



**HAL**  
open science

## Étude de l'auto-similarité d'une itération

Guy Cirier

► **To cite this version:**

| Guy Cirier. Étude de l'auto-similarité d'une itération. 2024. hal-04451393v1

**HAL Id: hal-04451393**

**<https://hal.science/hal-04451393v1>**

Submitted on 11 Feb 2024 (v1), last revised 21 Feb 2024 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude de l'autosimilarité d'une itération ou d'une équation différentielle ordinaire

Guy Cirier

LSTA, Université Pierre et Marie Curie Sorbonne, France

guy.cirier@gmail.com

« No chaos, damn it ! »

Jackson Pollock

## Abstract

In this paper, we study the invariant measure under the iteration of a function in a bounded domain of  $\mathbb{R}^d$  with a probabilistic point of view. But, we discover that this analysis is more complex. We induce the origin of the self-similarity with the cyclical distributions. Applying these results to analyze the solution of a differential equation in a bounded support, we define the probability of presence of the solution. This method induces many results as a probabilistic version of the Poincaré-Bendixon in  $\mathbb{R}^d$ . We show with many examples that the use of these methods is essential to see what is permanent in the chaotic behavior in a bounded domain.

## Résumé

Cet article étudie les mesures invariantes sous l'action d'une fonction itérée dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ . À la différence des modèles linéaires de l'analyse classique, cette analyse est probabiliste. Elle montre de nouvelles propriétés, mais n'est pas complètement suffisante pour en décrire la grande complexité. On étudie les distributions cycliques pour expliquer l'autosimilarité. En appliquant ces résultats à l'analyse d'une solution d'une équation différentielle définie dans un support borné, on est amené à définir la probabilité de présence de cette solution. On obtient une version probabiliste du théorème de Poincaré-Bendixon dans  $\mathbb{R}^d$ . On essaye de montrer la nécessité d'utiliser ces méthodes pour dégager ce qui est permanent dans ce qui semble être chaotique dans un domaine borné.

*Keywords:* Mesures invariantes, Perron-Frobenius, fonction de Plancherel - Rotach, méthode du col, fréquences critiques, Poincaré-bendixon. Ensembles de Fatou-Julia.

## Introduction

Lorsque l'on itère indéfiniment une  $f$  fonction qui applique un ensemble borné  $C \subset \mathbb{R}^d$  dans lui-même, il est souvent difficile de prédire le comportement final du processus. Parfois, il converge vers des points fixes ou des cycles. Ce comportement dépend souvent du point de départ ; il est parfois erratique. Une méthode classique d'analyse consiste à linéariser la fonction  $f$ . Cela consiste à chercher une fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi \circ f = \lambda\varphi$  où  $\lambda$  est linéaire indépendamment que l'évolution soit bornée. En ce cas,  $\varphi \circ f^{(n)} = \lambda^n\varphi$ . La méthode donne surtout de bons résultats dans un voisinage de l'origine. Lorsque cela est possible on obtient des cas asymptotiques qui généralisent le cas unidimensionnel selon que  $|\lambda| >, =, < 1$ . Le cas de résonance ( $\lambda^n = 1$ ) est plus délicat. Beaucoup de résultats ont été ainsi obtenus. Mais cette méthode n'explique pas bien les résultats connus sous le nom de chaos.

On présente ici une autre méthode fondée sur la probabilité de présence des points de l'itération  $f^{(n)}$  au bout d'un nombre infini d'itérations ( $n \rightarrow \infty$ ). Elle apporte de nouveaux éléments d'analyse. L'article qui suit est une synthèse de plusieurs de mes travaux portant sur ce sujet et en les corrigeant ou les nuancant si besoin. Il comporte 4 parties avec une conclusion :

- I - Mesure invariante de Perron Frobenius,
- II- Analyse des points fixes cycliques,
- III - Analyse probabiliste d'une équation différentielle ordinaire,
- IV - Exemples,
- V- Conclusion

Dans le chapitre I et III, on rappelle des résultats que l'on a déjà publiés. On y apporte un éclairage nouveau sur le comportement asymptotique des équations différentielles. Le chapitre II donne des éléments de compréhension de l'autosimilarité. Dans le chapitre IV, on insiste sur les exemples pour montrer l'étendue de la méthode. Elle permet de façon relativement simple de maîtriser des domaines de la théorie des chaos, comme l'autosimilarité. On fait une brève incursion dans le domaine complexe avec les ensembles de Fatou-Julia. Plusieurs cas ont déjà été présentés dans des articles précédents.

### **I - Mesure invariante de Perron Frobenius**

Ce chapitre peut être ignoré par les personnes ayant déjà lu mes précédents travaux.

#### **1 – Définition de la mesure invariante de Perron Frobenius**

Soient  $f$  une fonction  $C^\infty$  et  $P$  une mesure à support dans  $C \subset \mathbb{R}^d$ . On désigne par  $P_f = P \circ f^{-1}$  la transformée de la mesure  $P$  par la fonction  $f$ . On dit que  $P$  est invariante sous (l'action de)  $f$  si, pour tout borélien  $B$ , la mesure  $P$  vérifie l'équation de Perron-Frobenius (PF) :

$$P_f(B) = P \circ f^{-1}(B) = P(B)$$

*Sous des conditions générales, qui sont remplies dès que par exemple  $f$  est continue, la solution de cette équation est unique. L'intérêt de cette mesure  $P$  est qu'elle reste invariante lorsque l'on itère  $f$ . Elle indique la probabilité de présence de l'itération en un endroit donné de  $C$  au bout d'un nombre infini d'itérations.*

Cette propriété d'invariance est essentielle pour tous les phénomènes physiques qui répondent à ces conditions et donne ainsi droit de cité à la physique probabiliste.

#### ***Hypothèses de l'article***

*$f$  est  $C^\infty$  et applique un ensemble borné  $C \subset \mathbb{R}^d$  dans lui-même et toutes ses dérivées sont bornées.*

Ici, on laisse sous silence les situations de convergence vers des points ou des situations hyperboliques. On n'évoque pas, non plus, les problèmes de résonance ou de frontières. Certains de ces problèmes ont été traité par ailleurs.

L'équation fonctionnelle  $P_f = P$  est très difficile à étudier directement. Ainsi, dans le cas très simple où  $f$  est inversible, sa densité  $p$  vérifie l'équation fonctionnelle :

$$p = p_f = |f^{-1}| p \circ f^{-1}$$

qui reste compliquée à résoudre. Si  $f$  n'est pas inversible, c'est encore plus difficile.

#### **2- Définition de la transformation de Laplace-Fourier $\Phi(y)$ et $\Phi_f(y)$**

On sait que la définition de la mesure de PF est équivalente à la condition suivante : pour toute fonction positive mesurable  $g$ :

$$\int g \circ f(x) dP(x) = \int g(x) dP(x)$$

On utilisera cette équation dans ce qui suit en spécialisant la fonction  $g : g(x) = e^{yx}$ .

- Si l'on prend :  $g(x) = e^{yx}$ , où  $y \in \mathbb{C}^d$  et  $E(e^{yx}) = \int e^{yx} dP(x)$ ,

on obtient la transformation de Laplace ou de Fourier (LF) de la mesure  $P$  :

$$\Phi(y) = E(e^{yX}) = \int e^{yx} dP(x).$$

et l'équation résolvente  $R_\theta$  de la distribution  $P$  pour  $\forall y \in \mathbb{C}^d$ :

$$\theta_f(y) = E(e^{yX}) - E(e^{yf(X)}) \equiv 0.$$

- On peut alors développer  $\Phi(y)$  en série :

$$\Phi(y) = \sum_n b_n y^n, \text{ pour } \forall n \in \mathbb{N}^d$$

où les  $b_n = E(X^n/n!)$ . La convergence de  $E(f(X)^n/n!)$  sera étudiée ci-après.

### 3 – Incidence d'une translation : l'équation résolvente $R_a$ :

- Soit une translation de  $X$  avec un vecteur fixe  $a \in \mathbb{R}^d$  choisi pour que  $X + a \in C$  :

$$\Phi(y, a) = E(e^{y(X+a)}) \text{ et } \Phi_f(y, a) = E(e^{yf(X+a)})$$

L'équation  $R_a$  s'écrit  $\theta_f(y, a) = E(e^{y(X+a)}) - E(e^{yf(X+a)}) = 0$ .

#### Proposition

On a alors :  $\Phi_f(y, a) = E(e^{yf(X+a)}) = \sum_n b_n \partial^n e^{yf(a)}/\partial a^n$ .

L'équation résolvente  $R_a$  de la distribution  $P$  est :

$$\theta_f(y, a) = \sum_n b_n \partial^n (e^{yf(a)} - e^{ya})/\partial a^n = 0.$$

Les séries sont convergentes.

■ Développons  $e^{yf(X+a)}$  avec la formule de Taylor (par rapport à  $X$ ) a priori :

$$e^{yf(X+a)} = \sum_n \partial^n e^{yf(a)}/\partial a^n X^n/n!$$

Or,  $b_n = E(X^n/n!)$ :  $\Phi_f(y, a) = E(e^{yf(X+a)}) = \sum_n b_n \partial^n e^{yf(a)}/\partial a^n$ .

De même :  $\Phi(y, a) = E(e^{y(X+a)}) = \sum_n b_n y^n e^{ya} = \sum_n b_n \partial^n e^{ya}/\partial a^n$ .

La condition d'invariance  $\theta_f(y, a) \equiv 0$  s'écrit :

$$\theta_f(y, a) = \sum_n b_n \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)})/\partial a^n \equiv 0.$$

Ceci n'a de sens que si les séries convergent. Étudions les séries  $\sum_n b_n \partial^n e^{ya}/\partial a^n$  et  $\sum_n b_n \partial^n e^{yf(a)}/\partial a^n$ . La convergence de  $\sum_n b_n y^n$  avec  $b_n = E(X^n/n!)$  est facile à vérifier car  $X$  est borné. Celle de  $\sum_n b_n \partial^n (e^{yf(a)})/\partial a^n|_{a=0}$  s'obtient en utilisant la série formelle :

$$e^{h(a)} = \sum_n B_n(h'(0), \dots, h^n(0)) a^n/n!$$

où  $B_n$  est le polynôme de Bell et les coefficients  $h^n$  sont définis par  $h(a) = \sum_n h^n(0) a^n/n!$

où l'on pose ici  $h^n(0) = yf^n(0)$ ; donc :

$$\partial^n (e^{yf(a)})/\partial a^n|_{a=0} = B_n(yf'(0), \dots, yf^n(0))$$

Comme toutes les dérivées de  $f$  sont bornées par un nombre  $M$  dans  $C \subset \mathbb{R}^d$ , chaque terme de la série est majoré en valeur absolue :

$$|B_n(yf'(0), \dots, yf^n(0))| \leq B_n(|y|M, \dots, |y|M)$$

Or  $B_n(|y|M, \dots, |y|M) = \sum_1^n (|y|M)^k B_{n,k}(1, \dots, 1) = \sum_1^n (|y|M)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

Où  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  est le nombre de Stirling de seconde espèce. Si  $D$  est le diamètre de  $C \subset \mathbb{R}^d$ , on retrouve aisément la formule de sommation classique :

$$|\sum_n b_n \partial^n (e^{yf(a)})/\partial a^n| \leq \sum_n (\sum_1^n (|y|M)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}) D^n/n! = \exp(|y|M(\exp(D) - 1))$$

La convergence en norme est donc uniforme pour  $\forall |y|$  borné fixé. ■

#### Définition de l'écart résolvant

On note l'écart :  $e^n(y, a) = \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)})/\partial a^n = y^n e^{ya} - H_n(y, a) e^{yf(a)}$ .

Notons que  $H_n(y, a)$  est un polynôme de Bell de degré  $n$  en  $y$ .

Pour  $a=0$ , on appelle **écart résolvant** :

$$e^n(y) = e^n(y, 0) = y^n - H_n(y).$$

L'équation  $R_0$  s'écrit alors pour  $a = 0$ :

$$\theta_f(y) = \sum_n b_n e^n(y) \equiv 0.$$

**Quelques observations**

- Tout se passe comme si l'itération  $f$  transforme  $y^n$  en  $H_n(y)$  dans la transformée LF de la distribution invariante.
- En général,  $a$  est réel et  $y$  est soit réel, soit imaginaire pur. Si  $y$  est imaginaire pur :  $y = it$ ,  $\emptyset(it, 0)$  est alors la fonction caractéristique de la distribution  $P$ . Si  $y$  est réel négatif, on a la transformation de Laplace classique. **On prend ici le plus souvent  $y$  réel positif.**

**Proposition**

On doit prendre l'origine en :  $f(a) = a = 0$  ou en  $f^{(p)}(a) = a, \forall p, b_0 = 1$ .  
Toute solution de la forme  $\emptyset(y, a) = 1 + b\psi(y, a)$  n'existe que si  $\psi(y, a) = 0$ . Pour  $a = 0$ , on a donc une distribution en treillis.

- - Pour  $y = 0, b_0 = \emptyset(0, a) = \emptyset_f(0, a) = 1$ . Or, la formule de Taylor pour  $X=0$  nous donne :  $b_0 = e^{ya} = e^{yf(a)} = 1$ . Donc on doit prendre l'origine en :  $f(a) = a = 0$  ; c'est-à-dire, placer l'origine en un point fixe. De même, si l'on itère  $f^{(p)}, \forall p$ , on aura  $f^{(p)}(a) = a$ . Ainsi, à chaque point fixe (cycles...), on peut attacher une distribution invariante. La convergence vers l'une de ces distributions dépend du point de départ de l'itération. Soit  $\text{Fix}(f)$  l'ensemble de tous ces points fixes ou cycles. On a ainsi un mille-feuilles de distributions indexé par  $\text{Fix}(f)$ .
- On prendra ici l'origine en un point fixe  $f(0) = 0$  et  $b_0 = 1$ . Mais les autres  $b_n$  sont inconnus. Considérons les termes autres que  $b_0 : b_n e^n(y)$ . Les polynômes  $e^n(y)$  constituent une base si leur terme de plus haut degré n'est pas nul, c'est-à-dire si la condition de non-résonance est respectée :  $0 < \lambda^n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^d$ .
- Soit une solution de  $\theta_f(y, a) \equiv 0$  de la forme  $\emptyset(y, a) = 1 + \psi(y, a)$  avec  $\psi(0,0) = 0$ . La linéarité de  $\theta_f(y, a)$  impose que toutes les expressions de la forme  $1 + b\psi(y, a)$ , pour  $\forall b \in \mathbb{R}$  sont encore solutions de  $\theta_f(y, a) \equiv 0$ . Autrement dit, la solution  $\emptyset(y, a) = 1 + b\psi(y, a)$  n'existe que si  $\psi(y, a) = 0$ . On a donc une distribution de probabilité en treillis. ■

**4 – Incidence d'une itération sur  $\theta_f(y, 0) = 0$  et sur  $e^n(y, 0)=0$  ou sur  $H_n(y)=0$**

**Proposition**

En cas de non-résonance, l'itération  $a_\ell \mapsto f_\ell(a)$  agit comme une dérivation sur  $\theta_f(y, 0) = 0$ , sur  $e^n(y, 0) = 0$  ou encore sur  $H_n(y, 0) = 0$  au sens où :

$$\begin{aligned} a_\ell \mapsto f_\ell(a) &\implies \theta_f(y, 0) \mapsto \partial \theta_f(y, a) / \partial a_\ell |_{a=0}, \\ f^{(n)} \mapsto f^{(n+1)} &\implies \theta_f(y, 0) \mapsto \partial \theta_f(y, a) / \partial a |_{a=0}. \end{aligned}$$

De plus  $a \mapsto f(a) \implies y \mapsto y/\mu$  avec  $\forall \mu > 0$ ,  
Si  $e^n(y, 0) = 0$ :  $e^n(y, 0) = 0 \mapsto e^{n+1}(y/\mu, 0)$ .

