



HAL
open science

Un problème d'alignement dans la variété de Kummer-Wirtinger

Abdelmejid Bayad

► **To cite this version:**

Abdelmejid Bayad. Un problème d'alignement dans la variété de Kummer-Wirtinger. International Journal of Algebra, 2010, Vol. 4 (no.8). hal-04464095

HAL Id: hal-04464095

<https://hal.science/hal-04464095>

Submitted on 19 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un problème d'alignement dans la variété de Kummer-Wirtinger

Abdelmejid Bayad

abayad@maths.univ-evry.fr

Département de mathématiques,

Université d'Evry Val d'Essone,

Bd. F. Mitterrand, 91025 EVRY CEDEX

Abstract. In this paper we deal with the problem of the alignment of three point in the variety of Kummer-Wirtinger. More precisely, our main result is to supply a simple criterion allowing to decide if three points are aligned or not in the Kummer-Wirtinger variety associated to any polarized, projective, smooth and irreducible variety.

1. Introduction et résultats

Soit A une variété abélienne principalement polarisée complexe de dimension $g \geq 2$. C'est équivalent à la donnée d'un couple (\mathcal{L}, H_Ω) tels que : \mathcal{L} est un réseau complexe dans \mathbb{C}^g avec $\mathcal{L} = (\Omega \ I_g) \mathbb{Z}^{2g}$, où I_g est la matrice identité $g \times g$ et Ω matrice élément de l'espace de Siegel $\mathcal{H}_g \stackrel{\text{dfn}}{=} \{Z \in \mathcal{M}_{g,g}(\mathbb{C}) : {}^t Z = Z, \text{Im} Z > 0\}$ et H_Ω est la forme hermitienne définie sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$ par

$$H_\Omega(u, v) := {}^t \bar{u} (\Omega - \bar{\Omega})^{-1} v$$

Elle définit la polarisation principale de A .

Pour préciser la question centrale, qui fait l'objet de cet article, nous rappelons quelques définitions. On note par $\theta(z, \Omega)$ la fonction thêta de Riemann classique, définie par la série

$$(1.1) \quad \theta(z; \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e(1/2 {}^t n \Omega n + {}^t n z),$$

où l'on a posé

$$e(x) = e^{2\pi i x}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes

$$(1.2) \quad \begin{cases} \theta(z + I_g n + m\Omega; \Omega) = e(-1/2 {}^t m \Omega m - {}^t m z) \theta(z; \Omega), \\ \theta(-z; \Omega) = \theta(z; \Omega), \quad \text{pour tout } (n, m) \in \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g. \end{cases}$$

On note par Θ_Ω le diviseur thêta associé à la fonction $\theta(\cdot; \Omega)$, c'est l'ensemble des zéros de cette fonction dans \mathbb{C}^g . Le fait que la variété abélienne A , associée à (\mathcal{L}, H_Ω) , soit principalement polarisée assure que Θ_Ω est ample et que le système linéaire $|\Theta_\Omega|$ est de dimension 0. Pour $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$, on peut définir une fonction thêta du second ordre de caractéristique $(\mu, 0)$ comme suit

$$(1.3) \quad \theta_2[\mu](z; \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e(1/2^t(n + \mu)\Omega(n + \mu) + {}^t(n + \mu)z)$$

Elle satisfait les propriétés suivantes

$$(1.4) \quad \begin{cases} \theta_2[\mu](z + I_g n + m\Omega; \Omega) = e(1/2^t \mu n - 1/2^t m\Omega m - {}^t m z) \theta_2[\mu](z; \Omega) \\ \theta(z - \varphi; \Omega) \theta(z + \varphi; \Omega) = \sum_{\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \theta_2[\mu](z; \Omega) \theta_2[\mu](\varphi; \Omega) \end{cases}$$

[1] § 4 (2) et [8] Chap VI.

