



**HAL**  
open science

**Volume B -atelier présentant un dispositif B1. “ Jeux mathématiques et raisonnements combinatoires ” : une UE en Licence pour pratiquer la démarche de recherche en mathématiques**

Denise Grenier

► **To cite this version:**

Denise Grenier. Volume B -atelier présentant un dispositif B1. “ Jeux mathématiques et raisonnements combinatoires ” : une UE en Licence pour pratiquer la démarche de recherche en mathématiques. 2024. hal-04467294

**HAL Id: hal-04467294**

**<https://hal.science/hal-04467294>**

Preprint submitted on 20 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Volume B - atelier présentant un dispositif

B1. « Jeux mathématiques et raisonnements combinatoires » : une UE en Licence pour pratiquer la démarche de recherche en mathématiques

Denise Grenier

Maths discrètes et didactique, Institut Fourier – UGA

Équipe fédérative de recherche Math-à-Modeler

**Résumé.** Comment enseigner les savoir-faire nécessaires pour « faire des mathématiques », et comme évaluer leur apprentissage ? Ces savoir-faire sont, pour l'essentiel : expérimenter, étudier des cas particuliers, faire des hypothèses, énoncer et étudier des conjectures, construire des exemples et des contre-exemples, représenter, modéliser, changer de registre, raisonner, construire des preuves, définir des objets. Leur apprentissage nécessite un dispositif d'enseignement spécifique. Le dispositif présenté ici est une Unité d'Enseignement optionnelle en Licence, pérenne depuis 25 ans à l'université de Grenoble, dont l'objectif est d'initier les étudiants à la pratique de la recherche. Nous décrivons le dispositif en classe, les critères pour une bonne dévolution des problèmes et les critères d'évaluation des apprentissages des étudiants. Nous donnons aussi des exemples de problèmes qui ont fait leur preuve, construits dans le modèle didactique « situation de recherche pour la classe » (SiRC). La mise en place de cette UE optionnelle vient du projet de quelques enseignants-chercheurs d'une équipe de chercheurs en « mathématique discrète et didactique » de l'Institut Fourier : proposer aux étudiants des problèmes pour une « vraie » activité de recherche en classe.

## 1. Introduction

La double finalité d'un enseignement à l'université est, pour les étudiants, de construire des connaissances et d'apprendre à « faire des mathématiques », et pas seulement de résoudre des exercices d'application. C'est à ce prix que les connaissances apprises seront durables et opératoires. Des travaux de didactique, confirmant un constat largement admis, ont montré que même après plusieurs années d'étude, les étudiants ne savent pas quoi faire quand un problème à résoudre ne relève pas de manière évidente d'un cadre mathématique reconnu et de l'application d'un théorème. Nous sommes convaincus qu'il est indispensable d'initier les étudiants dès la première année de Licence à la résolution de « problèmes de recherche » et nous avons pu vérifier que cela est possible.

Dans cet article, nous précisons d'abord notre postulat (§2) pour un vrai enseignement scientifique à l'université et les conditions pour la dévolution d'une activité de recherche dans tous les cursus (§3). Nous décrivons ensuite le modèle didactique « situation de recherche pour la classe » (§4), que nous avons construit dans cet objectif, Nous décrivons en particulier le rôle essentiel de la notion didactique *variable de recherche* dans le modèle SiRC. Au §5, nous situons notre modèle par rapport à d'autres modèles didactiques proches (problème ouvert, problème MATH.en.JEANS, situation fondamentale). Puis, au §6, nous donnons un aperçu des objets, modèles et méthodes des mathématiques discrètes, un domaine privilégié pour les SiRC. Au §7, nous donnons une analyse didactique d'une SiRC qui a fait ses preuves à tous les niveaux scolaires et universitaires. Enfin, au §8, nous proposons quelques exemples de SiRC qui sont devenues « classiques » dans notre dispositif ou que nous aimons beaucoup.

## 2. Pour un enseignement scientifique à l'université

**Notre objectif** est la construction des *savoir-faire fondamentaux* qui sont à la base de toute activité mathématique : expérimenter, étudier de cas particuliers, faire des hypothèses, énoncer et étudier des conjectures, construire des exemples et des contre-

exemples, représenter, modéliser, changer de registre, raisonner, construire des preuves, définir des objets.