Par induction, si  $e^n(y, 0) = 0$ , toutes les coordonnées de  $n \in \mathbb{N}^d$  doivent être égales dans  $e^{n+1}(y, 0)$  puisque chaque itération de  $f$  agit sur toutes les coordonnées :

$$n = n_1 = \dots = n_\ell \dots = n_d.$$

- La démonstration est basée sur la formule de la moyenne pour  $a \rightarrow 0$ .  
On isole  $a_\ell$  dans  $a = (\overline{a}_\ell, a_\ell)$  pour étudier l'impact de  $a_\ell \mapsto f_\ell(a)$  sur  $\theta_f(y, \overline{a}_\ell, a_\ell) = 0$ .  
Soit :  $D = \theta_f(y, \overline{a}_\ell, f_\ell(a)) - \theta_f(y, \overline{a}_\ell, a_\ell) = \theta_f(y, \overline{a}_\ell, f_\ell(a))$ ,  
Car :  $\theta_f(y, \overline{a}_\ell, a_\ell) = 0$ .  
Donc :  $D = (f_\ell(a) - a_\ell) \int_0^1 \partial \theta_f(y, \overline{a}_\ell, a_\ell + t((f_\ell(a) - a_\ell))) / \partial a_\ell dt$   
Quand  $a_\ell \rightarrow 0$   $f_\ell(a) - a_\ell \sim a_\ell(\lambda_\ell - 1)$ .

Pour  $\forall a_\ell \neq 0$   $D \sim (\lambda_\ell - 1)(\partial\theta_f(y, \overline{a}_\ell, 0)/\partial a_\ell) = 0$ ,

En cas de non-résonance ( $\lambda_\ell \neq 1$ ) :  $\partial\theta_f(y, \overline{a}_\ell, 0)/\partial a_\ell = 0$ .

L'itération  $a_\ell \mapsto f_\ell(a)$  agit comme une dérivation partielle sur  $\theta_f$ .

De plus, si  $t \mapsto t\mu$ , avec  $\mu > 0$  en prenant  $y \mapsto y/\mu$ , le résultat reste inchangé.

L'itération  $f, a \mapsto f(a)$  applique successivement  $f_1(a), \dots, f_\ell(a), \dots, f_d(a)$  aux coordonnées  $a_\ell$  de  $\theta_f = 0$  pour  $\ell = 1, 2, \dots, d$ ; donc :

$$D = (\partial\theta_f(y, \overline{a}_\ell, 0)/\partial a) = 0.$$

Pour les mêmes raisons, si  $e^n(y, a) = 0$ , alors :  $e^n(y, f_\ell(a)) \sim a_\ell(\lambda_\ell - 1)\partial e^n(y, \overline{a}_\ell, 0)/\partial a_\ell$ .

De plus, si  $t \mapsto t\mu$ , avec  $\mu > 0$  en prenant  $y \mapsto y/\mu$ , le résultat reste inchangé. ■

## 5- Théorème de l'écart résolvant

En conséquence, choisissons maintenant pour tout ce qui suit un indice  $n \in N^d$  commun suffisamment large, avec  $n = n_1 = \dots = n_\rho = \dots = n_d$ .

### Lemme

Sous la condition de non-résonance, seuls les zéros du polynôme  $e^n(y) = y^n - H_n(y)$  peuvent vérifier la condition  $|\theta_{nf}(y) - \theta_f(y)| < \epsilon$ .

■ Soit  $\theta_{nf}(y) = \sum_{m \leq n} b_m e^m(y)$  la série limitée à l'ordre  $n$ ; on a vu qu'elle vérifie uniformément :  $|\theta_{nf}(y) - \theta_f(y)| < \epsilon$ . Comme  $\theta_f(y) = 0$ , on devra avoir uniformément  $|\theta_{nf}(y)| < \epsilon$ . Or,  $\theta_{nf}(y)$  est un polynôme de degré  $n$ . On va devoir construire un polynôme  $\emptyset^*_n = \sum_{m \leq n} b^*_m y^m$  de degré  $n$  vérifiant :  $\theta^*_{nf}(y) = \sum_{m \leq n} b^*_m e^m(y) = 0$  où les  $e^m(y) = e^m(y, 0) = y^m - H_m(y)$  sont tous bien définis et connus car leurs coefficients sont ceux des polynômes de Bell complètement définis par la donnée de  $f$ . En ce cas, soit tous les coefficients de l'équation sont nuls, sinon, cela ne sera possible que pour certains  $y$  annulant le polynôme  $\theta^*_{nf}(y)$ . Or, le terme de plus haut degré  $\theta_{nf}(y)$  est celui de  $e^n(y) = y^n - H_n(y)$  et ne peut s'annuler en cas de non-résonance. Cela n'ouvre que deux possibilités :

-  $b_n = 0$ . On recommence avec  $n-1$  et ainsi de suite, sans solution.

- Sinon, les zéros de  $e^n(y)$  devront être les zéros de  $\theta^*_{nf}(y)$ . Donc,  $\emptyset^*_n(y)$  devra être de la forme :

$$\emptyset^*_n(y) = 1 + b e^n(y),$$

où  $b$  est une constante arbitraire.  $y$  est alors zéro de  $e^n(y)$ .

Mais il faut contrôler que les zéros du polynôme  $e^n(y) = y^n - H_n(y)$  peuvent annuler  $\theta_{nf}(y)$ .

### Théorème

Sous la condition de non-résonance, on peut trouver une solution unique convergente de  $\theta_{nf}(y) = \sum_{m \leq n} b^*_m e^m(y) = 0$ , définie à une constante arbitraire  $b = \lambda^{-n} b^*_n$  près :

$$\emptyset^*_n(y) = 1 + b e^n(y).$$

On obtient une distribution en treillis définie par les zéros de  $e^n(y)$ .

Dans le cas répulsif où  $\lambda^n \gg 1$ , on a pour  $\forall b$ :

$$\emptyset^*_n \sim 1 + b H_n(y).$$

Il faut ensuite étudier le comportement de  $\emptyset^*_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

■ Inversement, les zéros du polynôme  $e^n(y) = y^n - H_n(y)$  doivent annuler  $\theta_{nf}(y)$  et l'on doit trouver une suite  $b^*_m$  avec  $0 < m \leq n$  telle que le polynôme  $\emptyset^*_n(y)$  soit de la forme :

$$\emptyset^*_n(y) = 1 + \sum_{0 < m \leq n} b^*_m y^m = 1 + b_n e^n(y).$$

Autrement dit :

$$\emptyset^*_n(y) = 1 + \lambda^n b_n y^n + b_n \sum_{0 < k < n} h_{nk} y^k.$$

Or, son transformé par  $f$  est :

$$\Phi_f^{*n}(y) = 1 + \sum_{0 < m \leq n} b_m^{*} H_m(y) .$$

Sous la condition  $e^n(y) = 0$ , il faut donc trouver des  $b_m^{*}$  tels que :

$$\theta_{nf} = \Phi^{*n}(y) - \Phi_f^{*n}(y) = 0.$$

Par différence, on a :

$$\theta_{nf}(y) = \lambda^n b_n y^n + b_n \sum_{0 < k < n} h_{nk} y^k - \sum_{0 < m \leq n} b_m^{*} H_m(y).$$

Comme  $e^n(y) = y^n - H_n(y) = 0$  :

$$\theta_{nf}(y) = (\lambda^n b_n - b_n^{*}) y^n + b_n \sum_{0 < k < n} h_{nk} y^k - \sum_{0 < m < n} b_m^{*} H_m(y).$$

Fixons arbitrairement  $b_n \neq 0$  tel que  $\lambda^n b_n - b_n^{*} = 0$  (et  $\lambda \neq 0$ ). Les coefficients des polynômes de Bell  $h_{mk}$  dans  $H_m(y) = \sum_{0 < k \leq m} h_{mk} y^k$  ne dépendent que de  $f$  et sont donc connus. Il en résulte :

$$\theta_{nf}(y) = \sum_{0 < k < n} b_n h_{nk} y^k - \sum_{0 < m < n} b_m^{*} (\sum_{0 < k \leq m} h_{mk} y^k).$$

En réordonnant selon les puissances de  $y$ , on peut écrire pour tous les multi-indices  $m < n$

$$\theta_{nf}(y) = \sum_{0 < k < n} (b_n h_{nk} - \sum_{0 < k \leq m} b_m^{*} h_{mk}) y^k.$$

Pour annuler  $\theta_n(y)$ , il suffit alors d'annuler toutes les quantités :

$$b_n h_{nk} - \sum_{0 < k \leq m} b_m^{*} h_{mk} = 0,$$

pour tous les multi-indices  $0 < k \leq m < n$ .

On obtient un système triangulaire d'équations linéaires : on le résout pas à pas en partant des  $m = n - 1$  pour identifier de façon unique tous les coefficients inconnus  $b_m^{*}$  en fonction du  $b_n$  fixé et des coefficients  $h_{mk}$  of  $H_m(y) = \sum_{0 < k \leq m} h_{mk} y^k$  with  $m \leq n \in \mathbb{N}^d$ .

Cette solution est donc unique pour tout  $b_n \neq 0$  arbitrairement fixé. ■

Quand  $n \rightarrow \infty$ , on montrera sous certaines conditions que la distribution asymptotique de zéros de  $H_n(y)$  donnera la solution recherchée.

### Observations

- L'écart résolvant :

$$e^n(y) = \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)}) / \partial a^n |_{a=0}$$

peut s'écrire :

$$e^n(y) = \int_{t=0}^{t=1} \partial^n ((y(a - f(a))) e^{ya+ty(f(a)-a)}) / \partial a^n |_{a=0} dt,$$

$$\int_{t=0}^{t=1} \partial^n ((y(a - f(a))) e^{ya+ty(f(a)-a)}) / \partial a^n |_{a=0} dt.$$

- Ceci est de même nature que :

$$\theta_f(y) = E(e^{yX}) - E(e^{yf(X)}) \equiv 0,$$

$$\theta_f(y) = \int_{t=0}^{t=1} E(y(a - f(a))) e^{ya+ty(f(a)-a)} |_{a=0} dt = 0.$$

Or, il est plus simple de se pencher sur les cas suivants.

- On note que le terme de plus haut degré du polynôme  $e^n(y)$  est de la forme  $(1 - \lambda^n) y^n$ .

Différents cas peuvent se produire selon que  $\lambda^n \gg 1$  ou  $\lambda^n \ll 1$ .

Si toutes les coordonnées de  $|\lambda|$  sont plus petites que 1, le processus converge vers le point fixe.

Si certaines coordonnées de  $|\lambda|$  sont plus petites que 1, mais les autres plus grandes que 1, la situation est dite hyperbolique sous conditions de non résonance.

Quand  $y^n \lambda^n \gg y^n$ , le point fixe est dit répulsif et pour des  $n$  grands :

$$\Phi_n(y) \sim 1 + b H_n(y).$$

Il est alors beaucoup facile d'étudier  $H_n(y)$  que l'écart résolvant  $e^n(y)$ . Mais il se peut que le processus s'échappe du domaine du point fixe considéré. La discussion sur les circonstances où cette distribution peut se manifester en comparant  $y^n \lambda^n$  avec  $y^n$  devient essentielle. L'étude de la distribution asymptotique des zéros réels positifs de  $H_n(y)$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour la transformation de Laplace ( $y > 0 \in \mathbb{R}^d$ ), car elle donne la distribution de probabilité.

- Enfin lorsque l'on a plusieurs points fixes, comment s'opèrent les interactions entre eux ? On ne répond pas ici à cette question qui a été étudiée dans d'autres articles.

- Mais il convient aussi de déterminer la densité de la probabilité invariante à partir de la distribution asymptotique des zéros of  $H_n(y)$ . Ce qui sera étudié plus loin.

Toutes ces choses sont complexes et l'on voit la diversité des situations qui peuvent se produire avec parfois de brusques changements de comportement. La méthode utilisée ici est celle de Plancherel-Rotach pour étudier le comportement asymptotique des polynômes d'Hermite quand le degré  $n \rightarrow \infty$ .

## 6 - Répartition asymptotique les zéros réels de $H_n(y)$ quand $n \rightarrow \infty$ .

Comme une itération correspond à une dérivation de toutes les composantes, sauf mention expresse, tous les indices de dérivation sont égaux. On prend un indice commun  $n = n_1 = n_2 = \dots = n_d$ . On se propose maintenant d'estimer la répartition asymptotique des zéros réels du polynôme  $H_n(y)$  quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$H_n(y) = \frac{\partial^n e^{yf(a)}}{\partial a^n} \Big|_{a=0} = 0$$

Or, en plongeant le problème dans le corps des complexes, le polynôme  $H_{n-1}(y)$  peut être représenté par l'intégrale de Cauchy en dimension d :

$$H_{n-1}(y) = K \oint_{\Gamma} \frac{e^{yf(a)}}{a^n} da$$

Où K est une constante non nulle.  $\Gamma$  est le contour d'intégration.

On appelle fonction de Plancherel-Rotach l'intégrande  $n\gamma(a)$  de l'intégrale précédente :

$$n\gamma_n(a) = yf(a) - n \ln a$$

Pour évaluer cette intégrale par la méthode du point selle, on doit prendre soin d'en respecter les conditions d'application :

### Résumons les conditions (C) de validité de la méthode

- La hessienne de la fonction de Plancherel-Rotach doit être définie négative pour tout  $y$ :  $x[\partial^2 yf(a)/\partial a^2]x < 0$ . Notons que la théorie de Morse prévoit qu'en un point critique non dégénéré la hessienne est de la forme  $\sum_{\ell=1}^{\ell=p} x_{\ell}^2 - \sum_{\ell=p+1}^{\ell=d} x_{\ell}^2$ . Ainsi, les coordonnées « positives »  $x_{\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, p$  ne conviennent pas. Or, c'est loin d'être un cas rare dans de nombreuses applications. Les  $y$  posant des problèmes ne sont pas étudiés ici. Lorsque la hessienne n'est pas définie négative, il existe vaste littérature à ce sujet qui peut faire appel à la théorie des catastrophes et aux phénomènes de Stokes.

- le point fixe doit être répulsif :  $\lambda^n > 1$  ; on ne doit pas avoir de résonance :  $\lambda^n = 1$  ou 0.

- les points critiques doivent être bien isolés et loin du bord de C et avoir des coordonnées complexes.

