



HAL
open science

Amnesia

Karim Zayana, Frédéric Brossard

► **To cite this version:**

| Karim Zayana, Frédéric Brossard. Amnesia. Quadrature, 2024, 131. hal-04442654

HAL Id: hal-04442654

<https://hal.science/hal-04442654>

Submitted on 6 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Amnesia

Karim ZAYANA^{1,2} et Frédéric BROSSARD¹

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCl, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

La loi géométrique figure, en classe de terminale, au programme complémentaire [1] ainsi qu'au titre des approfondissements de la spécialité Mathématiques [2]. Son espérance, que seul [1] mentionne, y est cependant admise ; nous verrons pourtant comment l'établir sans le moindre calcul sur les séries. Pour ce faire nous exploiterons la propriété dite d'absence de mémoire qui la caractérise et que nous reverrons au passage.

1 La loi géométrique

Considérons une expérience aléatoire dont l'issue, incertaine, se solde par un succès (événement S) avec une probabilité p ou un échec (événement $E = \bar{S}$) avec la probabilité $1 - p$. Une telle épreuve soumise au hasard et dite de Bernoulli¹ s'observe par exemple :

- au jeu de pile ou face. Quand la pièce est équilibrée, on obtient « pile » avec la probabilité de succès $p = 1/2$;
- au lancer de dé. Quand celui-ci n'est pas pipé, on obtient « 6 » avec la probabilité de succès $p = 1/6$;
- au loto. Quand la grille comporte cinq numéros à cocher sur quarante-neuf et un numéro Chance à choisir parmi dix, on gagne au « premier rang »² avec la probabilité de succès $p = 1/19\,068\,840$.

Qu'on ne s'y trompe pas, les auteurs déconseillent fortement de parier son argent ou sa vie à la roulette [3], pas plus qu'ils ne poussent à une quelconque addiction. Pour la seule cause scientifique, répétons donc notre expérience (typiquement, de lancer de dé) jusqu'à obtenir, le cas échéant, un premier succès (un

1. Jakob BERNOULLI vécut en Suisse au XVII^e siècle et fut le premier d'une lignée de mathématiciens.

2. C'est-à-dire quand toutes les croix sont cochées aux bons endroits. Il est possible de gagner (beaucoup) moins quand l'une d'elle est mal placée :-)

« 6 »). Notons X la variable aléatoire égale au nombre de tentatives qui auront été nécessaires. Ainsi, si pour tirer un « 6 » au dé il a fallu 3 essais, les deux premiers infructueux et le troisième réussi, alors $X = 3$.

Remarquons que le support de X , $\llbracket 1, +\infty \rrbracket$, contient $+\infty$ dans la mesure où, quand on a autant de temps et d'obstination qu'on n'a pas de chance, la partie peut bien s'éterniser.

L'indépendance des expériences réitérées ne va pas de soi. Certaines situations souffrent d'un biais, qui apparaît chemin faisant. C'est le cas au dé. Soit que le lanceur, apprenant de ses erreurs, truque progressivement son geste. Soit qu'à force de tomber d'un mauvais côté, une ou plusieurs des faces se déforment et leurs probabilités associées évoluent.

Ces réserves une fois émises, abritons-nous derrière l'hypothèse, somme toute acceptable, d'indépendance. « Amnésiques », les épreuves ne conservent aucun souvenir du passé. Auquel cas,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X = n\} &= \mathbb{P}\{\underbrace{(E, E, \dots, E, S)}_{n-1 \text{ fois}}\} \\ &= \underbrace{\mathbb{P}\{E\}\mathbb{P}\{E\} \cdots \mathbb{P}\{E\}}_{n-1 \text{ fois}} \mathbb{P}\{S\} \\ &= (1 - p)^{n-1} p. \end{aligned}$$

Ces probabilités sont en progression géométrique (de raison $1 - p$), propriété éponyme de la loi de X .