Cette dernière égalité est connue sous le nom "Identité fondamentale de Riemann". En utilisant le théorème de Riemann-Roch et par un simple calcul, on peut montrer que les 2^g fonctions

$$\theta_2[\mu](z; \Omega); \quad \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$$

forment une base pour l'espace des fonctions thêta de second ordre [1], [2]. Ceci permet, par le système linéaire $|2\Theta_\Omega|$, de définir le morphisme

$$(1.5) \quad \begin{cases} P_{(0)} : A \rightarrow \mathbb{P}_{2t+1}(\mathbb{C}), t = 2^{g-1} - 1, \\ z \mapsto [\dots, \theta_2[\mu](z, \Omega), \dots]_{\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \end{cases}$$

l'image de A par $P_{(0)}$ est ce qu'on appelle la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$ qui est isomorphe à $A/\{+1, -1\}$, où $\{+1, -1\}$ est le groupe des automorphismes de la variété principalement polarisée A .

Maintenant, nous sommes en mesure de préciser notre question, sous deux formes différentes mais équivalentes

Forme géométrique. — Soit $\alpha \in A[2] \setminus \{0\}$ un point de 2-torsion dans A . Pour quelles valeurs de φ point de $A \setminus A[2]$, les images par $P_{(0)}$ des trois points

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et} \quad \alpha/2$$

dans la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$ sont-elles alignés?

REMARQUE 1.6. — Sous les mêmes hypothèses précédentes, ces trois images sont des points deux à deux distincts de $\mathcal{K}_{(0)}$. En fait

$$P_{(0)}(\varphi + \alpha/2) = P_{(0)}(-\varphi + \alpha/2)$$

si et seulement si $\varphi \in A[2]$.

Forme analytique. — Soit $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ une section du fibré en droites définie par le facteur d'automorphie

$$\chi_{\mathcal{L}}(\rho)e(E_{\mathcal{L}}(\rho, u)/2), \text{ pour tout } \rho \in \mathcal{L},$$

où $\chi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \{+1, -1\}$ satisfait

$$\chi_{\mathcal{L}}(\rho + \sigma) = \chi_{\mathcal{L}}(\rho)\chi_{\mathcal{L}}(\sigma)e(E_{\mathcal{L}}(\rho, \sigma)/2).$$

pour tous ρ et σ éléments de \mathcal{L} . On fixe α point de 2-division de A , non nul.

Pour quelles valeurs de φ point de A , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z + \varphi + \alpha/2)\mathcal{K}(z - (\varphi + \alpha/2)) + e(E(\alpha, \varphi))\mathcal{K}(z - \varphi + \alpha/2)\mathcal{K}(z + \varphi - \alpha/2) \\ = \lambda(\varphi)\mathcal{K}(z + \alpha/2)\mathcal{K}(z - \alpha/2), \end{aligned}$$

où $\lambda(\varphi)$ ne dépend que de φ et éventuellement de α .

REMARQUE 1.7. — En dimension $g = 1$, il est clair que la question est trivialement satisfaite pour tout φ point de A . L'objectif de ce travail est de traiter le cas de dimension ≥ 2 .

Plus précisément, le résultat principal de cet article est le suivant

Théorème principal. — Soit $(A, \Theta) = (Jac(C), \Theta)$ la jacobienne d'une courbe projective et lisse C , de genre ≥ 2 , munie de sa polarisation principale.

On suppose que (A, Θ) est indécomposable. On choisit $\alpha \in A \setminus A[2]$. Alors les trois propriétés suivantes du point φ de A sont équivalentes :

(i) $\varphi \notin A[2]$,

(ii) les images par $P_{(0)}$ des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ sont deux à deux distinctes;

(iii) dans la variété de Kummer-Wirtinger, les images par $P_{(0)}$ des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ ne sont pas alignés .

REMARQUE 1.8. — Le lien entre Θ_{Ω} et Θ est explicitement fourni par le théorème VI.2.4 de [8]. En tout cas, ils diffèrent seulement d'un vecteur constant ne dépendant que de la base d'homologie de A et du point base de l'application d'Abel $\varphi : C \mapsto Jac(C)$.