### On se place ici dans le cas où $f$ est réelle. Le cas complexe n'est présenté qu'en exemples.

L'intégrande mérite une grande attention dans les conditions d'application du point-selle.

On pose :

$$y = ns$$

L'intégrande devient :

$$\gamma_n(a) = sf(a) - \ln a$$

Si l'on pose :  $\gamma_{\ell}(a) = s_{\ell}f_{\ell}(a) - \ln a_{\ell}$ , la fonction de PR s'écrit explicitement :

$$n\gamma(a) = \sum_{\ell=1}^{\ell=d} n(s_{\ell}f_{\ell}(a) - \ln a_{\ell})$$

$$\gamma_n(a) = \sum_{\ell=1}^{\ell=d} \gamma_{n,\ell}(a)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$  et que l'on est alors dans les conditions d'application du point-selle, celui-ci est défini par l'équation critique :

$$\partial \gamma_n / \partial a = 0$$

Donc :

$$s \partial f(a) / \partial a = 1/a$$

C'est-à-dire :

$$a_{\ell} s \partial f(a) / \partial a_{\ell} = 1, \ell = 1, 2, \dots, d$$

Pour  $s$  réel fixé, chaque solution de cette équation est appelée point critique de  $sf$  et donne une contribution à la valeur de  $H_{n-1}(y)$ . On remarque que ces équations ne dépendent pas



explicitement de  $n$ . Les  $\gamma_{n,\ell}$  définis par ces équations sont donc notés sans ambiguïté  $\gamma_{,\ell}$ . Il peut y avoir plusieurs points critiques. On va supposer que leur nombre est fini (ceci est vrai pour un polynôme  $f$ ). Pour qu'un point critique donne une bonne approximation de l'intégrale, il faut que ce point critique soit point-selle, c'est-à-dire bien isolé des autres points critiques et loin du bord de  $C$ . La richesse des situations (surtout lorsque l'on sait que  $s$  peut varier dans toutes les directions) est telle que l'on n'abordera ici que les plus courantes, et surtout, les plus simples où tout se passe bien. En ce cas, la valeur de l'intégrale est la somme des contributions pour chaque point-celle  $a$ .

En chaque point-celle  $a$ , la méthode implique que la partie imaginaire de l'intégrande reste constante. Donc, la contribution du point-celle  $a$  s'écrit :

$$H_{n-1}(y_a) = K \Im (e^{n\gamma_n(a)}) \Re (\oint_{\Gamma} e^{n\gamma_n(a)} da).$$

L'approximation est alors la somme de toutes ces contributions :

$$H_{n-1}(y) = \sum K \Im (e^{n\gamma_n(a)}) \Re (\oint_{\Gamma} e^{n\gamma_n(a)} da).$$

La partie réelle  $\Re (\oint_{\Gamma} e^{n\gamma_n(a)} da)$  ne s'annule pas en général et tend vers l'infini avec  $n$ . La contribution dont la partie réelle est plus grande détermine le point critique  $a_c$  qu'il faut retenir quand  $n \rightarrow \infty$ . Cette contribution  $H_{n-1}(y_{a_c})$  domine toutes les autres qui sont exponentiellement négligeables.

On ne tiendra pas compte, non plus, des points critiques réels car ils ne peuvent pas annuler  $H_{n-1}(y)$ . Ici encore un nombre impressionnant de problèmes peuvent surgir selon la direction de  $s$  (voir la théorie de Morse). Certaines coordonnées de  $a_c$  peuvent être réelles. Les autres sont imaginaires, mais, comme  $sf$  est à coefficients réels, chaque  $a_c$  a un conjugué  $\bar{a}_c$ . Pour simplifier on ne s'occupe ici que des coordonnées complexes de  $a_c$ .

Comme  $sf$  est à coefficients réels, le conjugué  $\bar{a}_c$  de  $a_c$  vérifie la même équation critique  $as\partial f(a)/\partial a = 1$ . Il faut donc ajouter cette contribution pour le calcul de  $H_{n-1}(y)$ . La partie réelle de  $H_{n-1}(y_{\bar{a}_c})$  est la même que celle de  $H_{n-1}(y_{a_c})$ . Seule la partie imaginaire diffère. En suivant le raisonnement (que l'on ne vérifie pas ici) de Plancherel et Rotach qui considèrent que le contour d'intégration relatif à  $\bar{a}_c$  doit être pris en sens inverse de celui autour de  $a_c$ , il faut affecter le signe  $-$  devant  $H_{n-1}(y_{\bar{a}_c})$ . Et l'on peut écrire en supprimant les contributions exponentiellement négligeables :

$$H_{n-1}(y) \sim H_{n-1}(y_{a_c}) - H_{n-1}(y_{\bar{a}_c}),$$

$$H_{n-1}(y) \sim 2K \sin(\Im(n\gamma_n(a_c))) \Re(\oint_{\Gamma} e^{n\gamma_n(a)} da).$$

Or, notre but est de rechercher les zéros de  $H_{n-1}(y)$ . Seul,  $\sin(\Im(n\gamma_n(a_c)))$  peut annuler  $H_{n-1}(y_{a_c})$  au point critique  $a_c$ . Donc  $H_{n-1}(y)$  ne s'annule que si :

$$\Im(n\gamma_n(a_c)) = k\pi$$

$sf$  est à coefficients réels :  $\Im(sf(a_c)) - \theta = k\pi/n \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Où  $\theta$  est l'argument de  $a_c$ . On observe que  $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n+1} < \frac{k+1}{n}$ .

Ce qui explique que les zéros soient entrelacés.

Soit une solution annulant cette contribution principale, le risque est alors de voir resurgir une autre contribution parmi celles qui sont exponentiellement négligeables. On n'abordera pas cette question ici. En revanche, on va examiner le rôle des itérations dans cette équation.

On note  $k_j$  les indices  $k$  relatifs à la  $j$ -ième coordonnée. Ainsi, on peut écrire :

$$\Im(n\gamma_n(a)) - k\pi = \sum_{j=1}^{j=d} (n\gamma_{n_j}(a) - k_j\pi) = 0.$$

### Proposition

Sous les conditions (C), le point critique  $a$  de la PR-fonction  $\gamma(a)$  donne les zéros réels de  $H_{n-1}(y)$  pour toutes les coordonnées complexes  $a_{\ell}$  de  $a$ :

$$n\Im(\gamma) = \Im(yf(a) - n \ln a) = k\pi.$$

Chaque itération  $f_{\ell}$  agit comme dérivation sur  $H_{n-1}(y)$  et l'on a :

$$\Im(s_\ell f_\ell(a) - \theta_\ell) = \pi k_\ell/n.$$

Quand  $n \rightarrow \infty$ , la distribution de  $k/n \rightarrow \chi$  uniforme sur  $(0,1)$  :

$$\Im(s_\ell f_\ell(a) - \theta_\ell) = \pi \chi_\ell.$$

La répartition des zéros est :

$$q(s) ds = \Im(f(a)) ds/\pi.$$

■ Examinons ce qui se passe sur la distribution des zéros de  $H_{n-1}(y)$  lorsque l'on itère  $f : n$  devient  $n + 1$  et la fonction de PR  $\gamma_n(a)$  devient  $\gamma_{n+1}(a)$  :

$$(n+1)\gamma_{n+1}(a) = \sum_{j=1}^{j=d} (n+1)\gamma_{(n+1)j}.$$

Et

$$\partial\gamma_{n+1}/\partial a = 0.$$

Si l'on n'itère que la composante  $a_m$  ; c'est-à-dire lorsque l'on remplace uniquement  $a_\ell$  par  $f_\ell(a)$ . Toutes les autres composantes restent fixes. Cela se traduit par une dérivation supplémentaire par rapport à  $a_\ell$  :  $H_{n-1+1_\ell}(y) = \partial \frac{\partial^n e^{y f(a)}}{\partial a^n} / \partial a_\ell |_{a=0}$

Notons  $(n+1_\ell)\gamma_{n+1}(a)$  la fonction de PR correspondant à l'étape  $n+1_\ell$  et voyons les effets sur la distribution des zéros.

À l'étape  $n$ , on a :  $\Im(\sum_{j=1}^{j=d} \gamma_{nj}) = k_n \pi/n$ ,

Donc :  $\Im(\sum_{j \neq \ell} \gamma_{nj}) = k_n \pi/n - \Im(\gamma_{n\ell})$ .

On définit l'étape  $n+1_\ell$  en itérant  $f_\ell(a)$  à la place de  $a_\ell$ .

À l'étape  $n+1_\ell$ , si  $\forall j \neq \ell$ , les  $a_j$  et les  $s_j$  restent inchangés, donc  $\gamma_{(n+1)j} = \gamma_{nj}$ .

Or :  $(n+1)\gamma_{n+1} = (n+1)(\sum_{j \neq \ell} \gamma_{(n+1)j} + \gamma_{(n+1)\ell})$ .

Prenons la partie imaginaire :

$$(n+1)\Im(\gamma_{n+1}) = (n+1)\Im(\sum_{j \neq \ell} \gamma_{(n+1)j} + \gamma_{(n+1)\ell}).$$

En reportant  $\Im(\sum_{j \neq \ell} \gamma_{nj}) = k_n \pi/n - \Im(\gamma_{n\ell})$  dans cette expression :

$$(n+1)\Im(\gamma_{n+1}) = (n+1)(k_n \pi/n - \Im(\gamma_{n\ell} - \gamma_{(n+1)\ell}))$$

Comme :

$$(n+1)\Im(\gamma_{n+1}) = k_{n+1}\pi,$$

$$\Im(\gamma_{n+1}) = k_n \pi/n - \Im(\gamma_{n\ell} - \gamma_{(n+1)\ell}) = k_{n+1}\pi/n,$$

Donc, pour  $\ell$  :

$$\gamma_{n\ell} - k_{n\ell}\pi/n = \gamma_{(n+1)\ell} - k_{(n+1)\ell}\pi/(n+1).$$

Il en résulte que  $\gamma_{n\ell} - k_{n\ell}\pi/n$  reste constant pour  $\forall n$  et pour  $\forall \ell$  tel que  $a_\ell$  est complexe.

On prendra donc :

$$\gamma_{n\ell} - k_{n\ell}\pi/n = 0.$$

Donc :

$$\Im(s_\ell f_\ell(a) - \theta_\ell) = k_\ell \pi/n,$$

pour  $\forall \ell$  tel que  $a_\ell$  est complexe et  $\forall k_\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Quand  $n \rightarrow \infty$ , la distribution de  $k_\ell/n \rightarrow \chi_\ell$  distribution uniforme sur  $[0,1]$ .

$$\Im(s_\ell f_\ell(a) - \theta_\ell) = \pi \chi_\ell,$$

pour  $\forall \ell$  tel que  $a_\ell$  est complexe. Toutes ces distributions sont indépendantes.

On ne se préoccupe pas ici des problèmes de domination lorsqu'il y a plusieurs points fixes.

La répartition of the zéros vérifie :

$$\Im(\gamma(a)) = \kappa \pi \quad \text{avec} \quad \partial\gamma/\partial a = 0.$$

Or :

$$q(s) ds = \text{Prob} \{1 \text{ zero} \in (s, s + ds)\} = d\chi,$$

$$q(s) ds = \Im(d\gamma/ds) ds/\pi = \Im(f(a)) ds/\pi,$$

car :

$$d\gamma/ds = \partial\gamma/\partial s + \partial\gamma/\partial a \cdot \partial a/\partial s = f(a),$$

puisque  $\partial\gamma/\partial a = 0$  et que  $\partial\gamma/\partial s = f(a)$ . ■

**Remarque**

Lorsque la hessienne n'est pas définie négative, on a des situations bien plus compliquées (phénomènes de Stokes, catastrophes...).

- Si  $f$  est complexe, il faut séparer la partie imaginaire de la partie réelle et faire les calculs comme précédemment. (Voir la partie : exemples).

- Un résultat très utile est de remarquer que la fonction de Plancherel-Rotach est « quasi-invariante » dans une transformation orthogonale au sens suivant. Soit  $a' = O(y) a$ :

$$n\gamma(a') = yf(O(y) a) - n \ln O(y) a,$$

$$n\gamma(a') = yf(O(y) a) - n \ln a.$$

En effet,  $\ln a' = \ln O(y) a = \ln a$  car  $\ln a = \sum_{\ell} \ln a_{\ell} = \ln \prod_{\ell} a_{\ell}$  qui est un volume invariant par transformation orthogonale qui sert beaucoup lorsque l'on a des formes quadratiques.

## 7 - Étude heuristique de la relation entre les zéros de $H_n(y)$ et la densité invariante

On se propose maintenant de calculer la distribution  $P$  à l'aide de la distribution asymptotique des zéros de  $H_n(y)$  dans des cas particuliers.

Supposons que l'on a  $n^d$  points  $y_n \in \mathbb{R}^d$  vérifiant  $H_n(y_n) = 0$ . On considère la transformée de Laplace des  $y_n$ :

$$\Phi_n(y) = \left(\frac{1}{n^d}\right) \sum_n e^{-y y_n}$$

À chaque point  $y_n$ , il correspond un point  $x_n$  dans  $C$  de densité non nulle. Mais dans  $C$ , il faut normaliser les coordonnées des zéros  $y_n$  pour avoir une distribution à distance finie en posant :  $n x_{n\ell} = y_{n\ell}$ . Au volume  $dy$  correspond un volume normalisé  $dx$  dans  $C$ :  $dy = n^d dx$  et l'on obtient  $n^d q(x) dx$  zéros dans  $C$ . Soit  $t = y/n$ . Quand  $n \rightarrow \infty$ , on a :

$$\chi_n(nt) = \left(\frac{1}{n^d}\right) \sum_n e^{-t x_n} n^d q(x_n) dx_n \rightarrow \int e^{-t x} q(x) dx = \Phi(t)$$

$\Phi(t)$  est donc la transformée de Laplace de la distribution invariante et  $\chi_n(y)$  est la transformée de Laplace de la densité de zéros de  $H_n(y)$  dans  $C$ .

Comme  $y$  est réel,  $\chi_n(y)$  est asymptotiquement la transformée de LF des  $n x_n$ .  $q(x)$  est alors la densité de zéros dans  $C$  solution de  $\theta(y) = 0$ . On identifie  $\chi_n(y)$  avec  $\chi_n(y) = \Phi_n(y, 0)$ . En réalité, rares sont les phénomènes où l'on a  $n^d$  points  $y_n \in \mathbb{R}^d$  vérifiant  $H_n(y_n) = 0$ . Sauf dans le cas unidimensionnel car en général tous les zéros de  $H_n(y)$  ne sont pas tous réels. Si  $p(x)$  est la densité de la mesure invariante par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^d$  ( $dP(x) = p(x) dx$ ) et si  $q(x)$  est la densité de zéros dans  $C$  solution  $\Phi(y, 0)$  de  $\theta(y) = 0$

### Proposition

Supposons  $C$  rectangulaire et la densité nulle sur le bord  $\partial C$ . Soit  $q(y)$  la densité des zéros réels de  $H_n(y)$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors la densité invariante  $p(x)$  de la mesure de Perron-Frobenius est :

$$p(x) = (-x \partial q(x) / \partial x).$$

■ Pour toute solution de l'équation :  $\theta_f(y, a) = 0$ , la mesure de Perron-Frobenius  $P$  doit en outre vérifier l'identité :  $\theta_f(y, a) \equiv 0$ , pour  $\forall y$  et  $\forall a$  suffisamment petit. Donc, si  $\Phi(y, a)$  est une solution de l'équation :  $\theta_f(y, a) = 0$ , alors sa transformée de LF doit également vérifier :

$$\varphi(y) = \partial^2 \Phi \left. \frac{(y, a)}{\partial a \partial y} \right|_{a=0} = \partial(y \Phi(y)) / \partial y$$

Il suffit ensuite de prendre la transformation inverse pour avoir le résultat. ■

Notons que, en ce cas, les polynômes  $H_n(y)$  sont probablement orthogonaux.