La **réalisation** de cet objectif ne peut se faire qu'en proposant des problèmes pour lesquels la recherche des solutions est accessible au plus grand nombre, mais dont les solutions ne sont pas évidentes. En particulier, il ne doit y avoir de théorème immédiat qui résout le problème. Le dispositif doit prévoir une recherche collaborative entre étudiants (travail en groupes dans un temps approprié), avec des mises en commun et l'institutionnalisation des résultats obtenus avec l'enseignant.

L'**évaluation** doit permettre d'attester de l'apprentissage de ces savoir-faire, elle est donc inhabituelle et complexe, nous décrivons celle que nous avons mise en place, améliorée au fil des premières années (cf annexe jointe).

Dans le **contrat** passé avec l'université dès son origine, cette UE étant optionnelle et ouverte à des étudiants de parcours et niveaux différents ne peut en aucun cas servir à un approfondissement des notions de cours. Cette contrainte administrative est exigeante, mais elle a aussi l'intérêt qu'un même problème doit pouvoir être pertinent à des niveaux très différents (du L1 au M2), sans être caduque, bien sûr avec des objectifs adaptés.

### **3. Conditions pour la dévolution d'une authentique activité de recherche**

Les **problèmes** doivent donc être choisis ou créés selon des critères précis, que nous explicitons ci-après. Les exercices et problèmes « fermés », s'ils ont un rôle indispensable dans l'acquisition des notions enseignées, ne mettent pas en jeu ces savoir-faire fondamentaux. En effet, établir un résultat algébrique ou démontrer une proposition donnée ne convoque ni activité de recherche ni étude de conjecture, la question de la vérité n'étant pas en jeu.

La construction des savoir-faire décrits ci-dessus passe par la confrontation à des situations spécifiques. Nous avons mis au point un modèle qui nous sert de « cadre de pensée » et de référence pour leur choix et leur création. En particulier, face un problème qui nous semble intéressant (énoncé original, résultat peu connu voire étonnant), le modèle SiRC sert de repère pour savoir s'il est un bon candidat ou non pour être transformé en une situation de recherche pour la classe : accessibilité, possibilité de rentrer dans sa résolution, solution non immédiate, etc. Cette analyse didactique se traduit en termes de *dévolution en didactique* (sans l'aide de l'enseignant), variables dans l'énoncé à la disposition des étudiants (*variables de recherche*), stratégies multiples pour initier la résolution, résultats intermédiaires intéressants, extensions du problème au cours de la recherche.

### **4. Le modèle SiRC (Grenier & Payan 1998, 2003)**

Il peut être décrit schématiquement ainsi.

La question est compréhensible à différents niveaux de connaissances, donc peu mathématisée

La solution n'est pas évidente et elle n'est pas résolue immédiatement par un théorème ou un résultat connu

Il y a au moins une stratégie initiale « immédiate » et accessible, qui peut être obtenue expérimentalement par essai/erreur, ou par l'étude de cas particuliers

Des modélisations et ou des changements de registres sont possibles et peuvent conduire à des stratégies de résolution différentes

L'activité de recherche permet de formuler des conjectures et de les étudier : exemples et contre-exemples sont accessibles

La recherche peut conduire à de nouvelles questions en lien avec le problème, ou à une généralisation des résultats obtenus.

### **Variable didactique/Variable de recherche**

Les énoncés des problèmes inscrits dans une SiRC comportent ou une des variables dites « de recherche », nécessaire pour qu'il y ait une activité de recherche.

Une *variable didactique* est un élément (quantitatif ou qualitatif) du problème dont le choix de valeur provoque des adaptations, ou des stratégies différentes, ou encore un changement du statut vrai/faux d'une réponse. Les choix de valeur d'une variable didactique permettent de simplifier ou de complexifier une tâche. La valeur d'une variable didactique est fixée par l'enseignant, selon les connaissances supposées de ses élèves et l'objectif d'apprentissage visé.

