



HAL
open science

Fonctions Spéciales et Probabilités

Thomas Simon, Guillaume Bellot, Christophe Louckx

► **To cite this version:**

Thomas Simon, Guillaume Bellot, Christophe Louckx. Fonctions Spéciales et Probabilités. Master. Probabilités et fonctions spéciales, Lille, France. 2023, pp.190. hal-04442303

HAL Id: hal-04442303

<https://hal.science/hal-04442303v1>

Submitted on 6 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Notes de cours
Fonctions Spéciales et Probabilités

SIMON Thomas
BELLOT Guillaume
LOUCKX Christophe

2023

Introduction

De la part de Guillaume BELLOT et Christophe LOUCKX, 2023

Ce présent document constitue une version mise au propre de notes du cours en *Fonctions spéciales et probabilités* dispensé par M. SIMON. Nous avons suivi ce module dans le cadre du M2 Parcours Recherche à l'Université de Lille aux seconds semestres des années universitaires 2021-2022 et 2022-2023.

Pour pouvoir comprendre ces notes, il est nécessaire d'avoir des notions de probabilités et d'analyse complexe. Les énoncés de la première partie de ce cours sont accessibles à un public niveau fin de L3. En effet, aucune référence ne sera faite aux notions de probabilités de M1 que sont l'espérance conditionnelle, les martingales, les chaînes de Markov ... Nous signalons aussi la présence d'analyse fonctionnelle dans certaines démonstrations (qui peuvent être omises en première lecture). Les deuxième et troisième parties ne sont abordables qu'en M2. Par ailleurs, les notations qui risqueraient d'être inconnues du lectorat verront leur signification précisée à leur première apparition.

Nous remercions vivement M. SIMON pour son enseignement. Son cours est d'une grande richesse avec des raisonnements variés, des méthodes de calculs étonnantes, et constitue une introduction à un domaine vaste et aux nombreuses questions encore ouvertes.

Ces notes sont un travail collectif enrichi au fil du temps, ainsi qu'une tentative de retranscription de l'enthousiasme communicatif de notre professeur.

Table des matières

I	Fonctions spéciales et variables aléatoires réelles	7
1	Fonction Γ	9
1.1	Définition et premières propriétés	9
1.2	Loi Bêta	16
1.3	Identités sur la fonction Γ	20
1.3.1	Formule de Gauss	20
1.3.2	Formule de Weierstrass	22
1.3.3	Formule de Malmsten	24
1.3.4	Fonction digamma	26
2	Loi et fonction de Mittag-Leffler	31
2.1	Formule de Legendre-Gauss	31
2.2	Conséquences probabilistes, loi de Mittag-Leffler	33
2.3	Théorème de Bernstein, autre construction de la loi de Mittag-Leffler	37
2.4	Extension fractionnaire de l'exponentielle	40
3	Fonction de Bessel	45
3.1	Définitions et premières propriétés	45
3.1.1	Les cas d'indice entier	45
3.1.2	Cas d'indice non entier	47
3.2	Zéros et factorisation de la fonction de Bessel	47
3.3	Une transformée de Fourier perturbée	50
4	Moments de type Gamma	53
4.1	Infinie divisibilité	53
4.2	Problème des moments Gamma	56
4.2.1	Position du problème, et premières solutions dans certains cas	56

4.2.2	Recherche de la densité dans le cas : c, d vides et $n = m = 2$	66
4.3	Mélanges γ_2 , quasi-ID, un résultat pour c non vide	72
II	Processus de diffusion et fonctions spéciales	83
5	Résultats généraux, premier exemple	85
5.1	Processus markovien	85
5.2	Temps d'atteinte, exemple du brownien	86
5.3	Générateurs infinitésimaux et équations différentielles ordinaires	90
5.4	Loi du temps d'arrêt	92
6	Étude du mouvement brownien avec dérive	95
6.1	Transformée de Laplace du temps d'atteinte	96
6.2	Densité du temps d'atteinte	97
6.2.1	Cas $a < x, \mu > 0$	98
7	Étude du processus de Ornstein-Uhlenbeck	101
7.1	Transformée de Laplace du temps d'atteinte	103
7.2	Le cas $c < 0$	105
7.3	Calcul explicite de la densité dans le cas $a = 0, c < 0$	112
7.4	Le cas transitoire $c > 0$	116
7.5	Lien avec le brownien passant une frontière parabolique	119
7.6	Compléments sur les fonctions de Hermite	122
8	Etude de la diffusion de Bessel	125
8.1	Un lien avec le mouvement brownien n -dimensionnel	125
8.2	Transformée de Laplace du temps d'atteinte	127
8.2.1	Résolution de l'équation différentielle associée	127
8.2.2	La fonction de Mac Donald	130
8.2.3	Le résultat sur les transformées de Laplace	134
8.3	Loi du temps d'atteinte	135
8.3.1	Le cas $0 < a < x$ (et a proche de 0)	135
8.3.2	Cas $0 \leq x < a$	139

III	Fonctions spéciales et processus de Levy	141
9	Un premier exemple pour l'étude du processus de Cauchy	143
9.1	Transformée de Stieljes	145
9.2	Temps de dépassement d'un processus de Cauchy	147
10	Subordinateurs, exposant de Laplace	159
10.1	Subordinateurs, fonction de Bernstein	159
10.2	Variable $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} d\sigma$, où $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ est un subordonneur	164
10.3	Fonctions caractéristiques et processus de Levy	172
10.4	Exposant de Laplace	173
10.5	Temps de passage des processus de Levy spectralement négatifs	179
10.5.1	Cas $\psi'(0) \geq 0$	181
10.5.2	Cas $\psi'(0) < 0$	182
10.6	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé	184

Première partie

Fonctions spéciales et variables
aléatoires réelles

Chapitre 1

Fonction Γ

1.1 Définition et premières propriétés

Proposition 1.1.1 *Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.1.1 : On a

$$x^{t-1}e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{t-1}$$

intégrable en 0 car $t - 1 > -1$.

De plus la fonction $x \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ est intégrable en $+\infty$. □

Définition 1.1.2 *Pour tout $t > 0$, on définit la fonction Gamma :*

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x} dx. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.3 En fait, on peut définir Γ pour tout z appartenant au demi-plan $\Re(z) > 0$.
($|x^{z-1}e^{-x}| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{\Re(z)-1}$.)

Proposition 1.1.4 (Formule de concaténation)

$$\forall t > 0, \Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t). \tag{1.2}$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.1.4 : Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) &= \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M x^t e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\int_0^M t \cdot x^{t-1} e^{-x} dx - [x^t e^{-x}]_0^M \right) \text{ par intégration par parties} \\ &= t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = t \cdot \Gamma(t).\end{aligned}$$

□

Remarque 1.1.5

— Comme $\Gamma(0) = 1$, on en déduit par récurrence immédiate que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

C'est pourquoi on interprète Γ comme la version continue de la factorielle.

— Nous avons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. En effet :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \text{ avec } x = \frac{u^2}{2} \\ &= \sqrt{2\pi} \times \sqrt{2} \times \mathbb{P}(Z \geq 0), \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &= 2 \times \sqrt{\pi} \times \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Corollaire 1.1.6

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}. \quad (1.3)$$

On donne à présent la formule de Stirling qui nous sera utile à plusieurs reprises :

Théorème 1.1.7 (Formule de Stirling pour la fonction Γ)

$$\Gamma(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}.$$

PREUVE DU THÉORÈME 1.1.7 : Pour tout $x > 0$, grâce au changement de variable $\frac{t-x}{\sqrt{x}}$ ($t = s\sqrt{x} + x$, puis $dt = \sqrt{x} ds$) :

$$\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} (s\sqrt{x} + x)^x e^{-s\sqrt{x}-x} \sqrt{x} ds.$$

On en déduit :

$$\Gamma(1+x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(\frac{s}{\sqrt{x}} + 1\right)^x e^{-s\sqrt{x}} ds = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}} ds.$$

Posons pour tout $x > 0$ et pour tout s appartenant à $] -\sqrt{x}, +\infty[$: $\varphi_x(s) = x \ln\left(\frac{s}{\sqrt{x}} + 1\right) - s\sqrt{x}$.

Nous allons démontrer que pour tout $x > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi_x(s)} ds = \sqrt{2\pi}$.

Si s appartient à $] -\sqrt{x}, +\infty[$, pour $x > 0$ assez grand, alors d'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout u appartenant à $] -1, 0]$, on a :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} \times \frac{2}{(1+t)^3} dt.$$

Or : $\int_0^{+\infty} \frac{(u-t)^2}{2} \times \frac{2}{(1+t)^3} dt \leq 0$. D'où $\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2} \leq 0$.

En appliquant cette inégalité à $u = \frac{s}{\sqrt{x}} \in] -1, 0]$:

$$\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \frac{s}{\sqrt{x}} + \frac{s^2}{2x} \leq 0.$$

Ainsi, en multipliant les deux membres par $x > 0$, la dernière inégalité :

$$x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x} \leq -\frac{s^2}{2},$$

c'est-à-dire : $\varphi_x(s) \leq -\frac{s^2}{2}$.