2. Trisécantes et Jacobiennes

Nos références pour ce paragraphe sont [2], [5], [11],[13] et [14]. On travaille sur la variété $(A, \Theta) = (Jac(C), \Theta)$ prise simple, où C est une courbe projective

et lisse. D'après, [5] (0.1), on sait que le fait d'avoir trois points a , b et c dont les images sont distinctes et alignées dans la variété de Kummer-Wirtinger est équivalent à l'inclusion

$$(2.1) \quad \Theta_a.\Theta_b \subset \Theta_c \cup \Theta_{-c}$$

où $\Theta_a.\Theta_b$ est le schéma de support $\Theta_a \cap \Theta_b$ et Θ_x désigne $\Theta + x$ (le translaté de Θ par x élément de A). Ceci nous permet d'avoir les inclusions suivantes

PROPOSITION 2.2. — Soit φ un point de A , tel que $2\varphi \neq 0$. Si les images des trois points

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et} \quad \alpha/2, \quad \text{pour} \quad \alpha \in A[2] \setminus \{0\}$$

sont alignées sur la variété de Kummer-Wirtinger, alors

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} \Theta \cap \Theta_\alpha \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cup \Theta_\varphi \\ \Theta \cap \Theta_{-\alpha} \subset \Theta_{-\varphi+\alpha} \cup \Theta_{-\varphi} \end{cases}$$

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} \Theta \cap \Theta_\varphi \subset \Theta_{-\varphi} \cup \Theta_{\varphi+\alpha} \\ \Theta \cap \Theta_\varphi \subset \Theta_{2\varphi} \cup \Theta_\alpha \end{cases}$$

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} \Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha} \subset \Theta_{-\varphi-\alpha} \cup \Theta_\varphi \\ \Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha} \subset \Theta_{2\varphi} \cup \Theta_\alpha \end{cases}$$

$$(2.2.4) \quad \Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Theta_\varphi \cup \Theta_{\varphi+\alpha}$$

Démonstration. — Dans cette démonstration nous utilisons plusieurs fois le résultat (0.1) [5].

Démontrons (2.2.4).

En posant $a = \varphi + \alpha/2$, $b = -\varphi + \alpha/2$ et $c = \alpha/2$, on obtient

$$\Theta_{\varphi+\frac{\alpha}{2}} \cap \Theta_{-\varphi+\frac{\alpha}{2}} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{-\frac{\alpha}{2}}$$

et en translatant cette inclusion par $\varphi - \frac{\alpha}{2}$, on conclut que

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Theta_\varphi \cup \Theta_{\varphi+\alpha}.$$

Montrons, à présent, le (2.2.1).

On pose $a = -(\varphi + \alpha/2)$, $b = -(\varphi - \alpha/2)$ et $c = \alpha/2$ (resp. $a = \varphi + \alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2$) on obtient

$$\Theta_{-(\varphi+\frac{\alpha}{2})} \cap \Theta_{-(\varphi-\frac{\alpha}{2})} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{-\frac{\alpha}{2}}$$

(resp. $\Theta_{\varphi+\frac{\alpha}{2}} \cap \Theta_{\varphi-\frac{\alpha}{2}} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{-\frac{\alpha}{2}}$). Puis, on translate cette inclusion par $\varphi - \frac{\alpha}{2}$ (resp. $-\varphi + \frac{\alpha}{2}$) on conclut que

$\Theta \cap \Theta_\alpha \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cup \Theta_\varphi$ et $\Theta \cap \Theta_\alpha \subset \Theta_{-\varphi+\alpha} \cup \Theta_{-\varphi}$. D'où (2.2.1).

Brièvement, pour montrer les inclusions (2.2.2), on pose $a = \alpha/2$, $b = \varphi + \alpha/2$ et $c = \alpha/2 - \varphi$ (resp. $a = -\alpha/2$, $b = -(\varphi + \alpha/2)$ et $c = \alpha/2 - \varphi$), puis on translate les inclusions obtenues par $-(\varphi + \alpha/2)$ (resp. $\varphi + \alpha/2$). Enfin, pour démontrer le (2.2.3), on pose $a = \alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2 + \varphi$ (resp. $a = -\alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2 + \varphi$) et on translate par $-\varphi + \alpha/2$ (resp. $\varphi - \alpha/2$.)

LEMME 2.3. — *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 2.2, on a l'inclusion*

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \left(\Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi} \right) \cup \left(\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha} \right).$$

Démonstration. — Soit Z une sous-variété irréductible de A telle que : Z soit une composante de $\Theta \cap \Theta_{2\varphi}$.

1er cas: Supposons $Z \not\subset \Theta_{\varphi+\alpha}$. Alors, d'après (2.2.4), on a forcément $Z \subset \Theta_\varphi$, et donc Z est une composante irréductible de $\Theta \cap \Theta_\varphi$. Mais, comme $Z \not\subset \Theta_{\varphi+\alpha}$, on a d'après (2.2.2) l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi}$ et donc $Z \subset \Theta_{-\varphi} \cap \Theta_\varphi$. On conclut que Z est une composante irréductible de $\Theta_{-\varphi} \cap \Theta_\varphi$.