Comme une itération correspond à une dérivation, sauf mention expresse, tous les indices de dérivation sont égaux. La méthode utilisée ici est celle de Plancherel-Rotach pour étudier le comportement asymptotique des polynômes d'Hermite quand le degré  $n \rightarrow \infty$ .

## II- Analyse des points fixes cycliques réulsifs

On présente ici de nouveaux résultats qui modifient l'analyse probabiliste. Certes, les mesures restent invariantes lorsque l'on itère  $f$ , mais lorsque l'on se penche sur l'étude de  $f^{(p)}$ , on rencontre de nouvelles distributions (images réciproques de la distribution initiale). Ces distributions sont associées aux cycles d'ordre  $p$ . La question, non résolue pour l'instant, se pose s'ils se confondent asymptotiquement et comment.

### Les équations d'évolution de $f^{(p)}$ , $\forall p$ .

Il faut d'abord ramener l'origine en un point fixe  $\alpha$  de  $f^{(p)}$  :  $f^{(p)}(\alpha) = \alpha$ . L'itération s'écrit :

$$g(a) = f^{(p)}(a + \alpha) - f^{(p)}(\alpha)$$

Les hypothèses sur  $f$  induisent les mêmes raisonnements sur  $f^{(p)}$ . On analyse donc

$$H_n(y) = \partial^n e^{yg(a)} / \partial a^n |_{a=0} = e^{-yf^{(p)}(\alpha)} \partial^n e^{yf^{(p)}(a+\alpha)} / \partial a^n |_{a=0}$$

Si  $\alpha$  est réel, cela revient à chercher les zéros de  $\partial^n e^{yf^{(p)}(a+\alpha)} / \partial a^n |_{a=0}$  et à étudier  $\partial^{n+p} e^{yf^{(p)}(a+\alpha)} / \partial a^{n+p} |_{a=0}$ . Tout se passe comme si l'on devait trouver les zéros de  $H_n(y, \alpha)$ .

Notons d'abord que la formule :  $d\chi = q(s) ds = \Im(f^{(p)}(a)) ds / \pi$  reste stable pour  $f^{(p)}$ , car il suffit de remplacer  $f$  par  $f^{(p)}$ , pour avoir le résultat. Dit rapidement, cela signifie que la première itération donne la distribution de probabilité et que les itérations suivantes sont alors images réciproques de cette distribution. On peut, de façon équivalente, remplacer l'étude de  $f^{(p)}(a + \alpha)$  par celle de  $(f(a + \alpha))$  car on a vu qu'une itération se transforme en dérivation sur  $H_n$ . Donc :

$$d\chi = q(s) ds = \Im(f(a + \alpha)) ds / \pi$$

Pour simplifier, considérons  $f^{(p)}$  au point fixe 0 qui est aussi un point cyclique de  $f^{(p)}$ . On a la condition  $\partial \gamma_1 / \partial a = 0$  pour  $f$ . Soit  $\partial \gamma_p / \partial a = \partial s f^{(p)} / \partial a - 1/a = 0$  pour  $f^{(p)}$ ,  $\forall p$ . Examinons sous quelles conditions, la formule  $\partial \gamma_1 / \partial a = 0$  reste valable pour  $\gamma_p$ . À cette première étape, le point critique  $a$  et  $s_1$  sont fixés modulo l'aléa  $\chi$  avec  $y = ns_1$  relatif à  $f$

### Proposition

Soit  $s_p$  vérifiant la récurrence :  $s_{p+1} \partial f(f^{(p)}(a)) / \partial a = \mu s_p$ .

La condition  $\partial \gamma_p / \partial a = 0$  est invariante pour  $f^{(p)}$ ,  $\forall p$  depuis  $p = 1$ . Les  $s_p$  sont reliés par la **récurrence d'évolution** :

$$s_2 \partial f(u) / \partial u |_{u=f(a(s_1))} = \mu s_1.$$

Il faut en outre que :

$$\Im(\partial f(u) / \partial u |_{u=f(a)}) = 0.$$

Comme  $a(s_1)$  est aléatoire, toutes les quantités qui suivent (vecteurs propres, valeurs propres, points fixes) sont aléatoires. Asymptotiquement, quand  $n \rightarrow \infty$ , les vecteurs  $\mathbf{s}$  invariants sont les vecteurs propres de :

$$\partial f(u) / \partial u |_{u=f(a)} \mathbf{s} = \mu \mathbf{s},$$

pour les valeurs propres d'évolution  $\mu$  avec  $\Im(\mu) = 0$ .

■ La fonction de PR de  $f$  est  $\gamma_n(f) = y f - n \ln(a)$ . La première étape définit le point critique  $a$  et  $s_1$  modulo l'aléa uniforme  $\chi$  :

$$s_1 \partial f(a) / \partial a - 1/a = 0.$$

La fonction de PR devient sous l'itération  $a \mapsto f(a)$  :

$$(n+1) \gamma_{n+1}(f^{(2)}) = (y/\mu) f^{(2)} - (n+1) \ln(a).$$

Soit  $y = (n+1)s_2$  relatif à  $f^{(2)}$ , on a les équations du point critique :

$$s_2 \partial f^{(2)}(a) / \partial a - 1/a = 0.$$

$$(s_2/\mu) \partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)} \partial f(a) / \partial a - 1/a = 0,$$

En posant :

$$(s_2/\mu) \partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)} = s_1.$$

On a pour  $n$  :

$$y \partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)} = ((n+1)/n) \mu y.$$

La première étape fixe  $y \partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)}$ . Mais, en ce cas,  $y$  est vecteur propre de  $y \partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)}$  pour la valeur propre  $\mu(n+1)/n$  de la matrice  $y \partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)}$ . On obtient ainsi la même distribution de zéros pour  $f$ ,  $f^{(2)}$  et  $f^{(n)}$ . On a alors la relation de récurrence :

$$s_{n+1} \partial f(f^{(n)}(a)) / \partial a = \mu s_n.$$

Il faut en outre que :

$$\Im(\partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)}) = 0 \text{ et } \Im(\mu) = 0.$$

Pour que  $\Im(s_\ell f_\ell(a) - \theta_\ell) = \pi k_\ell / n$  reste inchangé quand  $n \rightarrow \infty$ , on devra avoir sous réserve de convergence :

$$s \partial f(u) / \partial u|_{u=f(a)} = \mu s.$$

Comme  $s_1$  est aléatoire, toutes les quantités qui suivent (vecteurs propres, valeurs propres, points fixes) sont aléatoires. On a une relation de récurrence aléatoire modulo l'aléa  $\chi$ . La relation de récurrence est linéaire. À chaque itération le vecteur propre est multiplié par  $\mu$ , donc

$$s_n = \mu^n s.$$

Il faut donc que  $\Im(\mu^n) = 0$ . Selon que  $|\mu_\ell| < 1$  ou  $|\mu_\ell| > 1$  la coordonnée correspondante  $s_\ell$  de  $s$  tend vers 0 ou  $\infty$ . Pour  $|\mu_\ell| = 1$ , on a des cycles. Il suffit alors de translater en  $\alpha$  pour avoir les distributions du cycle d'ordre  $p$ ,  $\forall p$ . ■

### Corolaire : l'autosimilarité

Posons  $\mu = \rho e^{i\alpha}$ ,  $n$  itérations transforment  $s_n = \mu^n s = \rho^n e^{in\alpha} s$ . Ici encore, il faut que

$$\sin(n\alpha) = 0$$

$$\alpha = k\pi/n$$

Cela explique l'autosimilarité. Car on sait que :  $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n+1} < \frac{k+1}{n}, \forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Quand  $n \rightarrow \infty$ , la distribution asymptotique de  $k/n \rightarrow \psi$  est uniforme sur  $(0, 1)$  et l'on peut écrire

$$\alpha = \text{Arg}(\mu) = \pi\psi$$

Par suite, les valeurs propres  $\mu$  déterminent le comportement asymptotique de la récurrence selon que le module de  $\mu$  est plus grand ou plus petit que 1.

Il est très curieux que la propagation de la distribution de probabilité se fasse d'étape en étape via un processus linéaire et selon les valeurs propres de ce processus.

On a vu que l'itération  $a \mapsto f(a)$  transforme  $e^n(y, 0) = 0$  en  $e^{p+1}(y/\mu, 0) = 0$  avec  $\mu > 0$ . Elle transforme donc  $H_{p-1}(y) = 0$  en  $H_p(y/\mu) = 0$ .

## III - Analyse probabiliste d'une équation différentielle ordinaire

### 1 - Équation différentielle étudiée comme une itération

Considérons l'équation différentielle ordinaire :

$$da/dt = F(a),$$

où  $a \in C \subset \mathbb{R}^d$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $F(a)$  est  $C^\infty$  et applique  $a \in C$  borné dans  $C$ .

Il s'agit de trouver une fonction  $a(t)$  vérifiant cette équation avec la condition initiale :

$$a(t_0) = a_0 \in C \text{ pour } t_0 = 0.$$

On utilisera la solution théorique de Carathéodory  $a(t)$  pour  $t > 0$  :

$$a(t) = a_0 + \int_0^t F(a(u)) du = a_0 + S(a_0, a(t)).$$

Cette solution existe si  $F$  est continue pour  $t$  pas trop grand ; elle est unique si  $F$  est lipschitzienne. Seule son existence nous intéresse, ce qui est le cas car  $F(a)$  est  $C^\infty$ .

La difficulté des raisonnements qui suivent vient de ce que l'on doit utiliser conjointement des arguments probabilistes et des arguments déterministes. Car lorsque l'on itère, comme l'a fait Lorenz, un nombre de fois au-delà du pas sans le changer, on obtient de nouvelles configurations inexplicables.

On associe à l'équation différentielle l'itération différentielle  $f_\delta(a)$  :

$$f_\delta(a) = a + \delta F(a) ;$$

où  $\delta = t/n$  est le pas.

Les points fixes de l'itération différentielle sont les zéros  $\alpha$  of  $F$ :  $F(\alpha) = 0$ .

Le plus souvent, on itère  $n$  fois  $f$ , on a :  $a_n = f_\delta^{(n)}(a_0)$  à partir de  $a_0$  avec le pas  $\delta = t/n$  :

$$a_n = f_\delta^{(n)}(a_0) = a_0 + \delta \left( \sum_{p=0}^{n-1} F(a_p) \right) ,$$

$$a_n = a_0 + \delta S_n(a_0).$$

Il peut exister des cycles d'ordre  $n$  définis par la condition :  $a_n = a_0$ .

Et la solution  $a_n \rightarrow a(t)$  s'obtient quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\text{Quand } n \rightarrow \infty : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_\delta^{(n)}(a_0) = a(t) = a_0 + \int_0^t F(a(u)) du,$$

$$\text{car} \quad \delta S_n(a_0) \rightarrow S(a(t), a_0) = \int_0^t F(a(u)) du.$$

### Proposition

*Sous nos hypothèses, du point de vue des itérations, on peut associer asymptotiquement de façon biunivoque une itération  $f(a)$  à une équation différentielle  $da/dt = F(a)$  avec la relation :*

$$f(a) - a = \delta F(a).$$

*Ce que l'on peut écrire :*  $f(a) - a = \delta F(a) = \delta da/dt = da/(dt/\delta) = da/dt'$

■ On peut écrire l'équation différentielle  $da/dt = F(a)$  :

$$E_\delta \left( e^{ya} (1 - e^{\delta y F(a)}) \right) = \delta \int_0^1 E_t(y F(a) e^{ya + t \delta y F(a)} |_{a=0}) dt = 0$$

Par ailleurs, on a vu que pour l'itération  $f(a)$  :

$$\theta_f(y) = \int_{t=0}^{t=1} E(y(a - f(a)) e^{ya + ty(f(a)-a)} |_{a=0}) dt = 0.$$

En posant  $f(a) - a = \delta F(a)$ , on observe que l'on a exactement les mêmes équations et les mêmes résultats asymptotiques. Dans les deux cas on a :

$$a_n = f^{(n)}(a_0) = a_0 + \delta \left( \sum_{p=0}^{n-1} F(a_p) \right)$$

$\delta$  est le paramètre qui établit de façon continue une position de l'itération sur la courbe lorsqu'elle se déplace de manière erratique.

Cela signifie que  $f(a) - a$  est équivalente à  $da/dt' = F(a)$ . On a ainsi la géométrie (certes parfois aléatoire) presque parfaite du support des itérations. ■

### Proposition

*Sous les hypothèses précédentes, les mesures invariantes ont pour supports des cycles :*

- soit des cycles finis d'ordre  $n$  définis par  $\sum_{p=0}^{n-1} F(a_p) = 0$  ;

- soit des cycles continus aléatoires  $\Xi$  dont la réalisation est  $\zeta$ , définie par la condition :

$$\int_0^T F(a(u)) du = 0.$$

*Il doit alors exister une presque période  $T$  et un point  $a_0 \in \xi$  tels que  $a(T) = a_0$ . Sur chaque cycle  $\zeta$ , la probabilité conditionnelle de présence est uniforme.*

■ À l'itération  $f_\delta(a) = a + \delta F(a)$ , on associe pour  $\forall \delta$  fixé, la mesure invariante  $P_\delta$  dans  $C$ .

Soit  $C_\delta \subset C$  son support.

Pour  $\forall \delta$  fixé, nous devons avoir l'équation résolvante de la variable aléatoire  $X$  :

$$\Phi_\delta(y) = E_\delta(e^{yX}) = E_\delta(e^{y f_\delta(X)}) = E_\delta(e^{y f_\delta^{(n)}(X)}).$$

$$\begin{aligned} \text{si } X_n = f_\delta^{(n)}(X) : & \quad E_\delta(e^{yX}) = E_\delta(e^{yX_n}) \\ \text{Or, si } X_p = f_\delta^{(p)}(X) : & \quad X_n = f^{(n)}(X) = X + \delta \left( \sum_{p=0}^{n-1} F(X_p) \right) = X + \delta S_n(X) \\ \text{Donc :} & \quad \phi_\delta(y) = E_\delta(e^{yX}) = E_\delta(e^{yX + \delta y S_n(X)}) \\ \text{Il en résulte :} & \quad E_\delta \left( e^{yX} (1 - e^{\delta y S_n(X)}) \right) = 0. \end{aligned}$$

On peut, par translation de  $C$  borné, donc de  $C_\delta$ , rendre toutes les coordonnées d'un point quelconque de  $C_\delta$  positives.  $\delta S_n(X)$  et  $X$  sont alors tous positifs.