De plus, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, donc nous avons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_x(s) = -\frac{s^2}{2}$. Égalité valide, quand x tend vers $+\infty$, donc pour tout s réel.

Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi_x(s)} ds \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}.$$

Ce qui permet de conclure. □

Proposition 1.1.8 (Extension de Γ à des valeurs négatives) *Il existe un prolongement unique encore notée Γ qui vérifie la formule de concaténation de la proposition (1.1.4) étendue : pour tout n entier naturel, pour tout $t \in] -1, 0]$, pour tout t appartenant à $] -n-1, -n[$:*

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.1.8 : Γ possède un prolongement à une fonction méromorphe, encore notée Γ . Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}/(-\mathbb{N})$. Γ a alors des pôles d'ordre 1 en chaque entier négatif, et n'a pas de zéro. Et Γ vérifie, pour tout entier naturel m :

$$\lim_{z \rightarrow -m} (z + m)\Gamma(z) = \frac{(-1)^m}{m!}. \quad (1.4)$$

C'est l'unique prolongement régulier de Γ .

Ainsi pour tout t appartenant à un intervalle de la forme $] -n - 1; -n[$, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} = \frac{\Gamma(t+2)}{t(t+1)} = \dots = \frac{\Gamma(t+n+1)}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

Ceci définit une fonction sur $\mathbb{R}/(-\mathbb{N})$ (Même sur $\mathbb{C}/(-\mathbb{N})$). □

Notation 1.1.9 Notation de Pochhammer (ou factorielle ascendante) :

Pour tout t appartenant à \mathbb{C} , et pour tout n dans \mathbb{N} :

$$(t)_n = t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)(t+n), \text{ et } (t)_0 = 1.$$

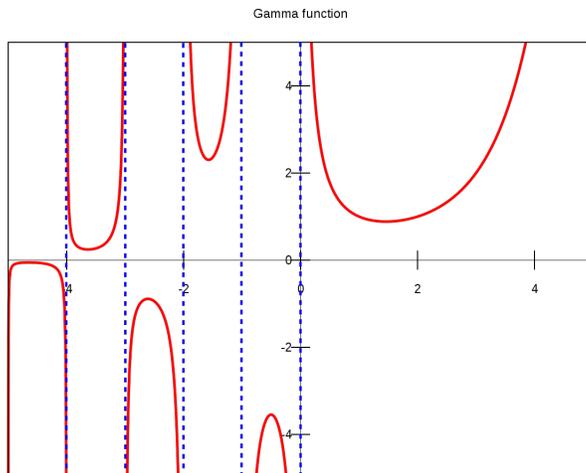
En particulier : $(1)_n = n!$.

Ainsi, pour tout t tel que $-n < t < -n - 1$: $\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+n)}{(t)_n}$.

Et alors nous avons : $(t)_{k+n} = (t)_k \times (t+k)_n$, car :

$$(t+k)_n = \frac{\Gamma(t+k+n)}{\Gamma(t+k)} = \frac{\Gamma(t+k+n)}{\Gamma(t)} \times \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+k)} = \frac{(t)_{k+n}}{(t)_k}.$$

Graphe approximatif :



On voit (par concaténation) que la suite $u_k = \min_{t \in]-k-1, -k[} |\Gamma(t)|$ est décroissante vers 0 sur $\mathbb{N}/\{0\}$. (On peut montrer que cette suite tend en fait vers 0 à une vitesse de convergence factorielle).

Définition 1.1.10 Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ où C est un ensemble convexe (éventuellement sur \mathbb{C}).

i) On rappelle que f est convexe si

$$\forall \lambda \in [0; 1], \forall x, y \in C, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

ii) On dit que f est log-convexe (respectivement log-concave) si f est strictement positive et $\ln \circ f$ est convexe (respectivement concave). Ceci équivaut à :

$$\forall \lambda \in [0; 1], \forall x, y \in C, f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq [f(x)]^\lambda + [f(y)]^{(1-\lambda)}.$$

Et nous avons : f log-concave $\Leftrightarrow \frac{1}{f}$ est log-convexe $\Leftrightarrow -\ln(f)$ est convexe.

Proposition 1.1.11 Soit $f : C \rightarrow]0; +\infty[$ (éventuellement de classe \mathcal{C}^2).

Si f est log-convexe alors f est convexe (la réciproque est fausse).

PREUVE DE LA PROPOSITION :

Cas \mathcal{C}^2 : Comme $\ln \circ f$ est convexe et régulière, sa dérivée seconde est positive :

$$\forall x \in C, (\ln \circ f)''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} \geq 0.$$

D'où

$$\forall x \in C, f''(x)f(x) \geq [f'(x)]^2 \geq 0.$$

Par positivité de f , on a la positivité de f'' et donc la convexité de f .

Cas général : Soient $\lambda \in [0, 1], s, t \in C$, alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda s + (1 - \lambda)t) &= \exp[(\ln \circ f)(\lambda s + (1 - \lambda)t)] \\ &\leq \exp[\lambda(\ln \circ f)(s) + (1 - \lambda)(\ln \circ f)(t)] \\ &\leq \lambda \exp[\ln[f(s)]] + (1 - \lambda) \exp[\ln[f(t)]], \text{ car exp est convexe} \\ &= \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t). \end{aligned}$$

Réciproque fausse : la fonction carré est convexe sur $]0, +\infty[$, mais pas log-convexe, car $2 \ln(x)$ est concave.

□

Proposition 1.1.12 *Soit X une variable aléatoire positive telle que*

$$\forall s \in]a; b[: \mathbb{E}(X^s) < +\infty.$$

Alors la fonction (ou transformée) de Mellin $s \mapsto \mathbb{E}(X^s)$ est log-convexe sur $]a; b[$.

PREUVE DE LA PROPOSITION : Soient $\lambda \in]0; 1[$ et $s, t \in]a; b[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X^{\lambda s + (1-\lambda)t} \right] &= \int_0^{+\infty} x^{\lambda s} x^{(1-\lambda)t} d\mathbb{P}_X(x) \text{ où } \mathbb{P}_X \text{ est la loi de } X \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} (x^{\lambda s})^{\frac{1}{\lambda}} d\mathbb{P}_X(x) \right)^\lambda \left(\int_0^{+\infty} (x^{(1-\lambda)t})^{\frac{1}{1-\lambda}} d\mathbb{P}_X(x) \right)^{1-\lambda} \\ &\text{par inégalité de Hölder pour } p = \frac{1}{\lambda} \text{ et } q = \frac{1}{1-\lambda} \\ &\leq [\mathbb{E}(X^s)]^\lambda [\mathbb{E}(X^t)]^{1-\lambda} \end{aligned}$$

□

Remarque 1.1.13 En particulier, si X a tous ses moments finis alors la suite de terme général $\mu_n = \mathbb{E}(X^n)$ est convexe :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n^2 \leq \mu_{n-1} \cdot \mu_{n+1}.$$

Corollaire 1.1.14 $t \mapsto \Gamma(t)$ est :

- i) log-convexe sur $]0, +\infty[$.
- ii) log-convexe sur $] -n, -n + 1[$ si n est un entier naturel pair non nul.
- iii) concave sur $] -n, -n + 1[$ si n est un entier naturel impair.

PREUVE DU COROLLAIRE :

- i) On introduit, pour tout $t > 0$ la loi Gamma γ_t de densité : $x \mapsto \frac{x^{t-1}}{\Gamma(t)} e^{-x} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$.

$$\text{Nous avons, pour tout } s > -t : \mathbb{E}(\gamma_t^s) = \frac{\Gamma(t+s)}{\Gamma(t)}.$$

D'après la proposition précédente : $s \mapsto \frac{\Gamma(t+s)}{\Gamma(t)}$ est log-convexe sur $] -t, +\infty[$.

En posant $u = s + t$, $u \mapsto \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(t)}$ est log-convexe sur $]0, +\infty[$.

- ii) Sur $] -\infty, 0[$, pour tout $t \in] -n, -n+1[$, $\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+n)}{(t)_n}$. Alors si n est pair, $\Gamma(t) > 0$, car $(t)_n > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \ln[(t)_n] &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \ln[(t+2k-1)(t+2k-2)] \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \ln[(1-2k-t)(2-2k-t)] = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \ln(1-2k-t) + \ln(2-2k-t), \end{aligned}$$

qui est une somme de fonctions concaves, donc concave, ainsi : $-\ln[(t)_n]$ est convexe.

D'autre part, d'après (i) : $t \mapsto \Gamma(t+n)$ est log-convexe sur $] -n, -n+1[$.

Finalement : $\ln[\Gamma(t)] = \ln(\Gamma(t+n)) + [-\ln((t)_n)]$ est alors une somme de fonctions convexes sur $] -n, -n+1[$, donc convexe.