2ème cas: Supposons $Z \not\subset \Theta_\varphi$. Alors, d'après (2.2.4) $Z \subset \Theta_{\varphi+\alpha}$, et donc Z est une composante irréductible de $\Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha}$. En utilisant (2.2.3) on en déduit l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi-\alpha}$ et donc l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi-\alpha}$. Donc, on obtient

$$Z \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}.$$

D'où la démonstration du lemme 2.3.

PROPOSITION 2.4. — *On pose $D = \left(\Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi} \right) \cup \left(\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha} \right)$, avec $2\varphi \neq 0$ et $2\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. Alors, on a les inclusions*

$$t_\varphi^*(D) \subset D \quad \text{et} \quad t_{-\varphi}^*(D) \subset D; \quad \text{où } t_\varphi^*(D) \stackrel{\text{dfn}}{=} \text{le translaté de } D \text{ par } \varphi$$

Démonstration. — Le membre de droite du lemme 2.3 possède un groupe d'automorphisme d'ordre 4, engendré par

i) La multiplication par -1 i.e $\varphi \rightarrow -\varphi$

ii) La translation par α , qui échange $\Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}$ et $\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}$. On conclut que

$$\left(\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \right) \cup \left(\Theta_\alpha \cap \Theta_{2\varphi+\alpha} \right) \text{ et } \left(\Theta \cap \Theta_{-2\varphi} \right) \cup \left(\Theta_\alpha \cap \Theta_{-2\varphi+\alpha} \right)$$

sont contenus dans le membre de droite de l'inclusion du lemme 2.3, Ceci est équivalent au résultat qu'on veut démontrer.

REMARQUE 2.5. — On a aussi $D = E \cup t_\alpha^* E$ où $E = \Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}$

3. Démonstration du théorème principal

On travaille sur une variété abélienne principalement polarisée A . Commençons par la démonstration de deux lemmes préparatoires.

LEMME 3.1. — On suppose que (A, Θ) est simple et jacobienne d'une courbe projective lisse C , de genre ≥ 2 , munie de sa polarisation canonique. On choisit $\alpha \in A \setminus A[2]$.

S'il existe $\varphi \in A \setminus A[2]$ tels que : les images des points

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et } \alpha/2, \alpha \in A[2] \setminus \{0\}$$

dans la variété de Kummer-Wirtinger sont alignées, alors la courbe C est hyperelliptique.

Démonstration. — Le cas $g = 2$ se traite aisément. Lorsque $g \geq 3$, d'après [12] p.76 et [7], on a l'équivalence

(3.2)

$$\left(\begin{array}{l} \Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_b \cup \Theta_c \\ \text{pour } 0, a, b \text{ et } c \\ \text{quatre points distincts de } Jac(C) \\ \text{tels que } \{0; a\} \cap \{b, c\} = \emptyset \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \text{après échange éventuel de } b \text{ et } c \\ \text{il existe } s, t, u \text{ et } v \in C \text{ tel que} \\ a = \phi(u) - \phi(v), \\ b = \phi(s) - \phi(v), \\ c = \phi(u) - \phi(t), \\ \text{où } \phi \text{ est l'application canonique} \\ \text{d'Abel-Jacobi } \phi : C \rightarrow Jac(C). \end{array} \right)$$

On en déduit, de (3.2) et des inclusions (2.2.1) qu'ils existent deux points P_0 et P_1 de C tels que

$$\alpha = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

et donc, $2P_1 \sim 2P_0$, autrement dit $2P_1 - 2P_0$ est le diviseur d'une fonction méromorphe sur A . D'après [10], ceci impose à C d'être un recouvrement de \mathbb{P}^1 de degré 2, d'où : C est hyperelliptique.