Une *variable de Recherche* est un élément de la situation dont l'étudiant peut disposer pour résoudre un cas particulier du problème initial (pour se « faire une idée »), explorer des exemples et contre-exemples à une conjecture, changer la question ou même généraliser le problème.

Par exemple, considérons l'énoncé proposé pour la situation «  $n$  carrés dans un carré » (étudié au §7) : « On considère un carré de taille quelconque. Pour quelles valeurs de  $n$  peut-on paver ce carré en  $n$  carrés ? ». Ici, la valeur de l'entier naturel  $n$  est à la disposition des élèves. Pour permettre une dévolution du problème, l'enseignant peut proposer une valeur précise bien choisie ( $n=6$  est plus pertinente que  $n=4$ ) et laisser ensuite  $n$  comme variable de recherche.

Un autre élément essentiel est le temps : il doit être suffisant pour que la recherche puisse se développer et aboutir au moins à une résolution partielle du problème.

### **Pratique des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)**

Les savoir-faire fondamentaux mis en œuvre dans une SiRC ne sont pas tous les mêmes. Bien sûr, dans toutes celles que nous proposons, il y a une activité d'expérimentation, menant à des conjectures et à la recherche de preuve. Mais certaines SiRC vont faire travailler un type de raisonnement spécifique. Ainsi, les situations de pavage que nous avons construites permettent à elles seules de mettre en œuvre tous les types de raisonnement (cf. brochure SiRC). D'autres permettent de comprendre l'efficacité d'un modèle bien choisi pour la résolution (cf  $n$  disques dans un triangle équilatéral, le jeu du chocolat). D'autres SiRC, encore, mettent en jeu la résolution d'un problème « connu » dans un autre registre inhabituel (aire d'un polygone à sommets entiers).

Les SiRC sont construites pour différents niveaux, certaines d'entre elles sont pertinentes du primaire au master. Ceci est assuré par une *analyse a priori* fiable : dans sa version finale, une situation est proposée après avoir été expérimentée, analysée, éventuellement modifiée. Toutes les SiRC que nous proposons en classe ont été étudiées dans des travaux de recherche et publiées dans des thèses, mémoires, ou articles de revues (cf. bibliographie). Nous pouvons alors donner précisément l'essentiel du déroulement de l'activité en classe et des résultats de l'activité de recherche que l'on peut en attendre. De nombreuses SiRC ont été intégrées dans des formations diverses (licences, masters, stages PAF) et dans le cadre scolaire (primaire, collège, lycée).

## **5. Le Modèle SiRC et d'autres modèles didactiques**

### **SiRC et problème ouvert, (Arsac et Mante, 2007)**

Le « problème ouvert » étudié par Arsac et Mante est proche du modèle SiRC sous certains aspects. L'objectif principal est de mettre les élèves dans une situation proche

de celle du chercheur en mathématiques, en confrontant l'élève à une question dont il ne connaît pas la solution, et en induisant la mise en œuvre d'une démarche scientifique et de différents types de raisonnement. Il s'en différencie par une contrainte plus forte sur le temps accordé pour la résolution (limité à une à deux séances de cours).

### **SiRC et MATH.en.JEANS <sup>1</sup>**

MATH.en.JEANS est une association dont le but est de développer des actions de jumelage entre des établissements scolaires, sous la responsabilité d'un mathématicien, afin de mettre les élèves en situation de recherche. Le problème est posé par le chercheur ou un enseignant qui encadre la recherche. Les élèves ont une grande partie de l'année scolaire pour le résoudre. Ils confrontent le résultat de leur recherche en fin d'année dans une rencontre organisée. Les problèmes de recherche des SiRC sont tout-à-fait adaptés au dispositif Maths.en.Jeans. Cependant, le temps accordé à leur résolution est beaucoup plus grand et la contrainte de l'évaluation par une note n'existe pas. Dans notre dispositif de Licence, ces deux contraintes (temps et évaluation) doivent être gérées par l'enseignant, ce qui nécessite de sa part des compétences spécifiques.