Γ est alors log-convexe sur $] -n, -n+1[$.

- iii) Si n est impair : $\Gamma(t) < 0$, et $t\Gamma(t) > 0$.

Or : $t\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+n)}{(t+1) \cdots (t+n)}$, qui est log-convexe, par l'argument du (ii). Et donc :

$-\Gamma(t) = -\frac{1}{t} \times \frac{\Gamma(t+n)}{(t+1) \cdots (t+n)}$, qui est un produit de deux fonctions log-convexes sur $] -n, -n+1[$, donc log-convexe (facile à prouver), et donc Γ est concave sur $] -n, -n+1[$.

□

Remarque 1.1.15 Rappelons :

- i) Transformée de Laplace : Si $X \geq 0$, on définit, pour tout $\lambda \geq 0$:

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \mathbb{E} \left(e^{-\lambda X} \right).$$

- ii) Fonction génératrice des moments : $\mathcal{M}_X(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$. (n'a pas forcément de sens).

Formellement :

$$\mathcal{M}_X(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{\mathbb{E}(X^n)}{n!}}_{\text{moments entiers normalisés}} \lambda^n.$$

Imaginons que $\mathcal{M}_X(\lambda) < +\infty$, pour $X > 0, \lambda > 0$. Alors $\mathbb{E}(X^n) < +\infty$, pour tout $n \geq 0$.

Et X est déterminé par ses moments entiers. En effet, $\mathcal{M}_X(\lambda)$ a un rayon de convergence strictement positif, et détermine la loi de X . Cependant, si $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y = e^X$, alors :

$$\forall n \geq 1 : \mathbb{E}(Y^n) = e^{\frac{n^2}{2}} < +\infty, \text{ et } : \forall \lambda > 0 : \mathcal{M}_Y(\lambda) = +\infty.$$

Et Y n'est pas déterminée par la suite $(\mathbb{E}(Y^n))_n$. Autrement dit, il existe Z de loi différente et telle que : $\forall n \geq 1 : \mathbb{E}(Z^n) = \mathbb{E}(Y^n)$.

Exemple 1.1.16 Nous avons, pour tout $t > 0$, pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathcal{L}_{\gamma_t}(\lambda) = \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \gamma_t} \right] = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} e^{-x(\lambda+1)} x^{t-1} dx = \frac{1}{(1+\lambda)^t} \left(\text{avec le changement : } x = \frac{y}{1+\lambda} \right).$$

En conséquence :

Proposition 1.1.17 (Identité en loi gamma) *Pour tous $s, t > 0$: $\gamma_{t+s} = \gamma_s + \gamma_t$, où γ_s et γ_t sont indépendantes.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.1.17 : En effet, la transformée de Laplace de deux membres de l'égalité vaut : $\frac{1}{(\lambda+1)^{t+s}}$. \square

Proposition 1.1.18 (Intégrale de Frullani) *Pour tous $a, b > 0$:*

$$\mathcal{I}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ta} - e^{-tb}}{t} dt = \ln \left(\frac{a}{b} \right).$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.1.18 : En effectuant le changement : $t = \frac{s}{a}$, $\frac{dt}{t} = \frac{ds}{s}$, on a : $\mathcal{I}(a, b) = \mathcal{I} \left(1, \frac{b}{a} \right)$. En considérant, pour tout $\lambda > 0$: $\mathcal{I}(1, \lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\lambda t}}{t} dt$, nous avons :

$$\mathcal{I}(1, 1) = 0, \quad \frac{d\mathcal{I}}{d\lambda}(1, \lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Alors (par intégration par rapport à λ) : $\mathcal{I}(1, \lambda) = \ln(\lambda)$. Avec $\lambda = \frac{b}{a}$, on obtient le résultat. \square

1.2 Loi Bêta

Définition 1.2.1 *Soient $a, b > 0$. On appelle Intégrale eulérienne de deuxième espèce :*

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

Proposition 1.2.2 *Pour tous $a, b > 0$: $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.2.2 :

On a, d'après la Proposition 1.1.17 : $\gamma_{a+b} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_a \underset{\perp}{+} \gamma_b$. En effet, on identifie alors les densités.

$$\text{À gauche : } \frac{x^{a+b-1} e^{-x}}{\Gamma(a+b)},$$

À droite : Si, pour $c > 0$, $f_c(u)$ désigne $\frac{u^{c-1}}{\Gamma(c)} e^{-u} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(u)$, alors la densité de $\gamma_a + \gamma_b$ pour tout $x > 0$ est égale à :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_a(x-y) f_b(y) dy &= e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{(x-y)^{a-1} y^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} dy \\ &= \frac{x^{a+b-1} e^{-x}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{b-1} dz. \end{aligned}$$

Or, un simple changement $t = 1 - z$ prouve que $B(a, b) = B(b, a)$, et donc nous obtenons : $B(a, b) = B(b, a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. □

Définition 1.2.3 Soient $a, b > 0$. On appelle variables aléatoire Bêta de seconde espèce, la variable notée $\beta_{a,b}$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, égale à :

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(t).$$

Déterminons la fonction génératrice des moments d'une telle loi :

Proposition 1.2.4 Pour tous $a, b > 0$, on a l'identité, pour tout réel λ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{(a+b)_n n!} \lambda^n = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 e^{\lambda t} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.2.4 : Nous avons :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda \beta_{a,b}}) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 e^{\lambda t} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

D'autre part : $\mathbb{E}(e^{\lambda \beta_{a,b}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \mathbb{E}(\beta_{a,b}^n)}{n!}$.

Or, pour tout $s \geq 0$, nous avons :

$$\mathbb{E}(\beta_{a,b}^s) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{s+a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{B(a+s, b)}{B(a, b)} = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+s)}. \quad (2.1)$$

Donc : pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(\beta_{a,b}^n) = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+n)} = \frac{(a)_n \Gamma(a)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)(a+b)_n \Gamma(a+b)} = \frac{(a)_n}{(a+b)_n}$.

D'où l'identification annoncée. □

Définition 1.2.5 On appelle fonction de Kummer (ou hypergéométrique confluyente de première espèce), de paramètre $c > a > 0$, la série entière en $z \in \mathbb{C}$:

$${}_1F_1 \left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} ; z \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = \mathbb{E}(e^{z\beta_{a,c-a}}).$$

Proposition 1.2.6 (Identités en loi Bêta) Pour tous $a, b > 0$, et pour $b > c$:

- a) $\beta_{a,b} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a,c} \times_{\perp} \beta_{a+c,b-c}$.
- b) $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} b^a$, et $b\beta_{a,b} \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \gamma_a$.
- c) $\gamma_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a,c} \times_{\perp} \gamma_{a+c}$.
- d) $\frac{1}{\beta_{a,b}} - 1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_b \dot{\perp} \gamma_a$.

Remarque 1.2.7 Voici deux rappels :

- i) Soit X une variable aléatoire positive à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, et soit $c > 0$, alors cX a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue : $x \mapsto \frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right)$.

En effet : $\mathbb{P}(cX \leq x) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x}{c}\right)$, et donc : $\frac{d}{dx} [\mathbb{P}(cX \leq x)] = \frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right)$.

- ii) Soient X, Y deux variables aléatoires strictement positives indépendantes de densités par rapport à la mesure de Lebesgue égales respectivement à f_X, f_Y . Alors $\frac{X}{Y}$ est de densité par rapport à la mesure de Lebesgue est définie pour tout $u > 0$ par :

$$f_{\frac{X}{Y}}(u) = \int_0^{+\infty} f_X(uy) y f_Y(y) dy.$$

En effet, pour toute fonction mesurable positive g :

$$\mathbb{E} \left[g \left(\frac{X}{Y} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^2} g \left(\frac{x}{y} \right) f_X(x) f_Y(y) d\lambda_2(x, y) \stackrel{u=\frac{x}{y}}{=} \int_0^{+\infty} g(u) \left(\int_0^{+\infty} f_X(uy) y f_Y(y) dy \right) du.$$

Et l'on identifie la densité.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.2.6 :

- a) On identifie les moments entiers de chaque côté. À gauche : $\frac{(a)_n}{(a+b)_n}$, et à droite :

$$\frac{(a)_n}{(a+c)_n} \times \frac{(a+c)_n}{(a+c+b-c)_n} = \frac{(a)_n}{(a+b)_n}.$$

D'où le résultat.

b) D'après le (a), on en déduit que : $b\beta_{a,b} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a,c} \times (b\beta_{a+c,b-c})$.

D'autre part, en utilisant la remarque (a) précédente, $b\beta_{a,b}$ a pour densité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{b-1} \mathbb{1}_{]0,b[}(x) &= \frac{\Gamma(a+b)}{b^a \Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{b-1} \mathbb{1}_{]0,b[}(x) \\ &\xrightarrow{b \rightarrow +\infty} K x^{a-1} e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x), \end{aligned}$$

où K est la constante égale à : $\left[\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \right]^{-1} = \frac{1}{\Gamma(a)}$.