- Pour  $\forall n$  fini,  $S_n(X)$  est continu positif,  $y$  peut être choisi strictement négatif ; donc :  $1 - e^{\delta y S_n(X)} > 0$ . Nécessairement, on devra donc avoir  $1 - e^{\delta y S_n(X)} = 0$  pour la mesure invariante de densité non nulle. Ce qui signifie  $y S_n(X) = 0$  pour  $\forall y$  et  $X_n = X$  presque sûrement pour la mesure invariante. On obtient des cycles d'ordre  $n$  qui ne dépendent pas de  $\delta$ .

- Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , Si une solution de Carathéodory existe, alors :

$$y S_n(X) \rightarrow \int_0^T y F(X(u)) du = 0 \text{ et } X(T) = X.$$

Il doit alors exister une presque période  $T > 0$  telle que  $X(T) = X$  pour toute mesure invariante de densité non nulle.

On a donc une version probabiliste du théorème de Poincaré-Bendixon dans  $\mathbb{R}^d$ . ■

### Remarque

Cette proposition est lourde de conséquences : on a des presque-cycles avec des presque-périodes. Cela permet d'appliquer tous les précédents résultats des itérations aux équations différentielles non linéaires mal connues qui peuvent alors être vues sous un autre jour. Inversement, on peut alors traduire les itérations sur des courbes définies par des équations différentielles et ainsi apporter aux itérations les résultats connus des équations différentielles.

### 2- mesure invariante de l'équation différentielle

Ceci étant, avons-nous épuisé toutes les mesures de probabilité générées par cette équation différentielle ? Pour avoir le portrait complet des mesures, il faut se projeter au bout d'un temps infini et faire intervenir un nombre d'itérations infiniment plus grand que celui ( $n$ ) pour obtenir une solution de Carathéodory avec  $\delta = t/n$ . C'est -à dire que l'on prend comme itération :

$$f(a) = a + t' F(a)$$

en remplaçant  $\delta = t/n$  par  $t'$  aussi grand que l'on veut ; ceci est compatible avec le fait qu'à partir d'un point quelconque initial  $a$  sur un presque-cycle asymptotique continu  $\xi$ , on se promène sur ce cycle et que  $\delta = (t + T)/n$  donne le même résultat que  $\delta = t/n$ .

Pour l'équation différentielle, cela revient à remplacer  $da/dt = F(a)$  par  $da/dt' = F(a)(t/t')$ .

### Proposition

La mesure invariante de l'itération différentielle  $f(a) = a + \delta F(a)$  est définie par les zéros de l'écart résolvant  $e^n(y)$ . Cela revient à rechercher les zéros de la fonction où  $t \leq \delta$  :

$$\partial^n (yF(a)e^{ya+tyF(a)}) / \partial a^n = 0.$$

Si les points fixes  $F(a)=0$  sont répulsifs, en posant  $s = y/n$ , le point critique de l'intégrande,

$$n\gamma(a) = ya + tyF(a) - n \ln a,$$

défini par :  $\partial \gamma(a) / \partial a = 0$ , donne la solution aléatoire.

$$s_\ell a_\ell - a_\ell s t \partial F(a) / \partial a_\ell = 1 \quad \ell = 1, 2, \dots, d$$

■ - Reprenons l'écart résolvant avec  $f(a) = a + t' F(a)$ :

$$e^n(y) = \partial^n (e^{ya} - e^{ya+t'yF(a)}) / \partial a^n |_{a=0} = 0.$$

Or :

$$e^n(y) = \int_0^{t'} \partial^n (yF(a)e^{ya+tyF(a)}) / \partial a^n |_{a=0} du dt = 0$$

Il en résulte que l'équation résolvante sera :

$$\partial^n (yF(a)e^{ya+tyF(a)}) / \partial a^n = 0.$$

Si la somme des valeurs propres de la jacobienne de  $F(a)$  est positive (ce qui est équivalent à la condition  $\lambda^n \gg 1$  d'une itération générale). Autrement dit, si les points fixes sont répulsifs, Il suffit d'appliquer les résultats généraux. D'autres conditions sont à ajouter dans le cas hyperbolique.

### Proposition

Lorsque le nombre d'itérations  $n \rightarrow \infty$  et que la hessienne de  $yF$  est définie négative, l'approximation de la méthode du point critique définit  $s = y/n$  en fonction du point critique  $a$  : où

$$s_\ell + ts\partial F(a)/\partial a_\ell - 1/a_\ell = 0 \quad \text{avec} \quad \ell = 1, 2, \dots, d).$$

Si  $s_a$  est une solution particulière et si  $\vec{s}$  est un vecteur propre de  $-\partial F(a)/\partial a$  pour la valeur propre  $1/t$ , la solution générale est :

$$s = s_a + \mathbf{s}(a)$$

La valeur propre  $\mu(a) = -1/t$  peut être interprétée comme une fréquence critique asymptotique et l'on doit avoir  $\Im m(\mu(a)) = 0$ . Ici encore, on aura asymptotiquement :  $\text{Argu}(\mu(a)) = \pi\psi$  où  $\psi$  est uniforme sur  $(0, 1)$ .

■ Cherchons alors une approximation de  $e^n(y, 0) = \partial^n(e^{ya} - e^{yf(a)})/\partial a^n|_{a=0}$  pour  $\delta = t$  arbitraire par la méthode du col avec  $f(a) = a + tF(a)$ .

Pour pouvoir appliquer cette méthode, la hessienne de  $yF$  doit être définie négative :

$$H_{n-1}(y) = K \int_{\Gamma} \frac{yF(a)e^{yf(a)}}{a^n} da.$$

- La fonction de Plancherel–Rotach est alors :

$$n\gamma(a) = yf(a) - n \ln a = ya + tyF(a) - n \ln a$$

Posons  $s = y/n$ , il vient :  $\gamma(a) = sa + tsF(a) - \ln a$ .

Le point critique est alors défini par :

$$s_\ell a_\ell + a_\ell ts\partial F(a)/\partial a_\ell = 1, \quad \ell = 1, 2, \dots, d.$$

Considérons  $s$  en fonction de  $a$ . Pour  $a$  fixé, on reconnaît une équation linéaire affine en  $s$  dépendant du paramètre  $t$ , dont il faut trouver une solution particulière  $s_a$  :

$$s_a + ts_a\partial F(a)/\partial a - 1/a = 0$$

Pour  $a$  fixé, cette équation en  $s_a$  est une simple équation de Fredholm et a une solution unique pour tout  $t \neq -1/\lambda_a$  fixé où  $\lambda_a$  est valeur propre de  $\partial F(a)/\partial a$ .

Posons la solution générale de la forme  $s = s_a + \mathbf{s}(a)$  :

$$s_a + \mathbf{s}(a) + t(s_a + \mathbf{s}(a))\partial F(a)/\partial a - 1/a = 0,$$

Il reste :

$$\mathbf{s}(a) = -ts(a)\partial F(a)/\partial a.$$

$\mathbf{s}(a)$  est donc vecteur propre de  $\partial F(a)/\partial a$  pour la valeur propre  $\mu(a)$  et  $t = -1/\mu(a)$  ; il est défini à une constante multiplicative près. La solution générale est :

$$s = s_a + \mathbf{s}(a),$$

et présente une discontinuité aux valeurs propres  $\mu(a)$ .

On calcule  $s_a$  en prenant  $(Id + t\partial F(a)/\partial a)^{-1}$  pour tout  $-1/t$  fixé n'appartenant pas au spectre de  $-\partial F(a)/\partial a$  et en développant l'expression en série selon les puissances de  $t$ .

- Appliquons alors la condition d'invariance pour  $f_\delta^{(n)}, \forall n$  :

Où  $f_\delta(a) = a + \delta F(a)$

On a :  $\partial f_\delta(a)/\partial a = 1 + \delta\partial F(a)/\partial a$

Et :  $s_\delta = (1 + \delta\partial F(u)/\partial u|_{u=f_\delta(a)}) s$

$$s_\delta - s = \delta\partial F(u)/\partial u|_{u=f_\delta(a)} s$$

En posant  $ds = s_\delta - s$  et  $\delta = dt$ , on obtient quand  $\delta \rightarrow 0$  :



$$ds/dt = \partial F(a) / \partial a \quad s$$

Asymptotiquement, quand  $n \rightarrow \infty$  et en gardant  $a$  constant, dans la base des vecteurs propres, on a pour la valeur propre  $\mu(a)$  de  $\partial F(a) / \partial a$  avec la condition  $\Im m(\mu(a))=0$ :

$$ds/dt = \mu(a) \quad s. \quad \blacksquare$$

#### IV -- Exemples

La présentation des différents exemples n'a pas été très fouillée. On reprend des résultats présentés dans d'autres articles ; on s'est contenté de montrer les distributions de probabilité continues au voisinage des points fixes. Pour la plupart, il ne s'agit que de distributions qui finalement se ramènent à celle de la logistique. Il se peut, comme pour la logistique, que les distributions de probabilité continues soient masquées par des points fixes ou des cycles. On s'est hasardé dans quelques linéarités pures et dans un cas du troisième degré. Beaucoup d'autres cas ont été étudiés qui ne figurent pas ici, mais beaucoup reste à faire.

1- **La logistique** : (traité dans des articles précédents)

$$f(a) = \lambda a - a^2/2; \quad \text{et} \quad \gamma(a) = s(\lambda a - a^2/2) - \ln a;$$

$$\partial \gamma / \partial a = s(\lambda a - a^2) - 1 = 0$$

On pose  $\lambda \sqrt{s} = 2 \cos \vartheta$ , donc :  $2 \cos \vartheta a \sqrt{s} - sa^2 - 1 = 0$  a comme racines :  $a \sqrt{s} = e^{\pm i \vartheta}$

Et :  $\Im m(f(a)) = \Im m(\lambda a - a^2/2) = \sin 2\vartheta / s.$

$$q(s) ds = \Im m(f(a)) ds / \pi = (1 - \cos 2\vartheta) d\vartheta / \pi,$$

$$q(s) = (\lambda / 2\pi) \sqrt{1/s - \lambda^2/4}.$$

En posant :  $t = \cos \vartheta = \frac{\lambda \sqrt{s}}{2}$ , on reconnaît :

$$W(t) dt = (2/\pi) \sqrt{1-t^2} dt.$$

la loi des zéros of  $H_n(x)$  est la loi semi-circulaire de Wigner.

Comme  $\pi \chi = \text{Arc sin } t$ , on a :  $\vartheta + \pi \chi = \frac{\pi}{2}$

La densité de la logistique correspondante à  $q(s)$  est :

$$p(s) = -s dq/ds = -s(2/\pi) d\left(\frac{\lambda}{4\sqrt{s}} \sqrt{1 - \frac{s\lambda^2}{4}}\right) / ds,$$

$$p(s) = \lambda / (2\pi \sqrt{4s - s^2 \lambda^2}).$$

On en déduit que la densité de la logistique suit une loi Béta (1/2,1/2) dans une situation qui généralise le cas d'Ulam-Von Neumann's [5]. De plus, on remarque le lien profond qui existe entre la loi de Wigner et la loi Beta(1/2,1/2). On note que cette distribution peut être masquée par des convergences vers des points fixes ou des cycles pour certaines valeurs du paramètre  $\lambda$ . Prenons maintenant  $f(a) = \lambda a + a^2/2$ ;  $\partial \gamma / \partial a = s(\lambda a + a^2) - 1 = 0$ ; cette équation a ses racines réelles et n'a pas de distribution de probabilité.

#### 2- La courbe de type Hénon

Ici, on fait apparaître un deuxième phénomène : l'entrelacement des branches qui deviennent asymptotiquement aléatoire. En centrant la récurrence sur le point fixe 0, les points de la courbe sont définis par :

$$a_1 = g(a) + b,$$

$$b_1 = \beta a,$$

Avec  $g(a) = \alpha a - \sigma a^2/2.$

On a une linéarité  $b_1 = \beta a$ ; les points fixes sont

$$a_0 = 0, b_0 = 0),$$

Et  $(a'_0 = (2(1-\alpha), b'_0 = 2\beta(1-\alpha)).$

Les multiplicateurs en (0,0) sont :  $(\alpha - \mu)\mu + \beta = 0.$

Répulsifs si  $|\mu| > 1$  en (0,0) et en  $(a'_0, \beta(a'_0)).$

Le polynôme  $H_{n-1}(s, t)$  s'écrit alors avec  $s = (s, t)$  en  $a_0$ :

$$H_{n-1}(s) = H_{n-1}(s, t) = s^{n-1} d^{n-1} e^{n\gamma(a)} / da^{n-1} |_{a=0}$$

Où la fonction de PR se réduit ici à l'étude de :

$$\gamma(a) = sg(a) + t\beta a - \ln a$$

Le point critique est donné par :

$$s \partial g(a) / \partial a + t\beta = 1/a$$

$$(s\alpha + t\beta)a - s\sigma a^2 = 1$$

Qui a pour racines

$$a(s)\sqrt{s\sigma} = (s\alpha + t\beta) / 2\sqrt{s\sigma} \pm i\sqrt{4s\sigma - (s\alpha + t\beta)^2} / 2\sqrt{s\sigma}$$

Avec

$$4s\sigma - (s\alpha + t\beta)^2 > 0$$

D'autre part :

$$b(s) = 1/s$$

L'écart résolvant s'écrit :

$$e^n(y, 0) = \partial^n (e^{y\alpha} - e^{yf(a)}) / \partial a^n = s^n (t^n - H_{n-1}((s\alpha + t\beta) / 2\sqrt{s\sigma}))$$

Sous réserve que  $|s\alpha + t\beta| < \sqrt{2s\sigma}$ ,  $\frac{(s\alpha + t\beta)}{2\sqrt{s\sigma}} = \cos\theta = \zeta$  suit la loi uniforme.

On a une branche de parabole aléatoire. En posant  $\theta = \text{Arc cos } \zeta$ , on observe que  $a(s)$  ne dépend que de  $\zeta$  :

$$a(s)\sqrt{s\sigma} = \zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} = e^{\pm i\theta}$$

Et :

$$\pi\chi = \text{Arc sin } \zeta = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Examinons alors l'effet des itérations fourni par la relation :  $s_2 = s_1 \partial f(u) / \partial u |_{u=f(a(s_1))}$

Or :

$$\partial f(a) / \partial a = \begin{bmatrix} \partial g(a) / \partial a & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

Car :

$$\begin{aligned} \partial a_1(u) / \partial a |_{u=f(a(s))} &= \alpha - \sigma f(a(s)) = \alpha - \sigma(g(a(s)) + 1/s) \\ &= \alpha - \sigma\alpha a + \sigma^2 a^2 / 2 + \sigma/s \\ &= \alpha - \sigma\alpha a + \sigma((s\alpha + t\beta)a / 2s - \sigma / 2s + \sigma/s) \\ &= \sigma(-\alpha s + t\beta)a / 2s + \alpha + \sigma / 2s \\ &= \sigma(-\alpha s + t\beta)e^{\pm i\theta} / (2s\sqrt{s\sigma}) + \alpha + \sigma / 2s \end{aligned}$$

Les valeurs propres  $\mu$  sont définies par :

$$(\alpha - \sigma(g(a(s)) + \sigma/s - \mu)\mu + \beta = 0$$

Le vecteur propre  $s = (\mu, \beta)$  et la suite  $s_n = (\mu^n, \beta\mu^{n-1})$  fourniront en quelques étapes une bonne approximation de la courbe. Comme  $\beta$  est petit, seule la valeur  $\mu \approx \frac{\partial g(a)}{\partial a}$  est à conserver.

