{U}_i$ componentele de fază corespunzătoare componentelor de linie.

$$\underline{U}_d = \frac{\underline{U}_{ld}}{1 - a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} \underline{U}_{ld} ; \underline{U}_i = \frac{\underline{U}_{li}}{1 - a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\pi/6} \underline{U}_{li} \quad (6.51)$$

expresiile componentelor directă și inversă, devin:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}} ; \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}} \quad (6.52)$$

Schemele de succesiune directă S_d și inversă S_i sunt identice cu schemele corespunzătoare ale receptorului trifazat cu fir neutru (fig.6.16a,b).

d. Circuit trifazat echilibrat cu elemente statice cuplate magnetic sub tensiuni nesimetrice. Se consideră trei elemente statice identice cu impedanțele proprii \underline{Z} și mutuale \underline{Z}_m sub tensiuni nesimetrice \underline{U}_1 , \underline{U}_2 și \underline{U}_3 (fig.5.21a). Ecuațiile circuitului, aceleași pentru orice mod de conexiune - stea sau triunghi - sunt următoarele:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z} \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 + \underline{Z}_m \underline{I}_3 ; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_m \underline{I}_1 + \underline{Z} \underline{I}_2 + \underline{Z}_m \underline{I}_3 ; \\ \underline{U}_3 &= \underline{Z}_m \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 + \underline{Z} \underline{I}_3 ; \end{aligned} \quad (6.53)$$

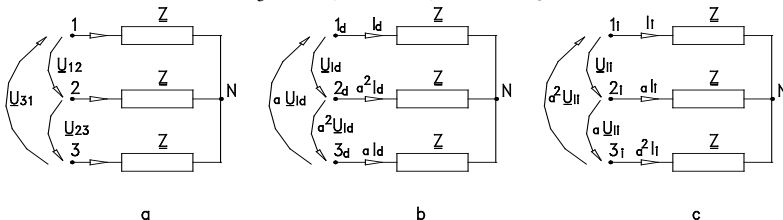


Fig.6.17

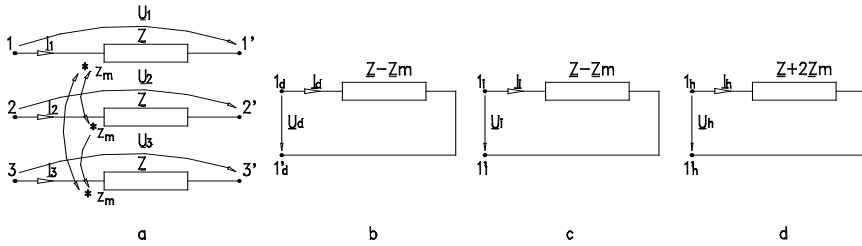


Fig.6.18

Înlocuind tensiunile și curenții prin expresiile lor în funcție de componentele simetrice, se obține:

$$\begin{aligned} \underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_h &= \underline{Z}(\underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h) + \underline{Z}_m(a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i + \underline{I}_h) + \underline{Z}_m(a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i + \underline{I}_h) = \\ \underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_h &= (\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_d + (\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_i + (\underline{Z} + 2\underline{Z}_m)\underline{I}_h \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i + \underline{U}_h &= \underline{Z}_m(\underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h) + \underline{Z}(a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i + \underline{I}_h) + \underline{Z}_m(a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i + \underline{I}_h) \\ a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i + \underline{U}_h &= a^2(\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_d + a(\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_i + (\underline{Z} + 2\underline{Z}_m)\underline{I}_h \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i + \underline{U}_h &= \underline{Z}_m(\underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h) + \underline{Z}(a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i + \underline{I}_h) + \underline{Z}_m(a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i + \underline{I}_h) \\ a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i + \underline{U}_h &= a(\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_d + a^2(\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_i + (\underline{Z} + 2\underline{Z}_m)\underline{I}_h \end{aligned} \quad (6.56)$$

din care se deduc ecuațiile:

$$\underline{U}_d = (\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_d ; \underline{U}_i = (\underline{Z} - \underline{Z}_m)\underline{I}_i ; \underline{U}_h = (\underline{Z} + 2\underline{Z}_m)\underline{I}_h \quad (6.57)$$

Ecuțiilor de mai sus, le corespund schemele de succesiune directă S_s , inversă S_I și omopolară S_h reprezentate în fig.6.18 b,c și d.

6.5.3 Circuite trifazate dezechilibrate

Un sistem simetric sau nesimetric de tensiuni aplicat unui circuit trifazat dezechilibrat stabilește curenți nesimetrice. Componentele simetrice de succesiune directă, inversă și omopolară cu sunt independente și relațiile dintre ele fiind complicate nu se pot stabili scheme monofazate S_d , S_I și S_h , ca în cazul circuitelor echilibrate.

În general, dezechilibrul rețelelor nu este total, fiind posibilă separarea părților echilibrate și dezechilibrate. De exemplu, avariile de întrerupere a fazelor sau de scurtcircuitare ale acestora cu sau fără arc electric, - mono, bi sau trifazat, - pot fi modelate prin elementele trifazate dezechilibrate, conectate la rețeaua echilibrată.

Calculul regimurilor nesimetrice în rețelele conținând receptoare dezechilibrate se face pe baza teoremei substituției în modul următor: se înlocuiesc impedanțele elementelor dezechilibrate prin tensiuni nesimetrice,

care se descompun în componente simetrice corespunzătoare; aceste componente împreună cu cele ale curenților alcătuiesc necunoscute auxiliare.

Rețea echilibrată cu receptor static dezechilibrat. Se consideră o rețea trifazată conținând în afară de partea echilibrată \mathfrak{R}_e un element dezechilibrat fără cuplaje magnetice de impedanțe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ și \underline{Z}_3 , conectate în stea sau triunghi (fig.6.19 a). Notând cu $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ și \underline{U}_3 tensiunile și cu $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ și \underline{I}_3 curenții, ecuațiile elementului de circuit sunt următoarele:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 ; \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 ; \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \quad (6.58)$$

Înlocuind tensiunile și curenții prin expresiile lor în funcție de componentele lor simetrice, se deduc ecuațiile:

$$\begin{aligned} \underline{U}_d &= \underline{Z}_h \underline{I}_d + \underline{Z}_i \underline{I}_i + \underline{Z}_d \underline{I}_h ; \\ \underline{U}_i &= \underline{Z}_d \underline{I}_d + \underline{Z}_h \underline{I}_i + \underline{Z}_i \underline{I}_h ; \\ \underline{U}_h &= \underline{Z}_i \underline{I}_d + \underline{Z}_d \underline{I}_i + \underline{Z}_h \underline{I}_h ; \end{aligned} \quad (6.59)$$

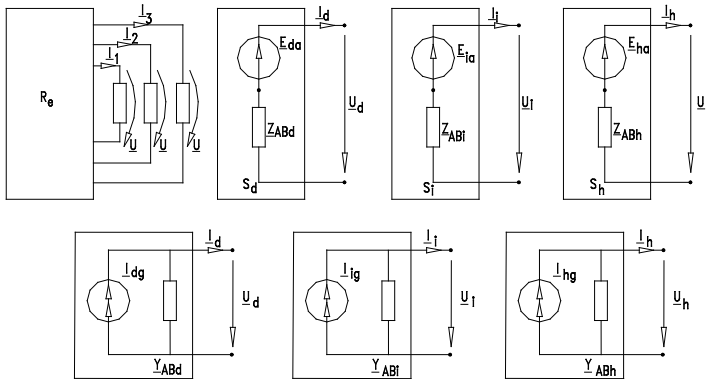


Fig.6.19

în care s-a notat cu $\underline{Z}_d, \underline{Z}_i, \underline{Z}_h$ următoarele impedanțe de calcul:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_h &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \\ \underline{Z}_d &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3) \\ \underline{Z}_i &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3) \end{aligned} \quad (6.60)$$

Schemele directă S_d , inversă S_i și omopolară S_h (fig.6.19 b,c,d) ale părții echilibrate \mathfrak{R}_e , considerate ca dipoli *Thévenin*, au ecuațiile:

$$\underline{E}_{d0} - \underline{U}_d = \underline{Z}_{ABd} \underline{I}_d ; \underline{E}_{i0} - \underline{U}_i = \underline{Z}_{ABi} \underline{I}_i ; \underline{E}_{h0} - \underline{U}_h = \underline{Z}_{ABh} \underline{I}_h \quad (6.61)$$

respectiv ca dipoli *Norton* (fig.6.22e,f,g).

$$\underline{I}_{d0} - \underline{I}_d = \underline{Y}_{ABd} \underline{U}_d ; \underline{I}_{i0} - \underline{I}_i = \underline{Y}_{ABi} \underline{U}_i ; \underline{I}_{h0} - \underline{I}_h = \underline{Y}_{ABh} \underline{U}_h \quad (6.62)$$

în care s-au notat cu: \underline{E}_{d0} , \underline{E}_{i0} și \underline{E}_{h0} – componente simetrice ale tensiunilor electromotoare în gol; \underline{I}_{dg} , \underline{I}_{ig} și \underline{I}_{hg} – componentele simetrice ale injecțiilor de curent; \underline{Z}_{ABd} , \underline{Z}_{ABi} și \underline{Z}_{ABh} – respectiv \underline{Y}_{ABd} , \underline{Y}_{ABi} și \underline{Y}_{ABh} – impedanțele, respectiv admitanțele rețelelor pasivizate \underline{S}_{d0} , \underline{S}_{i0} și \underline{S}_{h0} .

Obținem un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute, \underline{U}_d , \underline{U}_i , \underline{U}_h , \underline{I}_d , \underline{I}_i , \underline{I}_h . După rezolvarea sistemului, se obțin necunoscutele \underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_3 , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , și \underline{I}_3 și din schemele S_d , S_i și S_h se calculează curenții și tensiunile elementelor părții echilibrate \mathcal{R}_e .

6.5.4 Puteri în rețele trifazate dezechilibrate sub tensiuni nesimetrice

a. Metoda directă de calcul a puterilor

Se consideră receptorul trifazat dezechilibrat cu neutrul N accesibil sub tensiuni și curenți nesimetrice, \underline{U}_{k0} , \underline{I}_k , \underline{I}_N (fig.6.20a). Puterea complexă \underline{S} se calculează cu formula:

$$\underline{S} = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^* \quad (6.63)$$

din care se deduc puterile activă P și reactivă Q,

$$P = U_{10} I_1 \cos \varphi_1 + U_{20} I_2 \cos \varphi_2 + U_{30} I_3 \cos \varphi_3 \quad (6.64)$$

$$Q = U_{10} I_1 \sin \varphi_1 + U_{20} I_2 \sin \varphi_2 + U_{30} I_3 \sin \varphi_3 \quad (6.65)$$

în care φ_1 , φ_2 , φ_3 sunt defazaajele dintre tensiunile de fază \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} , \underline{U}_{30} și curenții corespunzători \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 (fig.6.20b).

Pentru măsurarea puterii active se utilizează trei wattmetre cu bobinele de tensiune conectate între fiecare fază și punctul neutru, iar bobinele de curent în serie cu fiecare conductor de fază (fig.6.20a).

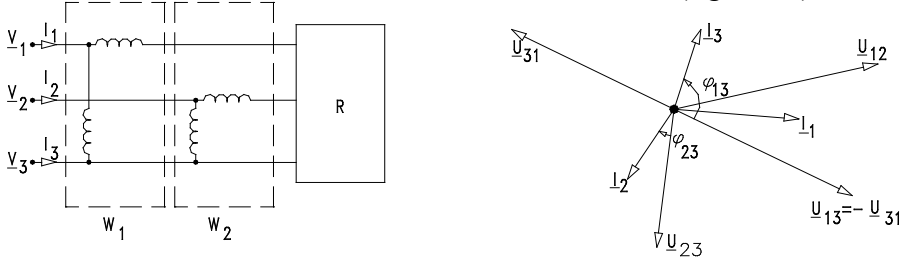


Fig.6.20

Dacă neutrul circuitului nu e accesibil, tensiunile rețelei sunt date prin componentele lor de linie \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} . Înlocuind în formula puterii S complexe, $\underline{I}_3 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2$, se obține:

$$\underline{S} = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* - \underline{U}_{30} \underline{I}_1^* - \underline{U}_{30} \underline{I}_2^* = \underline{U}_{13} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{23} \underline{I}_2^* \quad (6.66)$$

iar puterile activă P și reactivă Q au expresiile următoare:

$$P = U_{13} I_1 \cos \varphi_{13} + U_{23} I_2 \cos \varphi_{23} ; Q = U_{13} I_1 \sin \varphi_{13} + U_{23} I_2 \sin \varphi_{23} \quad (6.67)$$

unde φ_{13} și φ_{23} fiind defazajele dintre tensiunile \underline{U}_{13} , \underline{U}_{23} și curenții \underline{I}_1 și \underline{I}_2 .

Pentru măsurarea puterii active, utilizează două wattmetre cu bobinele de tensiune conectate între fazele 1 și 3, respectiv 2 și 3, iar bobinele de curent în serie cu conductoarele 1 și 2.

b. Calculul puterilor în rețele trifazate dezechilibrate cu ajutorul componentelor simetrice

Puterea complexă S a unei rețele trifazate dezechilibrate în regim nesimetric de tensiuni și curenți are expresia:

$$\underline{S} = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^* \quad (6.68)$$

Înlocuind tensiunile cu expresiile în funcție de componentele lor simetrice,

$$\begin{aligned} \underline{U}_{10} &= \underline{U}_{fd} + \underline{U}_{fi} + \underline{U}_{fh} ; \\ \underline{U}_{20} &= a^2 \underline{U}_{fd} + a \underline{U}_{fi} + \underline{U}_{fh} ; \\ \underline{U}_{30} &= a \underline{U}_{fd} + a^2 \underline{U}_{fi} + \underline{U}_{fh} ; \end{aligned} \quad (6.69)$$

și grupând după aceste componente, se obține,

$$\underline{S}_{10} = \underline{U}_{fd} (\underline{I}_1^* + a^2 \underline{I}_2^* + a \underline{I}_3^*) + \underline{U}_{fi} (\underline{I}_1^* + a \underline{I}_2^* + a^2 \underline{I}_3^*) + \underline{U}_{fh} (\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*); \quad (6.70)$$

respectiv

$$\underline{S} = 3 \underline{U}_{fd} \underline{I}_{fd}^* + 3 \underline{U}_{fi} \underline{I}_{fi}^* + 3 \underline{U}_{fh} \underline{I}_{fh}^* \quad (6.71)$$

în care s-a ținut seama de relațiile: $a^* = a^2$; $(a^2)^* = a$.

Separând părțile reală și imaginară, se deduc expresiile puterilor activă P și reactivă Q în funcție de componentele simetrice de tensiune și curent,

$$P = 3 U_{fd} I_{fd} \cos \varphi_d + 3 U_{fi} I_{fi} \cos \varphi_i + 3 U_{fh} I_{fh} \cos \varphi_h \quad (6.72)$$

$$Q = 3 U_{fd} I_{fd} \sin \varphi_d + 3 U_{fi} I_{fi} \sin \varphi_i + 3 U_{fh} I_{fh} \sin \varphi_h \quad (6.73)$$

în care φ_d , φ_i , φ_h sunt defazajele dintre componentele simetrice de tensiune și cele de curent.

CAPITOLUL 7. LINII ELECTRICE LUNGI

7.1. Circuite cu parametri repartizați

În capitolele precedente s-au studiat circuite electrice filiforme, formate din elemente discrete caracterizabile separat numai printr-o rezistență electrică, o inductivitate sau o capacitate. Astfel de circuite electrice, care admit scheme echivalente constituite din elemente ideale de circuit (R , L , C) (în număr finit) se numesc *circuite cu parametri concentrați*.

În numeroase aplicații tehnice, aproximarea parametrilor concentrați nu este însă valabilă. Liniile electrice lungi sunt folosite pentru transportul energiei electrice la distanțe mari, înfășurările (bobinele) transformatoarelor electrice și alte circuite electrice nu au câmpul electric, câmpul magnetic și transformarea de energie electromagnetică (prin efect *Joule-Lenz*) concentrate în părți distincte ale circuitului, ci le au repartizate, practic, în tot lungul circuitului. Astfel de circuite se numesc *circuite cu parametri repartizați*.

Acumularea de sarcini în lungul circuitului, caracterizată prin capacitatea electrică, se face ca în regimurile variabile în timp intensitatea curentului electric să varieze în lungul conductoarelor (ne-ramificate ale) circuitelor cu parametri repartizați. La liniile electrice lungi imperfecțiunea izolației prin care trece un curent electric între conductoarele liniei contribuie la variația intensității curentului electric în lungul acestora.

7.2. Parametri lineici

Liniile electrice lungi – care sunt constituite dintr-un sistem de conductoare filiforme, paralele, cu lungimea foarte mare față de distanța dintre ele – se utilizează pentru transmiterea la distanțe mari a energiei electromagnetice (în electroenergetică) sau a semnalelor electromagnetice (în telecomunicațiile pe fire).

Considerăm linia bifilară din figura 7.1, de lungime l și notăm cu $1-1'$ bornele de intrare (dinspre generator) și cu $2-2'$ bornele de ieșire (dinspre receptor). S-a considerat un element de linie, de lungime dx ,

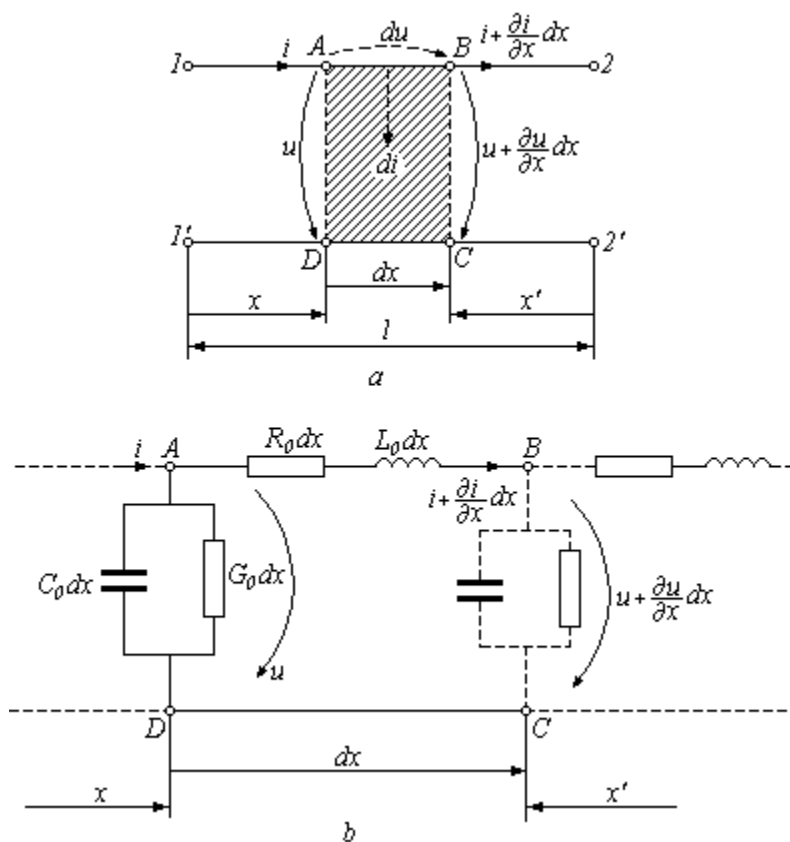


Fig. 7.1

situat la distanța x de începutul liniei (respectiv distanța x' de sfârșit). Pentru linia bifilară se definesc următorii *parametri lineici*:

- a) *Rezistența lineică* (rezistența totală a celor două conductoare pe unitatea de lungime) :

$$R_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\Delta u_f}{i \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta R}{\Delta x} \right) \left[\frac{\Omega}{m} \right], \quad (7.1)$$

unde:

u_f este căderea de tensiune din lungul uneia dintre porțiunile de conductor, pe lungimea Δx ;

i – curentul din conductor din dreptul acelei porțiuni;

ΔR – rezistența ambelor conductoare pe porțiunea Δx .

Din relația (7.1) rezultă

$$du_f = \frac{R_0}{2} \cdot i \cdot dx. \quad (7.2)$$

b) *Inductivitatea lineică* (inductivitatea sistemului de două conductoare pe unitatea de lungime a liniei):

$$L_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{i \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} \left[\frac{H}{m} \right], \quad (7.3)$$

unde $\Delta \Phi$ este fluxul magnetic prin suprafața sprijinită de cele două conductoare de lungime Δx (suprafață hașurată în figura 7.1), iar ΔL este inductivitatea proprie corespunzătoare acestei porțiuni a liniei.

Din relația (7.3) rezultă:

$$d\Phi = L_0 \cdot i \cdot dx. \quad (7.4)$$

c) *Capacitatea lineică* (capacitatea sistemului de două conductoare pe unitatea de lungime a liniei):

$$C_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{u \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \left[\frac{F}{m} \right]. \quad (7.5)$$

unde:

Δq este sarcina electrică localizată pe suprafața unuia dintre conductoare pe porțiunea Δx ;

u – tensiunea dintre acest conductor și celălalt în dreptul acestei porțiuni;

ΔC - capacitatea între cele două conductoare pe porțiunea Δx .

Din relația (7.5) rezultă:

$$dq = C_0 u dx \quad (7.6)$$

d) *Conductanța lineică de izolație (sau perditanța)* (conductanța izolației dintre conductoarele liniei pe unitatea de lungime):

$$G_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta i_g}{u \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \left[\frac{S}{m} \right] = \left[\frac{\Omega^{-1}}{m} \right], \quad (7.7)$$

unde:

Δi_g este curentul de conducție, care se închide prin izolantul imperfect dintre cele două porțiuni de conductoare pe lungimea Δx ;

ΔG – conductanța corespunzătoare acestei porțiuni din izolația liniei.

Din relația (7.7) rezultă:

$$di_g = G_0 u dx. \quad (7.8)$$

Dacă parametrii lineici R_0 , L_0 , C_0 , G_0 nu depind de distanța x , linia se numește *omogenă*.

7.3. Ecuțiile liniilor electrice lungi

În figura 7.1 sunt notate cu u și i tensiunea și curentul din linie la un moment dat la distanța x de la începutul liniei. În același moment, la distanța $x + dx$, tensiunea și curentul din linie vor fi $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, respectiv $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$.

Modificarea tensiunii pe porțiunea dx se datorează atât rezistenței $R_0 dx$ cât și inductivității $L_0 dx$ dintre firele conductoare.

Teorema întâi a lui Kirchhoff aplicată nodului A din fig. 7.1 conduce la ecuația:

$$i = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx + G_0 dx \cdot u + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (7.9)$$

unde:

$G_0 dx \cdot u$ reprezintă curentul de conducție ce se scurge între conductoare pe porțiunea dx ;

$C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}$ - curentul de deplasare care se scurge între conductoare datorită prezenței capacității între fire și a faptului că există variația în timp a tensiunii u (deci a intensității câmpului electric).

După simplificări, ecuația (7.9) se reduce la forma:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.10)$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată achiului ABCDA din figura 7.1 conduce la ecuația:

$$u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (7.11)$$

unde:

$R_0 dx i$ este căderea de tensiune pe rezistența porțiunii dx ;

$L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}$ - căderea de tensiune datorită inductivității proprii a liniei (datorită fluxului magnetic variabil în timp care străbate suprafața hașurată în fig. 7.1).

După simplificări, ecuația (7.11) devine:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (7.12)$$

Ecuțiile cu derivate parțiale (7.10) și (7.12) reprezintă *ecuațiile liniilor lungi* denumite și *ecuațiile telegrafiștilor* (ecuații de ordinul I).

Semnul minus care apare în cele două ecuații trebuie interpretat prin faptul că atât curentul cât și tensiunea u scad în direcția creșterii variabilei x (de la generator către receptor).

Dacă în loc de variabila x se introduce variabila x' (măsurată de la receptor către generator), legate prin relația: $x + x' = l = \text{const.}$, adică $dx = -dx'$, ecuațiile liniilor lungi se vor scrie sub forma:

$$\frac{\partial i}{\partial x'} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial x'} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \qquad (7.13)$$

Determinare tensiunii și a curentului ca funcții de t și x pe baza rezolvării ecuațiilor telegrafoștilor (7.10 și 7.12 sau sistemul 7.13), care sunt ecuații cu derivate parțiale simultane, în condiții inițiale și de frontieră date (adică în regim tranzitoriu) în cazul general al liniilor omogene este o problemă complicată, care se face cu metode operaționale (de exemplu cu ajutorul transformării Laplace).

În cele ce urmează vom studia liniile lungi numai în regim permanent sinusoidal.

7.4. Liniile lungi omogene bifilare în regim permanent sinusoidal

În regim permanent sinusoidal, tensiunea și curentul sunt în fiecare punct al liniei lungi, funcții sinusoidale de timp de aceeași frecvență, de forma :

$$u = u(x, t) = \sqrt{2}U(x) \cdot \sin[\omega t + \psi(x)] \qquad (7.14)$$

$$i = i(x, t) = \sqrt{2}I(x) \cdot \sin[\omega t + \psi(x) - \varphi(x)], \qquad (7.15)$$

în care valorile efective $U(x)$ și $I(x)$ precum și fazele inițiale $\psi(x)$ și $[\psi(x) - \varphi(x)]$ sunt independente de punctul considerat x al liniei. Aceste mărimi se pot reprezenta în complex simplificat, imaginile lor fiind funcții de variabila spațială x :

$$u(x, t) \Leftrightarrow \underline{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi(x)} \qquad (7.16)$$

$$i(x, t) \Leftrightarrow \underline{I}(x) = I(x) \cdot e^{j[\psi(x) - \varphi(x)]} \qquad (7.17)$$

Derivatele parțiale ale acestor mărimi se reprezintă astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} \qquad (7.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \underline{U} \qquad (7.19)$$

și analog pentru curent:

$$\frac{\partial i}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{d\underline{I}}{dx}; \quad \frac{\partial i}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \underline{I}. \quad (7.20)$$

Folosind aceste reprezentări în complex, ecuațiile telegrafistilor (7.10) și (7.12) se reprezintă în complex prin următorul sistem de ecuații diferențiale ordinare în variabila x :

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= (R_0 + j\omega L_0)\underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= (G_0 + j\omega C_0)\underline{U}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor de ordinul întâi ale telegrafistilor*. Prin derivare se poate elimina succesiv o relație dintre funcțiile necunoscute \underline{I} sau \underline{U} și se obțin următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} &= (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)\underline{U} \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} &= (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)\underline{I}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor de ordinul al doilea ale telegrafistilor*.

Dacă se notează :

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta (\alpha > 0) \quad (7.23)$$

γ numindu-se *constantă de propagare a liniei*, α - *constantă de atenuare*, iar β - *constantă de fază a liniei* (vezi paragraful 7.5), ecuațiile (7.22) se pot scrie simplificat:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U}; \quad \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{I}. \quad (7.24)$$

La rezolvarea acestor ecuații trebuie să se țină seama că \underline{U} și \underline{I} sunt legate prin ecuațiile de ordinul întâi (7.12), de aceea se rezolvă numai una dintre ecuații, de exemplu aceea a tensiunii, curentul deducându-se apoi din (7.21).

Ecuația caracteristică din (7.24) fiind:

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0, \quad (7.25)$$

cu soluțiile:

$$p_{1,2} = \pm(\alpha + j\beta), \quad (7.26)$$

rezultă soluția generală a tensiunii

$$\underline{U}(x) = \underline{A} \cdot e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{B} \cdot e^{\underline{\gamma}x}, \quad (7.27)$$

în care \underline{A} și \underline{B} sunt constante arbitrare, în general complexe.

Curentul se obține înlocuind expresia lui $\underline{U}(x)$ din (7.27) în prima ecuație din (7.21):

$$\underline{I}(x) = -\frac{1}{R_0 + j\omega L_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{R_0 + j\omega L_0} [\underline{A} \cdot e^{-\gamma x} - \underline{B} \cdot e^{\gamma x}]. \quad (7.28)$$

Dacă se notează:

$$\underline{Z}_c = \frac{R_0 + j\omega L_0}{\gamma} = \frac{\gamma}{G_0 + j\omega C_0} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}, \quad (7.29)$$

\underline{Z}_c numindu-se *impedanța caracteristică complexă a liniei*, soluțiile generale (7.27) și (7.28) ale formei complexe a ecuațiilor telegrafistilor se pot pune sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A} \cdot e^{-\gamma x} + \underline{B} \cdot e^{\gamma x} \\ \underline{I}(x) &= \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma x}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

în care constantele arbitrare complexe \underline{A} și \underline{B} sunt determinate prin condițiile de la capetele liniei.