Donc, dans toute la suite, on se ramène au cas où C est hyperelliptique. On note par I l'involution hyperelliptique. Donc, d'après (3.2) et (2.2.2) Il existe P_2 tel que : $\varphi = \phi(P_2) - \phi(P_0)$, ce qui implique

$$2\varphi = 2\phi(P_2) - 2\phi(P_0) = \phi(P_2) + (\phi(P_2) + \phi(I(P_2)) - 2\phi(P_0)) - \phi(I(P_2))$$

Comme $P_2 + I(P_2) \sim 2P_0$, on obtient alors

$$2\varphi = \phi(P_2) - \phi(I(P_2))$$

D'où le lemme suivant

LEMME 3.3. — *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 3.1, on trouve que le point 2φ est de la forme $\phi(P) - \phi(Q)$ avec $Q = I(P)$, P point de C .*

Démonstration. — *Démontrons le théorème principal.* D'après les lemmes 3.1 et 3.3, on se ramène au cas où C est hyperelliptique et 2φ est de la forme $P - Q$ avec $Q = I(P)$, P point de C . En fait, d'après [11] Chap 11 Prop.9.1 b), le lemme 3.3 implique que

$$E = \Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi} = t_\varphi^* \left(\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \right) \quad \text{est irréductible.}$$

D'autre part, d'après [15] Hilfsatz 1, on a précisément

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} = W_{\phi(P)} \cup W_{-\phi(P)}^*,$$

où $W_{\phi(P)}$ est le translaté de $\phi^{(g-2)}(C)$ par $\phi(P)$ et $W_{-\phi(P)}^*$ est l'image de $W_{-\phi(P)}$ par l'application $u \mapsto -u + \phi(Z)$ où Z est un diviseur canonique sur C . D'après le Hilfsatz 3 [15], $W_{\phi(P)}$ et $W_{-\phi(P)}^*$ coïncident. Or ce même Hilfsatz 3 [15], assure que $W_{\phi(P)}$ n'est invariant par aucune translation, si ce n'est par l'identité.

Il vient donc vu la prop.2.4

$$t_\varphi^*(E \cup t_\alpha^* E) = E \cup t_\alpha^* E$$

alors que

- i) E est irréductible et
- ii) E n'est invariant par aucune translation,

On en conclut donc $t_\varphi^* = Id$ ou $t_\varphi^* = t_\alpha^*$, c'est -à-dire $\varphi = 0$ ou $\varphi = \alpha$. Finalement on aboutit à la conclusion suivante: en dehors des points φ d'ordre 2 l'alignement des trois points

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et} \quad \alpha/2$$

sur la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$, conduit à une contradiction. D'où le théorème principal.

4. Généralisation

On pose

$$\mathfrak{I}ri_g = \left\{ (A, \Theta) \text{ indécomposable tel que sa variété de Kummer-Wirtinger} \right. \\ \left. \text{possède au moins une trisécante} \right\}$$

Soit alors \mathfrak{T} une partie de $\mathcal{A}_g =$ l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g , en bijection avec le quotient de l'espace de Siegel \mathcal{H}_g sous l'action de $Sp(g, \mathbb{Z})$ par la construction

$$\Omega \mapsto \Theta_\Omega$$

qui vérifie les axiomes suivants

$$(4.1) \quad \begin{cases} (\alpha) & J_g \subset \mathfrak{T} \subset \mathcal{A}_g \\ (\beta) & \mathfrak{T} \cap \mathfrak{Jri}_g = J_g \end{cases}$$

où $J_g = \{ \text{Jacobiennes des courbes algébriques lisses de genre } g \}$

On a le corollaire:

COROLLAIRE 4.2. — *Soient $\mathfrak{T} \subset \mathcal{A}_g$ vérifiant (4.1), et $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$. On suppose (A, Θ) indécomposable. On choisit $\alpha \in A[2] \setminus \{0\}$. Alors les trois propriétés suivantes du point φ de A sont équivalentes:*

(i) $\varphi \notin A[2]$;

(ii) *les images dans la variété de Kummer-Wirtinger par $P_{(0)}$, associé au système linéaire $|2\Theta|$, des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ sont deux à deux distinctes;*

(iii) *Ces trois images forment la base d'un plan projectif.*

Démonstration. — On a clairement (i) \implies (ii), puisque $\alpha \in A[2] - \{0\}$, et de plus (iii) \implies (ii).