En effet,  $\mu$  se met sous la forme  $\mu = \rho e^{i\theta}$  ; il reste à prendre la partie réelle. La partie imaginaire devra être nulle et donnera une condition à chaque étape  $n$ :  $\sin n\theta = 0$ , donc  $\theta = k\pi/n$ . Et les branches de « paraboles » sont entrelacées quand on passe de  $n$  à  $n + 1$ . Quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $k/n \rightarrow \psi$  est uniforme sur  $(0, 1)$  et l'on peut écrire  $\alpha = \text{Argu}(\mu) = \pi\psi$ .

Ce qui explique le phénomène de « autosimilarité ». On voit immédiatement que ceci peut être généralisé aisément à toute fonction de type Hénon en dimension 2 avec  $g(a)$  pourvu que la hessienne de  $g(a)$  soit définie négative.

### 3- L'attracteur de Lorenz (traité dans des articles précédents)

On ne présentera pas ici l'entrelacement des branches.

#### --Les points fixes répulsifs

Les vecteurs de cette équation sont écrits en gras  $\mathbf{a} = (a, b, c)$  :  $d\mathbf{a}/dt = F(\mathbf{a})$

$$da/dt = \sigma(b-a)$$

$$db/dt = \rho a - b - ac$$

$$dc/dt = -\beta c + ab.$$

L'équation différentielle applique un ensemble borné  $C$  (l'attracteur de Lorenz modélise l'atmosphère comprise entre une sphère à  $-50^\circ$  et une sphère chaude, la terre, à  $+15$ ). L'itération différentielle associée pour un pas donné  $\delta = t/n$  est :  $\mathbf{a}_1 = f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \delta F(\mathbf{a})$

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \delta\sigma(b-a), \\ b_1 &= b + \delta(\rho a - b - ac), \\ c_1 &= c + \delta(-\beta c + ab). \end{aligned}$$

L'itération est quadratique en  $c$  et  $a$ , mais présente une linéarité en  $a$ .

Les points fixes sont les zéros de  $F(\mathbf{a})=0$ . Si  $\rho > 1$  et  $\alpha = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$ , on a trois points fixes ; le point  $\mathbf{0} = (0,0,0)$ , et deux autres symétriques par rapport à l'axe des  $c$  :

$$\alpha_+ = (\alpha, \alpha, \alpha^2/\beta) \text{ et } \alpha_- = (-\alpha, -\alpha, \alpha^2/\beta).$$

En  $\mathbf{0}$ , l'équation caractéristique en  $\lambda$  de la partie linéaire est :

$$(\beta + \lambda) [(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma\rho] = 0,$$

Mais, en  $\alpha_+$  ou en  $\alpha_-$  :  $\lambda(\beta + \lambda)(1 + \sigma + \lambda) - \alpha^2(2\sigma + \lambda) = 0$ .

Les coefficients  $\beta, \sigma, \rho$  sont tels que les trois points fixes sont répulsifs ; on doit donc étudier les distributions autour de chaque point fixe. On ne s'occupe pas ici de cycles attractifs, résonance, etc.

### -- Analyse de la hessienne

Projetons  $f(\mathbf{a})$  sur l'axe  $\mathbf{y} = (x, y, z)$ , on écrit :

$$\mathbf{y}f(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}) + \delta Q(\mathbf{a})$$

où  $L(\mathbf{a})$  est linéaire en  $\mathbf{a}$  :  $L(\mathbf{a}) = x(a + \delta\sigma(b-a)) + y(b + \delta(\rho a - b)) + zc(1 - \delta\beta)$

$$L(\mathbf{a}) = aL_1 + bL_2 + cL_3$$

Avec

$$L_1 = x(1 - \delta\sigma) + \delta\rho y$$

$$L_2 = \delta\sigma x + y(1 - \delta)$$

$$L_3 = z(1 - \delta\beta)$$

et  $Q(\mathbf{a})$  est quadratique :  $Q(\mathbf{a}) = (zb - yc)a$ .

La hessienne  $Q(\mathbf{a})$  est dégénérée et non définie négative. Mais,  $Q$  ne change pas quand on translate l'origine d'un point fixe à un autre.

Examinons la matrice de  $Q(\mathbf{a})$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit  $\mu = \sqrt{y^2 + z^2}$  la valeur propre positive de l'équation caractéristique de  $Q$ :

$$\mu(\mu^2 - y^2 - z^2) = 0$$

La matrice des vecteurs propres  $T$  est orthogonale et constante pour  $\forall \mathbf{a}$ .

$$T = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \mu & \mu \\ y\sqrt{2} & -z & z \\ -z\sqrt{2} & y & -y \end{bmatrix}$$

Correspondant à la matrice diagonale des valeurs propres :  $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ .

### -- Changement de base près de $\mathbf{0}$

- Calculons  $H_n(\mathbf{y})$  dans la base des vecteurs propres comme des polynômes d'Hermite.

Comme  $T$  est orthogonale, sa transposée  $T'$  est son inverse:  $T' = T^{-1}$ .

Donc, l'application  $\mathbf{u} = T\mathbf{a}$  avec  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  transforme :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}f(\mathbf{a}) &\mapsto G(\mathbf{u}) = \mathbf{y}f(T'\mathbf{u}) \\ Q(\mathbf{a}) &\mapsto Q(T'\mathbf{u}) = \delta\mu(w^2 - v^2) \\ L(\mathbf{a}) &\mapsto LT'\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Dans la base  $\mathbf{u}$ , la fonction  $\mathbf{y}f(T'\mathbf{u}) = G(\mathbf{u})$  se factorise en trois fonctions indépendantes :

$$G(\mathbf{u}) = g_1(u) + g_2(v) + g_3(w)$$

avec:  $g_1(u) = l_1 u$ ;  $g_2(v) = l_2 v - \delta\mu v^2$ ;  $g_3(w) = l_3 w + \delta\mu w^2$ .

où:  $l_1 = (\delta\sigma x + y(1 - \delta) + z(1 - \delta\beta)) / \sqrt{2}$

$$l_2 = (x - \delta\sigma x + \delta\rho y)y / \mu - (\delta\sigma x + y(1 - \delta)) - z(1 - \delta\beta)z / \mu \sqrt{2}$$

$$l_3 = (x - \delta\sigma x + \delta\rho y)z/\mu + (\delta\sigma x + y(1 - \delta)) - z(1 - \delta\beta) y/\mu \sqrt{2}$$

- Pour calculer  $l_1, l_2$  et  $l_3$ , on forme :

$$L(\mathbf{a}) = a(x - \delta\sigma x + \delta\rho y) + b(\delta\sigma x + y(1 - \delta)) + zc(1 - \delta\beta)$$

avec:

$$L_1 = x(1 - \delta\sigma) + \delta\rho y ; L_2 = \delta\sigma x + y(1 - \delta) ; L_3 = z(1 - \delta\beta)$$

Donc:

$$l\mathbf{u} = (l_1, l_2, l_3)\mathbf{u} = LT'\mathbf{u} = (L_1, L_2, L_3) \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & y\sqrt{2} & z\sqrt{2} \\ \mu & -z & y \\ \mu & z & -y \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

- On obtient 3 itérations indépendantes :

. la première itération  $g_1$  est linéaire ;

. la second  $g_2$  est aléatoire;

. la troisième  $g_3$  reste positive, sauf si  $l_3 = 0$  la moitié du temps.

- Soit l'écart résolvant :  $e^n(\mathbf{y}) = \partial(\partial^n(e^{yf(\mathbf{a})})/\partial\mathbf{a}^n)\partial\delta|_{\mathbf{a}=0} = 0$

Pour  $\forall t \leq \delta$ , en posant  $\mathbf{a} = T'\mathbf{u}$ , on a :

$$e^n(\mathbf{u}) = T^n \partial(\partial^n(e^{yf(T'\mathbf{u})})/\partial\mathbf{u}^n)\partial\delta|_{\mathbf{u}=0} = 0$$

$$\partial^n(e^{yf(T'\mathbf{u})})/\partial\mathbf{u}^n = \partial^n(e^{g_1(u)})/\partial u^n \cdot \partial^n(e^{g_2(v)})/\partial v^n \cdot \partial^n(e^{g_3(w)})/\partial w^n.$$

Ce qui donne :

$$\partial^n(e^{g_1(u)})/\partial u^n = l_1^n e^{g_1(u)}$$

$$\partial^n(e^{g_2(v)})/\partial v^n = H_n(g_2(v))e^{g_2(v)}$$

$$\partial^n(e^{g_3(w)})/\partial w^n = H_n(g_3(w))e^{g_3(w)}$$

Et :

$$e^n(\mathbf{u}) = \partial l_1^n H_n(g_2(v)) H_n(g_3(w)) (e^{yf(T'\mathbf{u})}) \partial\delta|_{\mathbf{u}=0} = 0.$$

### Proposition

La solution autour du point fixe  $\mathbf{0}$  consiste en l'intersection des familles de surfaces aléatoires définies par:  $l_2/2\sqrt{\mu} \mapsto$  loi  $\beta(1/2, 1/2)$

Avec les surfaces  $\sigma x - y - z\beta = 0$  et  $(-\sigma x + \rho y)z + (\sigma x - y + z\beta) y/\sqrt{2} = 0$ .

■ avec les mêmes calculs et en échangeant les dérivations, on a :

$$\partial l_1^n / \partial\delta = 0; \partial H_n(g_2(v)) / \partial\delta = 0; \partial H_n(g_3(w)) / \partial\delta = 0.$$

On étudie séparément les trois expressions :

- Premièrement :  $\partial l_1^n / \partial\delta = n(\partial l_1 / \partial\delta) l_1^{n-1} = 0.$

et :  $\partial l_1 / \partial\delta = \sigma x - y - z\beta = 0$ , ou:  $l_1 \sim (y + z)/\sqrt{2} = 0$

- Deuxièmement : le polynôme  $H_n(g_3(w))$  quand  $w = 0$  ; c'est un polynôme d'Hermite  $H_n(x)$

où  $x = il_3/(\sqrt{2\delta\mu})$ . Ce polynôme  $i^n H_n(il_3/(\sqrt{2\delta\mu}))$  est toujours positif :

$$\partial H_n(x) / \partial\delta = n H_{n-1}(x) \partial x / \partial\delta = 0 ; \text{ donc: } d(l_3/\sqrt{2\delta\mu}) / d\delta = 0,$$

et  $l_3 \sim (xz\sqrt{2} + (y-z)y)/\mu\sqrt{2} = 0$ .

- troisièmement : pour  $H_n(g_2(w))$ , outre la solution  $l_2 = 0$ , on doit trouver la distribution

invariante de  $H_n(l_2/\sqrt{2\delta\mu}) = 0$ .

Soit l'intégrande :  $n\gamma(w) = g_2(w) - n \ln w.$

quand  $\delta \rightarrow 0$ ,  $l_2 \sim (x y\sqrt{2} + (y-z)z) / \sqrt{2}\mu$  avec  $\mu = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

La normalisation of the coordonnées  $\mathbf{x} = (x, y, z) = \delta \mathbf{ns} = (\delta nr, \delta ns, \delta nt)$ , donne :

$$l_2 \sim n\delta(rs\sqrt{2} + (s-t)t) / 2(s^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} = n\delta l_2(\mathbf{s}),$$

$$\delta\mu = n\delta^2(s^2 + t^2)^{1/2} = n\delta^2 \mu(\mathbf{s}),$$

$$n\gamma(v) = n(\delta l_2(\mathbf{s})v - \mu(\mathbf{s})(\delta v)^2 - \ln \delta v + \ln \delta)$$

posons  $\delta v = v$  :

$$n\gamma(v) = n(l_2(\mathbf{s})v - \mu(\mathbf{s})v^2 - \ln v).$$

Dont le point critique :

$$d\gamma(v)/dv = l_2(\mathbf{s}) - 2\mu(\mathbf{s})v - 1/v = 0$$

Les racines imaginaires sont:  $v(\mathbf{s}) = l_2(\mathbf{s})/4\mu(\mathbf{s}) \pm i\sqrt{1/2\mu(\mathbf{s}) - l_2(\mathbf{s})^2/16\mu(\mathbf{s})^2}$ .

Sous la condition :

$$l_2(\mathbf{s})^2 < 8\mu(\mathbf{s}):$$

$$l_3 \sim (rt\sqrt{2} + (s-t)s)/\mu(\mathbf{s})\sqrt{2} = 0 \text{ une fois sur deux,}$$

Implique :  $l_2(s) = -(s-t)^2 / \sqrt{2}(s^2+t^2)^{1/2}$

la condition devient :  $(s-t)^4 / (s^2+t^2)^{3/2} < 16$

$l_1 = 0$  implique :  $s+t=0$ , donc:  $s < 8$ .

Les conditions  $l_3 = l_1 = 0$  permettent d'exprimer  $r$  et  $t$  en fonction de  $s$  et d'écrire que la densité de zéros de  $s$  est:

$$q(s)ds = \text{Prob}(1 \text{ zéro entre } s, s+ds) = |\Im m f(v(s))| ds / \pi$$

$$q(s)ds = l_2(s) \sqrt{8\mu(s) - l_2(s)^2} / 8\pi\mu(s) ds = d\kappa.$$

$\kappa$  suit une loi uniforme sur  $(0,1)$  avec:  $s+t=0$  (ou  $r: \sigma x - y - z\beta = 0$ ) et :  $x y \sqrt{2} + (y-z) z = 0$ .

La normalisation n'affecte pas les coefficients de la matrice orthogonale :

$$T(x, y, z) = T(\delta nr, n\delta s, n\delta t) = T(r, s, t). \blacksquare$$

### -- Analyse au voisinage de $\alpha_+$ et de $\alpha_-$

On cherche les distributions autour des points fixes  $\alpha_+$  and  $\alpha_-$ .

Pour passer du point fixe  $\mathbf{0}$  au point fixe  $\alpha_+$  ou  $\alpha_-$ , on remplace l'itération  $\mathbf{a} = (a, b, c)$  en :  $\mathbf{a}' + \alpha_+ = (a' + \alpha, b' + \alpha, c' + \alpha^2/\beta)$  ou  $\mathbf{a}'' + \alpha_- = (a'' - \alpha, b'' - \alpha, c'' + \alpha^2/\beta)$ .

- Calcul pour  $\alpha_+$

En  $\mathbf{a}' + \alpha_+ = \mathbf{a}$ ;  $\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}' + \alpha_+$  et  $\mathbf{a}_1 = f(\mathbf{a})$  où  $\mathbf{a}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  devient :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}'_1 + \alpha_+ = f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}' + \alpha_+);$$

C'est-à-dire :  $\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}' + \delta F(\mathbf{a}' + \alpha_+)$ .