Astfel, în cazul când se dau tensiunea și curentul la bornele de intrare a liniei ($x = 0$), din relațiile (7.30) se obțin:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}(0) = \underline{A} + \underline{B} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}(0) = \frac{\underline{A} - \underline{B}}{\underline{Z}_c}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Din sistemul (7.31) rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1) \\ \underline{B} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Înlocuind valorile lui \underline{A} și \underline{B} din (7.30) și (7.32), se obține:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

Acestea se pot scrie sub forma:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cdot ch\gamma x - \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_1 \cdot sh\gamma x$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cdot ch\gamma x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \cdot sh\gamma x, \quad (7.34)$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor liniilor lungi bifilare, liniare și omogene, în regim sinusoidal în funcție de mărimile de intrare.*

Dacă se dau tensiunea și curentul de la bornele de ieșire ale liniei ($x = l$), rezultă din (7.30):

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 = \underline{U}(l) &= \underline{A} \cdot e^{-\gamma l} + \underline{B} \cdot e^{\gamma l} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}(l) &= \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma l} - \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma l} \end{aligned} \quad (7.35)$$

de unde rezultă relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot e^{-\gamma l} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2) \\ \underline{B} \cdot e^{\gamma l} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2), \end{aligned} \quad (7.36)$$

sau

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2) e^{\gamma l} \\ \underline{B} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2) e^{-\gamma l}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Înlocuind expresiile constante \underline{A} și \underline{B} din (7.37) în soluțiile generale (7.30), rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_2 \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Aceste soluții se pot exprima în funcție de distanța $x' = l - x$, măsurată de la sfârșitul liniei, și cu ajutorul funcțiilor hiperbolice se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x') &= \underline{U}_2 ch\gamma x' + \underline{Z}_c \underline{I}_2 sh\gamma x' \\ \underline{I}(x') &= \underline{I}_2 ch\gamma x' + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\gamma x' \end{aligned} \quad (7.39)$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor liniilor lungi bifilare, liniare și omogene, în regim sinusoidal, în funcție de mărimile de ieșire.*

7.5. Undele de tensiune și de curent în cazul liniilor lungi în regim sinusoidal

Din relațiile (7.30) rezultă că repartiția spațială a tensiunii și a intensității curentului, la un moment dat t , se obține prin adunarea a câte două componente:

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \underline{U}_d(x) + \underline{U}_i(x) \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_d(x) + \underline{I}_i(x),\end{aligned}\quad (7.40)$$

respectiv, în valori instantanee:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= u_d(x, t) + u_i(x, t) \\ i(x, t) &= i_d(x, t) + i_i(x, t)\end{aligned}\quad (7.41)$$

numite: *undă directă de tensiune* (u_d), *undă directă de curent* (i_d), *undă inversă de tensiune* (u_i) și *undă inversă de curent* (i_i).

Astfel, valoarea complexă a undei directe de tensiune este (a se compara 7.30 cu 7.40):

$$\underline{U}_d(x) = A \cdot e^{-\gamma x} \quad (7.42)$$

cu coeficientul

$$\underline{A} = \underline{U}_d(0) = \underline{U}_{d0} = \underline{U}_{d0} \cdot e^{j\psi d_0}. \quad (7.43)$$

Așadar, rezultă:

$$\underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0} \cdot e^{-\gamma x} = \underline{U}_{d0} \cdot e^{j\psi d_0} \cdot e^{-(\alpha + j\beta)x} \quad (7.44)$$

sau

$$\underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j(\beta x - \psi d_0)}. \quad (7.45)$$

Valoarea instantanee corespunzătoare este:

$$u_d(x, t) = \Im m \left\{ \underline{U}_d \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \cdot U_{d0} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi d_0) \quad (7.46)$$

Această undă directă este o undă mobilă amortizată, în sensul că repartiția ei de-a lungul liniei se deplasează pe linie cu o viteză v de la începutul spre sfârșitul liniei și se amortizează după exponențiala $e^{-\alpha x}$. În figura 7.2, a) se reprezintă o astfel de undă atenuată, la momentele t și $t + \Delta t$.

În mod asemănător se poate scrie *unda inversă* de tensiune (vezi relația 7.30):

$$\underline{U}_i(x) = \underline{B} \cdot e^{\gamma x} = \underline{U}_{i0} \cdot e^{\gamma x} = \underline{U}_{i0} \cdot e^{\gamma(l-x)} = \underline{U}_{i0} \cdot e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} = \underline{B}^1 \cdot e^{-\gamma x}, \quad (7.47)$$

care are aceeași formă ca și unda directă (vezi relația 7.42), dacă se exprimă în funcție de variabila $x' = l - x$. Aceasta componentă corespunde, prin urmare, unei unde atenuate inverse care se propagă cu aceeași viteză v în sensul $x -$ lor negativi, a tenuându-se în sensul ei de propagare cu aceeași atenuare α pe unitate de lungime.

În analogie cu tensiunea, din relația a doua (7.30) mai rezulta că și curentul se obține prin suprapunerea a două componente: *curentul direct*

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma x} \quad (7.48)$$

și *curentul invers (sau reflectat)*

$$\underline{I}_i = -\frac{\underline{U}_i(x)}{\underline{Z}_c} = -\frac{\underline{U}_{i0}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma x} \quad (7.49)$$

Relația (7.46) justifică denumirea de *constantă de atenuare* date părții reale α a constantei de propagare și de *constantă de fază* dată părții imaginare β din constanta de propagare.

Se definește *lungimea de undă* λ ca fiind creșterea distanței x corespunzătoare unei creșteri cu 2π a argumentului undei respective (sau cea mai mică distanță dintre cele două puncte în care undele respective sunt în fază):

$$\omega t - \beta x + \psi_{d0} - [\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_{d0}] = 2\pi \quad (7.50)$$

și deci

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (7.51)$$

Viteza de fază a unei unde față de sensul pozitiv al axei x este prin definiție viteza unui punct fictiv mobil în care faza undei este constantă.

Astfel, pentru undele directe, din condiția

$$\omega t - \beta x + \psi_{d0} = \text{const.} \quad (7.52)$$

rezultă viteza de fază:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f \quad (7.53)$$

Coeficientul de reflexie al undelor la sfârșitul liniei ($x = l$) este prin definiție raportul dintre complexul tensiunii undei inverse și complexul tensiunii undei directe la sfârșitul liniei (vezi relația 7.35):

$$\underline{K} = \frac{\underline{U}_{2i}}{\underline{U}_{2d}} = \frac{\underline{B} \cdot e^{\gamma l}}{\underline{A} \cdot e^{-\gamma l}} = \frac{\frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2)}{\frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2)} = \frac{\underline{I}_2 \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} - \underline{Z}_c \right)}{\underline{I}_2 \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} + \underline{Z}_c \right)} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c}, \quad (7.54)$$

unde:

$\underline{Z}_c = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$ este impedanța complexă a receptorului conectat la sfârșitul liniei;

\underline{Z} – impedanța caracteristică complexă a liniei.

Observație

Dacă receptorul conectat la sfârșitul liniei are o impedanță complexă Z_2 egală cu impedanța caracteristică complexă a liniei, adică:

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c, \quad (7.55)$$

coeficientul de reflexie este nul ($K = 0$) și ca urmare nu există unde reflectate, deoarece $\underline{U}_{2i} = K \cdot \underline{U}_{2d}$, adică:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_d(x); \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_d(x). \quad (7.56)$$

Liniile la care este conectat un receptor cu impedanța egală cu impedanța caracteristică complexă a liniei se numesc *linii adaptate*.

7.6. Linia fără distorsiuni. Linia fără pierderi

Dependența de frecvență a constantei de propagare (γ), a constantei de fază (β) și deci a vitezei de fază ($v = \omega/\beta$) face ca dezavantajele dintre componentele (armonicile) de frecvențe diferite ale unui semnal (de exemplu, un curent purtător de informații) transmis printr-o linie lungă să nu fie aceleași la începutul și la sfârșitul liniei. Pentru eliminarea acestei distorsiuni a semnalelor cauzată de viteza de fază diferită a armoniilor componente de frecvențe diferite, se folosesc *liniile fără distorsiune* ai căror parametri satisfac condiția lui Heaviside:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (7.57)$$

În acest caz, constanta de propagare a liniei fără distorsiuni are expresia:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (7.58)$$

Așadar:

$$\alpha = \Re_e[\underline{\gamma}] = \sqrt{R_0 G_0} \quad (7.59)$$

$$\beta = \Im m[\underline{\gamma}] = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (7.60)$$

Ca urmare, conform relației (7.53), rezultă o viteză de fază:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (7.61)$$

independentă de frecvență.

Pentru o linie bifilară aeriană cu conductoare paralele de diametru $2a$ foarte mic față de distanța d dintre axele conductoarelor și față de lungimea l a acestora, inductivitatea și capacitatea lineică au valorile:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (7.62)$$

$$C_0 = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} \quad (7.63)$$

și deci viteza de fază este

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad (7.64)$$

egală cu viteza de propagare a luminii în vid.

Impedanța caracteristică complexă a unei linii fără distorsiuni este:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (7.65)$$

Pentru realizarea lui *Heaviside* (7.57) se mărește inductivitatea cablurilor telefonice, intercalând în serie cu acestea bobine de mare inductivitate (procedeeul *Pupin*).

Liniile fără pierderi sunt linii idealizate cu

$$R_0 = 0; \quad G_0 = 0. \quad (7.66)$$

Ele satisfac condiția lui *Heaviside* (7.57) și sunt linii fără distorsiuni cu o constantă de atenuare (vezi relația 7.59) nulă:

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = 0 \quad (7.67)$$

Liniile fără pierderi au impedanța caracteristică (vezi relația 7.65):

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (7.68)$$

și o repartitie spațială periodică sinusoidală (ne-amortizată) a tensiunii și curentului, de-a lungul liniei (vezi relația 7.46).

CAPITOLUL 8. CIRCUITE LINIARE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

8.1 Introducere. Analiza armonică a semnalelor

Până în prezent am studiat comportarea circuitelor liniare dacă excitația este sinusoidală. În realitate tensiunile și curenții printr-o rețea electrică sunt diferiți de forma sinusoidală. Abaterea acestora de la forma sinusoidală se numește *distorsiune* sau *deformare*.

Un astfel de exemplu îl constituie bobina neliniară (cu miez de fier) căreia dacă i se aplică o tensiune sinusoidală (excitație) răspunsul acesteia (curentul) este nesinusoidal.

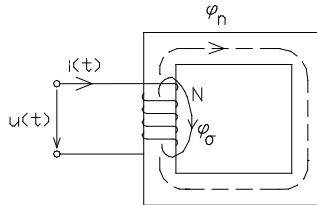
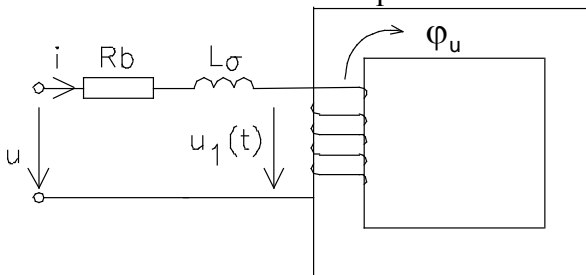


Fig. 8.1

Presupunând o bobina cu miez de fier (fig.8.1) alimentată de la o sursă de tensiune sinusoidală $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ rezultă ecuația în tensiune a bobinei cu miez de fier prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff:

$$R_b i - u = - \frac{d\Phi_t}{dt} = - \frac{d(\Phi_\sigma + \Phi_u)}{dt} = -L_\sigma \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi_u}{dt}, \quad (8.1)$$

unde: $-L_\sigma \frac{di}{dt}$ este fluxul de dispersie cu o dependență liniară față de curentul din circuit ($L_\sigma \sim \mu_0$). Dependența flux-curent $\Phi_u(i)$ este neliniară datorată prezenței circuitului feromagnetic al bobinei iar ecuației în tensiune a bobinei cu miez de fier îi corespunde următoarea schemă echivalentă:



bobina ideală ce prezintă numai flux util ($\Phi_\sigma = 0$)

Fig. 8.2

$$u = R_b i + L_\sigma \frac{di}{dt} + N \frac{d\varphi_u}{dt} \quad (8.2)$$

$$u_1(t) = N \frac{d\varphi_u}{dt}$$

Considerând că bobina are R_b și L_σ neglijabile (fapt a propiat de realitate) atunci tensiunea de alimentare $u = u_1(t) = N \frac{d\varphi_u}{dt}$.

Din relația de mai sus se poate determina forma de variație a fluxului magnetic

$$\varphi_u = \frac{1}{N} \int u(t) dt = \frac{1}{N} \int \sqrt{2}U \sin \omega t = \frac{\sqrt{2}U}{\omega N} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \Phi_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.3)$$

Fluxul magnetic util (în miezul feromagnetic) este sinusoidal și se află în urma tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$. Forma de variație a curentului ce parcurge bobina este funcție de dependența $\Phi_u=f(i)$ a materialului feromagnetic care la altă scară, (vezi legile câmpului electromagnetic), reprezintă dependența

$$B=f(H) \left(\Phi_{s_r} = \iint_{s_r} \bar{B} d\bar{A}, \quad \oint_r \bar{H} di = Ni \right) \quad (8.4)$$

Pentru materialele feromagnetice moi cu dependența flux – curent (fig.8.3) atât timp cât se lucrează cu tensiuni mici fluxul magnetic are punctul maxim de funcționare numai în *zona liniară* (OM) iar curentul este sinusoidal.

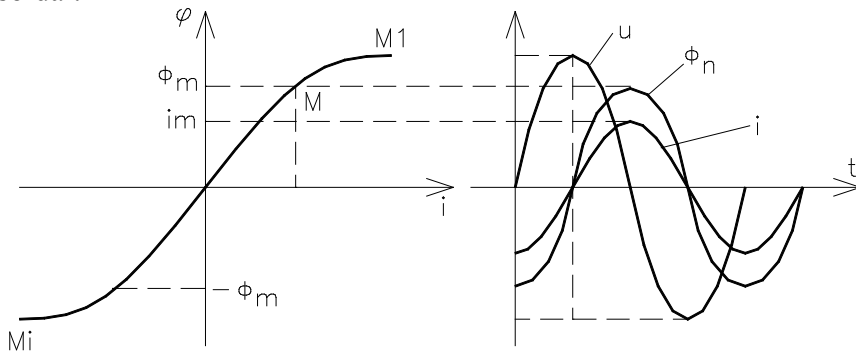


Fig. 8.3

Dacă punctul de funcționare ajunge în zona de saturație fluxul magnetic rămâne sinusoidal, iar curentul are forma nesinusoidală prezentată în fig.8.4

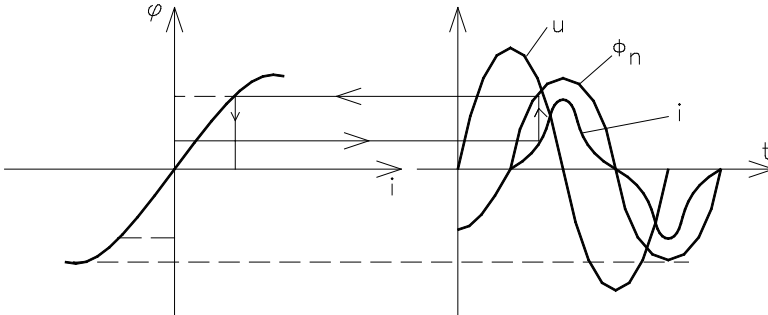


Fig. 8.4. Construcția grafică a formei de variație a curentului.

La un moment t dat (fig.8.5.) bobinei îi corespunde un flux φ căruia în caracteristica $\varphi=\varphi(i)$ îi corespunde curentul i . Valoarea acestui curent se rabatează pe verticală, iar în dependența acestuia funcție de timp, corespunde valorii curentului la momentul de timp t dat.

Pentru materialele feromagnetice ce prezintă *ciclu de histerezis* (dure) curentul este deformat și nu mai este în fază cu fluxul (fig.8.5).

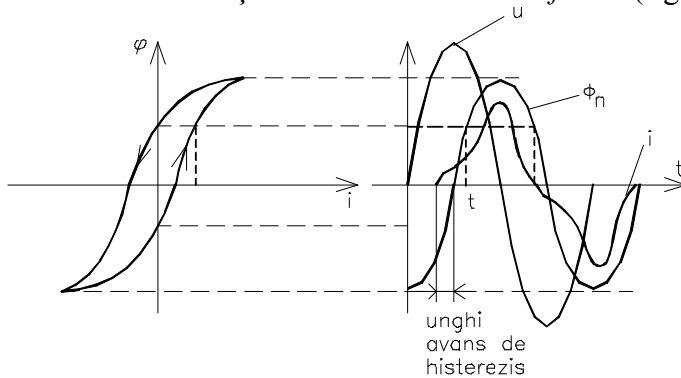


Fig. 8.5.

La $\varphi_u=0$ curentul este impus de H_c iar pentru anularea fluxului remanent Φ_{rem} curentul are o valoare diferită de zero.

Construcția grafică a formei de variație a curentului

- la momentul t_1 corespunde pe curba de creștere a fluxului îi corespunde un curent

- la momentul t_2 la același flux magnetic pe curba descendentă a caracteristicii flux curenți curenții este nul iar fluxul pozitiv egal cu valoarea remanentă

Pentru acest ultim caz ecuația în tensiune a bobinei cu miez de fier este

$$u = R_b i + L_\sigma \frac{di}{dt} + u_1 \quad \text{cu} \quad u_1(t) = N \frac{d\Phi_u}{dt} - \text{t.e.m. de autoinducție.}$$

Reprezentând ecuația de mai sus în complex simplificat, prin alegerea fluxului magnetic în axa reală, rezultă diagrama de fazori (fig.8.6) și schema echivalentă (fig.8.7):

$$\underline{U} = R_b \underline{I} + jX_\sigma \underline{I} + \underline{U}_1 \quad \text{unde} \quad \underline{U}_1 = j\omega \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}} \quad (8.5)$$

Bilanțul de puteri al bobinei se obține prin amplificarea ecuației de mai sus cu valoarea complex conjugată a curenților rezultând:

$$\underline{U} \underline{I}^* = R_b I^2 + jX_\sigma I^2 + \underline{U}_1 \underline{I}^* \text{ iar prin separarea părții reale și}$$

imaginare

$$P = UI \cos \varphi = R_b I^2 + \text{Re} \{ \underline{U}_1 \underline{I}^* \} = P_J + P_H \quad (8.6)$$

$$Q = UI \sin \varphi = Q_\sigma + Q_H \quad (8.7)$$

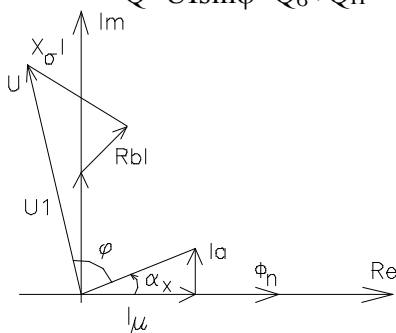


Fig. 8.6

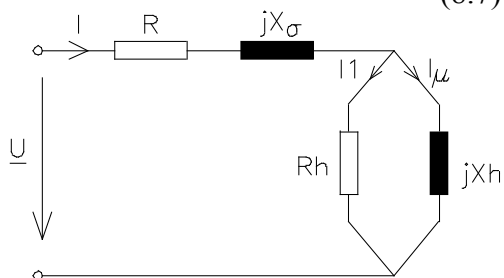


Fig. 8.7

Excitând o bobină cu miez de fier de la o sursă de curenți sinusoidală, tensiunea la bornele bobinei este nesinusoidală.

8.2. Analiza armonică a funcțiilor periodice

Orice funcție periodică $y(t)=y(t+nT)$ ce îndeplinește condițiile Dirichlet (mărginită, netedă pe porțiuni, număr finit de discontinuități $\int |y| dt < \infty$) poate fi reprezentată (admite o dezvoltare) printr-o serie trigonometrică denumită serie Fourier de forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (8.8)$$

unde A_0 – componenta continuă a funcției
 A_k – valoarea efectivă a armoniciei de ordinul k
 γ_k – faza inițială a armoniciei de ordin k .

Altfel spus orice funcție periodică nesinusoidală este o sumă de funcții *sinusoidale de pulsații diferite* ($k=1 \dots \infty$).

Alte forme ale seriei *Fourier* se obțin din dezvoltarea funcției $\sin(k\omega t + \gamma_k)$ și anume

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} (A_k \sin k\omega t \cos \gamma_k + A_k \sin \gamma_k \cos k\omega t) \quad (8.9)$$

Notând $B_k = A_k \cos \gamma_k$, iar $C_k = A_k \sin \gamma_k$, rezultă
 $\operatorname{tg} \gamma_k = -\frac{C_k}{B_k} \Rightarrow \gamma_k = \operatorname{arctg} \frac{C_k}{B_k}$, r respectiv $A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$ sau
 $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{B_k}{C_k}$

Determinarea coeficienților seriei Fourier se face din dezvoltarea

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\omega t \quad (8.10)$$

Integrând seria *Fourier* pe durata unei perioade $y(t)$ se determină componenta continuă:

$$\int_0^T y(t) dt = \int_0^T A_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \underbrace{\int_0^T \sin k\omega t dt}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \underbrace{\int_0^T \cos k\omega t dt}_{=0} \quad (8.11)$$

rezultând $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$

Valorile efective ale fundamentalei și armonicilor seriei *Fourier* se pot determina prin înmulțirea cu $\sin k\omega t$ sau $\cos k\omega t$ a funcției nesinusoidale și integrarea pe durata unei perioade

$$\int_0^T y(\tau) \sin k\omega \tau d\tau = A_0 \int_0^T \sin k\omega \tau d\tau + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} \int_0^T B_k \underbrace{\sin^2 k\omega \tau}_{\frac{1-\cos 2k\omega \tau}{2}} d\tau + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} \int_0^T C_k \underbrace{\sin k\omega \tau \cos k\omega \tau}_{\sin 2k\omega \tau}_{=0} d\tau$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} B_k \frac{T}{2} = \int_0^T y(t) \sin k\omega t dt \quad \text{respectiv} \quad \sqrt{2} C_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t dt \quad (8.12)$$

Forma complexă a seriei trigonometrice se obține din forma complexă a funcțiilor trigonometrice $\sin k\omega t = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t})$ respectiv

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2}(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t})$$

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \cdot \frac{1}{2j}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \frac{1}{2}(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}) = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k}{2} + \frac{B_k}{2j} \right) \cdot e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k}{2} - \frac{B_k}{2j} \right) \cdot e^{-jk\omega t} \quad (8.13) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k - jB_k}{2} \right) \cdot e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k + jB_k}{2} \right) \cdot e^{-jk\omega t} \end{aligned}$$

Dacă însumarea se face după $-k$ în ultimul termen al expresiei de mai sus atunci:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \sqrt{2} \left(\frac{C_k - jB_k}{2} \right) \cdot e^{jk\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \sqrt{2} \left(\frac{C_k + jB_k}{2} \right) \cdot e^{-jk\omega t} \quad (8.14)$$

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_k \cdot e^{jk\omega t} \quad (8.15)$$

unde: $A_0 = \Phi_0$; $\Phi_k = \frac{C_k - jB_k}{2} = \frac{1}{2} A_k e^{-j \arctg \frac{B_k}{C_k}} = \frac{1}{2} A_k e^{-j\varphi_k}$

Aceași formă complexă a seriei *Fourier* rezultă și din înlocuirea coeficienților:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (8.16)$$

$$\sqrt{2}B_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin k\omega t dt \quad (8.17)$$

$$\sqrt{2}C_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t dt \quad (8.18)$$

În expresia funcției $f(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \sin k\omega\tau \sin k\omega t d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \cos k\omega\tau \cos k\omega t d\tau \quad (8.19)$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\sin k\omega\tau \sin k\omega t + \cos k\omega\tau \cos k\omega t) \right] d\tau \quad (8.20)$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega(t-\tau)}{e^{jk\omega(t-\tau)} + e^{-j[k\omega(t-\tau)]}} \right] d\tau \quad (8.21)$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{jk\omega(t-\tau)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-jk\omega(t-\tau)} \right] d\tau \quad (8.22)$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega(t-\tau)} d\tau = \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau \right)}_{\Phi_k(jk\omega)} \cdot e^{jk\omega t} \quad (8.23)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \underline{\Phi}_k \cdot e^{jk\omega t}, \text{ unde } \underline{\Phi}_k = \Phi_k(jk\omega) \cdot e^{-j\varphi_k} = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau \quad (8.24)$$

Funcția $\underline{\Phi}_k$ este o funcție de variabilă complexă cu modulul dependent de frecvență denumit amplitudine spectrală dar funcția Φ_k are și argumentul dependent de frecvență.

Reprezentarea funcției de frecvență $\Phi_k = \Phi_k(k\omega)$ a modulului conduce la definirea spectrului de frecvență al amplitudinilor (spectrul discret) iar reprezentarea argumentului $\varphi_k = \varphi_k(k\omega)$ conduce la spectrul de frecvență al fazelor inițiale

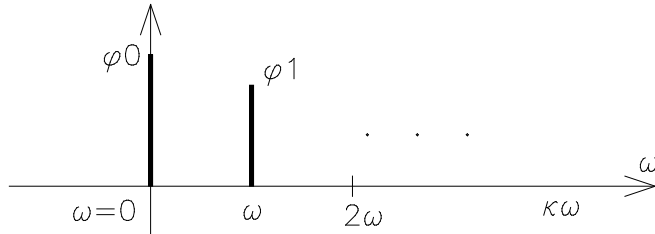


Fig. 8.8

Concluzie:

Orice semnal periodic este o sumă de semnale complexe (combinație liniară). Astfel funcția $x(t) = X_m \cos \omega t$ provine din $x(t) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$

cu:

$$\underline{x} = x_m e^{j\omega t} = x_m (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (8.25)$$

$$\underline{x}^* = x_m e^{-j\omega t} = x_m (\cos \omega t - j \sin \omega t) \quad (8.26)$$

8.3. Exemple de semnale periodice particulare

a) Semnale pare satisfac ecuația $y(t)=y(-t)=y(T-t)$

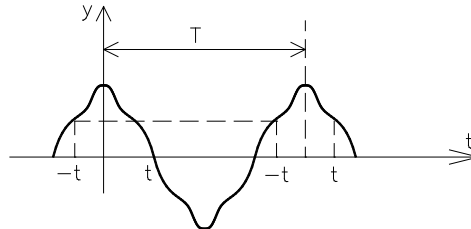


Fig. 8.9

Seria *Fourier* devine:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t \quad (8.27)$$

$$y(-t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega(-t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega(-t) \text{ iar prin impunerea condiției}$$

de funcție pară:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t = A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t \quad (8.28)$$

rezultă: $B_k=0$

Dezvoltarea în serie a funcției pare este: $y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t$,

unde: $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) d\tau$; $\sqrt{2}C_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \cos k\omega\tau d\tau$, s au:

$$y(t) = \sum_0^{\infty} \underline{\Phi}_k \cdot e^{jk\omega t} \quad \text{cu:}$$

$$\underline{\Phi}_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) (\cos k\omega\tau - j \sin k\omega\tau) d\tau \text{ având numai parte reală}$$

(vezi reprezentarea complexă a mărimilor sinusoidale trecute din cosinus).

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}A_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \text{ fiind pară } n=2k.$$

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_{2k} \sin(2k\omega t + \gamma_{2k}) \quad (8.29)$$

b) Semnalele impare satisfac relația $y(t) = -y(-t) = -y(T-t)$

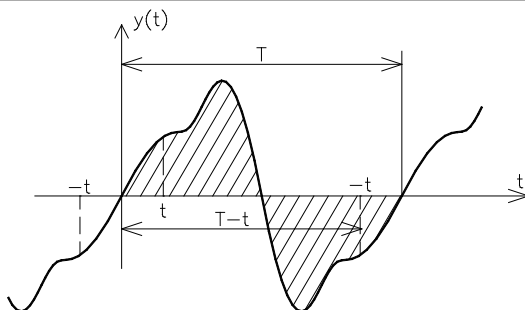


Fig. 8.10

Impunând condiția de semnal impar $y(t) = -y(-t) \Rightarrow$ rezultă:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t =$$

$$= - \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega(-t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega(-t) \right] \quad (8.30)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \cos k\omega t$$

cu: $\sqrt{2}B_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \sin k\omega\tau \, d\tau$ sau seria complexă: $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_k \cdot e^{jk\omega t}$

unde: $\Phi_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} \, d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) (\cos k\omega\tau - j \sin k\omega\tau) \, d\tau$, dar:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}A_n \sin(n\omega t + \gamma_n), \quad n=2k+1 \quad (8.31)$$

$$\Rightarrow y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_{2k+1} \sin((2k+1)\omega t + \gamma_{2k+1}) \quad (8.32)$$

8.4. Valori caracteristice ale semnalelor periodice nesinusoidale

a) Valoarea efectivă. Fi e $y_1(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$. C onform definiției valoarea efectivă Y a unui semnal $y(t)$ este:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) \, dt} \quad (8.33)$$

$$y^2 = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \right)^2 = \quad (8.34)$$

$$A_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_0 A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \right]^2$$

$$y^2 = A_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \sin^2(k\omega t + \gamma_k) + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_p A_q \sin(p\omega t + \gamma_p) \sin(q\omega t + \gamma_q) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_0 A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (8.35)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt = \frac{1}{T} A_0^2 \int_0^T dt + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \underbrace{\int_0^T \sin^2(k\omega t + \gamma_k) dt}_{\frac{1}{2}T} +$$

$$+ \frac{2}{T} \sum_{\substack{p \\ p \neq q}} \sum_{q=1}^{\infty} A_p A_q \underbrace{\int_0^T \sin(p\omega t + \gamma_p) \sin(q\omega t + \gamma_q) dt}_{=0} + \quad (8.36)$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}A_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \underbrace{\int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_k) dt}_{=0}$$

Introducând simbolul $\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p=q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$ și deoarece:

$$\int_0^T \sin(p\omega t + \gamma_p) \sin(q\omega t + \gamma_q) dt = \frac{1}{2} \delta_{pq} \cos(\gamma_p - \gamma_q) \quad (8.37)$$

rezultă:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2} \quad (8.38)$$

$$Y = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2} = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_d^2} \quad (8.39)$$

unde:

$$- Y_d = \sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2} \text{ se numește } \underline{\text{reziduul deformant}}.$$

Definim în regim sinusoidal și nesinusoidal următorii factori:

<p>- de <i>Regim sinusoidal</i> amplitudine (vârf)</p> $K_v = \frac{Y_{\max}}{Y} = \frac{\max_{\text{efectiva}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ <p>- de formă $K_f = \frac{Y}{Y_{\text{medT}/2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$</p>	<p><i>Regim nesinusoidal</i></p> $K_v = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{Y^2 - Y_0^2}}$ $K_f = \frac{Y}{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} y(t) dt}$
---	---

Pentru regimul nesinusoidal se definește

$$K_d = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} Y_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2}} = \frac{Y_d}{\sqrt{Y^2 - Y_0^2}} \in (0,1) \text{ și se numește factor de distorsiune.}$$

8.5. Puteri ale circuitelor liniare în regim permanent nesinusoidal

Dacă unui dipol i se aplică o tensiune nesinusoidală și un curent nesinusoidal rezultă că absoarbe o putere instantanee egală cu produsul $u \cdot i = p$.