### **SiRC et Situation fondamentale (Brousseau)**

Brousseau<sup>2</sup> définit une Situation fondamentale comme « un schéma de situation capable d'engendrer, par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner ». Comme nous l'avons dit, une SiRC n'a pas d'objectif spécifique sur une notion mathématique, même si bien sûr il y en a nécessairement en jeu. Cependant, nous semble donc proche du modèle Situation fondamentale pour les savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique. En effet, une SiRC se présente sous la forme d'un problème qui peut se développer dans différentes directions et peut se prolonger en d'autres problèmes, convoquant différents raisonnements et niveaux de preuves.

## **6. Les mathématiques discrètes : un domaine privilégié pour les SiRC**

Le domaine « mathématiques discrètes » (souvent nommé aussi « combinatoire » regroupe différentes théories, objets et méthodes spécifiques dont les caractéristiques se prêtent bien à la construction de problèmes de recherche pour la classe. On peut citer par exemple les pavages et partitions du plan ou de l'espace, les chemins eulériens ou hamiltoniens dans un graphe, les empilements optimaux d'objets, le théorème des quatre couleurs, le dénombrement de mots ou d'objets vérifiant certaines propriétés. Ce sont des problèmes « simples » à énoncer, offrant la possibilité d'expérimenter, et pour lesquels des conjectures sont accessibles aux élèves, mais dont la résolution complète n'est pas immédiate.

De plus, ce domaine mathématique est peu enseigné même à l'université, sauf dans des filières spécifiques, ce qui favorise la dévolution de la recherche, puisqu'il n'y a pas d'autre manière de résoudre le problème que de le chercher soi-même, en mettant en œuvre les savoir-faire que nous visons : raisonner, conjecturer, prouver.

Les objets et méthodes spécifiques permettent l'apprentissage de nombreux types de raisonnements, en particulier l'exhaustivité des cas (car le discret est dénombrable), le

---

1 Lauréat 2023 de la médaille de la médiation scientifique.

2 [http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire\\_V5.pdf](http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf)

raisonnement par récurrence et le raisonnement par l'absurde. Pour certains problèmes d'analyse ou de géométrie classique, une modélisation dans le domaine discret peut être très efficace. Les problèmes de pavages ou de chemins permettent une exploration inhabituelle d'objets géométriques ou graphiques. Les problèmes d'optimisation dans le domaine discret sont accessibles par des méthodes autres que la détermination des zéros de la dérivée d'une fonction. Les « jeux de stratégie », où la question est de trouver une stratégie gagnante, mettent en jeu des raisonnements et des conjectures à partir de l'analyse des issues de parties jouées au hasard. Il faut noter les coups, les analyser, anticiper les coups suivants, décrire une stratégie gagnante (lorsqu'elle existe) et justifier que ça marche à tous les coups !

## 7. Analyse d'une SiRC : « $n$ carrés dans un carré »

Voici une SiRC qui a été proposée de nombreuses fois de la fin du primaire à l'université. L'énoncé ne relève pas d'un « chapitre » particulier d'aucun programme, mais il fait travailler des notions numériques et géométriques simples et pourtant fondamentales, telles que des techniques de dénombrement par addition/soustraction, ou la description de l'ensemble  $N$  par des suites numériques. De plus, la phase expérimentale fait travailler une compétence qui a peu souvent sa place en classe : les tracés à main levée. À tous les niveaux, un temps de recherche d'une ou deux heures est suffisant pour permettre d'obtenir des résultats et des conjectures intéressants. Une analyse complète de la situation est donnée dans la brochure éditée par l'IREM de Grenoble<sup>3</sup>.

### Énoncé du problème

« On considère un carré de taille quelconque. Pour quelles valeurs de  $n$  peut-on paver ce carré en  $n$  carrés ? »

Cet énoncé est facile à comprendre. Vous avez probablement très vite pensé à un partage en quatre carrés (donc une solution pour  $n=4$ ). Ceci peut servir de point de départ pour chercher d'autres valeurs de  $n$  (par exemple  $n=9, 16$ , etc..) pour lesquelles un dessin est facile à réaliser et sera convaincant. Mais quelle est la réponse pour  $n = 2, 3, 5, 6, 8, 17$  ? Pour  $n=2$ , un argument géométrique simple permet de prouver que ce n'est pas possible. Pour les autres valeurs, la réponse n'est pas évidente.