Comme :  $F(\mathbf{a}) = (\sigma(b-a), (\rho a - b - ac), (-\beta c + ab))$

$\mathbf{a}_1 = f(\mathbf{a})$  devient pour  $\mathbf{a} + \alpha_+$ :

$$a'_1 = a + \delta\sigma(b-a) = a_1$$

$$b'_1 = b + \delta(\rho a - b - ac) + \delta(-\alpha c - \alpha^2/\beta) = b_1 + \delta(-\alpha c - \alpha^2/\beta)$$

$$c'_1 = c + \delta(-\beta c + ab) + \delta\alpha(a+b) = c_1 + \delta\alpha(a+b)$$

La projection de  $f(\mathbf{a})$  sur  $\mathbf{y} = (x, y, z)$  s'écrit :

$$\mathbf{y} f(\mathbf{a}') = x a_1 + y b_1 + \delta y(-\alpha c - \alpha^2/\beta) + z c_1 + z \delta \alpha(a+b)$$

$$\mathbf{y} f(\mathbf{a}') = \mathbf{y} f(\mathbf{a}) + \delta(a(z\alpha - y\alpha^2/\beta) + z\alpha b - y\alpha c)$$

Et  $Q(\mathbf{a})$  est invariant :  $\mathbf{y} f(\mathbf{a}') = L'(\mathbf{a}) + \delta Q(\mathbf{a})$

$L(\mathbf{a})$  est linéaire en  $\mathbf{a}$ :  $L'(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}) + \delta(a(z\alpha - y\alpha^2/\beta) + z\alpha b - y\alpha c)$

$$L'(\mathbf{a}) = aL'_1 + bL'_2 + cL'_3$$

Avec :  $L'_1 = L_1 + \delta(z\alpha - y\alpha^2/\beta)$ ;  $L'_2 = L_2 + \delta z\alpha$ ;  $L'_3 = L_3 - \delta y\alpha$ .

$T$  et  $\Lambda$  restent invariants. La suite est un simple calcul.

On calcule  $l'_1, l'_2$  et  $l'_3$ , avec :

$$L(\mathbf{a}) = a(x - \delta\sigma x + \delta\rho y) + b(\delta\sigma x + y(1-\delta)) + zc(1-\delta\beta) :$$

$$L(\mathbf{a}) = aL_1 + bL_2 + cL_3$$

Où  $L_1 = x(1-\delta\sigma) + \delta\rho y$ ;  $L_2 = \delta\sigma x + y(1-\delta)$ ;  $L_3 = z(1-\delta\beta)$

Et :  $l'u = (l'_1, l'_2, l'_3)u = LT^p u$

$$= (L_1 + \delta(z\alpha - y\alpha^2/\beta), L_2 + \delta z\alpha, L_3 - \delta y\alpha) \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & y\sqrt{2} & z\sqrt{2} \\ \mu & -z & y \\ \mu & z & -y \end{bmatrix}.$$

Les résultats sont modifiés ; si  $l = (l_1, l_2, l_3)$  est relatif à 0 et  $l' = (l'_1, l'_2, l'_3)$  à  $\alpha_+$

$$l'_1 = l_1 + \delta\alpha(z-y)/\sqrt{2}$$

$$l'_2 = l_2 + \delta\alpha((z-y\alpha/\beta)y\sqrt{2} - z(z+y))/\mu\sqrt{2}$$

$$l'_3 = l_3 + \delta\alpha((z-y\alpha/\beta)z\sqrt{2} + y(z+y))/\mu\sqrt{2}$$

Les calculs suivants restent les mêmes avec ces modifications.

- Calcul en  $\alpha_-$

Quand  $\mathbf{a}$  devient  $\mathbf{a}'' + \alpha_-$  le calcul est le même avec les coordonnées :

$$a''_1 = a + \delta\sigma(b-a) = a_1$$

$$b''_1 = b + \delta(\rho a - b - ac) + \delta(ac - a\alpha^2/\beta) = b_1 + \delta(ac - a\alpha^2/\beta)$$

$$c''_1 = c + \delta(-\beta c + ab) - \delta\alpha(a+b) = c_1 - \delta\alpha(a+b).$$

Restent les problèmes de domination et de frontières entre les diverses distributions attachées à chaque point fixe.

#### 4- L'attracteur de Rössler

Les vecteurs de cette équation sont écrits en gras  $\mathbf{a} = (a, b, c)$ :

$$\begin{aligned} da/dt &= -(b + c) \\ db/dt &= a + \sigma b \\ dc/dt &= \beta + c(a - \rho). \end{aligned}$$

L'équation différentielle applique un ensemble borné C (comme cas particulier de l'attracteur de Lorenz qui modélise l'atmosphère comprise entre une sphère à  $-50^\circ$  et une sphère chaude, la terre, à  $+15^\circ$ ). L'itération différentielle associée pour un pas donné  $\delta = t/n$  est :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= f(\mathbf{a}) \\ a_1 &= a - \delta(b + c) \\ b_1 &= b + \delta(a + \sigma b) \\ c_1 &= c + \delta(\beta + c(a - \rho)). \end{aligned}$$

L'itération est quadratique en  $c$ , mais présente deux linéarités en  $a$  et  $b$ .

Les points fixes sont les zéros de  $F(\mathbf{a})=0$ .

Si  $c=\tau$  est la coordonnée du point fixe :  $b=-\tau$ ,  $a = \sigma \tau$  et l'on a :  $\beta + \tau(\sigma \tau - \rho) = 0$  ; dont les

solutions sont :

$$\tau = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\sigma\beta}}{2\sigma} \approx (\rho \pm (\rho - 2\sigma\beta/\rho))/2\sigma$$

Si l'on prend  $\sigma \leq \beta \ll \rho$ . Il existe donc deux points fixes de coordonnées :  $\boldsymbol{\tau} = (\sigma \tau, -\tau, \tau)$  et  $\boldsymbol{\tau}' = (\sigma \tau', -\tau', \tau')$ .

Rapportée au point fixe  $\boldsymbol{\tau}$ , l'itération devient avec  $\alpha = \sigma \tau + \rho$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a} + \delta F(\mathbf{a}): \\ a_1 &= a - \delta(b + c) \\ b_1 &= b + \delta(a + \sigma b) \\ c_1 &= c + \delta(\tau a + c(a - \alpha)). \end{aligned}$$

$$\partial F(\mathbf{a})/\partial \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \sigma & 0 \\ \tau + c & 0 & a - \alpha \end{bmatrix} \text{ et au point fixe } \boldsymbol{\tau} : \quad \partial F(\boldsymbol{\tau})/\partial \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \sigma & 0 \\ 2\tau & 0 & -\rho \end{bmatrix}$$

d'équation caractéristique :  $-\lambda^3 + (\sigma - \rho)\lambda^2 + (\sigma\rho - 1 - 2\tau)\lambda + 2\tau\sigma - \rho = 0$

Formons la fonction de PR :  $\gamma(\mathbf{a}) = \mathbf{y}f(\mathbf{a}) - n \ln(\mathbf{a})$  avec  $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\gamma(\mathbf{a}) = x(a - \delta(b + c)) + y(b + \delta(a + \sigma b)) + z(c + \delta(\tau a + c(a - \alpha))) - n \ln(\mathbf{a})$$

$$\gamma(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}) + \delta Q(\mathbf{a})/2 - n \ln(\mathbf{a})$$

Avec  $Q(\mathbf{a}) = 2z c a$  et  $L(\mathbf{a}) = x(a - \delta(b + c)) + y(b + \delta(a + \sigma b)) + z(c + \delta(\tau a - c\alpha))$

$L(\mathbf{a})$  est linéaire en  $\mathbf{a}$  ( $x + \delta y + \delta \tau z, -x\delta + y(1 + \delta\sigma), -x\delta + z - z\delta\alpha$ )

$$L(\mathbf{a}) = (a, b, c) \begin{bmatrix} 1 & \delta & \delta \tau \\ -\delta & (1 + \delta\sigma) & 0 \\ -\delta & 0 & 1 - \delta\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

et  $Q(\mathbf{a}) = 2z c a$  est quadratique symétrique de matrice :

On laisse la linéarité en  $b$  que l'on traitera à part car :

$$H_n(x, y, z) = \frac{\partial^{3n} e^{\gamma(\mathbf{a})}}{\partial a^n \partial b^n \partial c^n} \Big|_{\mathbf{a}=0} = (-x\delta + y(1 + \delta\sigma))^n \frac{\partial^{2n} e^{\gamma(\mathbf{a}, c)}}{\partial a^n \partial c^n} \Big|_{\mathbf{a}, c=0} = 0$$

Et 
$$Q(\mathbf{a}) = (a, c) \begin{bmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont  $\lambda = z, \lambda = -z$  avec la matrice orthogonale des vecteurs propres :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour la matrice diagonale } D = \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

La suite est comme pour l'attracteur de Lorenz en plus simple.

### 5- Les équations d'Hamilton dans $C \subset \mathbb{R}^d$ .

En gardant les notations de la mécanique classique des systèmes autonomes :

$$dp/dt = -\partial H(p, q)/\partial q,$$

$$dq/dt = \partial H(p, q)/\partial p.$$

Ces équations réalisent une application de  $\mathbb{R}^{2d}$  dans  $\mathbb{R}^{2d}$  quand l'hamiltonien  $H$  est autonome, c'est-à-dire quand il ne dépend pas du temps  $t$ .

Associés à :  $F = (-\partial H(p, q)/\partial q, \partial H(p, q)/\partial p)$ ,

l'itération :  $f_\delta(a) = a + \delta F(a)$  avec  $a = (p, q)$ ,

et supposons qu'elle applique un compact  $C \subset \mathbb{R}^{2d}$  dans  $C$  pour tout  $\delta > 0$  petit, avec  $\delta = t/n, n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}^+$ .

Il faut d'abord rechercher les points fixes (de Lagrange) définis par :

$$\partial H(p, q)/\partial p = 0,$$

et :  $\partial H(p, q)/\partial q = 0,$

Soit la matrice jacobienne :

$$[\partial F/\partial p, \partial F/\partial q] = \partial^2 H = \begin{bmatrix} -\partial^2 H/\partial p \partial q & -\partial^2 H/\partial q^2 \\ \partial^2 H/\partial p^2 & \partial^2 H/\partial p \partial q \end{bmatrix},$$

Et soit la matrice antisymétrique réelle ( $2d \times 2d$ ) :  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}$ . On remarque :

$$\partial^2 H \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial^2 H/\partial q^2 & -\partial^2 H/\partial p \partial q \\ -\partial^2 H/\partial p \partial q & \partial^2 H/\partial p^2 \end{bmatrix};$$

qui est symétrique. Puis, il faut calculer les valeurs propres de la partie linéaire de la fonction  $F$  au voisinage de ces points fixes, en posant  $I$  la matrice identité de  $\mathbb{R}^d$  et en annulant le déterminant formé des 4 blocs  $d \times d$  :  $J(\lambda) = |\partial^2 H - \lambda I|$ .

On peut rechercher une mesure invariante dont le support pourra donner des indications sur le domaine où évolue l'itération. Soit la fonction de Plancherel-Rotach relative à  $f_\delta(a)$  supposée rapportée à un point fixe :

$$\gamma(p, q, \delta) = xp + yq - x\delta \partial H/\partial q + y\delta \partial H/\partial p - n \ln p - n \ln q$$

La densité invariante devra être recherchée parmi points critiques imaginaires :

$$\partial \gamma/\partial p = x - x\delta \partial^2 H/\partial p \partial q + y\delta \partial^2 H/\partial p^2 - n/p = 0$$

$$\partial \gamma/\partial q = y - x\delta \partial^2 H/\partial q^2 + y\delta \partial^2 H/\partial p \partial q - n/q = 0$$

Si on note  $\mathbf{s} = (x/n, y/n)$ ,  $\mathbf{t} = (y/n, -x/n)$ , On remarque que  $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ . Si  $1/P = (1/p, 1/q)$ , et si :

$$\partial^2(H) = \begin{bmatrix} \partial^2 H/\partial p^2 & \partial^2 H/\partial p \partial q \\ \partial^2 H/\partial p \partial q & \partial^2 H/\partial q^2 \end{bmatrix}.$$

On a :  $1/P = \delta \partial^2(H) \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{s}$ .

Puisque  $\partial^2(H)$  est symétrique, une transformation orthogonale  $O$  diagonalise  $\partial^2(H)$  avec des valeurs propres  $\mu I$  toutes réelles. On aura :

$$O(1/P) = \delta \mu I O \mathbf{A}\mathbf{s} + O(\mathbf{s}),$$

$\mu I$ ,  $\delta$ ,  $O$ ,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{A}\mathbf{s}$  sont réels, donc  $P$  est réel : sauf dégénérescence, il ne peut y avoir en général que des comportements déterministes. Dans les systèmes non autonomes  $H = H(p, q, t)$ , on introduit une linéarité en  $t$ , donc une dégénérescence.

### 6- Les ensembles de Fatou-Julia

Soit l'application d'un ensemble de  $C \subset \mathbb{C}$  dans  $C$  borné :

$$z_1 = f(z) = az + z^m/m, m \geq 1.$$

On traite la question directement dans  $\mathbb{C}$ .  $\alpha \in \mathbb{C}$  sauf mention précise. La méthode de la plus grande pente s'applique encore. Mais tout est plus difficile. La question se pose de savoir sous

quelles conditions l'ensemble  $C$  reste borné. Bien qu'extrêmement importante, elle ne sera pas complètement traitée. Il s'agit ici de calculs formels.

Les points fixes sont :  $z_0=0$  et  $z_{m0} = ((1 - \alpha)m)^{1/(m-1)}$ .

Les multiplicateurs en 0 sont :  $\lambda_0 = \alpha$  et en  $z_{m0} : \lambda_{m0} = \alpha + m(1 - \alpha)$ ,

Remarquons la grande diversité des situations : Dans  $\mathbb{R}$ ,  $z_1 = f(-z) = \alpha z + z^2/2$  n'a pas de distribution de probabilité. Mais si on change  $z$  en  $-z$ , on obtient  $-z_1 = f(-z) = -\alpha z + z^2/2$  qui devient probabilisable. Il faut donc, le cas échéant, changer  $z_1 = f(z)$  en  $-z_1 = f(-z)$ .

Si  $\alpha \in \mathbb{C}$ , posons  $\alpha = re^{i\sigma}$  et  $z = \rho e^{i\vartheta}$  et pour alléger l'écriture, on pose  $\vartheta + \sigma = \omega$ . Les raisonnements précédents doivent être vérifiés.

### - Étude en 0

La fonction de Plancherel-Rotach est en 0 :  $\gamma(z)=s(\alpha z + z^m/m) - \ln z$ , dont les points critiques sont donnés par :  $\partial\gamma/\partial z = s\alpha + sz^{m-1} - 1=0$ . Ici,  $s \in \mathbb{R}$  peut être négatif. Si  $z \in \mathbb{R}$ , le point critique  $z$  est défini par l'équation trinominale étudiée par H. Fell.