Dacă $u(t) = U_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk})$ iar $i(t) = I_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik})$

expresia puterii instantanee va fi:

$$p = u \cdot i = U_0 I_0 + \sqrt{2} U_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik}) + \sqrt{2} I_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_p I_q \sin(p\omega t + \gamma_{pu}) \sin(q\omega t + \gamma_{qi}) \quad (8.40)$$

a) Puterea activă reprezintă valoarea medie a puterii conform relației

$$\begin{aligned}
 P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt &= \frac{1}{T} U_0 I_0 \int_0^T dt + \frac{\sqrt{2} U_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{ik}) dt + \frac{\sqrt{2} I_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) dt + \\
 &+ \frac{2}{T} \sum_q \sum_p U_p I_q \int_0^T \underbrace{\sin(p\omega t + \gamma_{pu}) \sin(q\omega t + \gamma_{qi})}_{\frac{1}{2} \delta_{pq} \cos(\gamma_{up} - \gamma_{iq})} dt \\
 &\qquad\qquad\qquad p=q \text{ exista integrala}
 \end{aligned} \tag{8.41}$$

Rezultă astfel : $P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$ sau

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots + U_n I_n \cos \varphi_n \tag{8.42}$$

în care φ_k este defazajul dintre armonicile de tensiune și curent.

b) Puterea reactivă (prin simetrie) Q este egală cu suma puterilor reactive ale armonicilor.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \quad - \text{suma puterilor reactive corespunzătoare}$$

tuturor armonicilor

c) Puterea aparentă S se definește prin produsul valorilor efective ale tensiunii U și curentului I

$$S = U \cdot I \quad - \text{produsul valorilor efective cu } U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_d^2},$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_d^2}$$

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

In regim nesinusoidal pătratul puterii

aparente nu este egal cu suma pătratelor puterilor activă și reactivă ci

$$S^2 = U^2 \cdot I^2 = U_0^2 I_0^2 + U_0^2 I_1^2 + U_0^2 I_d^2 + U_1^2 I_0^2 + U_1^2 I_1^2 + U_1^2 I_d^2 + \dots \tag{8.43}$$

$$\Rightarrow S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (U_p^2 I_q^2 + U_q^2 I_p^2 - 2U_p U_q I_p I_q \cos(\varphi_p - \varphi_q))} \tag{8.44}$$

cu: $\varphi_p = \gamma_{up} - \gamma_{ip}$, $\varphi_q = \gamma_{uq} - \gamma_{iq}$.

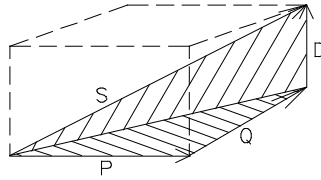


Fig. 8.11

$$\xi = \angle(S_1 \text{ și } S); \quad \varphi = \angle(S_1 \text{ și } P) \quad (8.45)$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S_1}, \quad \cos \xi = \frac{S_1}{S} \quad (8.46)$$

Factorul de putere în regim nesinusoidal se definește la fel ca în regim sinusoidal $K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} = \frac{P}{S} \cdot \frac{S_1}{S_1} = \frac{P}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S} = \cos \varphi \cos \xi$; $K = \cos \varphi \cos \xi < \cos \varphi = K_p$.

$$\text{Deoarece } D = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (U_p^2 I_q^2 + U_q^2 I_p^2 - 2U_p U_q I_p I_q \cos(\varphi_p - \varphi_q))}$$

$$\text{și în cazul rezonanței pe toate armonicile } \Rightarrow D = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_p \sum_q (U_p I_q - U_q I_p)^2}$$

nu se anulează puterea deformantă. Pentru ca puterea deformantă D să fie nulă, trebuie ca $\frac{U_p}{I_p} = \frac{U_q}{I_q} = \text{ct.}$. Deci $U_p I_q = U_q I_p$ și $\varphi_p = \varphi_q$, condiție ce implică rezonanța pe toate armonicile cu amplitudini proporționale.

8.6. Elemente liniare de circuit în regim nesinusoidal

1. Rezistorul. Se consideră un rezistor R la bornele căruia se aplică tensiunea

$$u(t) = U_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) \text{ având componenta continuă nenulă}$$

și coeficientul de distorsiune k_u

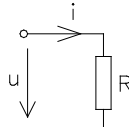


Fig. 8.12

Aplicând relația Ohm se determină curentul și coeficientul de distorsiune al acestuia k_i :

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k}{R} \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) = I_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik}) \quad (8.47)$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{R}, \quad I_k = \frac{U_k}{R}, \quad \varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = 0 \quad (8.48)$$

Concluzie: Rezistorul nu modifică forma curentului față de a tensiunii.

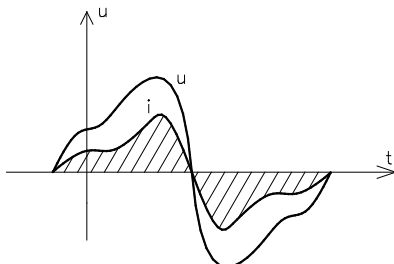


Fig. 8.13

$$- K_{di} = K_{du} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} \quad (8.49)$$

- puterea absorbită $P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = R \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = RI^2$.

2 **Bobina ideală** (față de componenta continuă U_0 bobina ideală se comportă ca un scurtcircuit)

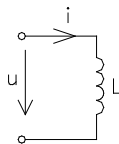


Fig. 8.14

Din ecuația $u_L = L \frac{di}{dt}$, deci $i = \frac{1}{L} \int u_L$ se deduce intensitatea curentului

$$i = \frac{1}{L} \int \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{U_k}{k\omega L} \sin(k\omega t + \gamma_{uk} - \pi/2) \quad (8.50)$$

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \gamma_i) \quad (8.51)$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{U_k}{k\omega L}, \quad \varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = \pi/2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = 0 \quad (\text{reduce gradul de deformare})$$

- coeficientul de distorsiune al tensiunii $K_{du} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}}$ iar al curentului

$$K_{id} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k\omega L}\right)^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k\omega L}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{U_k^2}{k^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{k^2}}} < K_{du} \quad (8.52)$$

Bobina ideală reduce gradul de deformare al curentului față de cel al tensiunii.

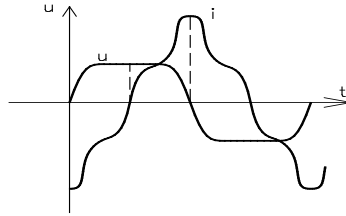


Fig. 8.15

- puteri ale bobinei ideale

$$P=0$$

$$S = \sqrt{Q^2 + D^2} \quad (8.53)$$

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega L) I_k^2 > 0 \quad (8.54)$$

3. Condensatorul ideal

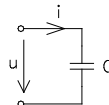


Fig. 8.16

$$\text{Din ecuația } i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} k\omega C U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk} + \pi/2) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik})$$

rezultă: $I_0 = 0$, $I_k = k\omega C U_k$, $\varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = -\pi/2$.

$$K_{di} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} (k\omega C U_k)^2}{\sum_{k=1}^{\infty} (k\omega C U_k)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} (kU_k)^2}{\sum_{k=1}^{\infty} (kU_k)^2}} > K_{du} \quad (8.55)$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k \rightarrow \infty \Rightarrow$ Armonicile de curent contribuie la modificarea pronunțată a formei curentului față de a tensiunii.

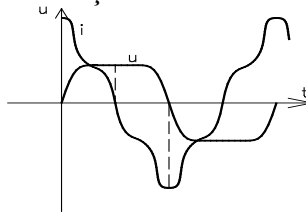


Fig. 8.17

$$S = \sqrt{Q^2 + D^2} \quad (8.56)$$

8.7. Analiza circuitelor în regim nesinusoidal

În regim nesinusoidal curenții $I_k(t)$ și tensiunile $u_k(t)$ fiind funcții periodice de timp, admit dezvoltări în serie *Fourier* și notând I_{kn} respectiv u_{kn} armonicile de ordinul n ecuațiile Kirchhoff se scriu astfel utilizând teorema superpoziției.

T1K

$$i = \sum_{n \in (s)} i_n = \sum_{n \in (s)} I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_{nk}(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n \in (s)} I_0 = 0 - T1K \text{ pentru valori continui} \\ \sum_{n \in (s)} i_{k1} = 0 - \text{pentru fundamentala} \\ \sum_{n \in (s)} i_{k2} = 0 - \text{pentru armonica de ordin 2} \end{cases} \quad (8.57)$$

T2K

$$\sum_{j \in (m)} U_j = 0 \Rightarrow \sum_{j \in (m)} (U_{0j} + \sum U_{jk}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j \in (m)} U_{0j} = 0 - \text{suma tensiunilor la borne pentru } j \in (m) = 0 \\ \sum_{j \in (m)} U_{1j} = 0 - \text{pentru fundamentala} \\ \sum_{j \in (m)} U_{2j} = 0 - \text{pentru armonica de ordin 2} \end{cases} \quad (8.58)$$

Se consideră, spre exemplificare, următorul circuit alimentat cu $u=80\sin\omega t+60\sin 3\omega t$, $f=50\text{Hz}$. Dacă $r=2\Omega$, $L=\frac{20}{\pi}\text{mH}$, $C=\frac{5}{\pi}\text{mF}$ să se determine valorile instantanee ale curenților, P , S , Q , și D .

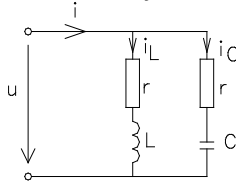


Fig. 8.18

Rezolvare:

Aplicăm teorema superpoziției și cele două teoreme Kirchhoff pentru rezolvare.

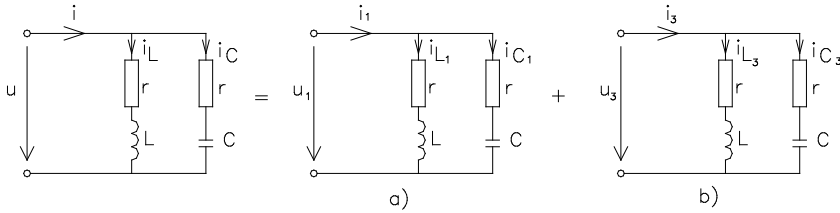


Fig. 8.19

$$u = u_1 + u_3 = 80 \sin \omega t + 60 \sin 3 \omega t \quad (8.59)$$

a) Pentru fundamentală $u_1 = 80 \sin \omega t$,

$$\underline{Z}_{L1} = r + j\omega L = 2 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \frac{20}{\pi} \cdot 10^{-3} = 2 + 2j = 2,8e^{j\pi/4} \quad (8.60)$$

$$\underline{Z}_{C1} = r - j \frac{1}{\omega C} = 2 - j \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot \frac{5}{\pi} \cdot 10^{-3}} = 2 - 2j = 2,8e^{-j\pi/4} \quad (8.61)$$

Curenții prin bobină și condensator sunt:

$$\underline{I}_{-L1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{L1}} = \frac{80}{2,8e^{j\pi/4}} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 2,8} e^{-j\pi/4} \quad (8.62)$$

$$\underline{I}_{-C1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{80}{2,8e^{-j\pi/4}} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 2,8} e^{j\pi/4} \quad (8.63)$$

Curentul total este dat de expresia:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{e1}} \text{ cu } \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{Z}_{L1}\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{C1}} = \frac{2,8 \cdot 2,8 \cdot e^{-j\pi/4} \cdot e^{j\pi/4}}{2 + 2j + 2 - 2j} = \frac{2,8^2}{4} \cong 2 \quad (8.64)$$

$$\underline{I} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 2} e^{j0} = \frac{40}{\sqrt{2}} e^{j0} \quad (8.65)$$

$$\text{rezultând } \begin{cases} i_{L1} = 28,3 \sin(\omega t - \pi/4) \\ i_{C1} = 28,3 \sin(\omega t + \pi/4) \\ i = 40 \sin \omega t \end{cases} \quad (8.66)$$

b) Pentru armonica a treia:

$$\underline{Z}_{L3} = r + j \cdot 3\omega L = 2 + 6j \quad (8.67)$$

$$\underline{Z}_{C3} = r - j \frac{1}{3\omega C} = 2 - j \frac{2}{3} \quad (8.68)$$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_{L3}\underline{Z}_{C3}}{\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{C3}} = 2 \quad (8.69)$$

$$\underline{I}_{L3} = \frac{U_3}{Z_{L3}} = \frac{60}{\sqrt{2}(2+6j)} = 9,5 \cdot e^{-j71^\circ} \quad (8.70)$$

$$\underline{I}_{C3} = \frac{U_3}{Z_{C3}} = \frac{60}{\sqrt{2}\left(2 - j\frac{2}{3}\right)} = 28,4 \cdot e^{-j18^\circ} \quad (8.71)$$

$$\underline{I} = \frac{U}{Z_{e3}} = \frac{60}{\sqrt{2} \cdot 2} e^{j0} \quad (8.72)$$

$$i_{L3} = \text{Im}\left\{ \underline{I}_{L3} \cdot e^{j3\omega t} \sqrt{2} \right\} \quad (8.73)$$

$$i_{C3} = \text{Im}\left\{ \underline{I}_{C3} \cdot e^{j3\omega t} \sqrt{2} \right\} \quad (8.74)$$

$$i_3 = \text{Im}\left\{ \underline{I} \cdot e^{j3\omega t} \sqrt{2} \right\} \quad (8.75)$$

Puterile sunt exprimate prin relațiile:

$$S = U \cdot I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{80^2 + 60^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{40^2 + 30^2} = 2500 \text{ VA} \quad (8.76)$$

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot 8040 \cos 0 + \frac{11}{2} \cdot 60 \cdot 30 \cos 0 = 2500 \text{ W} \quad (8.77)$$

$$Q=0; \quad D=0$$

8.8. Circuite liniare trifazate sub tensiuni simetrice nesinusoidale

Un sistem de trei mărimi periodice y_1, y_2, y_3 alcătuiesc un sistem trifazat simetric de succesiune directă, dacă mărimea y_2 rezultă din mărimea y_1 cu o întârziere de o treime de perioadă și mărimea y_3 rezultă din mărimea y_1 cu o întârziere de două treimi de perioadă.

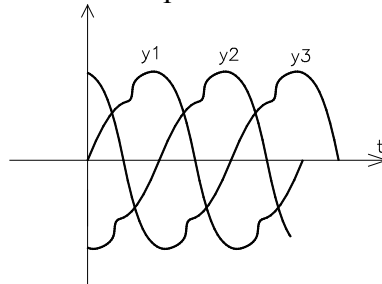


Fig. 8.20

Presupunând sistemul trifazat simetric de tensiuni nesinusoidale:

$$\begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y\left(t - \frac{T}{3}\right) \\ y_3(t) = y\left(t - \frac{T}{3} - \frac{T}{3}\right) = y\left(t - \frac{2T}{3}\right) \end{cases} \quad (8.78)$$

Dezvoltările în serie *Fourier* ale mărimilor y_1 , y_2 și y_3 sunt:

$$y_1(t) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2}Y_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \quad (8.79)$$

$$y_2(t) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2}Y_n \sin\left(n\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \gamma_n\right) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2}Y_n \sin\left(n\omega t + \gamma_n - n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.80)$$

$$y_3(t) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2}Y_n \sin\left(n\omega\left(t - \frac{2T}{3}\right) + \gamma_n\right) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2}Y_n \sin\left(n\omega t + \gamma_n - n \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \quad (8.81)$$

și pun în evidență proprietățile:

1. pentru armonicile de ordin $n=3k$

$$y_{1,3k} = \sqrt{2}Y_{3k} \sin(3k\omega t + \gamma_{3k}) \quad (8.82)$$

$$y_{2,3k} = \sqrt{2}Y_{3k} \sin\left(3k\omega t + \gamma_{3k} - 3k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}Y_{3k} \sin(3k\omega t + \gamma_{3k}) \quad (8.83)$$

$$y_{3,3k} = \sqrt{2}Y_{3k} \sin\left(3k\omega t + \gamma_{3k} - 3k \cdot \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}Y_{3k} \sin(3k\omega t + \gamma_{3k}) \quad (8.84)$$

mărimile sunt în fază și alcătuiesc sisteme omopolare

2. armonicile de ordin $n=(3k+1)$

$$y_{1,3k+1} = \sqrt{2}Y_{3k+1} \sin((3k+1)\omega t + \gamma_{3k+1}) \quad (8.85)$$

$$y_{2,3k+1} = \sqrt{2}Y_{3k+1} \sin\left((3k+1)\omega t + \gamma_{3k+1} - (3k+1) \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.86)$$

$$y_{3,3k+1} = \sqrt{2}Y_{3k+1} \sin\left((3k+1)\omega t + \gamma_{3k+1} - (3k+1) \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \quad (8.87)$$

alcătuiesc sistem de succesiune directă.

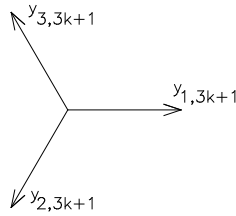


Fig. 8.21

3. armonicile de ordin $n=3k+2$ printr-un calcul similar alcătuiesc un sistem de succesiune inversă.

a) Conexiunea stea fără nul

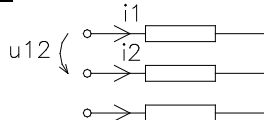


Fig. 8.22

Din relația $i_1+i_2+i_3=0$, în care:

$$i_1 = \sum_1^{\infty} (i_{1,3k} + i_{1,3k+1} + i_{1,3k+2}); i_2 = \sum_1^{\infty} (i_{2,3k} + i_{2,3k+1} + i_{2,3k+2})$$

$$i_3 = \sum_1^{\infty} (i_{3,3k} + i_{3,3k+1} + i_{3,3k+2}) \quad (8.88)$$

rezultă:

$$0 = \sum \underbrace{(i_{1,3k} + i_{2,3k} + i_{3,3k})}_{=0} + \sum \underbrace{(i_{1,3k+1} + i_{2,3k+1} + i_{3,3k+1})}_{\sum \text{ sistem simetric direct}=0} + \sum \underbrace{(i_{1,3k+2} + i_{2,3k+2} + i_{3,3k+2})}_{\sum \text{ sistem simetric invers}=0} \quad (8.89)$$

Prin urmare, curenții de linie nu conțin armonicile multiplu de 3. În rețelele de frecvență industrială curenții și tensiunile conțin numai armonicile impare, valoarea efectivă a curentului de linie are expresia

$I_1 = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2}$ iar tensiunea de linie:

$$U_{12} = U_{10} - U_{20} = \sum U_{f10,3k} + U_{f10,3k+1} + U_{f10,3k+2} - \sum U_{f20,3k} + U_{f20,3k+1} + U_{f20,3k+2}$$

$$U_{12} = \sum \underbrace{(U_{f10,3k} - U_{f20,3k})}_{=0} + \sum \underbrace{(U_{f20,3k+1} - U_{f30,3k+1})}_{\sum (U_{12,3k+1} + U_{12,3k+2})} + \sum (U_{f10,3k+2} - U_{f20,3k+2}) \quad (8.90)$$

Tensiunile de linie nu conțin armonici multiplu de 3. Valorile efective ale tensiunilor de fază respectiv de linie sunt: $U_f = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}$;

$$U_l = \sqrt{U_{11}^2 + U_{15}^2 + \dots}$$

b) Conexiunea stea cu nul

Din relația $i_1+i_2+i_3=i_N$, rezultă curentul prin conductorul de nul:

$$\sum(i_{1,3k} + i_{2,3k} + i_{3,3k}) = 3\sum i_{3k} \quad (8.91)$$

Prin urmare, conductorul de nul este parcurs de un curent care conține numai armonici multipli de 3.

c) Conexiunea triunghi

Tensiunea în lungul laturilor triunghiului este egală cu suma tensiunilor la bornele laturilor triunghiului rezultând $U_p = 3\sum U_{3k}$ - tensiunea interiorul triunghiului conține numai armonici de ordin $3k$. Această tensiune stabilește un curent de circulație care va conține numai armonici multipli de 3. Căderile de tensiune în fiecare din laturile triunghiului fiind egale cu suma armonicilor multipli de 3, tensiunile la bornele laturilor nu vor conține armonicile multipli de 3. Înfășurările alternatoarelor trifazate se conectează în stea, evitându-se conexiunea triunghi din cauza curentului de circulație ce poate încălzi înfășurările chiar la o funcționare în gol a alternatorului. Curentul de linie egal cu diferența a doi curenți din laturile triunghiului nu conține armonici multipli de 3.

CAPITOLUL 9. REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE

Numim regim tranzitoriu trecerea unui sistem de la o stare stabilă la o altă stare stabilă. Cele două stări stabile se mai numesc și regimuri permanente.

Analiza circuitelor electrice în regim tranzitoriu este posibilă:

- în domeniul timp (reprezentare directă a mărimii funcție de timp) prin următoarele metode:

- metoda directă
- a variabilelor de stare
- metoda răspunsului tranzitoriu la excitație treaptă

- în domeniul frecvență (utilizează reprezentări simbolice ale funcțiilor) prin următoarele metodele:

- aplicarea transformatei *Fourier* (metoda spectrală)
- aplicarea transformatei *Laplace* (metoda operațională)

9.1 Teoremele comutației

În circuitele ce conțin bobine și condensatoare trecerea de la un regim permanent la un alt regim nu are loc instantaneu deoarece, în regimuri diferite energia înmagazinată în câmpul electromagnetic al circuitului are valori diferite. Orice variație a energiei într-un interval presupune o variație a puterii sursei conform relației $p_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{em}}{\Delta t}$. Dacă trecerea de la o stare la alta stare are loc instantaneu ($\Delta t = 0$) puterea sursei ar fi infinită ceea ce nu este posibil practic și fizic.

9.1.1 Teorema I a comutației

Să considerăm o bobină căreia i se aplică o tensiune. Din legea inducției electromagnetice se deduce tensiunea la bornele bobinei ideale în baza căreia se calculează fluxul magnetic

$$u_L = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \varphi = \int_{-\infty}^t u dt = \int_{-\infty}^0 u(t) dt + \int_0^t u(t) dt = \Phi(0) + \int_0^t u(t) dt, \quad (9.1)$$

Deoarece tensiunea $u(t)$ este integrabilă rezultă ca fluxul este o funcție continuă și în momentul inițial $t=0=0+$ fluxul este $\Phi(0)=\Phi(0+)$

Analizând invers dacă fluxul Φ ar fi discontinuu atunci tensiunea la bornele bobinei tinde la infinit (nu este posibil fizic).

Concluzii:

1° Fluxul magnetic nu poate trece brusc de la o valoare finită la altă valoare finită

2° În circuitele liniare relația de dependență flux –curent este $\Phi=Li$ și-n consecința curentul într-o bobină liniară nu variază în salt.

9.1.2 A II-a teoremă a comutației

Energia electrică înmagazinată într-un condensator este dată de relația

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (9.2)$$

Variația acestei energii reprezintă puterea instantanee la bornele condensatorului. Curentul prin condensator este definit de relația $i = \frac{dq}{dt}$.

Dacă sarcina q ar varia în salt curentul prin condensator ar avea valoare infinită, ceea ce nu este posibil fizic.

Concluzii:

1° Sarcina $q = q(0) + \int_0^t i dt$ este o funcție continuă și nu variază în salt.

2° Pentru circuitele liniare, dependența sarcină - tensiune este dată de relația $q=Cu$ și, în consecință, tensiunea pe un condensator nu variază în salt (tensiunea este funcție continuă).

9.2. Metode de analiză în domeniul timp a circuitelor electrice

Pentru analiza în domeniul timp a circuitelor electrice în regim tranzitoriu se aplică:

- 1- metoda directă pentru circuitele de ordinul I și II
- 2- metoda variabilelor de stare pentru circuite de ordin mai mare sau egal cu II

9.2.1 Metoda directă de analiză a circuitelor de ordinul I

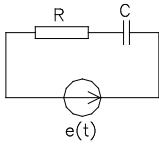
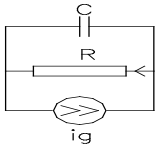
Dacă circuitul electric supus analizei conține un singur element conservativ (reactiv) ecuația caracteristică ce descrie din punct de vedere matematic comportarea circuitului este o ecuație diferențială de ordinul I.

Circuitele de ordinul I pot fi R -C, R -L serie sau paralele. Aceste circuite pot fi sub excitație proprie sau improprie. Răspunsul sistemului sub excitație proprie poartă numele de răspuns natural.

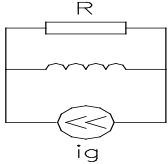
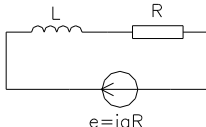
Circuitul este sub excitație proprie dacă din ecuația diferențială de ordinul I pe care o satisface răspunsul, impunând condițiile de regim

permanent, acesta (răspunsul) se poate determina direct din excitație. În continuare sunt prezentate tabelat cele două circuite de ordinul I în regim de excitație proprie:

Tabel 9.1. Circuite R – C

	<p>Aplicând teorema de transformare a surselor de tensiune în surse de curent față de bornele condensatorului</p>	
$\begin{cases} e(t) = u_R + u_C \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$ $e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$		$i_g = i_R + i_C ; i_g = \frac{e}{R}$ $i_R = \frac{u_C}{R} ; i_g = \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt}$ $i_g R = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$

Tabel 9.2. Circuite R – L

	<p>Aplicând teorema de transformare a surselor de tensiune în surse de curent față de bornele bobinei</p>	
$i_g = i_R + i_L$ $u_L = u_R = Ri_R = L \frac{di_L}{dt}$ $\Rightarrow i_R = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$ $i_g = i_L + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$		$e = i_g \cdot R$ $i_g R = Ri_L + L \frac{di_L}{dt}$ $\frac{e}{R} = i_L + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$

Ecuatiile de tipul $\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$ sunt ecuații de ordinul I în regim de excitație proprie. Dacă se anulează variația în timp $\frac{d}{dt} = 0$ se obține regimul permanent iar răspunsul are aceeași formă de variație cu excitația $y(t)=x(t)$. Răspunsul $y(t)$, egal cu excitația $x(t)$, este răspunsul natural pentru circuitele în regim de excitație proprie.

Să analizăm răspunsul natural pentru circuitul RC c unoscând încărcarea continuă a condensatorului cu tensiunea U_C de la zero la tensiunea E (fig.9.1). Presupunând condensatorul încărcat cu tensiunea E în caz de scurtcircuitare a circuitului RC se obține ecuația ce descrie descărcarea unui condensator în condiții inițiale nenule ($U_C(0)=E$) $U_R + U_C = 0$, r relație echivalentă cu $Ri + u_c = 0$. Curentul de descărcare înlocuit în ecuația prezentată conduce la ecuația diferențială de ordinul I:

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \quad (9.3)$$

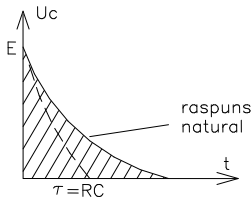


Fig.9.1

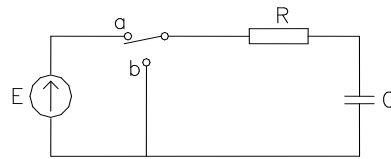


Fig.9.2

Ecuția caracteristică a diferențialei de ordin I este $RCp+1=0$ iar soluția are forma: $U_C = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}$ - cu A constantă ce se determină din condițiile inițiale și anume la $t=0$, tensiunea ce încarcă condensatorul este $U_C = U_{C0} = E = A$. A această constantă înlocuită în ecuația tensiunii ce descrie descărcarea condensatorului conduce la $U_C = Ee^{-t/\tau}$, relație ce descrie evoluția tensiunii pe condensator la descărcare.