Nous en déduisons donc que : $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} b^a$. Et le lemme de Scheffé nous permet de déduire que : $b\beta_{a,b} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \gamma_a$.

c) En utilisant (a), en partant de l'égalité en loi : $b\beta_{a,b} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a,c} \times (b\beta_{a+c,b-c})$, en faisant tendre b vers $+\infty$, le membre de gauche tend en loi vers γ_a , et à droite $b\beta_{a+c,b-c}$ tend en loi quand b tend vers $+\infty$ vers γ_{a+c} . Ainsi on obtient : $\gamma_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a,c} \times \gamma_{a+c}$.

Voici une démonstration alternative, pour tout $s > -a > -(a+c)$, et sachant que : $\mathbb{E}(\beta_{a,c}^s) = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a+c)}{\Gamma(a)\Gamma(a+c+s)}$, alors, par indépendance :

$$\mathbb{E}[(\beta_{a,c} \times \gamma_{a+c})^s] = \mathbb{E}(\beta_{a,c}^s) \times \mathbb{E}(\gamma_{a+c}^s) = \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} = \mathbb{E}(\gamma_a^s),$$

d'où, pour tout $s > -a$: $\mathbb{E}[(\beta_{a,c} \times \gamma_{a+c})^s] = \mathbb{E}(\gamma_a^s)$. Les moments fractionnaires (transformée de Mellin) sont les transformées de Laplace du logarithme des variables aléatoires, donc caractérisant les lois, cela suffit pour conclure.

d) Posons $T_{a,b} = \frac{1}{\beta_{a,b}} - 1$. Alors pour tout $x \geq 0$:

$$F_{T_{a,b}}(x) = \mathbb{P}(T_{a,b} \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\beta_{a,b}} \leq x+1\right) = \mathbb{P}\left(\beta_{a,b} \geq \frac{1}{x+1}\right) = 1 - F_{\beta_{a,b}}\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f_{T_{a,b}} &= \frac{d}{dx} F_{T_{a,b}}(x) = - \left(-\frac{1}{(x+1)^2} \right) f_{\beta_{a,b}}\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{1}{(x+1)^{a-1}} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{b-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{b-1} \times \frac{1}{(x+1)^{a+b}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x). \end{aligned}$$

D'autre, grâce à la dernière remarque (b), pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 f_{\frac{\gamma_b}{\gamma_a}}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(xy)^{b-1}}{\Gamma(b)} e^{-xy} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(xy) \times y \times \frac{y^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-y} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) dy. \\
 &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{+\infty} x^{b-1} y^{a+b-1} e^{-y(x+1)} dy \\
 &\stackrel{(z=y(x+1))}{=} \frac{x^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{+\infty} \frac{z^{a+b-1}}{(x+1)^{a+b}} e^{-z} dz \\
 &= \frac{x^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{1}{(x+1)^{a+b}} \Gamma(a+b) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.3 Identités sur la fonction Γ

1.3.1 Formule de Gauss

Théorème 1.3.1 (Formule de Gauss) *Pour tout $z > 0$,*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.3.1 (PROBABILISTE) : Soit (L_1, \dots, L_n) un échantillon de $\gamma_1 = \mathcal{E}(1)$. Dans un premier temps, on montre que

$$X_n = L_1 + \frac{L_2}{2} + \dots + \frac{L_n}{n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \max(L_1, \dots, L_n).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}(\max(L_1, \dots, L_n) \leq x) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(L_k \leq x) = (1 - e^{-x})^n.$$

Pour l'autre variable aléatoire, on procède par récurrence sur $n \geq 1$.

Le cas $n = 1$ de l'égalité est trivial.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} \leq x) &= \mathbb{P}\left(X_n \leq x - \frac{L_{n+1}}{n+1}\right) \\
&= \int_0^x \mathbb{P}(X_n \leq x - y) f_n(y) dy \text{ où } f_n \text{ est la densité de } \frac{L_{n+1}}{n+1} \\
&= \int_0^x (1 - e^{-x+y})^n \cdot (n+1)e^{-(n+1)y} dy \\
&= \int_0^x (n+1)e^{-y}(e^{-y} - e^{-x})^n dy \\
&= \int_{e^{-x}}^1 (n+1)(z - e^{-x})^n dz \text{ par le changement de variables } z = e^{-y} \\
&= \int_0^{1-e^{-x}} (n+1)(\tilde{z})^n d\tilde{z} \text{ par } \tilde{z} = z - e^{-x} \\
&= (1 - e^{-x})^{n+1}.
\end{aligned}$$

On considère $Y_n = \max(L_1, \dots, L_n) - \ln(n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \leq x) &= \mathbb{P}[\max(L_1, \dots, L_n) \leq x + \ln(n)] = (1 - e^{-x - \ln(n)})^n \\
&= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Or $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est la fonction de répartition de $G = -\ln(\mathcal{E}(1))$. Donc Y_n converge en loi vers G .

Donc

$$\forall \lambda < 0, \mathbb{E}\left(e^{\lambda Y_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left(e^{\lambda G}\right).$$

On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda G}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda \ln(L)}\right) = \mathbb{E}\left(L^{-\lambda}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\lambda} e^{-x} dx$$

d'où

$$\forall \lambda < 1, \mathbb{E}\left(e^{\lambda G}\right) = \Gamma(1 - \lambda).$$

Par ailleurs, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{\lambda Y_n}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\lambda(L_1 + \dots + \frac{L_n}{n}) - \lambda \ln(n)}\right) = \frac{1}{n^\lambda} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{L_k}{k}}\right) \\
&= \frac{1}{n^\lambda} \prod_{k=1}^n \int_0^{+\infty} e^{\frac{\lambda}{k}x} e^{-x} dx.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall \lambda < 1, \mathbb{E} \left(e^{\lambda Y_n} \right) &= \frac{1}{n^\lambda} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{k}} \\ &= \frac{1}{n} n^z \prod_{k=1}^n \frac{k}{k-1+z} \text{ en notant } z = 1 - \lambda \\ &= \frac{n+z}{n} \cdot n^z \cdot \frac{n!}{z(1+z) \dots (n+z)} \end{aligned}$$

On conclut, puisque $\left(\frac{n+z}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, que pour tout $z > 0$:

$$n^z \cdot \frac{n!}{z(1+z) \dots (n+z)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(1-\lambda) = \Gamma(z).$$

□

1.3.2 Formule de Weierstrass

Théorème 1.3.2 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}.$$

où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni.

PREUVE DU THÉORÈME 1.3.2 (PROBABILISTE) : On démontre la formule pour $z > 0$.

$$\begin{aligned} z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-z/k} &= z e^{-\gamma_n z} \frac{1}{n^z} \prod_{k=1}^n \frac{k+z}{k} \text{ où } \gamma_n = H_n - \ln(n) \\ &= e^{-\gamma_n z} \frac{1}{n^z \cdot n!} \prod_{k=0}^n (z+k) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\gamma z} \frac{1}{\Gamma(z)} \text{ d'après la formule de Gauss.} \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.3.3 *Soit $(L_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d de loi $\mathcal{E}(1)$. Alors :*

$$\sum_{k=1}^n \frac{L_k}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} -\ln(\mathcal{E}(1)).$$

PREUVE DU COROLLAIRE 1.3.3 Soient $L \sim \mathcal{E}(1)$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > -1$.

$$\mathbb{E}\left(e^{z \ln(L)}\right) = \mathbb{E}(L^z) = \Gamma(z+1).$$

D'après la formule de Weierstrass :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{z \ln(L)}\right) &= e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{z/n}}{1 + \frac{z}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{zH_n - \gamma z} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{z}{k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z}{(1+z) \dots \left(1 + \frac{z}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left\{ \exp \left[z \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{k} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

En particulier, il y a convergence simple des fonctions caractéristiques. Donc d'après le théorème de continuité de Lévy, il y a convergence en loi. \square

Remarque 1.3.4 Si $L \sim \mathcal{E}(1)$ alors $-\ln(L)$ est une variable aléatoire dite de Gumbel (loi extrême de type I).

On a

$$\mathbb{P}(-\ln(L) \leq x) = \mathbb{P}(L \geq e^{-x}) = e^{-e^{-x}}.$$

Ainsi $-\ln(L)$ est de densité $x \mapsto e^{-x-e^{-x}}$ sur \mathbb{R} .