Reprenons la situation générale. La distribution de probabilité de  $s$  est fournie, avec  $\chi$  uniforme sur  $(0,1)$ , par :

$$\begin{aligned} \pi d\chi &= \Im(f(z))ds = \Im(\alpha z + z^m/m)ds, \\ \text{comme :} \quad \Im(\partial\gamma/\partial z) &= \Im(\alpha z + z^m) = 0, \\ \pi d\chi &= (m-1)/m \Im(\alpha z)ds. \end{aligned}$$

$$\text{On a :} \quad \partial\gamma/\partial z = sre^{i\omega} + s\rho^m e^{im\vartheta} - 1 = 0.$$

Donc,  $\Im(\partial\gamma/\partial z) = \Im(\alpha z + z^m) = 0$  devient :

$$r\sin(\omega) + \rho^{m-1} \sin m\vartheta = 0.$$

$$\text{Donc} \quad \rho^{m-1} = -r\sin(\omega) / \sin m\vartheta.$$

Cette relation permet d'exprimer  $\rho$  en fonction de  $\vartheta$ . Il faut naturellement que :

$$|\rho^{m-1} \sin m\vartheta| \leq r \text{ et } \sin(\omega) \sin m\vartheta < 0.$$

$$\text{De même :} \quad s\Re(\alpha z + z^m) = 1,$$

$$s\rho(r\cos(\omega) + \rho^{m-1} \cos m\vartheta) = 1,$$

$$\text{Donc} \quad spr(\cos(\omega) \sin m\vartheta - \sin(\omega) \cos m\vartheta) = \sin m\vartheta,$$

$$\text{Et} \quad spr = \sin m\vartheta / \sin(m\vartheta - \omega)$$

En prenant la dérivée logarithmique par rapport à  $\vartheta$  :

$$s'/s = -\rho'/\rho - (m-1)\cotg(m\vartheta - \omega) + m\cotg m\vartheta.$$

$$\text{Comme} \quad \cotg(m\vartheta - \omega) - \cotg m\vartheta = -\sin m\vartheta / \sin\omega \sin(m\vartheta - \omega),$$

$$S = s'/s = (-\rho'/\rho - (\cos(m\vartheta - \omega)\sin\omega + m \sin m\vartheta) / \sin\omega \sin(m\vartheta - \omega)).$$

$$\text{Or} \quad -\rho'/\rho = (m\cotg m\vartheta + \cotg(\omega)) / (m-1)$$

$$-\rho'/\rho = (m\cos m\vartheta \sin\omega + \cos(\omega) \sin m\vartheta) / (m-1)\sin\omega \sin(m\vartheta - \omega).$$

Donc, en posant :

$$T = m \cos m\vartheta \sin\omega + \cos(\omega) \sin m\vartheta - (m-1)(\cos(m\vartheta - \omega)\sin\omega + m(m-1) \sin m\vartheta)$$

$$S = T / (m-1)\sin\omega \sin(m\vartheta - \omega).$$

On exprime  $\Im(s\alpha z) = spr\sin(\omega) = \sin(\omega) \sin m\vartheta / \sin(m\vartheta - \omega)$  et  $ds$  en fonction de  $\vartheta$  pour avoir la loi de  $\vartheta$  en fonction du vecteur aléatoire uniforme  $\chi$ .

$$\pi d\chi = T \sin m\vartheta / m \sin(m\vartheta - \omega)^2 d\vartheta.$$

S'agissant des cycles, c'est très compliqué. Par exemple  $\Im\alpha = \Im re^{i\sigma}$ , et tous les points cycliques peuvent annuler  $H_n(y)$ .

Si, maintenant on itère  $k$  fois  $z$ , on doit considérer l'équation :

$$\partial f(u)/\partial u|_{u=f(a)} \mathbf{s} = \mu \mathbf{s},$$

$$\text{Et étudier } \mu. \text{ Ici :} \quad \partial f(u)/\partial u|_{u=f(a)} = \alpha + (z\alpha + z^m/m)^{m-1},$$

$$\text{Et} \quad \mu = \Re(\alpha + (\alpha z + z^m/m)^{m-1})$$

La séparation entre la convergence et la divergence de  $\mu^k$  est donnée par la condition

$$|\mu| = |\alpha + (\alpha z + z^m/m)^{m-1}| = 1.$$



Il faut de plus :  $\Im(\mu^n) = 0$ .

**- Étude en  $z_{m0}$**

Notons d'abord qu'il y a  $m$  points  $z_{m0}$  définis à  $e^{i2k\pi/m}$  près.

Il suffit alors de translater les raisonnements en ces points. La nouveauté est le domaine de domination attaché à chaque point fixe qui, chacun, a sa zone d'influence :  $(0, z_{m0})$ .

Si  $\gamma_0$  est la fonction de Plancherel-Rotach en 0 et  $\gamma_{m0}$  en  $z_{m0}$ , la relation de domination sera donnée par la comparaison des parties réelles de ces fonctions. Par exemple, le domaine de 0 est fourni par :

$$\Re(\gamma_0) > \Re(\gamma_{m0}).$$

- Si  $m = 2$ , si  $0 > \alpha \in \mathbb{R}$ , on retrouve la logistique dans le cas où  $(s\alpha)^2 + 4s < 0$  ; il faut donc prendre  $-4/\alpha^2 < s < 0$

Si  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on pose :  $\alpha = re^{i\sigma}$  et  $z = \rho e^{i\vartheta}$ .

Les points critiques sont donnés par :  $\partial\gamma/\partial z = s\alpha + sz^2 - 1 = 0$ . En séparant la partie réelle et la partie imaginaire :

La partie imaginaire  $\rho \sin(2\vartheta) = -r \sin(\sigma + \vartheta)$ ,

Et  $\rho$  prend une forme plus simple  $\rho = -r \sin(\sigma + \vartheta) / \sin(2\vartheta)$ .

La partie réelle  $s \rho (r \cos(\sigma + \vartheta) + \rho \cos(2\vartheta)) = 1$ .

Mais :  $sr \rho (\cos(\sigma + \vartheta) \sin(2\vartheta) - \sin(\sigma + \vartheta) \cos(2\vartheta)) = \sin(2\vartheta)$ ,

$$sr \rho \sin(\vartheta - \sigma) = \sin(2\vartheta),$$

$$s = -\sin(2\vartheta)^2 / (r^2 \sin(\vartheta - \sigma) \sin(\sigma + \vartheta)).$$

Par ailleurs :  $\Im(\alpha z/2) = r \rho \sin(\sigma + \vartheta) / 2 = -r^2 \sin(\sigma + \vartheta)^2 / 2 \sin(2\vartheta)$ .

La distribution de probabilité de  $s$  est alors :

$$\pi d\chi = \Im(\alpha z/2) ds = -r^2 \sin(\sigma + \vartheta)^2 / 2 \sin(2\vartheta) ds.$$

- On préférera calculer  $z$  en fonction de  $s$  avec  $\partial\gamma/\partial z = s\alpha + sz^2 - 1 = 0$ .

$$z = (-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4/s}) / 2.$$

Il suffit alors de calculer  $\sqrt{\alpha^2 + 4/s}$  dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $\alpha = re^{i\sigma}$ , on écrit :

$$\sqrt{\alpha^2 + 4/s} = \sqrt{r^2 (\cos 2\sigma + i \sin 2\sigma) + 4/s}.$$

Or :  $r^2 (\cos 2\sigma + i \sin 2\sigma) + 4/s = (r^2 \cos 2\sigma + 4/s) + i r^2 \sin 2\sigma$ .

On prend le module  $N$  de ce nombre complexe, en posant  $c = r^2 \cos 2\sigma + 4/s$  :

$$N = \sqrt{c^2 + (r^2 \sin 2\sigma)^2}.$$

Soit la fonction  $\varepsilon = \text{sgn}(\sin 2\sigma)$  est le signe de  $\sin 2\sigma$ . Donc :

$$\sqrt{\alpha^2 + 4/s} = \pm (\sqrt{(N+c)/2} + i \varepsilon \sqrt{(N-c)/2}).$$

On en déduit :  $z = (-\alpha \pm (\sqrt{(N+c)/2} + i \varepsilon \sqrt{(N-c)/2})) / 2$ ,

Donc  $\Re(z) = (-r \cos \sigma \pm (\sqrt{(N+c)/2}) / 2$ ,

Et  $\Im(z) = (-r \sin \sigma \pm \varepsilon \sqrt{(N-c)/2}) / 2$ ,

Enfin :  $\Im(\alpha z/2) = (1/2) (r \cos \sigma \Im(z) + r \sin \sigma \Re(z))$ .

$$\pi d\chi = (1/2) (r \cos \sigma \Im(z) + r \sin \sigma \Re(z)) ds.$$

C'est ensuite un exercice élémentaire d'intégrer ces radicaux. Cependant, on rencontre une bien plus grande difficulté d'étude par rapport au cas  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On peut alors étudier les bifurcations qui se produisent quand  $\sigma$  varie.

- Examinons l'effet des itérations sur l'évolution de la distribution.

Si, maintenant on itère  $n$  fois  $z$ , on doit considérer l'équation d'évolution :

$$\partial f(u) / \partial u |_{u=f(a)} \mathbf{s} = \Re(\mu) \mathbf{s},$$

où :  $\mu = \partial f(u) / \partial u |_{u=f(a)} = \alpha + z\alpha + z^2/2$ ,

Posons :  $\alpha = re^{i\sigma}$  et  $z = \rho e^{i\vartheta}$  avec :  $\rho = -r \sin(\sigma + \vartheta) / \sin(2\vartheta) \geq 0$ .

Donc  $\mu = r e^{i\sigma} - r^2 e^{i(\sigma+\vartheta)} \sin(\sigma + \vartheta) / \sin(2\vartheta) + (r \sin(\sigma + \vartheta) / \sin(2\vartheta))^2 e^{i2(\sigma+\vartheta)} / 2$ .

La séparation entre la convergence et la divergence de  $\mu^n$  est donnée par la condition  $|\operatorname{Re}(\mu)| = 1$  car il faut de plus que  $\Im(\mu^n) = 0$ .

$$\Im(\mu) = \sin\sigma - r(1 - \sin 2(\sigma + \vartheta) / 2 \sin(2\vartheta)) \sin(\sigma + \vartheta)^2 / \sin(2\vartheta) = 0.$$

Quand  $n \rightarrow \infty$ , soit  $\psi$  uniforme sur  $(0, 1)$  et l'on peut écrire :  $\operatorname{Arg}(\mu) = \pi\psi$ .

- **Si  $m = 3$** , on obtient des dérivées de la fonction d'Airy en prenant la fonction caractéristique pour  $z \in \mathbb{R}$ . On a la bifurcation de Hopf pour  $f_\delta(z) = z + z\delta(\alpha - z^3)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Prenons ici  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On cherche les distributions de probabilité pour  $f(z) = -\alpha z + z^3/3$ .

Si  $f(z) = -\alpha z + z^3/3$ , le point critique est alors défini par l'équation du 3<sup>ième</sup> degré :

$$\partial\gamma/\partial z = z^3 - \alpha z - 1/s = 0$$

Dans la formule de Cardan  $z^3 + pz + q = 0$ , on cherche les deux solutions imaginaires avec  $p = -\alpha$  et  $q = -1/s$ . Le discriminant doit alors être négatif :  $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$ .

Si  $\alpha > 0$ ,  $p < 0$  et on pose:  $\rho = \sqrt{\alpha/3}$  et  $-q = \frac{1}{s} = 2\rho^3 \cos \vartheta$ .

Donc :  $z = \rho e^{i(\vartheta+2k\pi/3)}$  avec  $\Im(z) = \rho \sin\left(\vartheta + \frac{2k\pi}{3}\right)$ ,

et :  $ds = -\sin \vartheta / (2\rho^3 \cos \vartheta^2) dt$ .

Or :  $\pi d\chi = -(m-1)/m \Im(\alpha z) ds$ ,

$$\pi d\chi = -2\rho^2 \Im(z) ds = -2\rho^3 \sin\left(\vartheta + \frac{2k\pi}{3}\right) ds.$$

$$d\chi = (1/\pi) \sin\left(\vartheta + \frac{2k\pi}{3}\right) (\sin \vartheta / \cos \vartheta^2) d\vartheta.$$

Qui s'intègre facilement. On peut également exprimer cette équation en  $s$  avec des radicaux.

Si  $\alpha < 0$ , on n'a pas de distribution aléatoire. Si on prend  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on obtiendra des calculs beaucoup plus compliqués. Ici encore, il faut déterminer le domaine de convergence de l'itération.

- **Si  $m = 4$** , le cas peut encore être traité, mais il y a deux ou quatre racines conjuguées.

Ces premiers éléments devraient permettre d'aborder certaines parties de la théorie des catastrophes d'un point de vue probabiliste qui fait défaut jusqu'à présent.

## V- Conclusion

Au regard de tous ces exemples, la théorie probabiliste développée ici apporte quelques réponses quantitatives là où les méthodes traditionnelles fondées sur la linéarité montrent leurs limites. En revanche, les linéarités sont ici sources de dégénérescence de la hessienne et induisent des complications. C'est d'ailleurs un phénomène bien connu en mécanique où les mouvements non-autonomes sont plus difficiles à appréhender que les mouvements autonomes. Ce travail exploratoire devrait donc recadrer les limites entre linéarité et probabilisme. Mais il ne faut pas oublier que les solutions probabilistes continues peuvent être occultées par des points fixes ou des cycles. Il faut noter à ce propos que les distributions attachées à ces différents points engendrent une autosimilarité. Si la prédictibilité reste aléatoire, en revanche, la géographie des supports peut alors être mieux définie.

Les techniques utilisées peuvent sans aucun doute être améliorées. De nombreux problèmes ne sont pas abordés ici ou seulement esquissés : les cas de résonance, les situations hyperboliques, les dégénérescences de la hessienne ou lorsque celle-ci n'est pas définie négative. On peut aussi étendre certains résultats aux équations aux dérivées partielles ou aux équations avec décalage, choses que l'on déjà esquissées dans d'autres articles.

## Bibliographie

- Cirier, G. (2017), Les itérations polynomiales bornées dans  $\mathbb{R}^d$ . *Ed. Univ. Europ.*  
(Certaines démonstrations doivent être améliorées).
- Lasota, A. and Mackey, M.C. (1991): Chaos, Fractals and Noise. *Second Ed., Springer-Verlag.*
- Delabaere, E. and Howls C. J, 2002. *Global asymptotics for multiple integrals with boundaries*, Duke Math. J. 112, n° 2 p199-264.
- Plancherel, M. and Rotach, W. (1929), Sur les valeurs asymptotiques des polynômes d'Hermite.... *Commentarii Mathematici Helvetici n 1, p 227 - 254.*
- Ulam, S.M. and von Neumann, J. (1947): On combination of stochastic and deterministic processes. *Bull. 53. AMS, 1120.*
- Lorenz, E. N. (1963), Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci., vol. 20, p. 130-141.*
- Cirier, G. (2022), A probabilistic approach of Poincaré-Bendixon Problem in  $\mathbb{R}^d$ ; *Adv. in pure Mathematics.; vol. 12, 12.*