Le matériel est simple : un stylo, quelques feuilles et un cahier pour noter les résultats de la recherche. Cette activité peut être réalisée en une ou deux heures, l'enseignant peut ensuite prendre un autre moment en classe pour faire une synthèse des connaissances travaillées.

### Une gestion de la situation qui a fait ses preuves

Voici une mise en situation de cet énoncé qui fonctionne très bien pour tous les niveaux du secondaire et à l'université.

L'enseignant trace un carré au tableau, à main levée, puis pose la question :

Pourriez-vous partager ce carré en six carrés ?

Puis il trace au tableau deux colonnes, l'une contiendra les valeurs de  $n$  pour lesquelles un groupe a trouvé une solution (par des essais), l'autre, le dessin correspondant, qui devra être validé par la classe entière. Proposer aux élèves de tracer à main levée sur du papier non quadrillé permet d'éviter une perte de temps de construction à la règle, inutile ici.

---

<sup>3</sup> <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=41314851747087>

Dans cette gestion de la situation, dès qu'un groupe a une solution, un de ses membres vient au tableau écrire la valeur de  $n$  et tracer le dessin correspondant, et toute la classe doit valider ou refuser la solution. Cette organisation didactique crée un challenge entre les groupes – chercher des solutions pour les valeurs de  $n$  non encore résolues, et un investissement de tous les élèves, qui doivent vérifier collectivement la validité des solutions proposées.

Proposer de commencer par le cas  $n=6$  a plusieurs intérêts (faites-le vous-même et vous en serez convaincu) :

– la solution n'est pas immédiate, mais on peut trouver une solution, à condition de ne pas hésiter à faire des dessins variés,

– La plupart des solutions trouvées peuvent être validées ou invalidées par les élèves eux-mêmes, les propriétés géométriques en jeu sont connues.

Quand un nombre suffisant de valeurs de  $n$  et les dessins validés associés ont été écrits au tableau, l'enseignant peut reposer la question générale : « Pour quelles valeurs de  $n$  peut-on partager un carré en  $n$  carrés ? », ou encore « Est-ce possible pour  $n=17$  ? Et pour  $n=123$  ? » (ou toute autre valeur de  $n$  qui n'a pas été proposée par les élèves).

La phase de synthèse consiste à faire expliciter par les élèves leurs conjectures sur les valeurs de  $n$  pour lesquelles il y a des solutions (validées par la classe), celles pour lesquelles il n'y en a pas (conjectures justes ou fausses). On peut terminer en montrant que l'on peut répondre pour tout  $n$  parce qu'on a décrit l'ensemble  $\mathbb{N}$  par trois suites modulo 3 à partir de  $n=6$ , ou par deux suites, la suite des nombres pairs/ à partir de  $n=4$  et la suite des nombres impairs à partir de  $n=7$ .

### **Conclusion**

Cette SiRC a été expérimentée de très nombreuses fois, dans d'autres dispositifs, de la fin du primaire au niveau Licence et Master. Son analyse *a priori* est fiable et permet d'affirmer qu'elle offre vraiment la possibilité de faire pratiquer une activité de recherche, facile d'accès, à tous les niveaux. La phase expérimentale met en jeu des compétences de tracés à main levée de figures géométriques et de dénombrement. La recherche des solutions pour  $n$  quelconque conduit à une description algorithmique de l'ensemble  $\mathbb{N}$  (modulo 2 ou modulo 3). Les preuves d'existence (ou non) des solutions selon les valeurs de  $n$  mettent en jeu divers raisonnements (par exhaustivité des cas, par récurrence, par l'absurde). Elle est donc très riche à tous points de vue. Nous la recommandons pour une première SiRC, à tous les niveaux !

## **8. Exemples d'énoncés de SiRC proposés dans ce dispositif**

Nous avons choisi ces exemples pour la richesse de l'activité mathématique qu'ils permettent : phases expérimentales assurant une résolution partielle, notions mathématiques mises en jeu nouvelles ou explorées de manière inhabituelles, raisonnements et preuves multiples. Leur analyse *a priori* est fiable et certaines sont devenues classiques dans notre dispositif ou d'autres dispositifs analogues.