2 Perte de mémoire et espérance

Savoir que les k premières épreuves ont échoué ne devrait en rien préjuger de la suite, l'indépendance des événements remettant inlassablement les compteurs à zéro. Intuitivement, pour $n \geq k + 1$,

$$\mathbb{P}\{X = n \mid X \geq k + 1\} = \mathbb{P}\{X = n - k\}, \quad (1)$$

ce que nous allons contrôler mathématiquement. Effectivement, par définition d'une probabilité conditionnelle³,

$$\mathbb{P}\{X = n \mid X \geq k + 1\} = \frac{\mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{X \geq k + 1\})}{\mathbb{P}\{X \geq k + 1\}}. \quad (2)$$

Or $\mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{X \geq k + 1\}) = \mathbb{P}\{X = n\}$ car $\{X = n\} \subset \{X \geq k + 1\}$, et $\mathbb{P}\{X \geq k + 1\} = (1 - p)^k$. Soit,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X = n \mid X \geq k + 1\} &= \frac{(1 - p)^{n-1}p}{(1 - p)^k} \\ &= (1 - p)^{n-1-k}p \\ &= \mathbb{P}\{X = n - k\}. \end{aligned}$$

L'absence de mémoire d'une loi X est d'ailleurs consubstantielle de sa nature géométrique. Le fait est, partir ne serait-ce que de l'identité

$$\mathbb{P}\{X = n \mid X \geq 2\} = \mathbb{P}\{X = n - 1\} \quad (3)$$

conduit, en remontant les lignes ci-dessus, à la relation récurrente

$$\mathbb{P}\{X = n\} = \underbrace{\mathbb{P}\{X \geq 2\}}_{\text{cste}} \mathbb{P}\{X = n - 1\}. \quad (4)$$

L'espérance d'une loi géométrique en découle sans difficulté. Distinguons à cet effet les parties gagnées du premier coup des autres et notons X_1 la variable aléatoire parcourant la première famille de parties, X_2 la seconde. Au regard du tout, la première famille représente une proportion p de parties, la seconde $1 - p$. La moyenne totale, $E(X)$, résultera donc de la moyenne partielle $E(X_1)$ coefficientée par p et de la moyenne partielle $E(X_2)$ coefficientée par $1 - p$. Avec ces pondérations⁴,

$$E(X) = pE(X_1) + (1 - p)E(X_2).$$

Ajoutons que :

3. Rappelons à ce propos que la probabilité d'un événement A conditionnellement à l'événement B se note indifféremment $\mathbb{P}(A \mid B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$. La première écriture a l'avantage de suivre l'ordre d'énonciation naturel en français, la seconde de rappeler qu'une probabilité conditionnée demeure une probabilité.

4. En toute rigueur, il conviendrait de manipuler des espérances conditionnelles. Elles sont cependant implicitement portées par les variables X_1 et X_2 .

- invariablement, $X_1 = 1$. Donc $E(X_1) = 1$;
- certes, une partie dont le premier tour est perdant débute du mauvais pied, mais elle reprend sa marche comme si de rien n'était. Aussi X_2 accuse-t-elle juste un retard d'un temps sur la variable générique X . Donc $E(X_2) = 1 + E(X)$.

Ainsi,

$$E(X) = p + (1 - p)(1 + E(X)) \quad (5)$$

d'où

$$E(X) = \frac{1}{p}. \quad (6)$$

Ce résultat semble cohérent :

- quand $p = 1/2$, il faut attendre en moyenne 2 ($= 1/(1/2)$) manches pour l'emporter ;
- quand $p = 1/3$, il faut attendre en moyenne 3 ($= 1/(1/3)$) manches pour l'emporter.

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau), Frédéric BROSSARD est professeur à la cité scolaire Henri Bergson – Jacquard (Paris).

Remerciements

Les auteurs remercient le comité éditorial de la revue Quadrature ainsi que Valérie BORDES et Anne MILLION-ROUSSEAU, inspectrices d'académie – inspectrices pédagogiques régionales de mathématiques pour leurs relectures et échanges autour de ce texte.

Références

- [1] « Programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921265A.htm>.

- [2] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm>.
- [3] Michael CIMINO. *Voyage au bout de l'enfer / The Deer Hunter (scène de la roulette russe)*. EMI, 1978.