Montrons que (ii) \implies (iii): pour cela il suffit de revenir au théorème principal, à l'aide de la propriété (4.1) satisfaite par \mathfrak{T} . En effet, comme par hypothèse (A, Θ) est indécomposable, si les trois points distincts étaient sur une même droite alors, par définition, on aurait

$$(A, \Theta) \in \mathfrak{Jri}_g;$$

l'hypothèse (4.1) implique donc que (A, Θ) est la jacobienne d'une courbe lisse.

En particulier, d'après [6], les hypothèses (4.1) sont vérifiées pour

$$\mathfrak{T} = \mathcal{P}_g$$

où \mathcal{P}_g désigne le lieu des variétés de Prym généralisées, au sens de [3] dont la dimension est $3g$ pour $g \geq 5$, et qui vérifient $\mathcal{P}_g = \mathcal{A}_g$ si $g \leq 5$; ainsi le théorème principal peut-être énoncé avec (A, Θ) variété de Prym indécomposable au lieu de (A, Θ) variété jacobienne.

COROLLAIRE 4.3. — Si $2 \leq g \leq 5$, le théorème principal est donc valable pour toutes les variétés abéliennes (A, Θ) , indécomposables et principalement polarisées par Θ , de dimension g .

Démonstration. — Si $g \leq 5$, on a $\mathcal{P}_g = \mathcal{A}_g$.

REMARQUE 4.4. — Soit $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ une variété abélienne indécomposable de dimension g , tel que

$$(A, \Theta) \notin J_g.$$

Alors l'existence d'un point φ de A , tel que $2\varphi \neq 0$, pour lequel les images par $P_{(o)}$ des trois points

$$\varphi + \alpha/2, -\varphi + \alpha/2 \text{ et } \alpha/2$$

sont alignées sur la variété de Kummer-Wirtinger contredirait la conjecture avancée par Welters [14] d'après laquelle

$$\mathfrak{I}r_i_g = J_g.$$

Autrement dit, si cette conjecture est vraie, alors

$$\mathfrak{I} = \mathcal{A}_g$$

vérifie (4.1).

Bibliographie

- [1] A.ANDREOTTI AND A.MAYER,. — *On the period relations for integrals on algebraic curves*, Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa **21** (1967), 189–238.
- [2] E.ARBARELLO. — *Fay's trisecant formula and a characterization of Jacobians varieties*, Amer.Math.soc,Proc.Sympo.Pure Math, Part 1 **46** (1988), 47–61.
- [3] A.BEAUVILLE. — *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent.Math. **41** (1977), 149–196.
- [4] A.BEAUVILLE, O.DEBARRE, R.DONAGI ET G. VAN DER GEER. — *Sur les fonctions thêta d'ordre deux et les singularités du diviseur thêta*, C.R.A.S **t.307 série I** (1988), 481–484.
- [5] O.DEBARRE. — *Trisecant lines and Jacobians*, J.Algebraic geometry **1** (1992), 5–14.
- [6] O.DEBARRE. — *The Trisecant Conjecture for Pryms*, Proc.Sympo.Pure Math, Part 1 **Vol 49** (1989), 621–626.
- [7] O.DEBARRE. — *Sur la démonstration de A. Weil du thorme de Torelli pour les courbes*, Comp. Math. **58** (1986), 3–11.
- [8] H.M.FARKAS AND I.KRA. — *Riemann Surfaces*, Springer Verlag (Graduate Texts in Mathematics Vol 71), 1980.
- [9] B.GEEMEN AND G.VAN DER GEER. — *Kummer varieties and the moduli spaces of abelians varieties*, Amer.J.Of Math **108** (1986), 615–642.

- [10] P.A. GRIFFITHS AND J.HARRIS. — *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience series, 1978.
- [11] H.LANGE AND C.BIRKENHAKE. — *Complex Abelian varieties*, Springer Verlag (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 302), 1992.
- [12] D.MUMFORD. — *Curves and their Jacobians*, Ann Arbor The University of Michigan Press, 1975.
- [13] G.WELTERS. — *A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties*, Invent.Math **74** (1983), 437–440.
- [14] G.WELTERS. — *A criterion for Jacobi varieties*, Ann.Math **120** (1984), 497–504.
- [15] A. WEIL. — *Zum Beweis des Torellischen Satzes*, (Nachr.Akad.Wiss.Göttingen), 1957.
- [16] W.WIRTINGER. — *Untersuchungen über Thetafunktionen*, Teubner , 1895.