La încărcarea condensatorului în condiții inițiale nule $U_C(0)=0$ ecuația în tensiune a circuitului este neomogenă: $RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = E$ și admite soluții de forma: $U_C = U_{C0} + U_{Cf}$ unde U_{C0} - reprezintă soluția ecuației omogene iar U_{Cf} - soluția impusă de excitație. În regim permanent pentru circuitul analizat (excitație în c.c.) $U_{Cf} = E$ iar soluția ecuației

omogene are forma $U_C = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}$. Astfel se obține $U_C = Ae^{-t/\tau} + E$. Constanta de integrare din relația prezentată se determină din impunerea condițiilor inițiale și anume:

- la $t=0$, tensiunea ce încarcă condensatorul este nulă $U_C=0$ rezultând astfel constanta de integrare $A=-E$. Se determină astfel evoluția în timp a tensiunii de încărcare a condensatorului $U_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ cu reprezentarea grafică din fig.9.3:

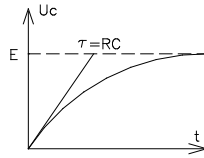


Fig. 9.3

Metoda clasică de rezolvare a acestor ecuații constă în rezolvarea ecuației omogene. Soluția găsită dă un proces liber de anulare (stingere) denumită soluție de regim liber $y_{10}(t)$. La soluția generală a ecuației omogene se adaugă o soluție particulară a ecuației neomogene. Așa se obține soluția generală a ecuației neomogene, din care, cu o alegere adecvată a constantei se obține soluția corespunzătoare condițiilor inițiale date. Dacă este vorba de circuite cu excitație constantă sau excitație sinusoidală, se obține imediat soluția particulară. Soluția generală se exprimă deci:

$$y(t) = y_{10}(t) + y_f(t) \quad (9.4)$$

Observație:

1° Soluția ecuației omogene este datorată energiei înmagazinate în elementul reactiv. Întotdeauna $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{10}(t) = 0$, cu y_{10} – soluție de regim liber (a ecuației omogene)

9.2.1.1 Soluția generală a ecuațiilor diferențiale de ordinul I

1. Ecuațiile de ordinul I omogene $\tau \frac{dy_1}{dt} + y_1 = 0$ admit soluții de forma: $y = Ae^{pt}$. Soluția este denumită componentă de regim liber. Această soluție înlocuită în ecuația diferențială conduce la următoarea formă: $\tau p Ae^{pt} + Ae^{pt} = 0$ sau $(\tau p + 1)Ae^{pt} = 0$.

Deoarece $Ae^{pt} \neq 0$ (fiind soluție), atunci relația $\tau p + 1 = 0$, se numește ecuația caracteristică a ecuației diferențiale de ordinul I.

Impunând condițiile inițiale la $t=0$, $y(t) = y(0)$, rezultă evoluția în timp a componentei de regim liber $y_l = y(0) \cdot e^{-t/\tau}$ redată în graficul din fig.9.4.

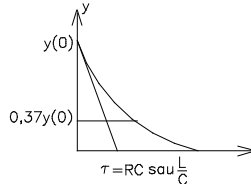


Fig. 9.4

2. Constanta de timp τ reprezintă timpul după care răspunsul își atinge valoarea de regim permanent dacă ar avea aceeași viteză de variație cu cea din momentul inițial. Ea reprezintă timpul ideal de atingere a răspunsului permanent dacă răspunsul ar avea aceeași viteză de variație cu cea din momentul inițial. (răspuns ideal)

Răspunsul circuitului în momentul $t=\tau$ este:

$$y(\tau) = y(0) \cdot e^{-1} = \frac{y(0)}{e} = \frac{y(0)}{2,7} = 0,37y(0) \quad (9.5)$$

ceea ce conduce la următoarea observație că după $t=\tau$ semnalul răspuns are amplitudinea redusă de e ori.

De foarte multe ori dorim să estimăm care este timpul t_ϵ după care răspunsul $y(t)$ are valoarea ϵ din valoarea inițială $y(0)$. În această situație: $y(t)=\epsilon y(0)$, dar $y(t) = y(0) \cdot e^{-t_\epsilon/\tau}$ rezultând $\Rightarrow \frac{y(t)}{y(0)} = e^{-t_\epsilon/\tau} \Rightarrow t_\epsilon = -\tau \ln \frac{y(t)}{y(0)}$ sau

$$t_\epsilon = -\tau \ln \epsilon \text{ cu } \epsilon = \frac{y(t)}{y(0)} \text{ ce are valoarea cuprinsă între } 0 \text{ și } 1 \text{ (} 0 < \epsilon < 1 \text{)}.$$

3. Dacă în domeniul timp soluția este $y(t) = y(0) \cdot e^{-t/\tau}$, în planul ecuației caracteristice $p = -\frac{1}{\tau}$ (planul p) soluției îi corespunde un punct pe axa reală cu valoarea $p=\sigma$. Întrucât în planul ecuației caracteristice $p = \sigma + j\omega = -\frac{1}{\tau}$ deducem atenuarea:

$$\frac{y(t)}{y(0)} = e^{-t/\tau} = e^{t \cdot p} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \text{ rezultând: } e^{\sigma t} = \frac{y(t)}{y(0)} \text{ respectiv}$$

$$\sigma = \frac{1}{t} \ln \frac{y(t)}{y(0)}$$

4. Soluția ecuației diferențiale neomogene de ordin I se obține astfel: multiplicăm ecuația diferențială cu $(1/\tau) e^{t/\tau}$

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t) \quad \left| \frac{1}{\tau} e^{t/\tau} \right. \quad (9.6)$$

rezultând:

$$\frac{dy}{dt} e^{t/\tau} + \frac{1}{\tau} y e^{t/\tau} = \frac{1}{\tau} x(t) e^{t/\tau} \text{ sau} \quad (9.7)$$

$$\frac{d}{dt} [y e^{t/\tau}] = \frac{dy}{dt} e^{t/\tau} + \frac{1}{\tau} \cdot y \cdot e^{t/\tau} \quad (9.8)$$

atunci:

$$\frac{d}{dt} [y e^{t/\tau}] = \frac{1}{\tau} \cdot x(t) \cdot e^{t/\tau} \quad (9.9)$$

Integrând în raport cu ξ de la zero la t rezultă:

$$\int_0^t \frac{d}{d\xi} [y(\xi) e^{\xi/\tau}] d\xi = \int_0^t \frac{1}{\tau} x(\xi) e^{\xi/\tau} d\xi \quad (9.10)$$

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{y(0) e^{-t/\tau}}_{y_i} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \underbrace{\int_0^t x(\xi) e^{\xi/\tau} d\xi}_{y_f} \quad (9.11)$$

Soluția ecuației neomogene este $y = y_i + y_f$, unde:

y_i – componenta liberă impusă de condițiile inițiale denumita și răspuns natural impus numai de stările inițiale

y_f – componenta forțată impusă de excitație

9.2.1.2 Particularizarea soluției generale pentru circuitele electrice excitate în cc și ca

1. Circuitul de ordinul I excitat în curent continuu $x(t) = X(t) = X_s = ct$ admite următoarea soluție:

$$y(t) = y(0) e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \left(X \cdot \tau \cdot e^{\xi/\tau} \Big|_0^t \right) \quad (9.12)$$

$$y(t) = y(0) e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} X \tau e^{-t/\tau} \cdot e^{t/\tau} - \frac{X \cdot \tau \cdot e^{-t/\tau}}{\tau} \quad (9.13)$$

$$y(t) = y(0) e^{-t/\tau} + X(1 - e^{-t/\tau}) = \underbrace{y(0) e^{-t/\tau}}_{\text{stare inițială}} + \underbrace{X}_{\text{răspuns permanent}} - \underbrace{X e^{-t/\tau}}_{\text{excitație inițială}} \quad (9.14)$$

Impunerea condiției de regim permanent conduce la $t \rightarrow \infty \quad y(\infty) = X$

$$y(t) = \underbrace{(y(0) - y_f(0)) e^{-t/\tau}}_{\text{soluție regim tranzitoriu}} + \underbrace{y_f(\infty)}_{\text{soluție regim permanent}} \quad (9.15)$$

2 *Circuitul de ordinul I excitat în c.a.* $x(t)=X_m \cos \omega t$ admite următoarea soluție:

$$y_f = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t X_m \cos \omega \xi e^{\xi/\tau} d\xi = \frac{X_m e^{-t/\tau}}{\tau} \underbrace{\int_0^t e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi d\xi}_{I_1} \quad (9.16)$$

Rezolvând prin părți integrala I_1 în baza notațiilor următoare :

$$u = e^{\xi/\tau} \quad \left\| \begin{array}{l} du = \frac{1}{\tau} e^{\xi/\tau} d\xi \\ dv = \cos \omega \xi d\xi \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} v = \frac{1}{\omega} \sin \omega \xi \end{array} \right. \quad (9.17)$$

rezultă:
$$I_1 = \frac{1}{\omega} \sin \omega \xi e^{\xi/\tau} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{1}{\tau \omega} e^{\xi/\tau} \sin \omega \xi d\xi . \quad (9.18)$$

Notând:

$$I_2 = \int_0^t e^{\xi/\tau} \sin \omega \xi d\xi = -\frac{1}{\omega} e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi \Big|_0^t + \frac{1}{\omega \tau} \underbrace{\int_0^t e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi d\xi}_{I_1}, \text{ și în baza}$$

acelorași notații aplicând integrarea prin părți rezultă:

$$u = e^{\xi/\tau} \quad \left\| \begin{array}{l} du = \frac{1}{\tau} e^{\xi/\tau} d\xi \\ dv = \sin \omega \xi d\xi \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega \xi \end{array} \right. \quad (9.20)$$

$$I_1 = A + \frac{1}{\omega^2 \tau} e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi \Big|_0^t - \frac{1}{\omega^2 \tau^2} I_1 \quad (9.21)$$

$$I_1 \left(1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2} \right) = \frac{1}{\omega} \sin \omega \xi e^{\xi/\tau} \Big|_0^t + \frac{1}{\omega^2 \tau} e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi \Big|_0^t \quad (9.22)$$

$$I_1 \left(\frac{1 + \omega^2 \tau^2}{\omega^2 \tau^2} \right) = \frac{1}{\omega} e^{t/\tau} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 \tau} e^{t/\tau} \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2 \tau} \quad (9.23)$$

Atunci soluția forțată de excitație a ecuației este:

$$y_f = \frac{X_m e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \cdot \left[\frac{e^{t/\tau}}{\omega^2 \tau} \cos \omega t + \frac{e^{t/\tau}}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2 \tau} \right] \quad (9.24)$$

$$y_f = \frac{X_m}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t - e^{-t/\tau} \right] \quad (9.25)$$

Utilizând identitatea trigonometrică
 $\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t = \sqrt{1 + (\omega \tau)^2} [\cos(\omega t - \arctg \omega \tau)]$ înlocuită în soluția forțată de excitație conduce la:

$$\Rightarrow y_f = \underbrace{\frac{X_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau)}_{y_f(\infty)} - \underbrace{\frac{X_m}{1 + \tau^2 \omega^2} e^{-t/\tau}}_{y_f(0) = \frac{X_m}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \cos(\arctg \omega \tau)} \quad (9.26)$$

În baza notațiilor de mai sus se poate defini soluția completă de regim tranzitoriu sub forma:

$$y_t = \underbrace{(y(0) - y_f(0))e^{-t/\tau}}_{\text{soluția de regim tranzitoriu}} + \underbrace{y_f(\infty)}_{\text{soluția impusă de regimul permanent}} \quad (9.27)$$

9.2.1.3 Determinarea soluției generale a regimului tranzitoriu în circuitele de ordinul I ce conțin surse independente

Exemplul 1

Să considerăm spre exemplificare un circuit RC ce prezintă condiții inițiale $U_c(0)=5V$, circuit cuplat la $t=0$ la o sursă de curent continuu de valoare $E=10V$. Urmărim să determinăm tensiunea la bornele condensatorului.

Rezolvare: Ecuația circuitului rezultă din aplicarea teoremei II Kirchhoff astfel:

$$\underline{e(t)=E} \Rightarrow U_R + U_C = E, \text{ dar } i = C \frac{dU_C}{dt} \quad (9.28)$$

$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = E$. Soluția conform celor prezentate anterior este:

$$U_C = U_{Ct} + U_{Cp} \text{ cu } U_{Ct} = Ae^{-t/\tau} \quad (9.29)$$

U_{Cp} – impusă de excitație având valoarea $U_{Cp}=E$. Rezultă astfel:

$$U_C(t) = Ae^{-t/\tau} + E \quad (9.30)$$

Impunând condițiile inițiale și anume la $t=0$, $U_C(t)=U_C(0)=A+E \Rightarrow A=U_C(0)-E$ se obține evoluția în timp a tensiunii la bornele condensatorului.

$$U_C(t) = [U_C(0) - E] \cdot e^{-t/\tau} + E \quad (9.31)$$

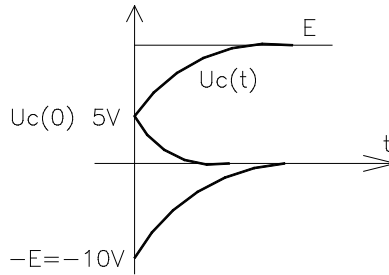


Fig. 9.5

Exemplul 2

Circuitul RC excitat în ca cu $e(t)=10 \cdot \cos 2\pi 10^3 t$, $\omega=10^3$ conduce la următoarea ecuație diferențială $\tau \frac{dU_C}{dt} + U_C = E_m \cos \omega t$. Soluția acestei ecuații este de forma $U_C = U_{Ct} + U_{Cp}$ cu $U_{Ct} = Ae^{-t/\tau}$ iar U_{Cp} – soluție a ecuației în regim permanent sinusoidal. Deducem soluția ecuației diferențiale în regim permanent sinusoidal prin reprezentarea în complex a aceleiași ecuații obținând $j\omega RC \underline{U}_C + \underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$.

Rezolvarea în complex conduce la:

$$\underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow \underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \right), \quad (9.32)$$

relație echivalentă cu $\underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 (RC)^2} \cdot e^{j \arctg \omega RC}}$ sau restrânsă sub forma:

$$\underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega RC} \quad (9.33)$$

Trecând din planul complex în domeniul timp soluția este:

$$U_{Cp}(t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \cdot \underline{U}_C \right\} = \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau) \quad (9.34)$$

Soluția generală a ecuației neomogene este:

$$U_C(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau) \quad (9.35)$$

Impunând condițiile inițiale și anume la $t=0$, $U_C(t)=U_C(0)=5V$ rezultă valoarea constantei de integrare A:

$$U_c(0) = A + \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\arctg \omega \tau),$$

$$A = \frac{U_c(0)}{y(0)} - \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\arctg \omega \tau)$$

(9.36)

$$U_c(t) = \left(U_c(0) - \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\arctg \omega \tau) \right) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau)$$

(9.37)

Aplicații tipice ale circuitelor de ordinul 1

1. Circuit integrator RC

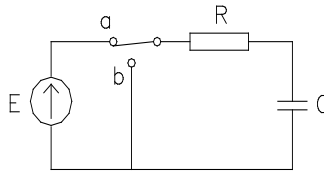


Fig. 9.6

Considerând tensiunea pe condensator $U_c = U_o$ – tensiune de ieșire, forma de variație în timp a acesteia este redată în figura 9.7.

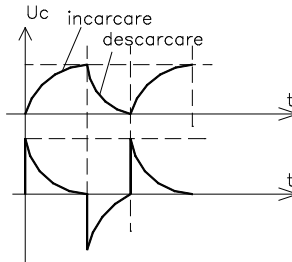


Fig. 9.7

2. Circuit derivator RC

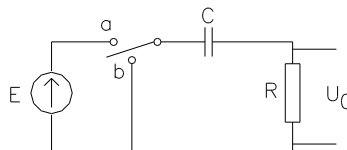


Fig. 9.8

Considerând tensiunea pe rezistor $U_R = Ri = RC \frac{dU}{dt}$ tensiune de ieșire, forma de variație în timp a acesteia este redată în figura 9.8.

Generalizarea constantei de timp pentru orice rețea de ordinul 1

Constanta de timp pentru rețele RC este $\tau = RC$ respectiv $\tau = L/R$ pentru orice rețea RL

9.2.1.4 Determinarea soluției generale a regimului tranzitoriu în circuitele de ordinul I ce conțin surse dependente

Exemplul 1

Circuitul din figura 9.9 funcționează cu întrerupătorul k închis. La momentul $t=0$ se deschide. Să se traseze variația tensiunii $v(t)$ de pe rezistența de $1k\Omega$.

a) În regim permanent (înainte de descărcare) stabilim tensiunea $U_c(0)$ ce încarcă condensatorul.

Rezolvare:

Potențialul V_1 este impus de sursa rezultând $i_x = \frac{v_1}{10} = \frac{5}{10} = 0,5mA$.

Aplicând T2K pe ochiul 2 obținem:

$$v_2 + 1 \cdot 4 \cdot i_x = 0, \quad v_2 + 1 \cdot 4 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow v_2 = -2V \quad (9.38)$$

$$u_c(0) = v_1 - v_2 = 5 - (-2V) = 7V \quad (9.39)$$

b) În regim tranzitoriu, la deschiderea întrerupătorului k , circuitul echivalent este:

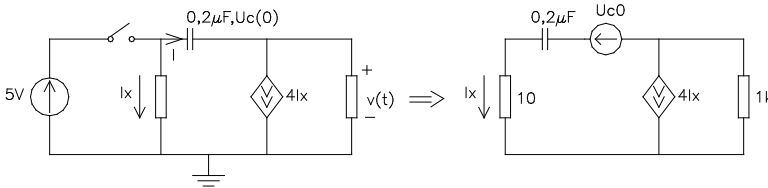


Fig.9.9.

Tensiunea la bornele condensatorului este:

$$u_c = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t idt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^0 idt + \frac{1}{c} \int_0^t idt \quad (9.40)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{u_c(0)}$

căreia îi corespunde ecuația Joubert $-u_c(0) + u_c = \frac{1}{c} \int_0^t idt$.

Urmărim în continuare să asociem față de bornele condensatorului încărcat cu tensiunea U_{c0} o rezistență echivalentă a circuitului (fig. 9.10).

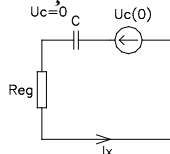


Fig. 9.10

În această situație putem exprima comod curentul de descărcare al condensatorului conform relațiilor: $u_c(0) = u_c + u_{Reg}$, $u_{Reg} = R_{eg} \cdot C \frac{du_c}{dt}$. Rezultă:

$$u_c(0) = u_c + R_{eg} \cdot C \frac{du_c}{dt} \quad (9.41)$$

Soluția acestei ecuații este $u_c(t) = u_{c0} + u_{cp}$ cu

$$\left. \begin{aligned} u_{c0} &= A e^{-t/\tau} \\ u_{cp} &= u_c(0) \end{aligned} \right\} u_c(t) = u_{c0} e^{-t/\tau} \quad (9.42)$$

Impunerea condițiilor la limită (regim permanent) $t \rightarrow \infty$, conduc la $u_c = 0$, $u_{cp} = 0$. Curentul de descărcare este dat de relația

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C \cdot u_{c0} \cdot \left(-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right). \text{Înlocuirea constantei de timp a circuitului în}$$

soluția de mai sus conduce la următoarea relație a curentului de descărcare

$$i = -\frac{u_{c0}}{R_{eg}} e^{-t/\tau}.$$

În prezentarea anterioară avem de rezolvat problema determinării rezistenței echivalente asociate circuitului. Pentru determinarea acesteia avem posibilitatea alimentării circuitului de la o sursă independentă exterioară, în absența laturii condensatorului încărcat, caz în care rezistența echivalentă este:

$$R_{eg} = \frac{u}{i}; \begin{cases} 10i_x + i_1 = u \\ 0 = i_x + 4i_x - i_1 \Rightarrow i_1 = 5i_x \end{cases} \Rightarrow 10i_x + 5i_x = u \Rightarrow 15i_x = u \quad (9.43)$$

$$i_x = \frac{u}{15} \Rightarrow R_{eg} = \frac{u}{i_x} = \frac{u}{\frac{u}{15}} = 15k\Omega \quad (9.44)$$

În baza acestei rezolvări curentul de descărcare al condensatorului respectiv tensiunea la bornele rezistorului de $1k\Omega$ devin

$$i = \frac{-7}{15} \cdot e^{-t/\tau}; \quad v(t) = 5i_x = -\frac{7 \cdot 5}{15} e^{-t/\tau} = -\frac{7}{3} e^{-t/\tau} V$$

Valoarea înainte de comutare a tensiunii pe rezistorul de $1k\Omega$ rezultă din aplicarea teoremei II Kirchhoff $v + 4i_x \cdot 1 = 0 \Rightarrow v = -4 \cdot \frac{5}{10} \cdot 1 = -\frac{20}{10} = -2V$.

9.2.2 Metoda variabilelor de stare

9.2.2.1 Ecuațiile de stare

Metoda variabilelor de stare este o metodă de calcul avantajoasă atât pentru circuitele liniare, cât și pentru cele neliniare. Metoda constă în introducerea variabilelor de stare - tensiunile condensatoarelor și curenții

bobinelor (mărimile ce nu variază în salt) - pe baza unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul I pentru care se exprimă soluția cu ajutorul funcțiilor de matrice. Avantajele principale ale metodei consistă în faptul că metoda ia în considerare simplu condițiile inițiale, se programează ușor pe calculatoarele numerice și poate fi generalizată pentru orice circuite.

Ca exemplu se consideră un circuit oscilant serie fără pierderi, circuit căruia îi corespund ecuațiile: $C \frac{du_c}{dt} = i_l$; $L \frac{di_l}{dt} = -Ri_l - u_c + e$.

În notație matriceală ecuațiile se scriu:

$$-\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_c \\ i_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_c \\ i_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot e \quad (9.45)$$

Această expresie este un caz particular al ecuației diferențiale matriceale $\frac{dy}{dt} = Ay + bx$, în care y este vectorul de stare care descrie starea electrică a circuitului în spațiul stărilor.

Matricele coeficienților \mathbf{A}, \mathbf{b} se numesc matricea de tranziție a sistemului și respectiv matricea asociată vectorului de intrare \mathbf{x} . Soluția acestei ecuații este similară celei discutate în subcapitolul anterior (7.2.1.2).

9.2.2.2 Schema structurală de calcul a regimului tranzitoriu pentru ecuațiile ordinul I

Ecuația diferențială pe care o satisface circuitul RL sau RC este de ordinul I cu forma: $\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t)$, având soluția $y = y(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t x(t') \cdot e^{-\frac{t'}{\tau}} dt'$, soluție ce evidențiază componentele răspunsului dacă este exprimată sub următoarea formă:

$$y = \left(y(0) - \underbrace{y_t(0)}_{y_{\text{tranz}}} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \underbrace{y(\infty)}_{y_{\text{perm}}} \quad (9.46)$$

Ecuația diferențială de ordinul I poate fi scrisă sub forma ecuației de stare astfel:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot y + \frac{1}{\tau} x(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} [y] = \left[-\frac{1}{\tau} \right] \cdot [y] + \left[\frac{1}{\tau} \right] \cdot [x(t)] \quad (9.47)$$

Implementarea acestei ecuații pe un calculator necesită următoarea schemă structurală:

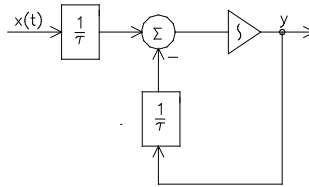


Fig.9.11

schemă ce se inițializează prin $y(0)$ adică pentru $t=0$, $y=y(0)$.

Rezolvarea acestei ecuații implică cunoașterea valorii inițiale $y(0)$. Răspunsul y este variabila de stare (u_c sau i_L) ceea ce confirmă încă odată că bobina sau condensatorul este complet definit de valorile L și $i_L(0)$ respectiv C și $u_c(0)$.

9.2.2.3 Răspunsul circuitelor liniare de ordinul II

Presupunem că în circuit există elemente reactive de ambele tipuri, atât L cât și C . Studiul acestor circuite poate fi redus la studiul ecuației satisfăcute de circuitul RLC serie, respectiv RLC paralel.

A. Mărimi de stare ale circuitelor de ordin II

a) RLC serie excitat în tensiune

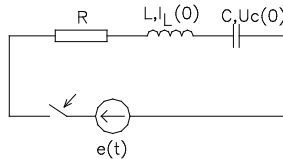


Fig.9.12.

Aplicând în circuitul din figura 9.12 teorema II Kirchhoff se obține ecuația în tensiune $e(t) = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + u_c$. Al egând v ariabila d e stare tensiunea pe c ondensator u_c prin impunerea condiției de conexiune $i_c = C \frac{du_c}{dt} = i_L = i_R$ rezultă:

$$e(t) = RC \frac{du_c}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_c}{dt} \right) + u_c \Rightarrow LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} = e(t) \quad (9.48)$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{e(t)}{LC} \quad (9.49)$$

Rezolvarea implică cunoașterea $u_c(0)$ și $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0}$. Tensiunea inițială a condensatorului $u_c(0)$ este cunoscută dar derivata acesteia nu este explicit cunoscută $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0}$. Aceasta este determinată din curentul inițial prin bobină astfel: $i_L = i_c = C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_L(0)}{C}$.

Dacă se alege variabilă de stare curentul din bobina i_L ($i_L = i_c = C \frac{du_c}{dt}$) ecuația pe care o satisface acest curent se obține derivând ecuația tensiunilor

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{du_c}{dt} = \frac{de}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt} \quad (9.50)$$

Împărțind prin L rezultă: $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$. Rezolvarea implică cunoașterea $i_L(0)$ și $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_c}{dt} \right) \Big|_{t=0}$

b) Circuit RLC paralel considerând gruparea paralel RLC în care elementele reactive prezintă condiții inițiale, din aplicarea teoremei I Kirchhoff rezultă:

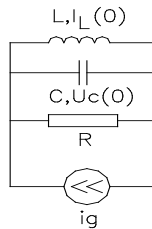


Fig. 9.13

$$i_g = i_R + i_L + i_c \quad (9.51)$$

$$i_g = \frac{u}{R} + i_L + C \frac{du_c}{dt} \quad (9.52)$$

Impunerea condiției de conexiune $u_c = u_R = u_c = L \frac{di_L}{dt}$ conduce la:

$$i_g = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + CL \frac{d^2i_L}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{RLC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{i_g}{LC} \quad (9.53)$$

$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{i_g}{LC}$ ecuație în care variabila de stare este curentul prin bobină. Utilizarea tensiunii condensatorului drept variabilă de stare u_c necesită definirea următoarei ecuații (derivarea relației curenților din

teorema I Kirchhoff): $\frac{di_g}{dt} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_L}{dt} + \frac{di_c}{dt}$

$$i_R = \frac{u}{R}, \quad i_c = C \frac{du_c}{dt} \quad (9.54)$$

$$\frac{di_g}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_c}{dt} + \frac{d}{dt}(i_L) + C \frac{d^2 u_c}{dt^2} \quad (9.55)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L} = \frac{u_c}{L} \quad (9.56)$$

atunci: $\frac{di_g}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{L} + C \frac{d^2 u_c}{dt^2}$ sau $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{C} \frac{di_g}{dt}$.