### **E1. Pavages de polyminos**

Étudier le pavage de rectangles avec un trou d'une case par trois types de pavés : dominos, triminos longs, triminos coudés (en L).

Nous déclinons cette SiRC en trois problèmes, dont la résolution successive permet de faire travailler tous les types de raisonnements.

Problème 1. On considère une grille carrée de taille  $n$  ( $n^2$  cases), avec un trou d'une case en position quelconque. Existe-t-il un pavage de la grille par des dominos pour toutes les positions du trou ?

Problème 2. On considère une grille carrée de taille  $2^n$  avec un trou d'une case en position quelconque. Existe-t-il un pavage de la grille par des des triminos coudés pour toutes les positions du trou ?

Problème 3. On considère une grille trapézoïdale de taille quelconque. À quelles conditions sur sa taille et sa forme peut-on la paver avec des dominos ?

Ces trois problèmes constituent de notre point de vue une *situation fondamentale* pour l'apprentissage des savoir-faire de l'activité mathématique.

## **E2. La chasse à la bête**

La situation se compose de trois problèmes d'optimisation de difficulté croissante. Les problèmes 2 et 3 permettent de réinvestir les raisonnements et méthodes utilisés au problème 1.

Problème 1. On se donne un carré  $5 \times 5$  qu'on appellera jardin, des carrés  $1 \times 1$  qu'on appellera des pièges et des dominos  $2 \times 1$  qu'on appellera des taupes. De combien de pièges a-t-on besoin au minimum pour protéger le jardin des taupes, c'est à dire pour empêcher une seule taupe de se poser dans le jardin.

Problème 2. Même jardin, mêmes pièges, mais les taupes sont maintenant des triminos longs  $3 \times 1$ . Même question.

Problème 3. Même jardin, mêmes pièges, mais les taupes sont maintenant des triminos coudés. Même question.

La variable de recherche est le type de pavés : domino, trimino long et trimino coudé. On peut aussi en réinvestissement faire varier la taille du carré.

**E3. Pesées.** Il s'agit de trouver, par un minimum de pesées avec une balance à plateau (balance de Roberval), une pièce fautive dans un lot de pièces toutes identiques.

On dispose d'un lot de  $n$  pièces visuellement identiques, composé de bonnes pièces et d'une fautive pièce. On sait que la fautive pièce est d'un poids différent. Comment identifier la fautive pièce avec le moins de pesées possible au moyen d'une balance à plateaux (sans poids de référence) ? Étudier le problème dans les deux cas suivants.

Cas 1. On sait que la fautive pièce est plus légère que les bonnes pièces.

Cas 2. On ne sait pas si la pièce fautive est plus légère ou plus lourde que les bonnes pièces.

Il s'agit d'un problème d'optimisation dans  $N$ . La résolution des deux problèmes nécessite de modéliser les informations apportées par une pesée, de manière la plus pertinente pour pouvoir minimiser le nombre des pesées.

## **E4. Jeu de Ramsey**

C'est un jeu de stratégie à deux joueurs qui se joue sur un graphe complet. Il y a un joueur bleu et un joueur rouge. Chaque joueur colorie à tour de rôle une arête du graphe non encore coloriée. Existe-t-il une stratégie gagnante pour chacune des deux versions suivantes.

Version 1. Le joueur a gagné s'il fait un triangle monochromatique de sa couleur.

Version 2. Le joueur a perdu s'il fait un triangle monochromatique de sa couleur.

## **E5. Régions dans un disque**

On place  $n$  points quelconques distincts sur le bord d'un disque. Quel est le nombre de régions déterminées par tous les cordes joignant ces  $n$  points deux à deux ?

Cette situation fait l'objet d'expérimentation en Licence dans le cadre des recherches du groupe DEMIPS (Grégoire Charlot à l'UGA)

## **Conclusion**

Nous avons présenté ici un dispositif d'enseignement original qui fonctionne depuis plus de 25 ans dans notre université, avec des résultats très positifs tant du point de vue de l'investissement des étudiants que de celui des apprentissages visés : les savoir-faire



nécessaires pour faire des mathématiques. Nous avons donné quelques exemples de ces « situations de recherche » qui ont fait leur preuve. Par exemple, la situation «  $n$  carrés dans un carré » analysée au §7, ou encore celle des « pavages de polyminos » énoncée au §8, sont bien adaptées pour une première mise en recherche des étudiants. Nous espérons que cet article convaincra le lecteur et plus généralement les enseignants-chercheurs universitaires de l'intérêt d'intégrer ce dispositif dans leur enseignement.