Théorème 1.3.5 (Formule des compléments) Pour tout $0 < z < 1$,

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Il y a plusieurs démonstrations de la formule des compléments. On peut procéder par théorème des résidus ou utiliser la formule de Gauss. Voici la démonstration à l'aide de la formule de Gauss (Théorème 1.3.1), nous avons besoin de l'égalité (qui sera prouvée à l'occasion de l'étude des zéros de la fonction de Bessel de première espèce) valable pour tout z complexe :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (3.1)$$

PREUVE DU THÉORÈME 1.3.5 Nous avons, d'après la formule de Gauss :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(z),$$

où :

$$v_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} \times \frac{n^{1-z} n!}{(1-z)(2-z) \cdots (n-z)(n+1-z)}.$$

Nous avons alors :

$$v_n(z) = \frac{n}{z(n+1-z)} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{z^2}{k^2}}.$$

D'où, grâce à l'égalité (3.1) :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

□

1.3.3 Formule de Malmsten

Théorème 1.3.6 (Formule de Malmsten) *Pour tout $\lambda < 1$,*

$$\Gamma(1-\lambda) = \exp\left(\gamma\lambda + \int_0^{+\infty} (e^{\lambda u} - 1 - \lambda u) \frac{du}{u(e^u - 1)}\right).$$

PREUVE DU THÉORÈME 1.3.6 On a

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{e^u} \cdot \frac{1}{1 - e^{-u}} = \frac{1}{e^u} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nu} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu}.$$

D'où, d'après le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda u} - u - 1) \frac{du}{u(e^u - 1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda u} - u - 1) \frac{1}{u} e^{-nu} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\lambda-n)u} - e^{-nu}}{u} du - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-nu} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\lambda-n)u} - e^{-nu}}{u} du - \frac{\lambda}{n} \right). \end{aligned}$$

On reconnait des intégrales de Frullani :

$$I_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Ainsi, grâce à la Proposition 1.1.18

$$\begin{aligned} \gamma\lambda + \int_0^{+\infty} (e^{\lambda u} - 1 - \lambda u) \frac{du}{u(e^u - 1)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\gamma\lambda - \lambda H_n + \sum_{p=1}^n \mathcal{I}_{\lambda-p,p} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\lambda \ln(n) + \sum_{p=1}^n \ln\left(\frac{p}{p-\lambda}\right) \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\exp\left(\gamma\lambda + \int_0^{+\infty} (e^{\lambda u} - 1 - \lambda u) \frac{du}{u(e^u - 1)}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\lambda} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k - \lambda}.$$

Or on a vu dans la démonstration de la formule de Gauss (Théorème 1.3.1) que :

$$\Gamma(1 - \lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\lambda} \left(\frac{1}{1 - \lambda} \cdots \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\lambda} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k - \lambda}.$$

□

Corollaire 1.3.7 a) La fonction $\lambda \mapsto \Gamma(1 - \lambda)$ est croissante sur $]0; 1[$.

b) $\Gamma'(1) = -\gamma$

PREUVE DU COROLLAIRE 1.3.7 D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale (appliqué localement)

$$\frac{d}{d\lambda} \ln(\Gamma(1 - \lambda)) = \gamma + \int_0^{+\infty} (e^{\lambda u} - 1) \frac{du}{e^u - 1} > 0.$$

Ainsi l'application $\lambda \mapsto \ln(\Gamma(1 - \lambda))$ est strictement croissante sur $]0; 1[$ ce qui implique la stricte croissance de l'application $\lambda \mapsto \Gamma(1 - \lambda)$ sur le même intervalle.

En particulier

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \ln(\Gamma(1 - \lambda)) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{-\Gamma'(1 - \lambda)}{\Gamma(1 - \lambda)} \right|_{\lambda=0} = \gamma$$

c'est-à-dire

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

□

Proposition 1.3.8 (Formule intégrale de γ) Nous avons :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.3.8 Nous partons de la définition de la constante d'Euler Mascheroni :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Or,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx. \quad (3.2)$$

D'autre part, d'après la Proposition 1.1.18 (intégrale de Frullani) :

$$\ln(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx \quad (3.3)$$

Combinant les relations (1.1) et (1.2), et faisant usage de la convergence monotone (deux fois) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n e^{-kx} \right) dx - \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \right) dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx. \end{aligned}$$

□

Conjecture 1.3.9 γ appartient-il à \mathbb{Q} ? De nombreuses recherches ont été faites sur cette question... Sans réponse à l'heure actuelle.

1.3.4 Fonction digamma

Définition 1.3.10 Pour tout $z > 0$, on définit la fonction digamma par :

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Proposition 1.3.11 *i)* De la même manière que Γ est une généralisation de la factorielle, ψ est une généralisation du nombre harmonique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \psi(n+1) = H_n - \gamma = 1 + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma.$$

ii) Généralisation : pour tout $z > 0$:

$$\psi(1+z) = \frac{1}{z} + \psi(z)$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.3.11

i) Tout d'abord, grâce au Corollaire 1.3.7, nous avons : $\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \psi(n) + \frac{1}{n} &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{n} = \frac{1 \times \Gamma(n) + n \times \Gamma'(n)}{n \times \Gamma(n)} \\ &= \frac{[z\Gamma(z)]'(n)}{n\Gamma(n)} = \frac{[\Gamma(z+1)]'(n)}{\Gamma(n+1)} \quad (\text{par concaténation}) \\ &= \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \psi(n+1). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- ii) D'après la formule de concaténation : $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$, en passant aux logarithmes, puis en dérivant :

$$\ln[\Gamma(1+z)] = \ln(z) + \ln[\Gamma(z)] \implies \frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

$$\text{D'où : } \psi(1+z) = \frac{1}{z} + \psi(z).$$

□

Proposition 1.3.12 *Pour tout $z > 0$,*

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.3.11 D'après la formule de Malmsten, pour tout $s > -1$:

$$\begin{aligned} \ln[\Gamma(1+s)] &= -\gamma s + \int_0^{+\infty} (e^{-sx} - 1 + sx) \frac{dx}{x(e^x - 1)} \\ &= -\gamma s + \int_0^{+\infty} (e^{-sx} - 1 + sx) \frac{e^{-x} dx}{x(1 - e^{-x})}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme deux fois :

$$\begin{aligned} \psi'(s+1) &= \frac{d^2}{ds^2} [\ln(\Gamma(1+s))] = \int_0^{+\infty} \frac{d^2}{ds^2} [e^{-sx} - 1 + sx] \frac{e^{-x} dx}{x(1 - e^{-x})} \\ &= \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x(s+1)}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x(s+1)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-x(s+n)} dx \text{ (d'après le théorème de Tonelli)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(s+n)^2}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.3.13 *Pour tout $z > 0$:*

$$\psi(z) = -\gamma + (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(z+n)}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.3.11 On intègre la dernière formule sur l'intervalle $[1, z]$, et en faisant usage du théorème de Tonelli :

$$\psi(z) - \psi(1) = \psi(z) + \gamma = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n} \right) = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+z)}.$$

□

Remarque 1.3.14 On retrouve, grâce à ce dernier calcul, que la fonction Γ est strictement log-convexe sur $]0, +\infty[$. Et comme nous avons prouvé la log-convexité de Γ sans passer par cette dernière proposition, l'on pouvait deviner que ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

Proposition 1.3.15 (Formule intégrale de ψ) Pour tout $z > 0$:

$$\psi(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-x}} \right) dx.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.3.15 Partant de la fin de la dernière démonstration, pour tout $z > 0$, ($z = s + 1$) :

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-x(z+k)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xz} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} \right) dx \text{ (d'après le théorème de Tonelli)} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xz} \frac{x dx}{1-e^{-x}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z > 0$:

$$\begin{aligned} \psi(z) - \psi(1) &= \int_1^z \int_0^{+\infty} e^{-xu} \frac{x}{1-e^{-x}} dx du \\ &= \int_0^{+\infty} \int_1^z \frac{x e^{-xu}}{1-e^{-x}} du dx \text{ (d'après le théorème de Tonelli)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xz}}{1-e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que : $\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$. Or, d'après la formule intégrale de γ (Proposition 1.3.8) :

$$-\gamma = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right) dx.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \psi(1) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xz}}{1 - e^{-x}} dx. \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xz}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-x}} \right) dx.\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Loi et fonction de Mittag-Leffler

2.1 Formule de Legendre-Gauss

Théorème 2.1.1 (Formule de multiplication de Legendre Gauss) *Pour tout $z > 0$, et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:*

$$\Gamma\left(\frac{z}{m}\right) \times \Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right) \times \cdots \times \Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z).$$

Remarque 2.1.2 Voici une démonstration "trigonométrique" du cas $m = 2$:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{2x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2x} \Gamma(2x),$$

Ou encore : $\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{2x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \times 2^{1-2x} \Gamma(2x)$.

Soit $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= B(x, x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(\varphi) \cos(\varphi)]^{2(x-1)} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \text{ en posant } t = (\sin(\varphi))^2 \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right)^{2(x-1)} \times \frac{\sin(2\varphi)}{2} d\varphi \\ &= \frac{2}{2^{2x-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2\varphi))^{2x-1} d\varphi \\ &= 2^{2-2x} \times \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin(\psi))^{2x-1} d\psi. \end{aligned}$$

Or, la fonction sin prend les mêmes valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Donc :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = 2^{2-2x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\psi))^{2x-1} d\psi.$$

Effectuons le changement de variable $u = (\sin(\psi))^2$, alors :

$$du = 2 \cos(\psi) \sin(\psi) d\psi = 2\sqrt{1-u}\sqrt{u} d\psi, \text{ donc } d\psi = \frac{du}{2\sqrt{1-u}\sqrt{u}},$$

et donc :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = 2^{2-2x} \int_0^1 u^{x-\frac{1}{2}} \times \frac{du}{2\sqrt{1-u}\sqrt{u}} = 2^{1-2x} \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du = 2^{1-2x} B\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

Enfin : $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)}$. D'où le résultat.