B. Soluția ecuației diferențiale omogene a ecuațiilor de ordinul II

Ecuția generală a circuitelor de ordinul II

este $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \cdot \xi \omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = x$, ecuație obținută pe baza următoarelor

notații:

$$\begin{cases} 2\xi\omega_0 = \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2\xi\omega_0 = \frac{1}{RC} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \quad (9.57)$$

Dacă presupunem variabila de stare de forma $y = Ae^{pt}$, soluție nenulă a ecuației diferențiale, ecuația caracteristică este:

$$y[p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2] = 0 \Rightarrow p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad \text{cu rădăcinile:}$$

$$p_{1/2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0.$$

Matematic, dacă:

$$1. \xi > 1 \text{ atunci, } p_1 = -\omega_0(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) = -\frac{1}{\tau_1}; \quad p_2 = -\omega_0(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = -\frac{1}{\tau_2}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \\ \tau_2 &= -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \end{aligned} \right\} p_1, p_2 \in \mathbf{R}. \quad (9.58)$$

În acest caz ($p_1, p_2 \in \mathbf{R}$) soluția ecuației omogene este aperiodică, (fig.9.14). În exprimare matematică avem soluția $y_c(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$, în care constantele se determină din condițiile inițiale și anume:

$$\left. \begin{aligned} t=0, \quad y(0) = A_1 + A_2 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau_1} A_1 + \frac{1}{\tau_2} A_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \left(y(0) + \tau_2 \frac{dy(0)}{dt} \right) \\ A_2 &= \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \left(y(0) + \tau_1 \frac{dy(0)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (9.59)$$

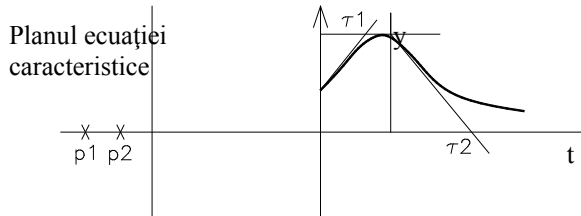


Fig. 9.14

Parametrul $\xi = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \frac{R}{2L} \cdot \sqrt{\frac{LC}{1}} = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{L/C}} = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0}$ reprezintă rata

atenuării. Factorul de calitate al circuitului este $Q = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 L I}{R I} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$, cu $Z_0 = RQ$ face ca rata atenuării exprimată funcție de acesta să fie $\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Q}$.

2. Dacă $\xi=1$ atunci $\sqrt{\xi^2 - 1} = 0$ se obține regimul aperiodic critic în care $\tau_1 = \tau_2, p_1 = p_2, \tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \xi}, p_1 = -\omega_0 \xi$. Soluția ecuației circuitului este în acest caz reprezentată în fig.9.15.

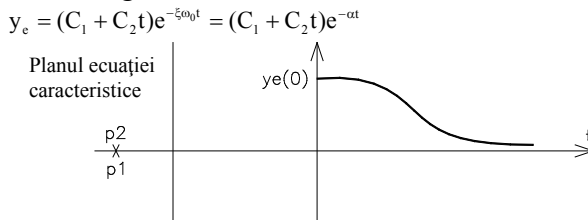


Fig. 9.15

3. Dacă $\xi < 1$, atunci $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ iar rădăcinile sunt:

$$p_1 = -\xi \omega_0 \pm j \omega_d = -\alpha \pm j \omega_d \quad (9.60)$$

unde: α - coeficient de amortizare și ω_d - pseudopulsatie

Soluția ecuației este (fig.9.16): $y = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \beta)$

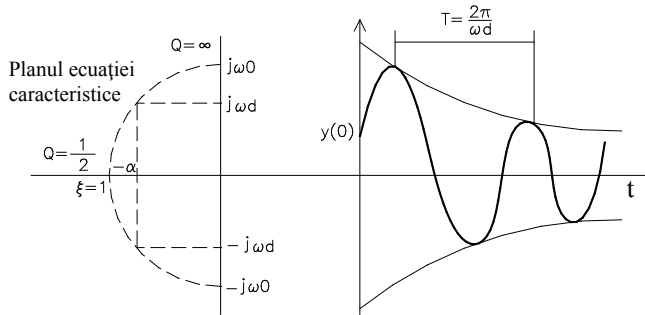


Fig. 9.16

C. Ecuatii de stare pentru circuitele de ordinul II

Metoda variabilelor de stare constă în transformarea ecuațiilor diferențiale de ordinul II și superior în sisteme de ecuații de ordinul I. Variabilele de stare utilizate sunt curenții prin bobine i_L și tensiunile de la bornele condensatoarelor u_c .

În continuare exemplificăm transformarea ecuației diferențiale de ordinul II într-un sistem de două ecuații de ordinul I.

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_c \frac{du_c}{dt} + u_c = e(t) \tag{9.61}$$

Variabilele de stare u_c și $i_L = i_c = C \frac{du_c}{dt}$ înlocuite în ecuația de mai sus conduc la definirea sistemului.

$$\begin{cases} i_L = C \frac{du_c}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + u_c = e(t) \end{cases} \text{ rearanjate sub forma: } \begin{cases} \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_L \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} u_c + \frac{R}{L} e(t) \end{cases} \tag{9.62}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{9.63}$$

$\frac{d}{dt}[y] = [A][y] + [B][x(t)]$ ecuație similară cu a circuitului de ordinul I ce are forma $\frac{d}{dt}[y] = \left[-\frac{1}{\tau}\right][y] + \left[\frac{1}{\tau}\right][x(t)]$; τ - constantă de timp (de tranziție).

D. Schema structurală de calcul atașată ecuațiilor de ordinul II

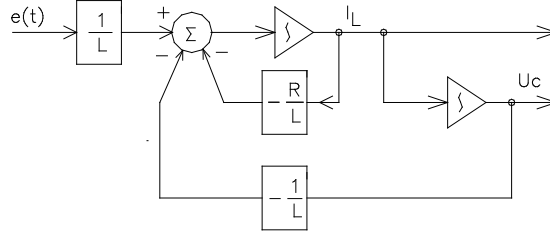


Fig. 9.17

E. Aplicarea metodei variabilelor de stare în circuitele ce conțin surse dependente

Exemplificăm metoda variabilelor de stare pe circuitul din fig.9.18.

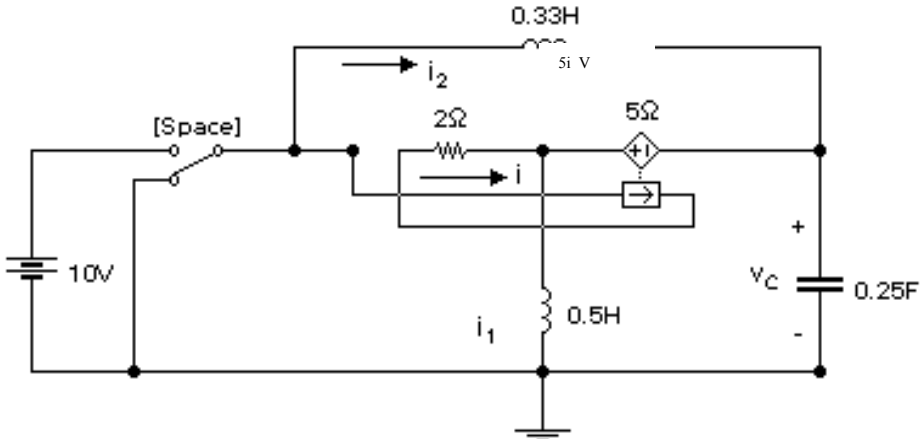


Fig.9.18.

Mărimile de stare sunt curenții prin bobine și tensiunile de la bornele condensatoarelor. În circuitele ce conțin surse dependente, sistemul de ecuații de stare trebuie completat cu relația de dependență introdusă de sursa comandată. În scrierea sistemului de ecuații sursa dependentă se tratează ca una independentă. Sistemul de ecuații atașat circuitului din fig.9.18 este:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} \\ -4 & 4 & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot v_s \quad (9.64)$$

rezultat al aplicării teoremei I Kirchhoff $-i_2 + C \cdot \frac{dv_c}{dt} - i + i_1 = 0$, și al definiției tensiunii pe bobine: $L_2 \frac{di_2}{dt} = v_s - v_c$ și $L_1 \frac{di_1}{dt} = 5i + v_c$, unde $i = \frac{v_s - 5i - v_c}{2}$, $v_s = 10V$.

9.3. Metode de analiză în domeniul frecvență

9.3.1 Metoda operațională (a transformatei Laplace)

Fiind dată o funcție variabilă $f(t)$, netedă pe porțiuni pentru $t > 0$, ce satisface inegalitatea $|f(t)| < Ae^{\sigma_0 t}$ cu $\sigma_0 > 0$ pe ntru $t > t_0$ (crește mai lent decât o exponențială), se definește transformata Laplace (sau imaginea Laplace) prin relația:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^- t f(t)e^{-pt} dt, \quad (9.65)$$

unde: - $F(p)$ – funcție de variabilă complexă, $p = \sigma + j\omega$ ($\sigma > \sigma_0$ pentru a crește mai lent ca exponențială).

Funcția $f(t)$ se numește funcție original iar $F(p)$ funcție imagine.

A. Proprietățile transformatei Laplace

1. Liniaritate

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p) \quad (9.66)$$

2. Teorema valorilor limită

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \quad (9.67)$$

$$p = \sigma + j\omega = \sigma + j \frac{2\pi}{t}; \quad p \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \quad (9.68)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+) \quad (9.69)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) \quad (9.70)$$

3. Transformata Laplace a derivatei

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^- \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt; \text{ integrând prin părți: } (uv)' = u'v + uv'. \text{ Rezultă}$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\text{cu notațiile } (fe^{-pt})' = \frac{df}{dt} e^{-pt} + f \cdot (-p)e^{-pt} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{d(f(t)e^{-pt})}{dt} dt - \int_0^{\infty} -pf(t)e^{-pt} dt = \\ &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + pF(p) = pF(p) + \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0_-)}_{=0} \end{aligned} \quad (9.71)$$

$$\mathbf{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0_-) \quad (9.72)$$

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n F(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2} \frac{dy(0)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} \quad (9.73)$$

4. Transformata Laplace a integralei

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \int_0^{\infty} \int_0^t f(t')dt' e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p} \quad (9.74)$$

întrucât $(uv)' = uv' + u'v$ și considerăm $u = \int_0^t f(t')dt'$, $v = \int e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Rightarrow$

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = -\frac{e^{-pt}}{p} \int_0^t f(t)dt \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-pt}}{-p} dt = \frac{F(p)}{p} \quad (9.75)$$

5. Teorema întârzierii

$$\mathbf{L}[f(t-\tau)] = \int_{\tau}^t f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t') e^{-p(t'+\tau)} dt' = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(t') e^{-pt'} dt' \quad (9.76)$$

s-a substituit $t - \tau = t'$ deci $t = t' + \tau$ iar $dt = dt'$

$$\mathbf{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p) \quad (9.77)$$

6. Teorema atenuării

$$\mathbf{L}[e^{-\lambda t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+\lambda)t} dt = F(p+\lambda) \quad (9.78)$$

7. Teorema asemănării

$$\mathbf{L}[f(kt)] = \int_0^{\infty} f(kt) e^{-\frac{pt}{k}} dt \cdot \frac{k}{k} = \int_0^{\infty} \frac{f(kt)}{k} e^{-\frac{p}{k}kt} d(kt) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \quad (9.79)$$

B. Calculul transformatei Laplace a principalelor semnale utilizate în electrotehnică

Sursele de curent continuu sunt, în general, multiplu al funcției treaptă unitară, funcție prezentată în fig.9.19.

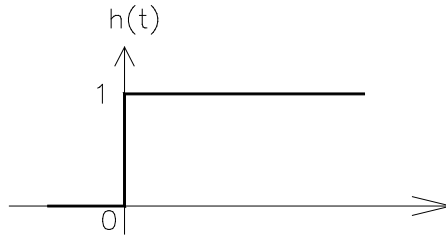


Fig.9.19

Această funcție, matematic, are următoarea definiție: $h(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$. Ea poate fi considerată conform relației $h(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t)$, limita unei funcții rampă $f(t)$ (fig.9.20). Modelând funcția rampă prin relația următoare:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < -\varepsilon \\ \frac{t + \varepsilon}{2\varepsilon}, -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 1, t > \varepsilon \end{cases} \text{ pentru } t=0, f(t) = \frac{1}{2}. \quad (9.80)$$

În intervalul $(-\varepsilon, \varepsilon)$ funcția $f(t)$ poate fi aproximată printr-o dreaptă de ecuație $f(t) = at + b$. Constantele a și b se pot determina din condițiile la limită, astfel:

$$t=0, f(t) = \frac{1}{2} = b \quad (9.81)$$

$$t = +\varepsilon, f(t) = 1 = a\varepsilon + b \Rightarrow a = \frac{1 - b}{\varepsilon} \quad (9.82)$$

$$t = -\varepsilon, f(t) = 0 = -a\varepsilon + b = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{\varepsilon} \quad (9.83)$$

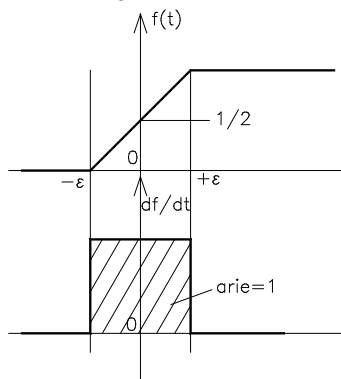


Fig.9.20

atunci: $f(t) = \frac{b}{\varepsilon}t + b = b\left(\frac{t}{\varepsilon} + 1\right) = b\left(\frac{t + \varepsilon}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}(t + \varepsilon); \quad f(t) = \frac{t + \varepsilon}{2\varepsilon}.$

Derivata acestei funcții se numește impuls unitar $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\varepsilon}$; pe ntru

$\varepsilon \rightarrow 0, \frac{df}{dt} \rightarrow \infty.$ Notăm $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{df}{dt}$ unde:
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < -\varepsilon \\ \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}.$$

Suprafața determinată de impulsul unitar, de lățime 2ε și înălțime $1/2\varepsilon$, are aria unitate. La limită impulsul unitar are reprezentarea din fig.9.21, însă, fizic, aria trebuie să se conserve, motiv pentru care $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$ Transformata

Laplace a impulsului unitar $L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$

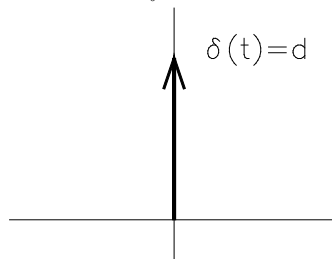


Fig.9.21

1. Transformata *Laplace* a impulsului treaptă $L[ch(t)] = \int_0^{\infty} ch(t) e^{-pt} dt$ se obține din formula de integrare prin părți, $(uv)' = uv' + u \cdot v$, unde se notează $u = ch(t)$ și $v = \frac{e^{-pt}}{-p}$. Înlocuind rezultă:

$$L[ch(t)] = \int_0^{\infty} d \left(ch(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right) dt - \int_0^{\infty} c \frac{e^{-pt}}{-p} dt = \underbrace{ch(t) \frac{e^{-pt}}{-p}}_{=0} \Big|_0^{\infty} + \frac{c}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{c}{p} \tag{9.84}$$

2. Transformata *Laplace* a funcției exponențiale $f(t) = e^{-\lambda t}$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-(p+\lambda)t} dt = \frac{1}{p+\lambda} \tag{9.85}$$

3. Transformata *Laplace* a funcției sinusoidale $f(t) = y_m \sin \omega t.$

Substituind: $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ se obține transformata *Laplace* a funcției:

$$\mathbf{L}[y_m \sin \omega t] = \int_0^{\infty} y_m \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{j\omega t} \cdot e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{-j\omega t} \cdot e^{-pt} dt \quad (9.86)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{j\omega t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{-(p-j\omega)t} dt = \frac{y_m}{2j} \cdot \frac{1}{p-j\omega} \Rightarrow \quad (9.87)$$

$$\mathbf{L}[y_m \sin \omega t] = \frac{y_m}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{y_m}{2j} \cdot \frac{p+j\omega - (p-j\omega)}{p^2 + \omega^2} = \frac{y_m \cdot 2j\omega}{2j \cdot (p^2 + \omega^2)} \quad (9.88)$$

$$\mathbf{L}[y_m \sin \omega t] = y_m \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (9.89)$$

Similar se obține transformata *Laplace* a funcției cosinusoidale:

$$\mathbf{L}[y_m \cos \omega t] = \mathbf{L}\left[y_m \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] = \frac{y_m}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = y_m \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (9.90)$$

C. Determinarea funcției original cunoscând transformata Laplace (Teoreme)

1) Teorema derivării

$$\frac{d}{dp} (F(p)) = \frac{d}{dp} \left[\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right] = \int_0^{\infty} [-tf(t)] e^{-pt} dt = \mathbf{L}[-tf(t)] \quad (9.91)$$

2) Teorema integrării

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \mathbf{L}\left[\frac{f(t)}{t} \right] \quad (\text{operația inversă derivării}) \quad (9.92)$$

3) Teorema *Mellin – Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{pt} dp \quad \sigma > \sigma_0 \quad (9.93)$$

4) Teorema *Heaviside*

Dacă $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ unde p_k rădăcinile numitorului sunt reale și distincte

atunci funcția imagine poate fi descompusă astfel:

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \dots + \frac{c_k}{p-p_k} = \sum_{p=1}^n \frac{c_k}{p-p_k} \Rightarrow (p-p_k) \frac{P(p)}{Q(p)} = c_k \quad (9.94)$$

$$\lim_{p \rightarrow p_k} (p-p_k) \frac{P(p)}{Q(p)} = P(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{1}{\frac{Q(p)}{p-p_k}} = \frac{P(p_k)}{\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{Q(p-p_k)}{p-p_k}} = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}, \text{ unde: } Q'(p_k) = \left. \frac{dQ}{dp} \right|_{p=p_k} \quad (9.95)$$

Rezultă funcția imagine de forma $F(p) = \sum \frac{c_k}{p-p_k} = \sum \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}$, iar funcția original corespunzătoare este: $f(t) = \sum_k \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}$.

Dacă numitorul are rădăcini nule $p=0$ funcția imagine poate fi descompusă în fracții simple astfel: $\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p-p_1} + \dots$

Coeficienții fracțiilor simple pentru rădăcinile nenule se calculează similar iar coeficientul rădăcinii nule se determină cu relația $c_0 = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{P(p)}{Q(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P(p)}{p Q_1(p)} = \frac{P(0)}{Q_1(0)}$. Obținem în acest mod funcția imagine de forma $F(p) = \frac{P(0)}{Q_1(0)} \cdot \frac{1}{p} + \sum \frac{P(p_k)}{p Q_1'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}$ având funcția original dată de expresia $f(t) = \frac{P(0)}{Q_1(0)} + \sum \frac{P(p_k)}{p_k Q_1'(p_k)} e^{p_k t}$.

9.3.2 Aplicarea transformatei Laplace în analiza regimurilor tranzitorii ale circuitelor electrice

Analizăm în continuare comportarea elementelor simple de circuit în regim tranzitoriu determinând pentru fiecare element ecuația în domeniul imagine și schema operațională asociată.

9.3.2.1 Transformata Laplace a elementelor simple de circuit

a. Rezistorul

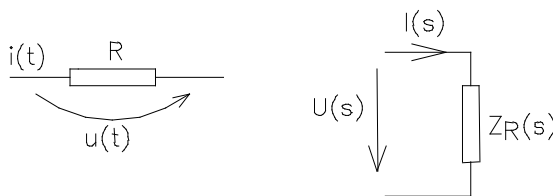


Fig.9.22

Ecuația din domeniul timp $u(t) = Ri(t)$ admite următoarea imaginea operațională:

$$\mathbf{L}[u(t)] = \mathbf{L}[Ri(t)] = R \mathbf{L}[i(t)] \Rightarrow U(p) = RI(p)$$

Definim în domeniul imagine $\frac{U(p)}{I(p)} = Z(p)$ impedanța operațională a elementului dipolar. Impedanța operațională a rezistorului este: $Z_R(p) = R$.

Inversa acesteia $Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{I(p)}{U(p)}$ se numește admitanță operațională.

b. Bobina ideală

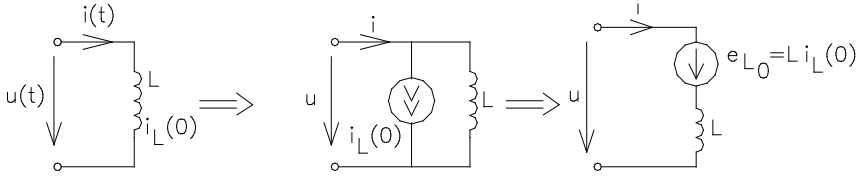


Fig.9.23

Aplicând transformata Laplace relației $i(t) = i_L(0)h(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt$ rezultă ecuația în domeniul imagine pentru o bobină ideală $I(p) = \frac{I_{L0}}{p} + \frac{1}{L} \frac{U_L(p)}{p} = \frac{I_{L0}}{p} + \frac{U_L(p)}{pL}$ cu $Z_L(p) = pL \Rightarrow Y_L(p) = \frac{1}{pL}$. Schemă operațională atașată ecuației operaționale este:

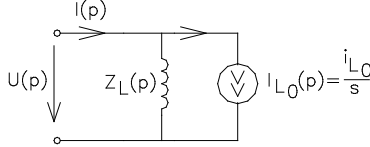


Fig. 9.24

Din ecuația în tensiune a bobinei $Li(t) = Li_L(0)h(t) + \int_0^t u_L(t) dt$, prin derivare, rezultă $L \frac{di}{dt} = Li_L(0)\delta(t) + u_L(t)$. Trecând în domeniul imagine se obține ecuația operațională și schema atașată (fig.9.25).

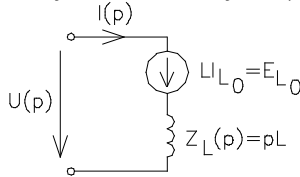


Fig.9.25

$$pLI(p) = LI_{L0} + U_L(p) \tag{9.96}$$

$$E_{L0} = Li_{L0} \tag{9.97}$$

$$Y_L(p) = \frac{1}{pL} \tag{9.98}$$

$$U_L(p) = pLI(p) - LI_{L0} \tag{9.99}$$

Observație:

Ecuației Joubert $e_{\pm} u_{\pm} = z_i, p$ prin aplicarea transformatei Laplace conduce la următoarea imagine operațională a ecuației: $E(p) \pm U(p) = Z(p) \cdot I(p)$.

c. Bobina cuplată magnetic

Tensiunea la bornele bobinei j, în domeniul timp, este:

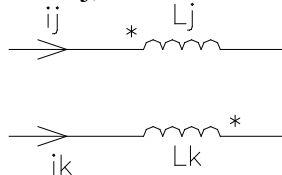


Fig.9.26a

$$u_j = L_{ij} \frac{di_j}{dt} + L_{jk} \frac{di_k}{dt} = \sum_{k=1}^n L_{jk} \frac{di_k}{dt} \quad (9.100)$$

Aplicând transformata Laplace rezultă:

$$\mathbf{L} \left[u_j = \sum_{k=1}^n L_{jk} \frac{di_k}{dt} \right] \Rightarrow U_j(p) = \sum_{k=1}^n L_{jk} (pI_k(p) + i_k(0)) \quad (9.101)$$

$$U_j(p) = \sum_{k=1}^n pL_{jk} I_k(p) - \sum_{k=1}^n L_{jk} I_k(0) \quad (9.102)$$

$E_{kl} = \sum_{k=1}^n L_{jk} I_k(0)$ - suma tensiunilor condițiilor inițiale.

Schemă operațională echivalentă a bobinelor cuplate magnetic este:

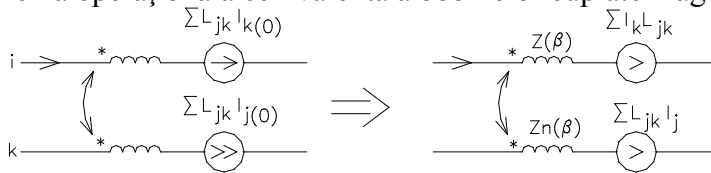


Fig.9.26b

d. Condensatorul

Ecuțiilor din domeniul timp

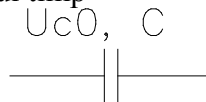


Fig.9.27a

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} \quad \text{sau} \quad u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt + u_{c0}, \text{ prin aplicarea transformatei}$$

Laplace, le corespund următoarele ecuații operaționale:

$$I_c(p) = C [pU_c(p) - u_{c0}] \quad (9.103)$$

$$I_c(p) = pCU_c(p) - CU_c(0) \Rightarrow U_c(p) - \frac{u_c(0)}{p} = \frac{1}{pC} I_c(p) \quad (9.104)$$

$$U_c(p) = \frac{1}{C} \frac{I_c}{p} + \frac{u_{c0}}{p}; \quad (9.105)$$

$$U_c(p) = \frac{I_c}{pC} + \frac{u_{c0}}{p}; \quad (9.106)$$

$$-\frac{u_{c0}}{p} + U_c(p) = \frac{I_c}{pC} = Z_c(p) \cdot I_c(p) \quad (9.107)$$

$$-E_{c0} + U_c(p) = Z_c(p) \cdot I_c(p) \Rightarrow Z_c(p) = \frac{1}{pC} \quad (9.108)$$

Concluzii:

- 1° În aplicarea transformatei Laplace pentru elementele reactive trebuie determinate condițiile inițiale înainte de comutare.
- 2° Raportul $\frac{\text{tensiune operationala}}{\text{curent operational}}$ se numește impedanță operațională $Z(p)$. Inversa impedanței operaționale este admitanța operațională.

e. Aplicarea transformatei Laplace unui dipol ce admite schemă echivalentă:

e1. Serie

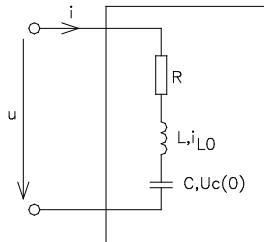


Fig.9.27b

Ecuția tensiune-curent la bornele dipolului este:

$$u = u_R + u_C + u_L = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt = Ri + L \frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 idt}_{u_c(0)} + \frac{1}{C} \int_0^t idt \quad (9.109)$$

Aplicând transformata Laplace rezultă:

$$U(p) = I(p)R + pL(pI(p) - i_L(0)) + \frac{u_{c0}}{p} + \frac{1}{C} \frac{1}{p} I(p) \text{ sau}$$

$$U(p) = I(p) \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) + \underbrace{\frac{u_{c0}}{p} - Li_L(0)}_{-E_{c0}} \quad (9.110)$$

Ecuția *Joubert* atașată dipolului este:

$$E_{c0} + U(p) = Z(p)I(p) \quad \text{cu} \quad Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} . \quad (9.111)$$

e2. Paralel

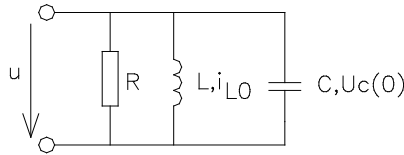


Fig. 9.28a

Ecuției curent-tensiune a dipolului serie:

$$i = i_r + i_L + i_c = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt + C \frac{du_c}{dt} \quad \text{sau} \quad (9.112)$$

$$i = \frac{u}{R} + \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt}_{\tilde{i}_L(0)} + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + C \frac{du_c}{dt} \quad (9.113)$$

aplicându-i transformata *Laplace*, conduce la următoarea relație operațională:

$$I = \frac{U}{R} + \frac{i_{L0}}{p} + \frac{1}{pL} U + C[pU - u_{c0}], \text{ relație ce poate fi restrânsa în forma :} \quad (9.114)$$

$$I = U \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{pL} + pC \right] + \frac{i_{L0}}{p} - Cu_{c0}$$

Ecuția *Joubert* în curent a unei laturi are forma: $i = \frac{e}{Z} + \frac{u_s}{Z} = i_g + yu_s$ ce

admite următoarea imagine operațională: $\mathbf{L}[i = i_g + yu_s]$; $I = I_g + YU$.

Identificând forma operațională a ecuației *Joubert* cu ecuația operațională a circuitului rezultă: $I = YU + I_g$ cu $I_g = \frac{i_{L0}}{p} - CU_{c0}$.

9.3.2.2 Aplicarea transformatei *Laplace* în analiza circuitelor ce conțin surse independente

Se consideră circuitul din figura 9.28b ce funcționează cu sursa de curent, sursa de tensiune fiind scurcircuitată. La momentul $t > 0$ se cuplează sursa de tensiune e ($e = 5V$). Să se determine variația în timp a tensiunii v de rezistența $1K\Omega$.

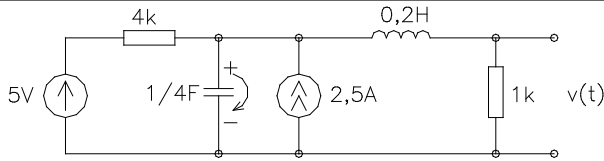


Fig.9.29a

Rezolvarea circuitului implică determinarea condițiilor inițiale pentru elementele reactive. Valorile mărimilor de stare $i_L(0)$ și $u_c(0)$ rezultă din funcționarea inițială $t < 0$ a circuitului.

În regimul staționar. ($t < 0$) elementele reactive sunt înlocuite prin comportamentul lor în c.c. iar circuitul are următoarea configurație

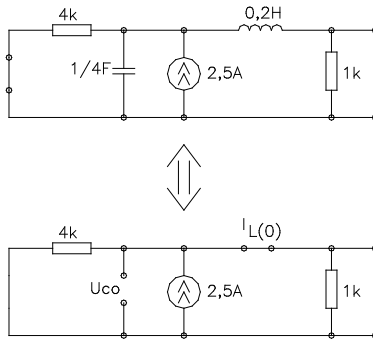


Fig.9.29b.