### **Bibliographie**

- Arsac G., Mante M. (2007). Les pratiques du problème ouvert. IREM de Lyon, CRDP de Lyon, Villeurbanne
- Duchene E. (2006) Jeux combinatoires sur les graphes, thèse Université Joseph Fourier  
HAL Id : tel-00097047 , version 1
- Gardes D., Gardes M-L., Grenier D. (2016) Étude des connaissances des élèves de Terminale S sur le raisonnement par récurrence, *Petit x* n°100, pp.67-98. IREM de Grenoble.
- Grenier D. Payan Ch. (1998)
- Grenier D. (2015) De la nécessité de construire les notions de logique au lycée, *repères IREM*, n°100, pp.65-80. Topiques.
- Grenier D. (2012) Une étude didactique du concept de récurrence, *Petit x*, n°88, pp. 27-47. IREM de Grenoble.
- Tanguay D., Grenier D. (2010) Experimentation and Proof in a spatial Geometry Teaching Situation, *For the Learning of Mathematics* vol.30-3, pp.36-42 (FLM publishing association) Cubberley Education Library, Stanford.
- Groupe « Logique, raisonnement et SiRC » (2017), *Situations de recherche pour la classe, expérimenter, conjecturer, raisonner et prouver en mathématiques, au collège, au lycée ... et au-delà*, 2ème édition, éditeur IREM de Grenoble.  
<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=41314851747087>

### **Thèses contenant des études de SiRC soutenues à l'Université Joseph Fourier et à l'Université Grenoble Alpes**

- ROLLAND J. (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication.*
- OUVRIER-BUFFET C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques.*
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique.*
- GODOT K. (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.*
- CARTIER L. (2008) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.*
- GANDIT M. (2008) *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation.*
- GIROUD N. (2011) *Étude de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe.*
- COLIPAN X. (2014) *Étude de SiRC basées sur des jeux combinatoires particuliers : les jeux de type Nim.*
- DISSA S. (2020) *Entre arithmétique et géométrie, une étude épistémologique et didactique autour du théorème de Bezout et du théorème de Pick.* UGA
- Da RONCH M. (2022) *Conception d'une ingénierie pour le développement du raisonnement et du processus de preuve en mathématiques : le cas du problème de Wang.* UG

## **Annexe 1. Une description synthétique du domaine « Mathématiques discrètes »**

- Théories, objets, notions et outils non enseignés dans les cursus mathématiques (ils sont présents dans les cursus en informatique)
  - nombres, graphes, nœuds, complexité
  - théories du langage et de l'information, théorie des jeux, ...
- Discrétisation du continu
- Modélisations et raisonnements spécifiques
  - Partition, pavage, empilement/ recouvrement (*covering, packing, tiling*)
  - Dénombrement, double comptage/bijection
  - Structuration (coloration, principe des « cages à pigeons ») (Dirichlet)
  - Adjacence, Coloration, Invariant, Stable
  - Décomposition/Recomposition
  - Exhaustivité des cas, Induction, Récurrence, absurde
  - Modélisation (graphe)
  - Optimisation combinatoire
  - Jeux à stratégies gagnantes

## **Annexe 2. Description de l'UE optionnelle « Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques »**

### **Enseignants/chercheurs impliqués dans l'UE**

dès 1998 : Sylvain Gravier, Denise Grenier, Michel Mollard, Charles Payan

depuis 2017 : Isabelle Sivignon, Rémi Molinier

### **Contraintes institutionnelles des UE optionnelles**

contenus pris dans un domaine absent des cursus universitaires  
accessibles à tous les étudiants sans prérequis spécifiques