PREUVE DU THÉORÈME 2.1.1 Pour tout $z > 0$, pour tout k entier compris entre 0, et $m-1$, dans l'ordre grâce à la formule de concaténation (Proposition 1.1.4), la formule de Gauss (Proposition 1.3.1) et la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m}\right) &= \left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m} - 1\right) \Gamma\left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m} - 1\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \times n^{\frac{z}{m} + \frac{k}{m} - 1}}{\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m} + j\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \times n^{\frac{z}{m} + \frac{k}{m} - 1}}{\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m} + j\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi m}^n \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \times n^{\frac{z}{m} + \frac{k}{m} - \frac{1}{2}}}{\prod_{j=0}^{n-1} (z + k + mj)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Par produit, (1.1) donne :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{mn}{e}\right)^n \times n^{\frac{z}{m} + \frac{k}{m} - \frac{1}{2}}}{\prod_{j=0}^{n-1} (z + k + mj)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}^m \times \left(\frac{mn}{e}\right)^{mn} \times n^{m\left(\frac{z}{m} - \frac{1}{2}\right)} \times n^{\frac{1}{m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} k\right)}}{\prod_{k=0}^{m-1} \prod_{j=0}^{n-1} (z + k + mj)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Or, le produit au dénominateur parcourt tous les restes modulo m avec tous les quotient de 0 à $(n-1)$, ainsi nous parcourons tous les entiers de 0 à $mn-1$. Ainsi, en posant N égal à

nm :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}^m \times \left(\frac{mn}{e}\right)^{mn} \times n^{m\left(\frac{z}{m}-\frac{1}{2}\right)} \times n^{\frac{1}{m} \times \frac{m(m-1)}{2}}}{\prod_{l=0}^{mn-1} (z+l)} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}^m \times \left(\frac{mn}{e}\right)^{mn} \times (mn)^{m\left(\frac{z}{m}-\frac{1}{2}\right)} \times m^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{m}\right)} n^{\frac{1}{m} \times \frac{m(m-1)}{2}}}{\prod_{l=0}^{mn-1} (z+l)} \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}^m \times \left(\frac{N}{e}\right)^N \times N^{z-\frac{1}{2}} \times m^{\frac{1}{2}-z}}{\prod_{l=0}^{mn-1} (z+l)} \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}^{m-1} \times \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \times N^{z-1} \times m^{\frac{1}{2}-z}}{\prod_{l=0}^{mn-1} (z+l)}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans l'ordre, grâce à la formule de Stirling, la formule de Gauss, et la formule de concaténation :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{z}{m} + \frac{k}{m}\right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}^{m-1} \times N! \times N^{z-1} \times m^{\frac{1}{2}-z} \times (z-1)}{(z-1) \prod_{l=0}^{N-1} (z+l)} \\
&= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-z} (z-1) \Gamma(z-1) \\
&= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

□

2.2 Conséquences probabilistes, loi de Mittag-Leffler

Proposition 2.2.1 *Soient $a > 0$, et m un entier naturel non nul. Alors :*

$$\gamma_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} m \left(\gamma_{\frac{a}{m}} \underset{\perp}{\times} \gamma_{\frac{a+1}{m}} \underset{\perp}{\times} \cdots \underset{\perp}{\times} \gamma_{\frac{a+m-1}{m}} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

En particulier, nous retiendrons :

$$\gamma_a = 2 \sqrt{\gamma_{\frac{a}{2}} \underset{\perp}{\times} \gamma_{\frac{a+1}{2}}}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2.1 Considérons les variables aléatoires indépendantes, suivant respectivement les lois : $\gamma_{\frac{a}{m}}, \gamma_{\frac{a+1}{m}}, \dots, \gamma_{\frac{a+m-1}{m}}$.

Alors pour tout $z > -a$, d'après le formule de Legendre-Gauss 2.1.1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\gamma_a^z] &= \frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(a)} = m^z \times \frac{\Gamma\left(\frac{a+z}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{a+z+1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{m}\right)} \times \dots \times \frac{\Gamma\left(\frac{a+z+m-1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+m-1}{m}\right)} \\ &= m^z \mathbb{E}\left(\gamma_{\frac{a}{m}}^{\frac{z}{m}}\right) \times \mathbb{E}\left(\gamma_{\frac{a+1}{m}}^{\frac{z}{m}}\right) \times \dots \times \mathbb{E}\left(\gamma_{\frac{a+m-1}{m}}^{\frac{z}{m}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left[m \left(\left(\gamma_{\frac{a}{m}} \times \dots \times \gamma_{\frac{a+m-1}{m}}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^z\right]. \end{aligned}$$

Comme la transformée de Mellin caractérise une loi, les lois sont bien égales. \square

Théorème 2.2.2 Pour tout α appartenant à $]0, 1[$, il existe une variable aléatoire $X_\alpha > 0$ dont la transformée de Mellin vérifie :

$$\forall s > -1 : \mathbb{E}(X_\alpha^s) = \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+\alpha s)}.$$

PREUVE DE LA THÉORÈME 2.2.2 Soient $p < q$ deux entiers naturels non nuls, z un complexe tel que $\Re(z) > 0$. Rappelons que lors de l'étude de la loi $\beta_{a,b}$, nous avons établi l'égalité (2.1) :

$$\forall a, b > 0, \forall s \geq 0 : \mathbb{E}(\beta_{a,b}^s) = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+s)},$$

qui peut se prolonger à tout complexe s tel que $\Re(s) > 0$.

Alors, d'après le formule de Legendre-Gauss 2.1.1, l'égalité (2.1) puis comme la Proposition 2.2.1 :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+qz)}{\Gamma(1+pz)} &= \frac{\Gamma(1+qz)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+pz)} = \frac{q^{qz}}{p^{pz}} \times \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{1+qz}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)} \times \dots \times \frac{\Gamma\left(\frac{q+qz}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q}\right)}}{\frac{\Gamma\left(\frac{1+pz}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \times \dots \times \frac{\Gamma\left(\frac{p+pz}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p}\right)}} \\ &= \frac{q^{qz}}{p^{pz}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+z\right)} \times \dots \times \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{q}+z\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{p}+z\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{p}{q}+z\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)} \times \dots \times \frac{\Gamma\left(\frac{q-1}{q}+z\right)}{\Gamma\left(\frac{q-1}{q}\right)} \\ &= \frac{q^{qz}}{p^{pz}} \times \mathbb{E}\left[\left(\beta_{\frac{1}{q}, \frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \times \dots \times \beta_{\frac{p-1}{q}, \frac{p-1}{p}-\frac{p-1}{q}} \times \gamma_{\frac{p}{q}} \times \dots \times \gamma_{\frac{q-1}{q}}\right)^z\right]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Notons $Z_{p,q} = \beta_{\frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \times \cdots \times \beta_{\frac{p-1}{q}, \frac{p-1}{p} - \frac{p-1}{q}} \times \gamma_{\frac{p}{q}} \times \cdots \times \gamma_{\frac{q-1}{q}}$. Alors, nous déduisons des égalités 2.1 pour tout z complexe tel que $\Re(z) > 0$:

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma\left(1+\frac{p}{q}z\right)} = \frac{\Gamma\left(1+q \times \frac{z}{q}\right)}{\Gamma\left(1+p \times \frac{z}{q}\right)} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{q^q}{p^p} Z_{p,q} \right)^{\frac{z}{q}} \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{q}{p} Z_{p,q}^{\frac{1}{q}} \right)^z \right].$$

Par holomorphie des deux membres de l'égalité, on peut prolonger au domaine $\Re(z) > -1$. Soit α appartenant à $]0, 1[$. Et soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels de $]0, 1[$ convergeant vers α . Alors pour tout réel t :

$$\frac{\Gamma(1+it)}{\Gamma\left(1+\frac{p_n}{q_n}it\right)} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{q_n}{p_n} Z_{p_n, q_n}^{\frac{1}{q_n}} \right)^{it} \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(it \ln \left(\frac{q_n}{p_n} Z_{p_n, q_n}^{\frac{1}{q_n}} \right) \right) \right].$$

Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\Gamma(1+it)}{\Gamma\left(1+\frac{p_n}{q_n}it\right)}$ définie sur \mathbb{R} est la fonction caractéristique de la variable

$$\text{aléatoire : } \ln \left[\frac{q_n}{p_n} Z_{p_n, q_n}^{\frac{1}{q_n}} \right].$$

Et pour tout réel t :

$$\frac{\Gamma(1+it)}{\Gamma\left(1+\frac{p_n}{q_n}it\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(1+it)}{\Gamma(1+\alpha it)}, \text{ qui est continue en } 0.$$

D'après le Théorème de Levy, il existe une variable aléatoire $\ln(X_\alpha)$ de fonction caractéristique : $t \mapsto \frac{\Gamma(1+it)}{\Gamma(1+\alpha it)}$, et qui vérifie la convergence en loi :

$$\ln \left[\frac{q_n}{p_n} Z_{p_n, q_n}^{\frac{1}{q_n}} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \ln(X_\alpha).$$

D'où : $\frac{q_n}{p_n} Z_{p_n, q_n}^{\frac{1}{q_n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X_\alpha$.