Determinarea condițiilor inițiale necesită rezolvarea circuitului din figura 9.29b. În acest sens aplicăm metoda reducerii circuitului la dipol echivalent. Aplicând divizorul de curent obținem curentul inițial ce parcurge bobina : $i_L(0) = i_g \cdot \frac{4}{4+1} = 2,5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25}{10} \cdot \frac{4}{5} = 2A$

Tensiunea ce încarcă condensatorul poate fi considerată fie tensiunea de pe rezistența de $1k\Omega$, fie tensiunea de pe rezistența de $4k\Omega$ obținând $u_c(0) = i_g \cdot R_c = 2,5 \cdot \frac{4}{5} = 2V$, $u_c(0) = i_{R_4} \cdot R_4 = i_g \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 = 2,5 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 = 2V$.

Cunoscând condițiile inițiale și reprezentându-le prin surse se obține circuitul de analizat, (fig.9.29c), circuit analizat în regim tranzitoriu prin asocierea imaginii operaționale.

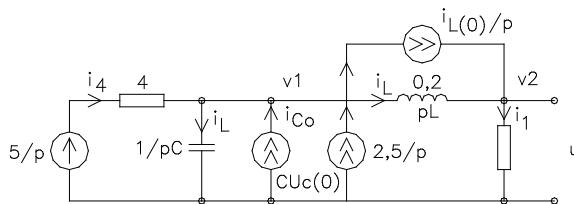


Fig.9.29c.

În rezolvarea circuitului se aplică metoda potențialelor nodale rezultat al aplicării

teoremei Kirchhoff I în nodul v_1 și v_2 :

$$-i_4 + i_c - i_{c0} - i_g + i_L + i_{L0} = 0, \quad (9.115)$$

$$-i_L - i_{L0} + i_1 = 0 \quad (9.116)$$

relații completate cu $i_4 = \frac{5 - v_1}{4}$, $i_1 = \frac{v_2}{R_1}$, $i_L = \frac{v_1 - v_2}{pL}$, $i_c = \frac{v_1}{1/pC}$.

Forma operațională a ecuațiilor nodale este:

$$-\frac{5 - v_1}{4} + \frac{v_1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{2,5}{p} + \frac{v_1 - v_2}{p \cdot 0,2} + \frac{2}{p} = 0 \quad (9.117)$$

$$\frac{v_1 - v_2}{0,2p} - \frac{2}{p} + \frac{v_1}{1} = 0 \quad (9.118)$$

Rezolvând sistemul de ecuații rezultă:

$$v_2 = \frac{2p^2 + 12p + 75}{p(p^2 + 6p + 25)} \quad (9.119)$$

Pentru determinarea funcției originale se deduc rădăcinile

$$p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm j4 \begin{cases} -3 + 4j = p_1 \\ -3 - 4j = p_2 \end{cases} \quad (9.120)$$

Descompunerea în fracții simple a expresiei potențialului operațional, necesită determinarea a trei coeficienți

$$v_2 = \frac{2p^2 + 12p + 75}{p(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p - p_1} + \frac{c_3}{p - p_2} \quad (9.121)$$

Rezultat al calculelor matematice deducem următoarele valori ale coeficienților

$$c_1 = \frac{P(0)}{Q(0)} = \frac{75}{25} = 3, \quad c_2 = \frac{P(p_1)}{p(p - p_2)} = \frac{25}{16^2 + 12^2} 4(4 - 3j) = \frac{5}{4} e^{-j\frac{3}{4}}, \quad c_3 = \frac{5}{4} e^{+j\frac{3}{4}} \quad (9.122)$$

Înlocuind în expresia potențialului operațional $v_2 = \frac{3}{p} + \frac{5}{4} \cdot e^{-j\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{p + 3 - 4j} + \frac{5}{4} \cdot e^{+j\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{p + 3 + 4j}$ se obține variația în domeniul timp a potențialului v_2 rezultat al aplicării transformatei Laplace inverse

$$v_2(t) = 3 + \frac{5}{4}e^{-j\frac{3}{4}} \cdot e^{-(3-4j)t} + \frac{5}{4}e^{+j\frac{3}{4}} \cdot e^{-(3+4j)t}; \quad \text{relație echivalentă cu}$$

$$v_2(t) = 3 + 1,25e^{-3t} \cos\left(4t + \arctg \frac{3}{4}\right)$$

9.3.2.3. Aplicarea transformatei Laplace în circuitele ce conțin surse dependente

Se consideră pentru exemplificare circuitul din figura 9.30 c e funcționează cu întrerupătorul k (space) deschis. În momentul $t > 0$ este sunată rezistența de 2Ω . Să se determine variația în timp a curentului sursei de 8V.

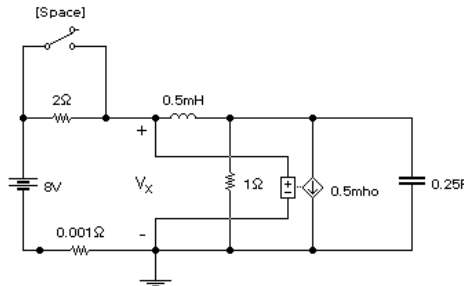


Fig. 9.30

Pentru rezolvare trebuie să determinăm condițiile initiale ale circuitului, circuit considerat la $t < 0$ (fig.9.31)

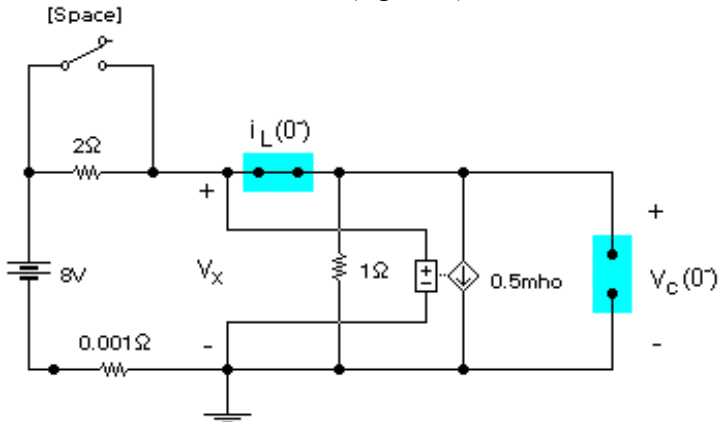


Fig.9.31

Aplicarea teoremei I Kirchoff în circuitul din figura 9.31 conduce la $\frac{8 - v_x}{2} = \frac{v_x}{1} + \frac{v_x}{2}$ din care rezultă: $v_x = 2V$.

Condițiile inițiale sunt:

$$- v_c(0^-) = v_x = 2V; \quad (9.123)$$

$$- i_L(0^-) = \frac{8 - v_x}{2} = 3 \text{ A} ; \quad (9.124)$$

Schema operațională a circuitului ,ținând cont de relațiile

$$C \cdot V_c(0^-) = \frac{1}{4} \times 2 = 0,5 ; \quad \frac{i_L(0^-)}{p} = \frac{3}{p} \text{ devine (fig9.32):}$$

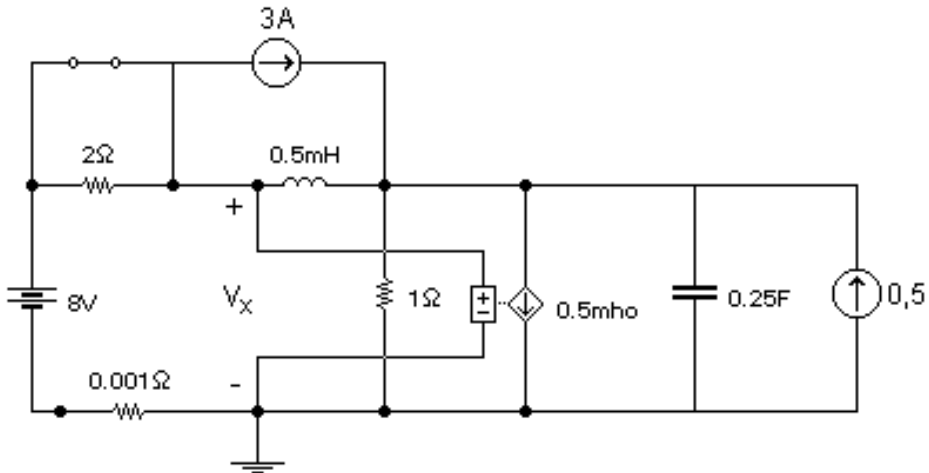


Fig. 9.32

Deoarece întrerupătorul este închis, $v_x(p) = 8/p$ iar rezolvare prin metoda

potențialelor nodale conduce la :

$$\frac{3}{s} + \frac{\frac{8}{s} - v_1(s)}{0,5 \cdot s} + 0,5 = \frac{v_1(s)}{1} + \frac{8/s}{2} + \frac{v_1(s)}{4/s}$$

$$I(s) = \frac{\frac{8}{s} - v_1(s)}{0,5 \cdot s} + \frac{3}{s} \quad (9.125)$$

Eliminând $v_1(s)$ se obține imaginea operațională a curentului:

$I(s) = \frac{3 \cdot s^2 + 24 \cdot s + 96}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 8)}$ din care deducem variația în domeniul timp a acestuia:

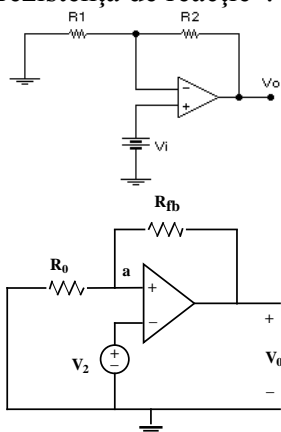
$$i(t > 0) = 3 \cdot [4 + \sqrt{10} \cdot e^{-2t} \cdot \cos(2t + 161,57^\circ)] \text{ A} \quad (9.126)$$

CAPITOLUL 10. ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRICE CE CONȚIN AMPLIFICATOARE OPERAȚIONALE

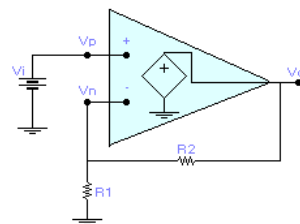
10.1 Analiza în curent continuu a configurațiilor de bază ale amplificatoarelor operaționale

10.1.1 Configurația neinversoare

Configurația neinversoare a amplificatorului operațional este prezentată în fig.10.1a. Aceasta conține un amplificator operațional și două rezistențe externe R_1 și R_2 . Rezistența conectată între ieșire și o intrare se numește “rezistență de reacție”.



a) Schema configurației neinversoare a A.O.



b) Modelul configurației neinversoare

Fig. 10.1

Pentru ușurarea analizei se utilizează modelul prezentat în figura 10.1.b. Utilizând ecuația $v_O = a \cdot (v_P - v_N) = a \cdot v_D$ și formula divizorului de tensiune se obține:

$$v_O = a \cdot (v_P - v_N) = a \cdot \left(v_i - \frac{1}{1 + (R_2 / R_1)} \cdot v_O \right) \quad (10.1)$$

Prin intermediul divizorului de tensiune se introduce o reacție negativă, astfel încât la intrarea inversoare vom avea semnalul de intrare

$v_o / 1 + (R_2 / R_1)$. Din ecuația prezentată

$$\text{obținem: } v_o \cdot \left(1 + \frac{a}{1 + (R_2 / R_1)} \right) = a \cdot v_i \quad .$$

Prin definiție, amplificarea operațională este dată de relația:

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{a}{1 + \frac{a}{1 + \frac{R_2}{R_1}}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \frac{a}{1 + \frac{R_2}{R_1} + a} \quad (10.2)$$

Atunci putem spune că: $\lim_{a \rightarrow \infty} A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Relația amplificării

configurației neinversoare ne permite să facem o serie de observații importante și anume:

- circuitul din figura 10.1.b este un “*amplificator neinversor*” deoarece amplificarea A este pozitivă și, ca urmare, v_o are aceeași polaritate cu v_i ;

- amplificarea “ A ” este independentă de amplificarea “ a ”. “ A ” se numește *amplificarea în buclă închisă*, deoarece este obținută prin crearea unei bucle de reacție externă a amplificatorului operațional, iar “ a ” este numită *amplificarea în buclă deschisă*.

- amplificarea “ A ” este realizată exclusiv prin intermediul componentelor externe. De fapt, amplificatorul operațional asigură funcția inversă a rețelei externe.

În timp ce divizorul reduce tensiunea v_o cu $1 + (R_2 / R_1)$, amplificatorul operațional multiplică tensiunea v_P cu $1 + (R_2 / R_1)$.

Amplificarea în buclă deschisă “ a ” este un parametru ce variază cu temperatura și timpul, și chiar de la un amplificator operațional la altul. Însă,

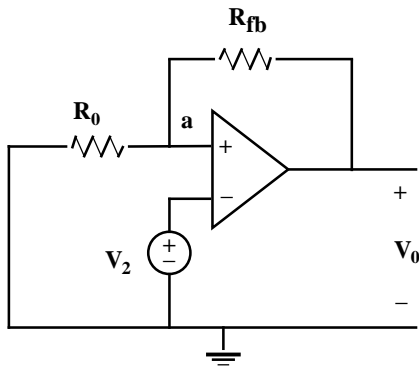
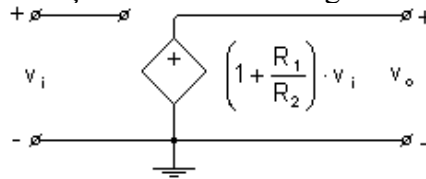
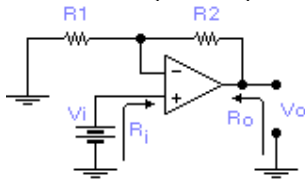
dacă “ a ” este suficient de mare pentru ca: $\frac{a}{1 + \frac{R_2}{R_1} + a} \rightarrow 1$, atunci se obține

$$\text{amplificarea în buclă închisă: } A \rightarrow \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Unul din avantajele utilizării amplificatoarelor operaționale este acela că, de exemplu, în cazul unui amplificator operațional defect, acesta poate fi înlocuit cu unul compatibil din punct de vedere al caracteristicilor fără ca amplificarea “ A ” să fie afectată semnificativ.

Amplificarea în buclă închisă este determinată de un raport de rezistențe externe, ceea ce face ca aceasta să fie ușor de obținut la o aplicație particulară, utilizând rezistențe de calitate corespunzătoare. Pentru a asigura un raport constant (R_2/R_1) se pot utiliza rezistențe ce depind de temperatură și de timp.

Pentru caracterizarea completă a amplificatorului neinversor trebuie cunoscute pe lângă amplificarea în buclă închisă "A" și rezistențele de intrare " r_i " și de ieșire " r_o ". Aceste rezistențe sunt indicate în figura 10.2a.



$$\frac{V_2}{R_0} + \frac{(V_2 - V_0)}{R_{fb}} = 0$$

so

$$\frac{V_0}{R_{fb}} = V_2 \left[\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_{fb}} \right]$$

de unde,

$$V_0 = \left(1 + \frac{R_{fb}}{R_0} \right) V_2$$

a)

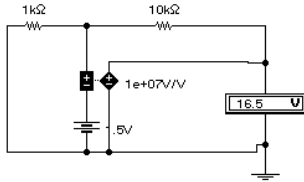
b)

Fig. 10.2 Configurația neinversoare

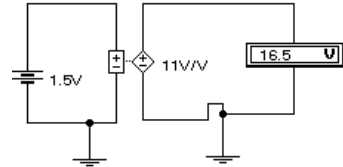
În cazul amplificatorului operațional ideal, deoarece fluxul de curent prin pinul de intrare este nul, rezistența de intrare este infinită $r_i = \infty$ iar semnalul de ieșire este dat de o sursă dependentă ideală având rezistența de ieșire $r_o = 0$. În figura 10.2b este prezentată schema echivalentă a unui amplificator operațional neinversor ideal.

Același rezultat al analizei configurației se obține dacă se utilizează „pentru operațional”, modelul atașat prin sursă dependentă cu control în tensiune (fig.10.3). Analiza circuitului este mult mai simplă și este posibilă în două variante. Prima variantă constă în declararea circuitului neinversor caz în care amplificatorul operațional este declarat la nivel de „cip” prin modelul de sursă atașat acestuia (VCVS), iar a doua varianta constă în

declararea directă a configurației, configurație ce conține sursa de alimentare și sursa dependentă asociată. Cele două variante sunt exemplificate în figura 10.3 a și b.



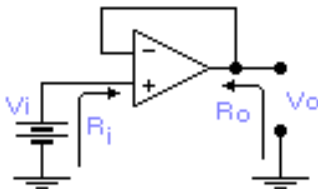
a) Circuit modelat la nivel de AO



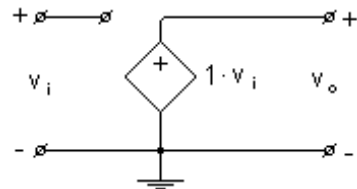
b) Circuit modelat la nivel de configurație

Fig. 10.3 Rezultatul modelării amplificatorului neinvertor

Un caz particular al configurației neinvertoare este amplificatorul *repetor*. Dacă din circuitul din figura 10.3a scoatem rezistența R_1 , iar pe R_2 o scurtcircuităm, obținem circuitul din figura 10.4a.



a)



b) Modelarea prin sursa dependentă

Fig. 10.4 Amplificator repetor

În acest caz obținem un amplificator operațional neinvertor cu amplificare unitară, numit “*repetor*”. Modelarea prin sursa dependentă a acestei configurații este prezentată în figura 10.4.b. În concluzie, un amplificator repetor are rezistența de intrare infinită, rezistență de ieșire nulă și amplificarea unitate: $R_i = \infty$, $R_o = 0$ și $A = 1 V/V$.

10.1.2 Configurația inversoare

Dacă semnalul de intrare este aplicat operaționalului la borna negativă în condițiile menținerii reacției negative (fig.10.5) se obține configurația inversoare a amplificatoarelor operaționale.

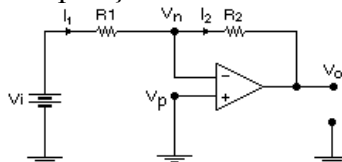


Fig. 10.5 Configurația inversoare a AO

În acest caz, tensiunea de alimentare v_i este aplicată la intrarea inversoare a amplificatorului operațional prin intermediul rezistențelor R_1 și R_2 ce joacă rolul reacției rezistive. Deoarece nu există nici un flux de curent înspre sau dinspre intrarea inversoare, avem $i_1=i_2$, sau: $\frac{v_i - v_N}{R_1} = \frac{v_N - v_O}{R_2}$.

Din ecuația de mai sus, ținând cont de faptul că $v_p=0$, obținem: $v_O = -a \cdot v_N$.

Eliminând v_N se obține pentru amplificarea "A" următoarea relație:

$$A = \frac{v_O}{v_i} = \left(-\frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \frac{a}{1 + \frac{R_2}{R_1} + a} \quad (10.3)$$

Din aceasta relație rezultă: $\lim_{a \rightarrow \infty} A = -\frac{R_2}{R_1}$. Deoarece amplificarea în

buclă închisă este negativă, circuitul este numit "amplificator inversor". Datorită faptului că v_i este aplicat la intrarea inversoare, polaritatea lui v_o este contrară polarității lui v_i .

După cum am arătat anterior, amplificarea "A" se obține prin intermediul unui rezistor extern. Prin alegerea potrivită a acestui raport, se poate obține orice valoare pentru amplificarea "A", inclusiv zero, spre deosebire de cazul configurației neinversoare, unde amplificarea în buclă închisă nu poate fi mai mică de 1. Pentru a determina rezistența de intrare și de ieșire, considerăm circuitul din fig.10.6a.

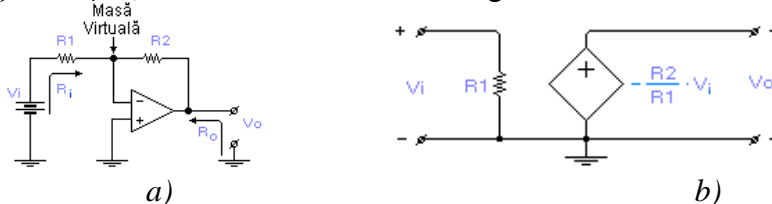


Fig. 10.6 Relativ la modelarea configurației inversoare a AO.

Deoarece semnalul de ieșire este luat de la o sursă dependentă ideală, rezistența de ieșire $R_0 = 0$. Deoarece $v_N = -v_O / a$, pentru orice valoare finită a lui v_O , avem: $\lim_{a \rightarrow \infty} v_N = 0$. Deci amplificatorul operațional păstrează nodul de intrare inversor la masă fără a afecta tensiunile de intrare și de ieșire, ceea ce face ca acest nod să fie numit "masă virtuală".

Prin urmare, rezistența "văzută" de sursa v_i este $R_i = R_1$. În figura 10.6 b este prezentat modelul echivalent prin sursa dependentă a l

amplificatorului operațional inversor. În comparație cu configurația neinversoare care are $R_1 = \infty$, în acest caz rezistența de intrare are o valoare finită, ceea ce generează, în general, sarcină la intrare.

Cu ajutorul amplificatoarelor operaționale se pot realiza patru tipuri de amplificatoare: amplificatoare de tensiune, amplificatoare de transrezistență (convertor curent – tensiune), amplificatoare de transconductanță (convertor tensiune – curent), amplificatoare de curent.

10.1.3 Amplificatoare de tensiune

Din categoria amplificatoarelor de tensiune fac parte circuitul de control al polarității amplificării, convertorul de rezistență negativă, amplificatoare sumatoare, amplificatoare diferențiale și amplificatoare de instrumentație.

a. Circuitul de control a polarității amplificării

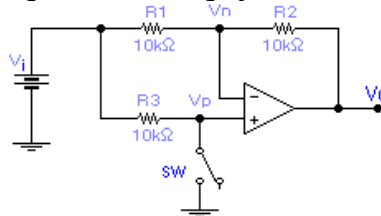


Fig. 10.7 Circuit de control al polarității amplificării

Circuitul de control a polarității amplificării, prezentat în figura 10.7, este compus dintr-un amplificator operațional, trei rezistențe (în exemplul prezentat valorile alese sunt de 10 KΩ), un comutator (notat SW). În funcție de poziția comutatorului (SW), există două situații:

1) *SW închis*, în care comutatorul SW pune la masă ieșirea neinversoare, conducând la un amplificator inversor cu amplificarea în buclă închisă:

$$A = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{10}{10} = -1, \quad A = -1 \frac{V}{V}. \quad (10.4)$$

2) *SW este deschis*. În acest caz, prin intrarea neinversoare nu circulă curent. Deci, $i_{R_3} = 0$ și $v_{R_3} = 0$. Prin urmare avem: $v_P = v_i - v_{R_3} = v_i$, $v_P = v_i$.

Dacă ținem cont de regula amplificatorului operațional, obținem: $v_N = v_P = v_i$. Deoarece $v_P = v_N$, rezultă că $v_{R_1} = 0$ și, deci $i_{R_1} = 0$.

Intrarea neinversoare nefiind parcursă de curent vom avea $i_{R_2} = 0$, ceea ce conduce la $v_{R_2} = 0$. Deci: $v_o = v_N - v_{R_2} = v_i$. Amplificarea în buclă închisă va fi:

$A = \frac{v_o}{v_i} = 1 \frac{V}{V}$. În concluzie, rolul circuitului este ca, în funcție de starea

comutatorului (închis sau deschis) circuitul să fie amplificator inversor sau neinversor.

b. Convertor de rezistență negativă

În circuitul din figura 10.8a, dorim să găsim o expresie pentru R_{eq} între intrarea neinversoare și masă. Pentru aceasta utilizăm circuitul din figura 10.8 b în care se aplică o tensiune de probă “v” la intrarea neinversoare. Deoarece nu avem nici un flux de curent pe intrarea neinversoare, obținem: $i = \frac{v - v_0}{R}$.



Fig.10.8 Convertor de rezistență negativă

Utilizând relația amplificatorului neinversor, obținem:

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v \text{ iar prin eliminarea tensiunii de ieșire } v_o, \text{ rezultă:}$$

$$i = \frac{-\frac{R_2}{R_1} \cdot v}{R} = \frac{v}{R_{eq}} \text{ de unde } R_{eq} = -R \cdot \frac{R_1}{R_2} \text{ Din ecuație dedusă observăm}$$

că rezistența echivalentă R_{eq} este negativă. În concluzie, aplicând tensiunea de probă “v”, circuitul face să apară curentul “i” la borna pozitivă a sursei test, deci la apariția unei rezistențe echivalente negative.

c. Amplificatorul sumator

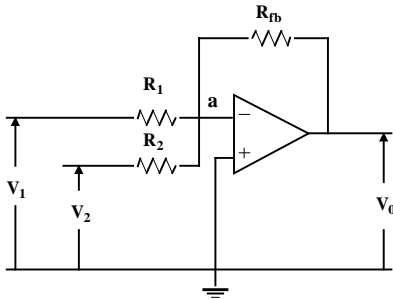
Circuitul din figura 10.9 are n intrări (v_1, v_2, \dots, v_n). Aceste tensiuni de intrare produc, prin rezistențele corespunzătoare R_1, R_2, \dots, R_n , curenții i_1, i_2, \dots, i_n care converg spre intrarea în versoare. Prin principiul de intrare, neexistând nici un curent, acesta va trece prin rezistența de reacție R_f . Putem scrie: $i_f = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ ceea ce indică faptul că nodul de intrare inversor acționează ca o joncțiune sumatoare pentru curenți. Ținând cont de faptul că acest nod al amplificatorului operațional păstrează potențialul masei, teorema I Kirchhoff poate fi rescrisă astfel:

$$\frac{0 - v_0}{R_f} = \frac{v_1 - 0}{R_1} + \frac{v_2 - 0}{R_2} + \dots + \frac{v_n - 0}{R_n}$$

din care deducem:

$$v_o = -R_f \cdot \left(\frac{1}{R_1} \cdot v_1 + \frac{1}{R_2} \cdot v_2 + \dots + \frac{1}{R_n} \cdot v_n \right) \quad (10.5)$$

Dacă în circuitul din figura 10.9 considerăm toate rezistențele egale cu R_1 , se obține:

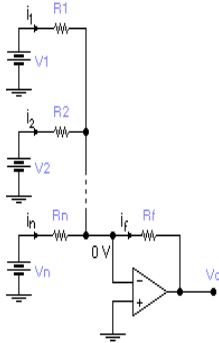


$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = \frac{-V_0}{R_{fb}}$$

$$V_0 = - \left[\left(\frac{R_{fb}}{R_1} \right) V_1 + \left(\frac{R_{fb}}{R_2} \right) V_2 \right]$$

Dacă $R_1 = R_2 = R_{fb}$ atunci,

$$V_0 = - [V_1 + V_2]$$



$$v_o = -\frac{R_f}{R_1} \cdot (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$$

Fig. 10.9 Amplificator sumator

Circuitul poartă numele de amplificator sumator deoarece tensiunea de ieșire este direct proporțională cu suma tensiunilor de intrare.

Dacă pe reacție este conectat un potențiomtru cu o rezistență variabilă de la 0 la R_f , a tunci vom avea: $v_o = A \cdot (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$, unde amplificarea în buclă închisă “A” respectă condiția: $-\frac{R_f}{R_1} \leq A \leq 0$.

d. Amplificatorul diferențial

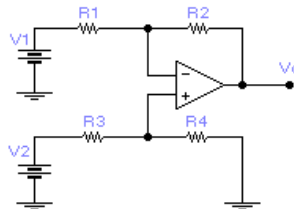


Fig. 10.10 Amplificatorul diferențial

Amplificatorul operațional din figura 10.10 este alimentat cu tensiunea v_1 la intrarea inversoare și cu tensiunea v_2 la intrarea neinversoare. Știind că circuitul este liniar, putem anticipa tensiunea de ieșire de tipul: $v_o = A_2 \cdot v_2 - A_1 \cdot v_1$. Pentru a determina amplificarea în buclă închisă A_1 , aplicăm principiul superpoziției. Dacă $v_2 = 0$, obținem $v_p = 0$, ceea ce conduce la un amplificator inversor. $v_{oi} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_1$. Din relațiile prezentate

ținând cont de condiția $v_2 = 0$, obținem: $A_1 = \frac{R_2}{R_1}$. Pentru a determina amplificarea în buclă închisă "A2" scurtcircuităm sursa de tensiune v_1 . Se obține astfel un amplificator de tensiune neinversor, iar tensiunea de ieșire v_{o2} este dată de relația:

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_p = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot v_2, \quad (10.6)$$

pentru obținerea căreia s-a utilizat formula divizorului de tensiune.

Amplificarea în buclă închisă "A2", este $A_2 = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}$. Se obține astfel

expresia semnalului de ieșire:

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot v_2 - v_1 \right) \quad (10.7)$$

În continuare, ne propunem să determinăm rezistențele de intrare R_{i1} și R_{i2} ale surselor de tensiune v_1 și v_2 .



Fig10.11 Scheme explicative pentru calculul rezistențelor

Pentru determinarea rezistenței de intrare R_{i_2} , utilizăm reprezentarea parțială a circuitului (fig.10.11 a), obținând relația: $-R_{i_2} = R_3 + R_4$. În determinarea rezistenței de intrare R_{i_1} ținem cont că reacția negativă a amplificatorului operațional poate fi modelată cu ajutorul unei surse dependente de tensiune cu control în tensiune (VCVS) cu valoarea $1 \times v_p$, ceea ce ne indică faptul că $v_p = v_N$ (fig.10.11 b).