<b>Place dans les cursus</b>	UE semestrielle	parcours multiples	3 ECTS
années 2000	DEUG 1	Un semestre – parcours Sciences	36 heures + 12 heures (encadrement des projets)
2007	L1 et L2	Un semestre – parcours Sciences	24 heures mini-mémoires en binômes
depuis 2019	L1 et L2	Deux semestres – Tous parcours UGA	24 heures mini-mémoires en binômes

### **Compétences visées et objectifs déclarés (pour les étudiants)**

« Mise en œuvre de son imagination et sa créativité

Apprentissage des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique »

### **Dispositif pédagogique**

#### **Travaux en groupes**

temps de recherche non fixé à l'avance (une ou plusieurs séances)

supports matériels divers

enseignant en position d'observateur et de chercheur (encadrement de la recherche)

prise de notes pour mémoire de la recherche et rédaction de preuves

#### **Synthèses collectives**

décidées en direct, selon le déroulement de la recherche

objectif : faire le point, relancer

#### **Évaluation : tutorat et mini-mémoire écrit, présentation orale**

liste de sujets, un choix par binôme, mini-mémoire encadré

travail et rédaction partagés en binômes

présenté lors d'une séance particulière – oral individuel

#### **Objets de l'évaluation : l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux**

écrit du déroulement de la recherche, statut des propositions (hypothèse, vraie sur un exemple, cas particulier, etc..), conjectures argumentées, résultats prouvés

note finale = 1/3 [note de CC + 2 notes mémoire (texte écrit et présentation orale)]

évalue : travail en groupe, écrit en binôme et présentation orale individuelle.

### Annexe 3. Quelques SiRC qui ont fait leur preuve dans ce dispositif et ailleurs

Elles sont présentées ainsi : **titre** / *savoir-faire en jeu* / notions mathématiques / références

**Pavages de polyminos** / *algorithmes, théorèmes d'existence, récurrence* / coloration de graphes de grille (Grenier et Payan 1998, Deloustal-Jorrand 2004, Grenier 2007 & 2008)

**Promenades dans une grille** / *algorithmes, théorèmes d'existence* / chemin hamiltonien, coloration (in <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/>)

**Dénombrements (mots, chemins, etc)** / *modélisation, bijection* / analyse combinatoire (in <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/>)

**La chasse à la bête** / *optimisation dans  $N$*  / intervalles d'entiers, borne sup, borne inf (Duchêne 2006, Grenier CERME8 2012, SiRC 2017)

**La roue aux couleurs** / *modélisation, bijection* / arithmétique, nombres premiers, permutations (Godot 2005)

**Objets géométriques discrets** / *représentation (pixels), définition* / géométrie euclidienne (Ouvrier-Bufferet 2003)

**Déplacements dans le plan discret** / *définition* / systèmes générateurs, minimaux, algèbre linéaire (Ouvrier-Bufferet 2003)

**Chemins eulériens, hamiltoniens** / *définition, modélisation* / graphes (Cartier 2008)

**Les gardiens de musée** / *optimisation* / triangulation d'un polygone, coloration (Groupe SiRC, IREM de Grenoble)

**Polyèdres réguliers de l'espace** / *définition, construction et preuve* / géométrie de l'espace, graphes planaires (Grenier et Tanguay, 2008 & 2010)

**Polygones réguliers à sommets entiers** / *récurrence, absurde* / géométrie combinatoire (Grenier et Payan 1998)

**Disques dans triangles ou carrés** / *optimisation* / géométrie combinatoire, graphe (Grenier et Payan 1998)

**Partage d'un carré en  $n$  carrés** / *induction* / suites, congruences, dénombrement, géométrie (Groupe SiRC, site de l'IREM de Grenoble)

**Jeu des carrés dans un rectangle** / jeu à deux joueurs, *stratégies, position gagnante* / algorithme d'Euclide (Colipan 2014)

**Jeu de SET** / *démarche expérimentale* / dénombrements, permutations (Giroud 2011)

**Jeu de la frontière** / *stratégie gagnante, absurde* / convexité (Giroud 2011)

**Aire d'un polygone à sommets entiers** / *modélisation, récurrence* / plan discret, aire discrète (Dissa 2020)

**Points entiers sur une droite du plan** / *modélisation, arithmétique* / identité de Bezout (Dissa 2020)