En particulier, pour tout $s > -1$: $\mathbb{E}(X_\alpha^s) = \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+\alpha s)}$. □

Définition 2.2.3

- La variable X_α du Théorème 2.2.2 est appelée variable de Mittag-Leffler de paramètre α .
- On appelle fonction de Mittag-Leffler de paramètre α appartenant à $]0, 1[$ (fonction introduite dans les années 1890), que l'on note E_α , la fonction génératrice de X_α :

$$E_\alpha(z) = \mathbb{E}(e^{zX_\alpha}).$$

Définition 2.2.4 — On dit qu'une fonction f définie sur $]0, +\infty[$ est complètement monotone si elle est indéfiniment dérivable sur cet intervalle et telle que pour tout entier naturel :

$$\forall t > 0 : (-1)^n \frac{d^n f}{dt^n}(t) \geq 0.$$

— On dit qu'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ est complètement monotone si elle est de plus définie et continue à droite en 0.

Proposition 2.2.5 Soit α un réel de $]0, 1[$. Nous avons :

— La série entière de $E_\alpha(z)$ a un rayon de convergence infini, donc la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est holomorphe sur \mathbb{C} .

— Pour tout complexe z :

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}.$$

— La fonction $x \mapsto E_\alpha(-x)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^+ , continue à droite en 0, et à dérivées de signes alternés :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 : (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} (E_\alpha)(-x) \geq 0.$$

Donc E_α est complètement monotone sur \mathbb{R}^+ .

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2.5

— Considérons la série du membre de droite, alors, en notant $a_n = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha n)}$, d'après le formule de Stirling :

$$\begin{aligned} a_n^{-\frac{1}{n}} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-\frac{1}{n}} (1 + \alpha n)^{-\frac{1}{n} - \alpha + \frac{1}{2n}} e^{\frac{-(1+n\alpha)}{-n}} \\ &= \exp\left[-\frac{\ln(\sqrt{2\pi})}{n} + \frac{1}{n} + \alpha\right] \exp\left[\left(-\alpha - \frac{1}{2n}\right) \ln(1 + n\alpha)\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\alpha \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence de la série est donc infini.

— Ainsi :

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(X^n) z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(1 + n) z^n}{n! \Gamma(1 + \alpha n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}.$$

— Nous avons, pour tout $x \geq 0$:

$$(-1)^n \frac{d^n}{dz^n} (E_\alpha)(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{k-n} k!}{\Gamma(1 + \alpha n) (k-n)!} \geq 0.$$

□

2.3 Théorème de Bernstein, autre construction de la loi de Mittag-Leffler

Théorème 2.3.1 (Bernstein) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ de classe \mathcal{C}^∞ .

- La fonction f est complètement monotone si et seulement si c'est la transformée de Laplace d'une mesure borélienne positive finie ν sur $[0, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \geq 0 : f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\nu(t).$$

- Si $f(0) = 1$, alors ν est une mesure de probabilité. Et alors, il existe une variable aléatoire réelle X_ν de loi égale à ν .

$$\forall x \geq 0 : f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\nu(x) = \mathbb{E} [e^{-xX_\nu}].$$

PREUVE DU THÉORÈME DE 2.3.1 Le "si" est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe intégral. Montrons le "seulement si". Soit f une fonction numérique définie sur \mathbb{R}^+ complètement monotone.

Alors, pour tout entier naturel $n : x \mapsto (-1)^n f^{(n)}(x)$ est positive décroissante sur \mathbb{R}^+ . Ainsi pour tout entier naturel $n : f^{(n)}$ admet une limite en $+\infty$, et cette limite sera notée $f^{(n)}(+\infty)$.

Première étape : D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout entier $n > 0$, et pour tous réels $x, a > 0$:

$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy. \quad (3.1)$$

Pour tout entier $n > 0$, $(-1)^n f^{(n)} = |f^{(n)}|$, et comme $(-1)^n f^{(n)}$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ , alors, pour tout $x > 0$: (méthode des rectangles (inégalité de la moyenne)), pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq \frac{2}{x} \int_{\frac{x}{2}}^x (-1)^n f^{(n)}(y) dy \\ &= \frac{2 \times (-1)^n}{x} \left(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}\left(\frac{x}{2}\right) \right) \\ &= \frac{2}{x} \left| f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}\left(\frac{x}{2}\right) \right|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dès lors, pour $n = 1$, au voisinage de $+\infty$, $|f'(x)| = \frac{2}{x} o(1) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, puis grâce à

l'inégalité (3.2), par récurrence :

$$\forall n > 0 : \left| f^{(n)}(x) \right| = o\left(\frac{1}{x^n}\right). \quad (3.3)$$

Dès lors, en faisant tendre vers $+\infty$ le réel a dans l'égalité (3.1) et faisant usage de 3.3, on obtenons, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) - f(+\infty) = \int_{+\infty}^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x-y)^n dy = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (y-x)^n f^{(n+1)}(y) dy. \quad (3.4)$$

En effectuant le changement de variable $y = \frac{n}{t}$, la relation (3.4) devient :

$$f(x) - f(+\infty) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^{\frac{n}{x}} \left(1 - \frac{xt}{n}\right)^n \binom{n}{t}^n f^{(n+1)}\left(\frac{n}{t}\right) \frac{dt}{t^2}. \quad (3.5)$$

On a donc montré que :

$$\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}/\{0\} : f(x) - f(+\infty) = \int_0^{+\infty} \phi_n(xt) d\mu_n(t), \quad (3.6)$$

où $\phi_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$, et μ_n est la mesure sur \mathbb{R}^+ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction positive :

$$t \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \binom{n}{t}^n f^{(n+1)}\left(\frac{n}{t}\right) \times \frac{1}{t^2}.$$

Dès lors, par le Théorème de Beppo-Levy, cette égalité reste vraie pour $x = 0$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}/\{0\} : f(0) - f(+\infty) = \mu_n(\mathbb{R}^+). \quad (3.7)$$

Seconde étape : Les mesures (μ_n) , pour tout $n \geq 1$, ont, dans l'espace des mesures de Radon $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+)$ finies sur \mathbb{R}^+ , toutes pour norme : $R = \|\mu_n\| = f(0) - f(+\infty)$.

$\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+)$ est le dual topologique de l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ des fonctions continues sur \mathbb{R}^+ tendant vers 0 en $+\infty$, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Muni de la topologie *-faible, la boule (en fait la sphère) fermée de centre 0 de rayon R est compacte d'après le Théorème de Banach-Alaoglu, et métrisable (car $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$ est séparable). Le Théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique, il existe donc une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ *-faiblement convergente, vers une mesure positive μ . (qui est encore de normé égale à $R = f(0) - f(+\infty)$)

Alors nous allons montrer que f est la transformée de Laplace de la mesure $\nu = f(+\infty)\delta_0 + \mu$. En effet, tout d'abord puisque $(\mu_{n_k})_k$ converge *-faiblement vers μ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} d\mu_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\mu(t)$$

D'autre part, $(\phi_n)_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $g : t \mapsto e^{-t}$. Et alors :

$$\left| \int_0^{+\infty} (\phi_{n_k}(xt) - e^{-xt}) d\mu_{n_k} \right| \leq R \|\phi_{n_k} - g\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

L'inégalité, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\nu(t) \right| = \left| f(x) - f(+\infty) - \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\mu(t) \right| \\ & \leq \left| \int_0^{+\infty} \phi_{n_k}(xt) d\mu_{n_k}(t) - \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\mu(t) \right| \\ & \leq \left| \int_0^{+\infty} (\phi_{n_k}(xt) - e^{-xt}) d\mu_{n_k}(t) \right| + \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\mu_{n_k}(t) - \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\mu(t) \right| \end{aligned}$$

permet de conclure. Tout le résultat est valide même sans $f(0) = 1$. Mais le cas $f(0) = 1$ offre une mesure ν de probabilité.

Complément : Si l'on abandonne l'hypothèse de continuité à droite en 0 pour f , l'équivalence reste vraie mais seulement sur $]0, +\infty[$, et pour une mesure positive ν pas forcément finie mais telle que toutes les mesures $e^{-at} d\nu(t)$, pour $a > 0$ soient finies.