Dacă privim intrarea inversoare, vedem că $r_{VCVS} = 0$, deci, vom obține pentru rezistența de intrare R_{i_1} următoarea relație: $R_{i_1} = R_1 + r_{VCVS} = R_1$. Mai mult, rezistența de ieșire $R_0 = 0$

e. Amplificatorul de instrumentație

O funcție comună în măsurători și comenzi este amplificarea diferenței de tensiune între două noduri a unui circuit, fără să modifice tensiunea individuală a fiecărui nod. În cazul amplificatorului diferențial, datorită rezistențelor de intrare R_{i_1} și R_{i_2} , tensiunile individuale ale nodurilor vor fi modificate. Ceea ce urmărim să obținem este un amplificator diferențial cu $R_{i_1} = R_{i_2} = \infty$.

O modalitate de obținere a acestui amplificator diferențial este aceea de a precede un amplificator diferențial de câte două amplificatoare neinverse, pentru a face ca rezistența de intrare să fie “văzută” ca o rezistență infinită.

Un astfel de amplificator este prezentat în figura 10.12 a.

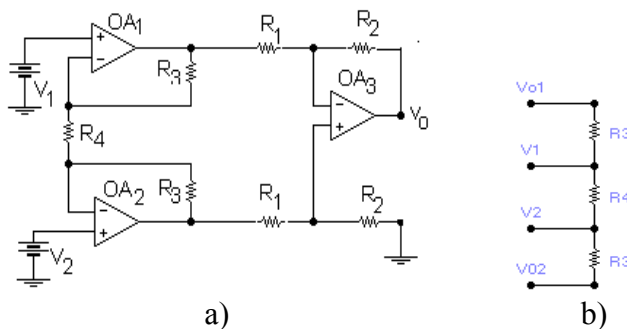


Fig. 10.12 Amplificator instrumentație

În cele ce urmează ne propunem să obținem o relație pentru v_0 în funcție de v_1 și v_2 . Amplificatorul operațional notat cu OA_3 este de tip

diferențial și, deci, se poate scrie următoarea relație: $v_o = \frac{R_2}{R_1} \cdot (v_{o2} - v_{o1})$ unde v_{o1} și v_{o2} sunt tensiunile de ieșire de la amplificatoarele OA_1 și OA_2 .

Deoarece prin intrările amplificatoarelor OA_1 și OA_2 nu circulează curent, aplicând relația lui Ohm se poate scrie: $v_{o1} - v_{o2} = (R_3 + R_4 + R_3) \cdot i \rightarrow v_{o1} - v_{o2} = (2 \cdot R_3 + R_4) \cdot i$ unde "i" este curentul prin rezistențele serie $R_3 - R_4 - R_3$ (fig.5.61 b). Scrierea curenților funcție de potențiale conduce în final următoarea relație: $v_o = \left(1 + \frac{2 \cdot R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot (v_2 - v_1)$. Rezultă că amplificarea circuitului este alcătuită din doi termeni:

- $\left(1 + \frac{2 \cdot R_3}{R_4}\right)$ - reprezintă amplificarea circuitului format din amplificatoarele OA_1 și OA_2 (acest circuit este denumit "treapta a I - a");
- $\frac{R_2}{R_1}$ - reprezintă amplificarea amplificatorului diferențial bazat pe amplificatorul operațional OA_3 (acest circuit este denumit "treapta a II - a").

10.1.4 Amplificatoare de transrezistență (convertoare curent - tensiune)

Amplificatoarele operaționale sunt amplificatoare de tensiune, dar cu ajutorul unor componente exterioare pot fi configurate să lucreze și în următoarele trei tipuri de amplificatoare: amplificatoare de transrezistență; amplificatoare de transconductanță; amplificatoare de curent.

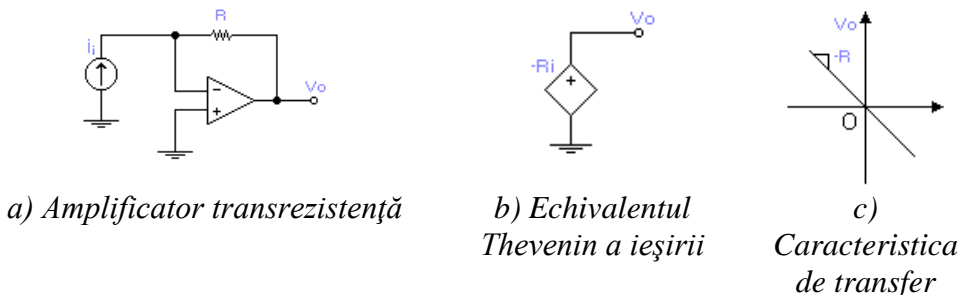


Fig. 10.13 Converter curent – tensiune

În figura 10.13.a este prezentat amplificatorul de transrezistență, denumit și convertor I - V. În continuare încercăm să determinăm o relație

între tensiunea de ieșire și cea de intrare. Se observă că, deoarece nu circulă curent prin pinul de intrare inversor, curentul i_i trebuie să treacă prin rezistența R . Mai mult, deoarece pinul inversor este virtual legat la masă, putem scrie: $v_o = -R \cdot i$

Amplificarea transrezistentă este, după cum rezultă din relația de mai sus, $-R$ și este măsurată în (V/A).

După cum este arătat în figura 10.13 b pinul de ieșire se comportă ca o sursă dependentă de tensiune comandată în curent. În figura 10.13 c este prezentată caracteristica de transfer a circuitului. O astfel de relație poate fi obținută alimentând circuitul cu i_i prin rezistența R fără a trece curentul prin amplificatorul operațional. Astfel, amplificatorul operațional va “vedea” $R \cdot i = 0$, deoarece sursa este conectată la o masă virtuală, iar sarcina de ieșire este $R_o = 0$, deoarece tensiunea v_o vine de la o sursă internă ideală v_{oD} .

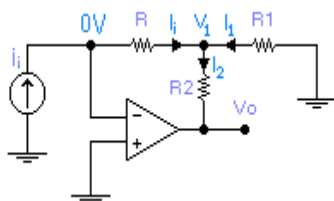


Fig. 10.14 Convertor I - V cu rețea T în bucla de reacție

Rolul amplificatorului operațional este de a preveni orice încărcare la intrare sau ieșire. În figura 10.14 este prezentat un convertor I - V care utilizează o rețea în T pentru a realiza o amplificare de transrezistență mare, fără a folosi rezistențe foarte mari.

Pentru a determina caracteristica de transfer, aplicăm teorema I

Kirchhoff în nodul V_1 , și vom obține $i_i + i_1 = i_2$ sau:
$$i_i + \frac{0 - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_2}$$

Dar, cu toate că, curentul de intrare i_i trece prin rezistența R , avem $v_1 = -R \cdot i_i$.

Înlocuind în relația anterioară obținem: $v_o = -k \cdot R_2 \cdot i_i$ unde

$$k = 1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2}$$

10.1.5 Amplificatoare de transconductanță (convertoare tensiune - curent)

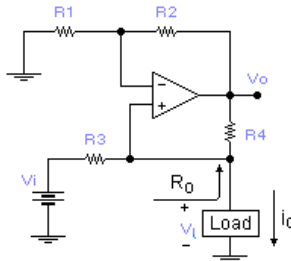


Fig 10.15 Converter tensiune-curent

Rolul amplificatorului de transconductanță, denumit și convertor tensiune-curent, este de a converti un semnal de intrare în tensiune v_i , într-un semnal de ieșire în curent i_o , independent de sarcina apărută la ieșire. Astfel, sarcina trebuie văzută ca o rezistență $R_o = \infty$. Un convertor U - I popular, cunoscut sub numele de “circuit Howland” după inventatorul său, este prezentat în figura 10.15. În continuare, vom determina o relație între curentul de ieșire și tensiunea de intrare. Considerăm că nu există circulație de curent pe pinul neinvertor al amplificatorului operațional și, aplicând teorema I Kirchhoff, obținem: $i_o = \frac{v_i - v_L}{R_3} + \frac{v_o - v_L}{R_4}$, unde v_L este tensiunea apărută pe sarcină. Subcircuitul format din rezistențele R_1, R_2 și amplificatorul operațional, formează un amplificator neinvertor, și deci: $v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_L$. Înlocuind expresia lui v_o în relația anterioară se obține:

$$i_o = \frac{v_i}{R_3} - \frac{v_L}{R_4} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3} - \frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{v_i}{R_3} - \frac{v_L}{R_o} \quad \text{unde:} \quad R_o = \frac{R_4}{\frac{R_4}{R_3} - \frac{R_2}{R_1}}$$

Pentru a face curentul i_o independent de tensiunea pe sarcină v_L , vom impune: $\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$ ceea ce este echivalent cu $R_o = \infty$. Ecuația devine astfel: $i_o = \frac{1}{R_3} \cdot v_i$. Amplificarea de transconductanță este $1/R_3$ și este exprimat în V/A. După cum se observă din figura 10.16 curentul i_o este comandat de v_i , dar este independent de v_L . Mai mult, când $v_L > 0$, circuitul este “sursă de curent”, iar când $v_L < 0$ este “consumator de curent”.

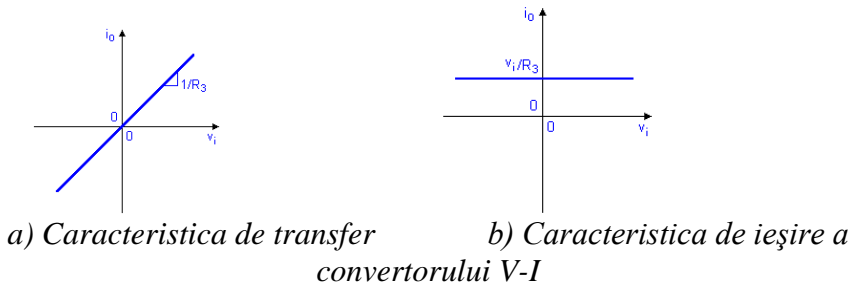


Fig. 10.16 Caracteristicile convertorului V-I

În cazul circuitului *Howland* este necesar un amplificator operațional și o punte cu rezistențe echilibrată. Circuitul realizează o rezistență $R_o = \infty$ printr-o reacție pozitivă cu rezistența R_4 .

10.1.6 Amplificatoare de curent

În figura 10.17 sunt prezentate două posibilități de configurare a unui amplificator operațional pentru ca acesta să lucreze ca un amplificator de curent. Considerăm cazul prezentat în figura 10.17a. Aplicând relația lui Ohm și teorema II Kirchhoff, obținem următoarea relație pentru curentul de ieșire:

$$i_o = \frac{(v_o - v_p)}{R_1} = \frac{(v_n - R_2 \cdot i_i - v_p)}{R_1} \quad (10.8)$$

Astfel, când amplificatorul operațional forțează potențialul din noul "N" să fie egal cu potențialul din noul "P", se obține: $i_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot i_i$.

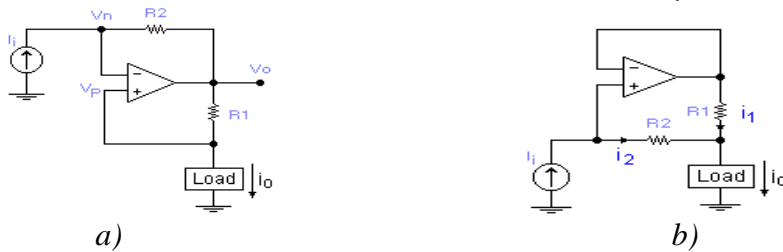


Fig. 10.17 Amplificatoare de curent

O amplificare negativă semnifică faptul că, dacă introducem (sau consumăm) curent prin circuit, se va modifica în consumator (sau sursă) de curent de la sarcină. Când rezistențele sunt egale circuitul este denumit "inversor de curent" sau "oglină de curent", deoarece la ieșire se obține un curent egal în modul dar de sens contrar celui de intrare.

În circuitul din figura 10.17 b. intrarea amplificatorului operațional apare virtual scurtcircuitată, rezistențele realizează aceeași cădere de tensiune: $R_1 \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2$ Aplicând teorema I Kirchhoff, se obține

$$\text{următoarea relație: } i_o = i_1 + i_2 = i_i + \frac{R_2 \cdot i_i}{R_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot i_i$$

Din relație se observă că, dacă introducem (sau consumăm) curent în circuit, acesta va determina un curent pe sarcină de $1 + (R_2/R_1)$ mai mare decât curentul de intrare.

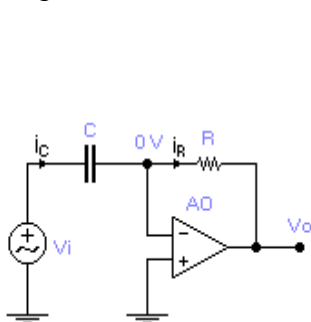
10.2 Răspunsul în regim tranzitoriu al circuitelor electrice ce conțin amplificatoare operaționale

10.2.1 Răspunsul circuitelor de ordinul I ce conțin amplificatoare operaționale

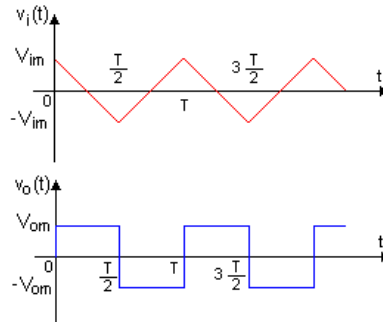
Circuitele RC creează împreună cu amplificatoarele operaționale combinații foarte interesante. Datorită proprietății acestora de a prelua energia de la sursa de alimentare și a o dirija spre circuitele anexe, amplificatorul operațional poate fi utilizat în moduri ingenioase pentru a crea efecte care nu pot fi realizate cu componente pasive pure RLC, cu atât mai puțin numai cu rezistențe și capacități. Analiza circuitelor cu amplificatoare operaționale, este bazată pe conceptul de scurt virtual. Prezentăm în continuare câteva exemple de astfel de circuite și răspunsul acestora în regim variabil în timp.

a) Circuitul de diferențiere

În figura 10.18 a este prezentat un circuit de diferențiere, iar în fig.10.18b, sunt prezentate formele de undă pentru semnalul de intrare, respectiv semnalul de ieșire.



a) Circuit de diferențiere
intrare și ieșire



b) Forma de undă pentru intrare și ieșire

10.18 Circuitul de diferențiere

În circuitul prezentat (fig.10.18), se știe că, amplificatorul operațional, prin circuitul de reacție format de rezistență, păstrează intrarea inversoare la un potențial virtual de masă. Ecuațiile Kirchoff ale circuitului sunt:

$$\begin{cases} i_c = C \cdot \frac{d(v_i - 0)}{dt} = C \cdot \frac{dv_i}{dt} \\ i_R = \frac{0 - v_0}{R} = -v_0 \cdot R \end{cases} \quad (10.9)$$

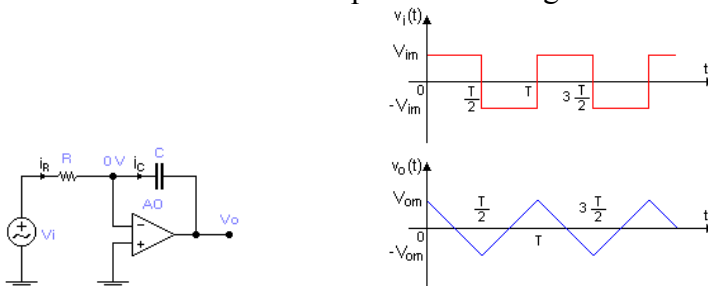
Deoarece nu există flux de curent spre sau dinspre intrarea inversoare, curenții sunt egali $i_c = i_R$, și în consecință relația intrare - ieșire devine

$$v_o(t) = -R \cdot C \cdot \frac{dv_i(t)}{dt}. \text{ Din relația tensiunii de ieșire observăm că semnalul}$$

este proporțional cu derivata în funcție de timp a semnalului de intrare. Constanta de proporționalitate RC este negativă și are ca dimensiunea timpului (secunda). Circuitul este denumit “circuit de diferențiere”.

b) Circuitul de integrare

În circuitul din figura 10.18a, schimbând între ele rezistența și condensatorul, se obține circuitul din figura 10.19a, denumit circuit de integrare. Forma de undă a semnalului de ieșire pentru o formă dată a semnalului de intrare este prezentată în figura 10.19b.



a) Circuit de integrare

b) Forma de undă pentru intrare și ieșire

Fig. 10.19 Circuitul integrator

Utilizând teorema I Kirchoff și principiul de funcționare al amplificatorului operațional, putem scrie: $i_c = i_R$ sau: $\frac{(v_i - 0)}{R} = C \cdot \frac{d(0 - v_0)}{dt}$. Din relația dedusă se obține expresia tensiunii de ieșire

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_{\xi=0}^t v_i(\xi) d\xi + v_o(0) \quad \text{unde } v_o(0) \text{ reprezintă semnalul de ieșire în}$$

tensiune la $t=0$. Această valoare este determinată de energia acumulată în acest timp în capacitate. Denumit "integrator" circuitul are un semnal la ieșire proporțional cu integrala în funcție de timp a semnalului de intrare. Constanta de proporționalitate $-1/RC$ este negativă, iar dimensiunea sa este $[s^{-1}]$. Un caz particular se obține cazul în care tensiunea de intrare este constantă, sau $v_i(t) = v_i$, pentru care relația intrare - ieșire devine:

$$v_o(t) = -\frac{v_i}{RC} \cdot t + v_o(0)$$

În fond, aplicând o tensiune constantă intrării integratorului, la ieșire se obține un semnal uniform sau un semnal rampă. Dacă tensiunea de intrare este pozitivă, se obține o rampă descrescătoare, iar dacă tensiunea de intrare este negativă, se obține o rampă crescătoare. Datorită proprietății de a produce semnale de ieșire în rampă, integratorul are aplicații în proiectarea generatoarelor de semnal pentru forme de undă triunghiulare sau în dinte de fierăstrău.

c) Circuitul integrator neinvertor

Circuitul prezentat în fig.10.20 este un convertor tensiune-curent având sarcină o capacitate. Curentul prin capacitate este dat de relația:

$$i_c = \frac{v_i}{R_1}. \text{ Deoarece amplificatorul operațional este configurat amplificator}$$

neinvertor, putem scrie: $v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_c$. Din combinarea relațiilor rezultă:

$$\frac{v_i}{R_1} = i_c = C \cdot \frac{dv_c}{dt} = \left(\frac{C}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \right) \cdot \frac{dv_o}{dt} \text{ sau } dv_o = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{R_1 \cdot C} \cdot v_i \cdot dt. \text{ Integrând ambii termenii}$$

în intervalul $[0, t]$, obținem: $v_o(t) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{R_1 \cdot C} \cdot \int_0^t v_i(\xi) d\xi + v_o(0)$.

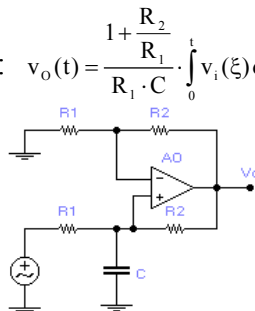


Fig. 10.20 Circuit integrator neinvertor

Constanta de proporționalitate dintre tensiunea de ieșire și cea de intrare $(1+R_2/R_1)/(R_1 \cdot C)$ este pozitivă, iar circuitul este numit integrator neinversor. Astfel, dacă tensiunea de intrare are valoare constantă integratorul neinversor va avea o rampă crescătoare atât timp cât tensiunea de intrare este pozitivă, și descrescătoare dacă tensiunea de intrare este negativă.

d) Crearea răspunsurilor divergente

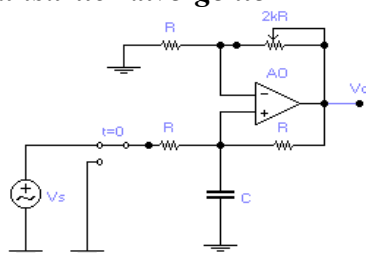


Fig.10.21 Circuit cu răspuns divergent

Circuitului integrator ne inversor i ntroducându-i u n r ezistor v ariabil conform f igurii 10.21 și modificând rezistența de la 0 la 2R valoarea rezistenței echivalente la ieșirea amplificatorului este: $R_0 = \frac{R}{1-2 \cdot k}$, u nde k este o fracție controlată de poziția cursorului ($0 \leq k \leq 1$).

Întrucât coeficientul k este modificat de la 0 la 1 funcție de poziția cursorului, rezistența R_0 variază de la R prin ∞ la $-R$. Astfel se obține rezistența R_0 negativă, ceea ce ne interesează. Pentru a putea aprecia această proprietate, căutăm o relație între tensiunile v_0 și v_s . A mplificatorul operațional având configurație neinversoare amplifică tensiunea pe condensator v_C cu un coeficient $1+2k$, și deci: $v_0 = (1+2 \cdot k) \cdot v_C$

Aplicând teorema I *Kirchhoff* în nodul intrării neinversoare, obținem următoarea relație: $\frac{v_s - v_C}{R} = C \cdot \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C - v_0}{R}$. Eliminând tensiunea v_C , ecuația

diferențială care guvernează acest circuit este: $\frac{R_C}{1-2 \cdot k} \cdot \frac{dv_0}{dt} + v_0 = \frac{1+2 \cdot k}{1-2 \cdot k} \cdot v_s$. Pentru început, conectăm circuitul la

sursa v_s pentru a “injecta” energie î n c ondensatorul C , a poi vom t rece comutatorul în poziția de potențial nul pentru a exclude sursa din circuit, și analizăm comportarea circuitului. Astfel, pentru $t \geq 0^+$ ecuația va fi:

$$\frac{RC}{1-2k} \cdot \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 0 \text{ cu rădăcina caracteristică } s = \frac{2k-1}{RC} \text{ care determină}$$

următoarea soluție pentru tensiunea de ieșire:

$$v_o(t \geq 0^+) = v_o(0^+) \cdot e^{st} = v_o(0^+) \cdot e^{\frac{2k-1}{RC}t}. \quad (10.10)$$

Se pot identifica trei cazuri importante:

- $k < 0,5$ - ceea ce conduce la $s < 0$. Răspunsul natural al circuitului este cu amortizare exponențială. În concluzie, putem spune că, circuitul va răspunde ca un circuit RC obișnuit.
- $k = 0,5$ - deci, $s = 0$. În acest caz, răspunsul natural este constant, $v_o(t \geq 0^+) = v_o(0^+)$. Pentru $k = 0,5$, rezistența este reglată astfel încât circuitul se reduce la integratorul neinvertor
- $k > 0,5$ - implică $s > 0$. Răspunsul este exponențial crescător întrucât termenul exponențial este pozitiv. Acest tip de răspuns este prezentat în figura 10.22

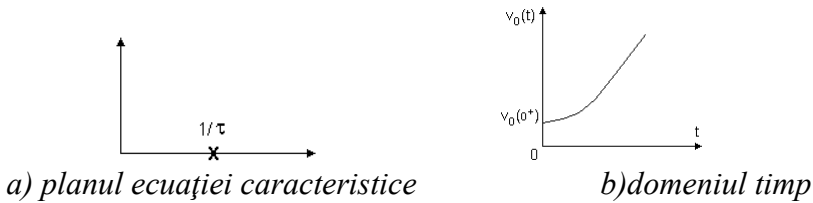


Fig. 10.22 Răspunsul circuitului

Din punct de vedere fizic, un răspuns divergent natural injectează în circuitul RC mai multă energie decât poate rezistența R să disipe. Aceasta este o energie adițională care mărește tensiunea acumulată pe capacitatea C. Prin contrast, în circuitele RC pasive, disiparea energiei pe rezistența R produce o descărcare graduală a capacității.

Prin introducerea unui amplificator operațional, poziția rădăcinii poate fi făcută să treacă în partea dreaptă a axei planului s. Modificarea poziției rădăcinii nu este posibilă în circuite pasive pure, ceea ce face ca amplificatoarele operaționale să fie utilizate la realizarea unor circuite importante cum ar fi filtrele sau oscilatoarele.

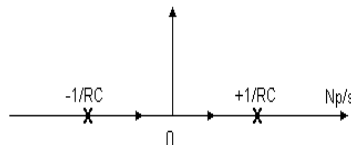


Fig.10.23 Poziția rădăcinii în planul s

Efectul coeficientului k asupra rădăcinii (s) ecuației caracteristice poate fi vizualizat grafic cu ajutorul poziției rădăcinii, care este traiectoria descrisă de către s când k este modificat de la 0 la 1. În circuitul prezentat, s se deplasează de la $(-1/RC)$, prin originea, spre $(1/RC)$ (fig.10.23). O observație interesantă este aceea că în circuitul RC pasiv, poziția rădăcinii se extinde numai până în origine.

Prin introducerea unui amplificator operațional, poziția rădăcinii poate fi făcută să treacă în partea dreaptă a axei planului s . Modificarea poziției rădăcinii nu este posibilă în circuite pasive pure.

10.2.2 Răspunsul circuitelor de ordinul II ce conțin amplificatoare operaționale

În cele prezentate mai sus s-a demonstrat proprietatea unică a circuitelor de ordinul I cu amplificatoare operaționale de a crea răspunsuri în partea dreaptă a planului complex, proprietate de care nu se bucură circuitele pasive pure.

În continuare vom studia circuite de ordinul al II-lea cu amplificatoare operaționale și vom demonstra că este posibil nu numai să se creeze rădăcini în partea dreaptă a planului complex, ci și să se creeze rădăcini complexe fără utilizarea oricărei inductanțe, folosind numai rezistențe și capacități, ca elemente pasive. Utilizarea amplificatoarelor operaționale, în astfel de circuite, are două avantaje importante și anume:

- *posibilitatea de a controla plasarea rădăcinii în planul complex, deschizând o gamă largă de aplicații pentru circuite RC cu amplificatoare operaționale cum ar fi filtrele sau oscilatoarele.*
- *un înalt grad de miniaturizare prin eliminarea inductanțelor.*

Pentru a aprecia în întregime rolul amplificatoarelor operaționale mai întâi vom examina circuitele de ordinul II pasive, ce conțin rezistențe și capacități, dar nu conțin inductanțe, și să arătăm că rădăcinile ecuației caracteristice sunt întotdeauna reale și negative. Apoi vom demonstra că introducerea unui amplificator operațional pentru a prevedea o creștere controlată a reacției pozitive permite, pentru același circuit, să creeze rădăcini complexe, și că aceste rădăcini pot fi plasate oriunde în planul complex.

a) Circuite de ordinul II pasive fără inductanțe

Circuitul pasiv din figura 10.11 constă din două trepte RC. Analiza circuitului o realizăm prin teorema I Kirchhoff, obținând

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_2 = i_4 \end{cases}$$

Înlocuind curenții din aceste ecuații prin metoda potențialelor nodale obținem:

$$\begin{cases} \frac{v_s - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v}{R_2} + C_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{v_1 - v}{R_2} = C_2 \cdot \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (10.11)$$

Rezolvarea sistemului prin eliminarea potențialului v_1 , conduce la ecuația diferențială de ordinul II: $\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_o^2 \cdot v = \omega_o^2 \cdot v_s$, în care s-au folosit notațiile:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}} \quad (10.12)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_2 + R_1 \cdot C_2}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}}$$

După cum se știe, ξ determină caracteristica de atenuare (amortizare) a circuitului iar ω_o definește frecvența de rezonanță. Pentru a putea examina în detaliu aceasta, se introduce variabila: $x = \frac{R_1 \cdot C_1}{R_2 \cdot C_2}$ iar ξ se exprimă astfel:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right]. \quad (10.13)$$

Se poate ușor verifica faptul că $\xi \geq 1$, iar minimum se obține atunci când raportul dintre R_1 și R_2 tinde către zero și x tinde către 1. În consecință acest circuit admite numai rădăcini reale negative, deci răspunsul natural nu poate fi niciodată de tipul celor cu amortizare slabă.

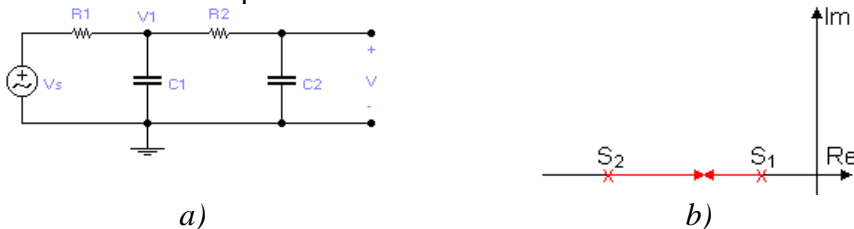


Fig. 10.24 Circuit de ordin II fără inductivități

Figura 10.24 b arată locul de plasare a rădăcinilor ecuației circuitului. Este interesant de arătat că circuitul prezintă rădăcini distincte de fiecare dată când $R_1 \cdot C_1 = R_2 \cdot C_2$.

Din punct de vedere fizic aceasta reprezintă de fapt o piedică deoarece treapta $\frac{R_1}{R_2}$ reprezintă o sarcină pentru treapta $R_2 C_2$. Sarcina poate fi eliminată prin interpunerea unui atenuator de tensiune între cele două trepte RC. În acest caz, dacă $R_1 \cdot C_1 = R_2 \cdot C_2$ rădăcinile vor coincide. O altă soluție de minimizare a sarcinii este impunerea unei rezistențe $R_1 \ll R_2$.

În concluzie, răspunsul natural al circuitelor pasive fără inductanțe nu poate fi niciodată de tipul celor cu amortizare slabă. Circuitul poate să fie făcut să se apropie de amortizarea critică atunci când $R_1 \ll R_2$ pentru minimizarea sarcinii și $C_2 = \frac{R_1}{R_2} \cdot C_1$, pentru micșorarea lui ξ .

b) Circuite de ordinul II active fără inductanțe

Circuitul din figura 10.25 este similar celui prezentat, cu excepția faptului că semnalul de ieșire din a doua treaptă RC este introdus într-un amplificator, iar semnalul de ieșire din amplificator este folosit ca reacție printr-o capacitate mare.

Deoarece amplificatorul este de tipul neinversor, această modificare va produce o reacție pozitivă. Circuitul este un circuit activ datorită prezenței amplificatorului cu proprietatea lui unică de a dirija energia de la sursa lui de alimentare spre circuitele înconjurătoare, în comparație cu circuitul din figura 10.25 care este unul pur pasiv.

Pentru a simplifica lucrurile am impus în mod arbitrar capacitățile egale și raportul rezistențelor de 4 la 1. ($R_1=10k\Omega$, $R_2=20k\Omega$)

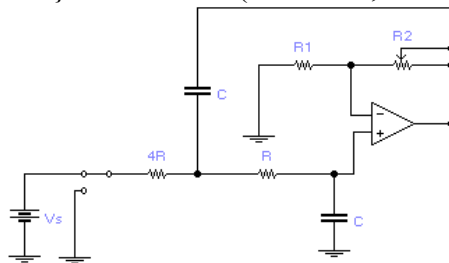


Fig. 10.25 Circuit activ de ordinul II fără inductanțe

Caracteristica de transfer este dată de relația: $v=v_2$ unde $k=1+\frac{R_1}{R_2}$,

v_2 reprezintă potențialul intrării neinversoare. Aplicând metoda potențialelor nodale de rezolvare a circuitelor se obține sistemul:

$$\begin{cases} \frac{v_s - v_1}{4 \cdot R} = C \cdot \frac{d(v_1 - v)}{dt} + \frac{v_1 - v_2}{R} \\ \frac{v_1 - v_2}{R} = c \cdot \frac{dv_2}{dt} \end{cases} \quad (10.14)$$

Înlocuind $v_2 = v/k$ și eliminând tensiunea v_1 se obține ecuația diferențială

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_o^2 \cdot v = k \cdot \omega_o^2 \cdot v_s \quad \text{unde:} \quad \omega_o = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C}, \text{ iar}$$

$\xi = 2,25 - k$. Din relația de mai sus observăm că ξ depinde de factorul de amplificare, arătând că prin alegerea lui k , putem face ca ξ să ia valori diferite, inclusiv 0 sau orice valoare negativă.

Cu valorile lui R_1 și R_2 indicate în figura 10.25, factorul de amplificare este variabil în domeniul $1V/V \leq k \leq 3V/V$, astfel că ξ poate varia în domeniul $-0,75 \leq \xi \leq 1,25$.

Să studiem circuitul din punct de vedere a factorului de amplificare k .

- Pentru $1V/V \leq k \leq 1,25V/V$ se obține $1 \leq \xi \leq 1,25$. rădăcinile sunt reale și negative.
- Pentru $k > 1,25V/V$ se obține $\xi \leq 1$ cauzând rădăcini complex conjugate. După cum se știe aceasta înseamnă un comportament oscilatoriu. Într-un circuit RLC, acest comportament este o piedică pentru proprietatea de înmagazinare a energiei și de schimb între capacitate și inductanță.

Într-un circuit kRC, acesta nu are inductanțe dar este prevăzut cu un amplificator care este folosit pentru transferul energiei între propria lui sursă de alimentare și cele două trepte RC. Acest flux de energie are loc prin capacitate.

- Pentru $k = 2,25V/V$ se obține $\xi = 0$, indicând rădăcini pur imaginare și oscilații neamortizate. Din punct de vedere fizic, atunci când k are această valoare energia injectată prin circuitul de reacție este egală cu energia disipată pe cele două trepte RC.

În circuitul RLC condiția de neamortizare este prezentată prin $R \rightarrow 0$ pentru cuplare în serie, și $R \rightarrow \infty$ pentru cuplarea în paralel. În practică, datorită faptului că elementele RLC nu sunt ideale, apar pierderi parazitare mai ales pe inductanță. Rezultă că în orice circuit RLC pasiv, oscilațiile vor

fi amortizate. Spre deosebire de acestea, în circuitele kRC putem obține oscilații întreținute prin setarea lui $k = 2,25V/V$.

c) Crearea rădăcinilor pozitive

Printre proprietățile circuitelor kRC, este și aceea de a putea obține valori negative pe ntru ξ , ceea ce în cazul circuitelor RLC pasive nu-i posibil.

Pentru $k \geq 2,25V/V$ se obține $\xi < 0$ iar rădăcinile ecuației caracteristice sunt: $s_{1,2} = -\xi \cdot \omega_0 \pm j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$ unde pe ntru $\xi < 0$ se ajunge ca $-\xi \cdot \omega_0$ să devină pozitivă, indicând faptul că rădăcinile se vor extinde acum în partea dreapta a planului complex. Mai mult, răspunsul poate fi scris astfel: $v_o(t) = A \cdot e^{|\xi| \omega_0 t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \theta)$, unde A și θ sunt constante inițiale uzuale.

Această funcție reprezintă o sinusoidă, având frecvența $\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$, unghiul de fază θ și amplitudinea exponențială $A \cdot e^{|\xi| t \omega_0}$.

Din punct de vedere fizic, dacă $k > 2,25V/V$, energia injectată de către amplificator crește cu fiecare ciclu mai mult decât se poate disipa pe cele două trepte RC, astfel că oscilația va crește în amplitudine, într-o progresie geometrică.

În circuitele practice, oscilațiile vor crește până la o neliniaritate oarecare, care este totdeauna prezentă în forme oarecare, limitează oscilațiile semnalului de ieșire și, prin urmare, cantitatea de energie pe care amplificatorul o poate reinjecta în circuit. Odată îndeplinită această condiție, circuitul va realiza oscilații întreținute.

Proprietățile principale se pot concluziona astfel:

- $1V/V \leq k \leq 1,25V/V$
- rădăcinile sunt plasate în partea negativă a axei;
- $1,25V/V \leq k \leq 2,25V/V$
- rădăcinile sunt plasate pe un arc de cerc în partea stângă a planului complex;
- $2,25V/V \leq k \leq 3V/V$
- locul de plasare a rădăcinilor se extinde în jumătatea dreaptă a planului complex;
- $k \geq 1,25V/V$
- distanța radială a rădăcinilor față de origine este ω_0 , indicând faptul că traiectoria este un arc de cerc cu raza ω_0 .

10.3 Răspunsul în c.a. al circuitelor electrice ce conțin amplificatoarelor operaționale

Analiza circuitelor se realizează pe baza conceptului de scurt virtual. Regula pentru circuitele de curent alternativ cu amplificatoare operaționale este:

“ Un amplificator operațional va modifica fazorul semnalului de ieșire la orice valoare se dorește, pentru ca fazorul diferență de intrare \underline{V}_d să fie nul.” unde $\underline{V}_d = \underline{V}_p - \underline{V}_n$, iar \underline{V}_n și \underline{V}_p sunt fazorii pentru intrările inversoare și neinversoare.

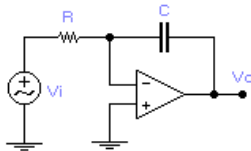
În continuare vom ilustra utilizarea acestei reguli, cu ajutorul câtorva exemple.

a) Circuitul integrator

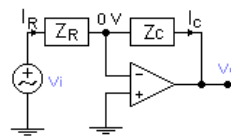
Circuitul din figura 10.26 a fost analizat în domeniul timp având dependența intrare-ieșire sub formă integrală exprimată prin relația

$$v_o = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t v_i(\xi) d\xi + v_o(0) \quad (10.15)$$

În continuare vom reexamina acest circuit în domeniul complex. În acest sens, imaginea circuitului este descrisă de figura 10.26b. Observăm că fazorii curenților ce parcurg rezistența și capacitatea trebuie să satisfacă următoarea condiție $\underline{I}_R = \underline{I}_C$ iar relația dintre semnale devine $\frac{\underline{V}_o}{\underline{V}_i} = -\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R}$.



a) Circuit integrator inversor



b)

Reprezentarea în complex

Figura 10.26 Circuitul integrator în c.a.

Aceasta este formula familiară pentru amplificarea amplificatorului neinversor. Scriind $\underline{Z}_R = R$ și $\underline{Z}_C = 1/j\omega C$, se obține $\underline{V}_o = -\frac{1}{j\omega RC} \cdot \underline{V}_i$. Pentru a înțelege funcționarea circuitului rescriem ecuația astfel: $\underline{V}_o = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{\underline{V}_i}{j\omega}$.

După cum se știe, divizarea unui fazor cu $j\omega$ este echivalentă cu integrarea semnalului respectiv întrucât operației de integrare îi corespunde în planul complex împărțirea la $j\omega$. În consecință, rolul circuitului în curent

alternativ este de integrare. Constanta de proporționalitate este $-1/RC$, iar unitatea de măsură a acesteia este $[s^{-1}]$.

b) Circuitul derivator

Schimbând R și C în circuitul din figura 10.26 se obține circuitul din figura 10.27a. Reprezentării circuitului din domeniul complex (fig. 10.27b)

putem să aplicăm formula amplificării inversoare $\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R}{\frac{1}{j\omega C}}$ de unde ,

tensiunea de ieșire poate fi scrisă sub forma:

$$\underline{V}_o = -j\omega RC \underline{V}_i .$$



a) Circuit derivator b) Reprezentarea domeniului de frecvență

Figura 10.27 Circuit derivator

Multiplicarea în n c complex a unui f azor c u j ω este echivalentă cu diferențierea semnalului corespunzător de curent alternativ, deci rolul circuitului este de diferențiere. Constanta de proporționalitate $-RC$ are ca unitate de măsură $[s]$.

c) Filtru trece jos(“Low pass”) cu amplificare

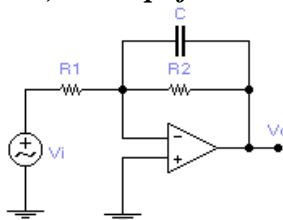


Fig. 10.28 Circuit “Low pass” cu amplificare

Aplicând formula amplificării amplificatorului inversor in circuitul din figura 10.28 deducem, $\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_P}{Z_{R1}}$ relație în care $Z_P = Z_C \parallel Z_{R2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$; $Z_{R1} = R_1$. Înlocuind în relația de dependență intrare ieșire se obține expresia $\underline{V}_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C} \cdot \underline{V}_i$. Primul termen din partea dreaptă a ecuației tensiunilor

reprezintă amplificarea, iar al doilea termen are rolul unui filtru trece-jos. Amplitudinea amplificării este dată de relația R_2 / R_1 , iar caracteristica de frecvență a funcției trece-jos este dată de relația $\omega_0 = \frac{1}{R_2 \cdot C}$. Amplitudinea intrare-ieșire și faza sunt date de relațiile:

$$V_{om} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_2 C)^2}} \cdot V_{im} \text{ respectiv } \varphi = 180^\circ - \tan^{-1}(\omega R_2 C) \quad (10.16)$$

d) Filtru trece sus cu amplificare (“high pass”)

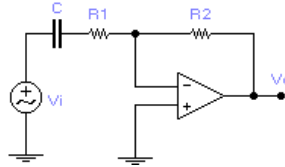


Fig. 10.29 Circuit “high pass” cu amplificare

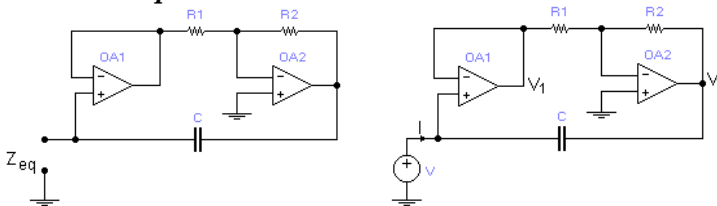
În figura 10.29 este prezentat un circuit trece sus cu amplificare. Amplificării circuitului inversor particularizat al circuitului este $\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_{R_2}}{Z_s}$

unde $Z_{R_2} = R_2$ și $Z_s = Z_C + Z_{R_1} = \frac{R_1 \cdot (1 + j\omega R_1 C)}{j\omega R_1 C}$.

În consecință, tensiunea de ieșire este: $V_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} \cdot V_i$.

Primul termen din partea dreaptă a ecuației reprezintă amplificarea, iar al doilea termen ne indică faptul că acest circuit are rolul unui filtru trece-sus. Amplificarea este dată de raportul R_2 / R_1 , iar caracteristica de frecvență este $\omega_0 = 1 / R_1 \cdot C$. Amplitudinea intrare-ieșire și faza sunt date de relațiile $V_{om} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\omega R_1 C}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}} \cdot V_{im}$ $\varphi = 90^\circ - \tan^{-1}(\omega R_1 C)$.

e) Multiplicator de capacitate



a) Multiplicator de capacitate

b) Circuit test pentru găsirea Z_{eq}

Figura 10.30 Multiplicator de capacitate

Considerăm că o intrare a amplificatorului operațional (fig.10.30) se comportă ca o capacitate echivalentă C_{eq} . Pentru a obține o expresie pentru această capacitate aplicăm o tensiune test “V” (fig.10.30b), ce va determina un curent “I”. Evaluând impedanța intrării obținem $Z_{eq} = \frac{V}{I}$. Presupunând că impedanța echivalentă este capacitivă, putem scrie $Z_{eq} = \frac{1}{j\omega C_{eq}}$

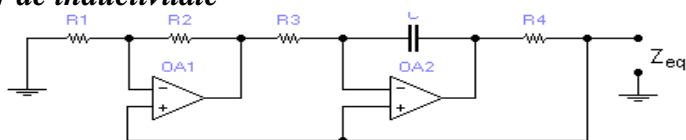
Amplificatorul O A₁ funcționează ca un repetor de tensiune, deci $V_1 = V$, iar amplificatorul O A₂ funcționează ca un amplificator inversor și tensiunea de ieșire este $V_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_1 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V$.

Impedanța echivalentă se determină ca raport al tensiunii aplicate pe curentul ce încarcă condensatorul $I = \frac{V - V_z}{Z_c} = \frac{V + \frac{R_2}{R_1} \cdot V}{Z_c} = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot V}{Z_c}$.

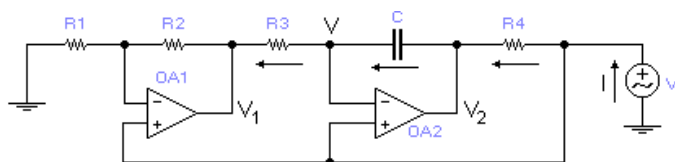
Astfel, putem determina relația impedanței echivalente $Z_{eq} = \frac{1}{j\omega C_{eq}}$ și, implicit, relația capacității echivalente $C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot C$. Din aceste ecuații putem concluziona că acest circuit are rolul unui multiplicator de capacitate. Acesta își găsește aplicație în special în tehnologia circuitelor integrate, întrucât din cauza miniaturizării pot fi realizate numai capacități foarte mici.

Când sunt cerute capacități mari, se poate utiliza acest tip de multiplicator. Acest efect de multiplicare a capacității este denumit “efect Miller pentru capacități”.

f) Simulator de inductivitate



a) Simulator de inductivitate



b) Circuit test pentru determinarea Z_{eq}

Figura 10.31 Simulator de inductivitate

În analiza circuitului (figura 10.31) considerăm că o intrare a amplificatorului operațional se comportă ca o inductanță. Pentru a demonstra acest lucru aplicăm o tensiune test alternativă “ \underline{V} ” (fig.10.31 b), ceea ce va conduce la apariția unui curent “ \underline{I} ”. Impedanța echivalentă a circuitului se determină ca raport tensiune aplicată pe curent injectat $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$ iar ipoteza admisă că impedanța este inductivă permite exprimarea acesteia în forma $\underline{Z}_{eq} = j \cdot \omega \cdot L_{eq}$

Aplicând relația lui *Ohm* putem determina curentul de intrare în amplificatorul operațional: $\underline{I} = \frac{\underline{V} - \underline{V}_2}{R_4}$. Amplificatorul OA₂ păstrează pinul inversor la tensiunea \underline{V}_2 , deci în acest nod teorema I Kirchhoff permite definirea următoarei relații $\frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_1}{1} = \frac{\underline{V} - \underline{V}_1}{R_3}$. Operaționalul OA₁

funcționează ca un amplificator neinversor $\underline{V}_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \underline{V}$ iar din combinarea relațiilor urmărim să deducem dependența tensiune test aplicată de curentul injectat obținând $\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\frac{j \cdot \omega \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{R_2}}$ din care exprimăm impedanța

echivalentă a circuitului $\underline{Z}_{eq} = j \cdot \omega \cdot L_{eq}$ respectiv inductivitatea $L_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{R_2} \cdot C$.

În concluzie, chiar dacă acest circuit nu folosește inductanțe, poate simula o gamă foarte largă de inductanțe folosind componente miniaturale. Proprietatea circuitului cu amplificator operațional de a simula inductanțe, găsește aplicație într-o importantă clasă de circuite, numite filtre active.

BIBLIOGRAFIE

Bibliografie minimală pentru studenți:

1. Adăscăliței, Adrian A.: *Teoria Circuitelor Electrice I și II*, suport online de curs, seminar și laborator, <http://moodle.ee.tuiasi.ro/> și/sau <https://www.moodle.ro/uaic/>
2. Adăscăliței, Adrian A.: *Electrotehnică (curs)*, Editura “Gh. Asachi” Iași, 2003, 150 pagini, ISBN: 973 621 029 4.
3. Adascalitei Adrian, *Îndrumar de laborator pentru disciplina Teoria circuitelor electrice. Simularea asistată de calculator a lucrărilor experimentale*. Editura Performantica, **2015**, 139 pag. ISBN 978 - 606-685-303-3
4. Remus Răduleț, *Bazele electrotehnicii. Probleme*, vol I & II, EDP București, 1981.
5. J.A. S voboda: *The Electronic Teaching Assistant: the Circuit Design Lab, Interactive Illustrations and Electric Circuit Study Applets* . <http://people.clarkson.edu/~jsvoboda/eta/>
6. Hyperphysics, Electricity and Magnetism, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/emcon.html#emcon>
7. HyperMath, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hmat.html#hmath>
8. Comitetul Electrotehnic Internațional – CEI, Electropedia: The World's Online Electrotechnical Vocabulary, <http://www.electropedia.org/>

Bibliografie pentru laborarea Cursului, Seminariilor și Lucrărilor Experimentale de Laborator:

1. Alexander, C . K ., Sadiku, M . N ., & Sadiku, M. (2007). *Fundamentals of electric circuits*. McGraw-Hill Higher Education. http://highered.mheducation.com/sites/0072463317/information_center_view0/index.html
http://highered.mheducation.com/sites/0073380571/information_center_view0/index.html
2. Charles K . Alexander, Matthew N .O. Sadiku, Network Analysis Tutorials, Engineering Circuit Analysis, http://www.mhhe.com/engcs/alexander2e/netan_tutorials/tutorials/tutmenu.htm

3. Dorf, R. C., & Svoboda, J. A. (2010). *Introduction to electric circuits*. John Wiley & Sons.
4. Berube, Richard Henry, and R. H. Berube. *Computer simulated experiments for electric circuits using Electronics Workbench Multisim*. Pearson/Prentice Hall, 2004.
<https://www.pearsonhighered.com/program/Berube-Computer-Simulated-Experiments-for-Electric-Circuits-Using-Electronics-Workbench-Multisim-3rd-Edition/PGM236771.html> și
Pearson Student Supplement Site,
http://media.pearsoncmg.com/ph/chet/chet_electronics_student_1/frames/berube_3.html
5. Interactive learning objects focus on concepts that cover a broad-based electromechanical program. <http://electronics.wisc-online.com/>
6. Electrotehnica și electronica. http://www.emie.ugal.ro/curs_ee.html
7. Ciprian Vlad, Gelu Gurguiatu, Ciprian Bălănuță. Elemente de inginerie electrică. In drumar Laborator, Galați University Press, 2009, <http://www.emie.ugal.ro/eie.html>
8. Ivanov Sergiu (versiunea în limba Română), e-Learning tools for Electrical Engineering: Circuite electrice Universitatea din Craiova, <http://ie.ucv.ro/elee/ro/realisations/CircuitsElectriques/index.htm>
9. L. Mandache, D. Topan, Simularea circuitelor electrice. Algoritmi și programe de calcul, Ed. Universitaria, Craiova, 2009; ISBN 978-606-510-504-1
10. L. Mandache, Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice, Ed. Sitech, Craiova, 2004; 190 p. A5, ISBN 973-657-737-6
11. Circuite Electrice, manual online, (Lessons In Electric Circuits), Lessons In Electric Circuits <http://www.allaboutcircuits.com/>;
<http://ibiblio.org/kuphaldt/electricCircuits/>
12. Student Wave, Online Study Tools,
http://www.wiley.com/college/elec/dorf386898/student/student_media.html
13. Thomas L. Floyd: (2006). *Principles of Electric Circuits: Electron Flow Version (Floyd Principles of Electric Circuits Series)*. Prentice-Hall, Inc..
http://wps.prenhall.com/chet_floyd_principles_7/4/1272/325652.cw/index.html
14. Špaldonová, Darina, and Milan Guzan. "Application of Excel in

- three-phase circuit analysis." *Acta Electrotechnica et Informatica* No. 6.1 (2006): 4. <http://aei.tuke.sk/papers/2006/4/Guzan.pdf>
15. Miomir Filipovic D. (2008). *Understanding Electronics Components*. Mikroelektronika.
<http://learn.mikroe.com/ebooks/componentsofelectronicdevices/>
 16. Petru Todos, Carmen Golovanov: *Senzori și traductoare*, Chișinău : Ed. Tehnica, Universitatea Tehnică a Moldovei, 1998
 17. Nicolae G olovanov, P etru T odos, [et a l.], *Probleme moderne de măsurare în electroenergetică*, București, Editura Tehnică, 2001
 18. H.Rosman, Gh.Savin, *Circuite electrice liniare*, I. P. Iași 1974.
 19. Gh. S avin, H .R osman *Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu*, Institutul Politehnic din Iași, 1976.
 20. Simulator de c ircuite o nline, h ttp://www.falstad.com/circuit/e-index.html
 21. Amanogawa & Semchip, Circuit Applets, (Power c omponents for sinusoidal si gnal. P arallel an d ser ies resonant circuits), <http://www.amanogawa.com/archive/CircuitsA.html>
 22. Boylestad, Robert L., and Louis Nashelsky. *Electronic Devices and Circuit Theory, Eight Edition*. P rentice H all (Pearson E ducation Inc.), 2002.
http://wps.prenhall.com/chet_boylestad_electronic_8/2/532/136420.cw/index.html
 23. Suna Bolat. E ENG223 - Circuit T heory I / IN FE221 E lectric Circuits. h ttp://faraday.ee.emu.edu.tr/EENG223/; E lectronic Workbench; <http://faraday.ee.emu.edu.tr/EENG223/ewb/EWB.zip>
 24. Osman Kükreer. EENG224 Circuit Theory II.
<http://faraday.ee.emu.edu.tr/eeng224/>.
 25. Mustafa Kemal Uygurolu. E ENG224. C ircuit T heory I I.
<http://opencourses.emu.edu.tr/course/view.php?id=12>
 26. Karris, Steven T. *Circuit Analysis I: with Matlab Computing and Simulink/SimPowerSystems Modeling*. Orchard Publications, 2009.
 27. Karris, Steven T. *Circuit Analysis II: with MATLAB Computing and Simulink/SimPowerSystems Modeling*. Orchard Publications, 2009.
 28. Oltean, G ., *Dispozitive și circuite electronice*, R isoprint, C luj-Napoca, I SBN 973 -656-433-9, 316 pag., 2004,
<http://www.bel.utcluj.ro/dce/didactic/cef/cef.htm>
 29. Gh. Savin, H.Rosman, *Circuite electrice neliniare și parametrice*, Ed. Tehnică, București, 1973

30. Circuite Electronice: www.circuiteelectronice.ro
31. Topan, D umitru, a nd L ucian M andache. *Chestiuni speciale de analiza circuitelor electrice*. Universitaria, 2007.
32. C. I. Mocanu, *Teoria circuitelor electrice*, EDP București, 1979
33. Iordache, Mihai, și Lucian Mandache. *Analiza asistata de calculator a circuitelor analogice neliniare*. Politehnica Press, 2004.
34. ANTONIU I.S. – *Bazele electrotehnicii*, vol.1, 2 – Editura didactică și pedagogică, București, 1974, 1975
35. DUMITRIU Lucia, IORDACHE Mihai – *Teoria modernă modernă a circuitelor electrice*, vol .1, 2, E ditura A LL E ducational, București, 1989, 2000
36. PREDA M ., CRI STEA P . – *Bazele electrotehnicii*, vol .1, 2 – Editura didactică și pedagogică, București, 1980, 1981
37. MILICI M ariana-Rodica – *Circuite electrice – Regimuri sinusoidale și particulare de funcționare* – Editura M atrixRom, București, 2005
38. TIMOTIN, HORT OPAN V. – *Lecții de bazele electrotehnicii*, vol.1, 2 – Editura didactică și pedagogică, București, 1964
39. ȘORA – *Bazele electrotehnicii* – Editura didactică și pedagogică, București, 1982
40. SIMION Emil, MAGHIAR T. – *Electrotehnica* – Editura didactică și pedagogică, București 1987
41. Adăscăliței, Adrian A.: Laboratoare pentru Electrotehnică, <http://facultate.regielive.ro/laboratoare/automatica/laboratoare-electrotehnica-28825.html?s=adascalitei>



Editura PERFORMANTICA
Institutul Național de Inventică, Iași
performantica@inventica.org.ro
Iași, Campusul Universitar "Tudor Vladimirescu",
Corp T24, Etaj 1, PO Box 727
Tel/fax: 0232-214763

Biblioteca Tehnico-Științifică a Universității Tehnice a Moldovei

Autentificare



Tel. 50-99-71; E-mail: library@mail.utm.md

- Despre bibliotecă
- Biblioteca electronică
- Achiziții de carte
- Publicații periodice
- Baze de date
- Date de contact

Noutăți

01.06.2016

01-15 iunie 2016
- Zilele Culturii Informației

NEW În cadrul proiectului TEMPUS "Modern Information Services for improvement Study Quality (MISISQ)" Biblioteca organizează pentru bibliotecari cursuri de formare a formatorilor cu privire la *Cultura Informației*. [Programul ...](#)

♦ ♦ ♦

Accesul la bazele de date este permis prin autentificarea rețelei de calculatoare (pe baza domeniului de IP-uri) aparținând UTM.

[Mai mult](#)

Acum pe site sunt 2 utilizatori.
Acest site a fost accesat de ori

Generalități. Știință și cunoaștere. Organizare. Informare. Documentare. Biblioteconomie. Instituții. Știința și tehnologia calculatoarelor. Prelucrarea datelor. Științe sociale. Statistică. Politică. Economie. Matematică și științe naturale. Științe aplicate. Medicină. Tehnică. Agricultură. Științe și procedee înrudite.

- ▶ **Telecomunicații. Telegrafie. Telefonie. Radiodifuziune. Aparate și instrumente optice.**
- Economie casnică. Științe domestice. Întreținerea casei
- Tehnologie chimică. Industree chimice și adiacente
- Industree, meserii și îndeletniciri pentru diverse materiale
- Lucrări de construcții. Materiale de construcție.
- Artă. Arhitectură. Arte plastice. Desen. Pictură.
- Limbă. Lingvistică. Literatură
- Beletristică

Telecomunicații. Telegrafie. Telefonie. Radiodifuziune. Aparate și instrumente optice.

NEW

Adăscăliței, Adrian A.
Teoria circuitelor electrice : [curs de prelegeri] / Adrian A. Adăscăliței. – Iași : Performantica, 2015. – 392 p.

NEW

Adăscăliței, Adrian A.
Teoria circuitelor electrice : Simularea asistată de calculator a lucrărilor experimentale : Îndrumar de laborator / Adrian A. Adăscăliței. – Iași : Performantica, 2015. – 161 p.
CZU 621.3 / A 20

Cărți noi



[Mai mult](#)

Proiecte