En effet, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto f(\alpha + x)$ vérifie les hypothèses du raisonnement ci-dessus, ainsi notons ν_α la mesure associée telle que :

$$\forall x \geq 0 : f(\alpha + x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\nu_\alpha(t).$$

Et pour tous $0 < \alpha < \beta$, on a :

$$\forall x \geq 0 : \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\nu_\beta(t) = f(\beta + x) = f(\alpha + \beta - \alpha + x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\beta - \alpha + x)t} d\nu_\alpha(t).$$

La transformée de Laplace des mesures est injective, donc pour tous réels $\beta > \alpha > 0$, ν_β admet comme densité par rapport à ν_α la fonction $t \mapsto e^{-(\beta - \alpha)t}$.

Il existe alors une unique mesure borélienne ν ayant pour densité, pour tout $\alpha > 0$, par rapport à ν_α la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$, telle que :

$$\forall x > 0 : f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-0 \times t} d\nu_x(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\nu(t).$$

(Ainsi les valeurs de la fonction complètement monotone f sur les intervalles $[\alpha, +\infty[$ pour $\alpha > 0$ déterminent la fonction sur tout $]0, +\infty[$.)

□

Remarque 2.3.2

- Ainsi, nous pouvons définir la fonction de Mittag-Leffler de manière *ad hoc* par le biais du (iii) de la Proposition 2.2.5, en faire l'étude et constater que $x \mapsto E_\alpha(-x)$ était complètement monotone sur $[0, +\infty[$. Le Théorème de Bernstein aurait alors garanti l'existence de la loi X_α .
- On a facilement que pour tout α de $]0, 1[$, la fonction $x \mapsto E_\alpha(x)$ est croissante en x sur \mathbb{R}^+ . Mais dans l'étude des fonctions spéciales, il est courant de regarder le paramètre comme une variable. La question de la monotonie de $\alpha \mapsto E_\alpha(x)$, x fixé est encore une question ouverte. Précisément sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ la décroissance est connue, mais la décroissance sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ n'est pas encore démontrée.

2.4 Extension fractionnaire de l'exponentielle

Remarque 2.4.1 La fonction de Mittag-Leffler est une extension "fractionnaire" de l'exponentielle puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, E_1(x) = e^x.$$

L'objectif de cette section est d'étudier une autre extension fractionnaire, via la loi α -stable positive.

Définition 2.4.2 Pour tout α de $]0, 1[$, on pose $Z_\alpha = X_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}$, où X_α est la variable de Mittag-Leffler.

Z_α est la variable stable positive d'indice α (ou de loi α -stable positive).

Remarque 2.4.3 Nous avons immédiatement, pour tout réel x :

$$\mathbb{E}\left(e^{xZ_\alpha^{-\alpha}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{xX_\alpha}\right) = E_\alpha(x).$$

Lemme 2.4.4

i) Pour tous $\lambda, s > 0$:

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{s-1} dx$$

ii) Soit X une variable aléatoire presque sûrement strictement positive, alors pour tout $s > 0$:

$$\mathbb{E}(X^{-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(e^{-xX}) x^{s-1} dx$$

iii) Pour tout $\lambda > 0$, et pour tout s appartenant à $]0, 1[$:

$$\lambda^s = \frac{1-s}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) x^{-s-1} dx.$$

PREUVE DU LEMME 2.4.4

i) A l'aide du changement de variable $t = \lambda x$:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \lambda^{s-1} \times \lambda \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-\lambda x} dx.$$

ii) D'après le (i), pour tout $s > 0$, nous avons presque sûrement :

$$X^{-s}(\omega) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-xX(\omega)} x^{s-1} dx$$

Alors d'après le Théorème de Tonelli :

$$\mathbb{E}(X^{-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} e^{-xX(\omega)} x^{s-1} d\mathbb{P}(\omega) dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(e^{-xX}) x^{s-1} dx.$$

iii) Les deux membres de l'égalité à prouver valent 0 si λ vaut 0. Il suffit de vérifier que leurs dérivées sont égales. D'après le Théorème de dérivation sous le signe \int :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda^s - \frac{s}{\Gamma(1-s)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) x^{-s-1} dx \right] \\ &= s\lambda^{s-1} - \frac{s}{\Gamma(1-s)} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} x^{-s-1} dx \\ &= s \left[\lambda^{-u} - \frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{u-1} dx \right] \text{ avec } u = 1 - s \\ &= 0, \text{ d'après (i).} \end{aligned}$$

□

Les trois propriétés suivantes (plus la Remarque 2.4.3) caractérisent chacune la loi α -stable positive :

Théorème 2.4.5 Soit Z_α de loi α -stable positive, pour α appartenant à $]0, 1[$. Elle est caractérisée par l'une des trois égalités suivantes :

i) Pour tout s appartenant à $]0, \alpha[$:

$$\mathbb{E}(Z_\alpha^s) = \frac{\Gamma(1 - \frac{s}{\alpha})}{\Gamma(1 - s)}.$$

ii) Pour tout réel $x > 0$:

$$\mathbb{E}(e^{-xZ_\alpha}) = e^{-x^\alpha}.$$

iii) Pour tout réel $x > 0$:

$$\mathbb{E}(e^{-xZ_\alpha}) = \exp \left[\int_0^{+\infty} (e^{-xu} - 1) \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right].$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.4.5 Ces égalités caractérisent la loi de Z_α car il s'agit de formule portant sur les transformées de Mellin et de Laplace de Z_α .

i) Nous avons pour tout s appartenant à $]0, \alpha[$: $-\frac{s}{\alpha} > -1$, alors grâce au Théorème 2.2.2, nous avons :

$$\mathbb{E}(Z_\alpha^s) = \mathbb{E}\left(X_\alpha^{-\frac{s}{\alpha}}\right) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha} \times \alpha\right)}.$$

ii) Appliquons le Lemme 2.4.4 (ii), pour $X = Z_\alpha$:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{E}(e^{-sZ_\alpha}) x^{s-1} dx = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma(1+s)} \Gamma(s) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right),$$

soit :

$$\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \alpha \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(e^{-sZ_\alpha}) x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left(e^{-y^{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha}\right) y^{\frac{s}{\alpha}-1} dy, \quad (4.1)$$

avec le changement de variable $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$.

Cette formule (4.1) peut être interprétée comme une formule donnant la transformée de Mellin \mathcal{M} de la fonction $f_\alpha : y \mapsto \mathbb{E}\left(e^{-y^{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha}\right)$, c'est-à-dire :

$$\forall s > 0 : \mathcal{M}(f_\alpha)\left(\frac{s}{\alpha} - 1\right) = \Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Or, pour tout $s > 0$,

$$\mathcal{M}[y \mapsto \exp(-y)]\left(\frac{s}{\alpha} - 1\right) = \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{\alpha}-1} e^{-y} dy = \Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Par injectivité de la transformée de Mellin, on a pour presque tout $y > 0$:

$$\mathbb{E}\left(e^{-y^{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha}\right) = e^{-y}.$$

Les deux membres étant réguliers, l'égalité a lieu pour tout $y > 0$, alors avec $y = x^\alpha > 0$, on conclut :

$$\mathbb{E}(e^{-xZ_\alpha}) = e^{-x^\alpha}.$$

iii) En appliquant le Lemme 2.4.4 (iii), avec $s = \alpha$, et $x > 0$, on a :

$$x^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) t^{\alpha-1} dt.$$

Or d'après (ii) : $\ln [\mathbb{E}(e^{-xZ_\alpha})] = x^\alpha$. D'où le résultat. □

Remarque 2.4.6 Le (iii) de cette Proposition [2.4.5](#) dit que la transformée de Laplace est du type Levy-Khintchine, ces formes seront étudiées au chapitre des moments Gamma.

Chapitre 3

Fonction de Bessel

3.1 Définitions et premières propriétés

3.1.1 Les cas d'indice entier

Définition 3.1.1 Pour tout entier naturel n et pour tout complexe z , on pose :

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Comme la série entière a un rayon de convergence infini $\left(a_k := \frac{1}{k!(n-k)!2^{2k}} \leq \frac{1}{k!}\right)$, la fonction J_n est bien définie.

On l'appelle fonction de Bessel de première espèce d'indice $n \in \mathbb{N}$.

On pose également, pour tout entier naturel n et pour tout complexe z : $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Remarque 3.1.2 Dans le cas n négatif, la définition de J_n est légitime. En effet, en fait, pour tout $p \geq 0$, lorsque $n \leq 1 - p$: $\lim_{x \rightarrow n} \Gamma(x + 1 + p) = \pm\infty$.

Ainsi, l'on peut considérer $\frac{1}{\Gamma(1 + p - n)}$ comme nul, si $n \leq 1 - p$. Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1-n)p!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p-n} &= \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1-n)p!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p-n} \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{q+n}}{\Gamma(q+n+1-n)(q+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(q+n)-n} \\ &= (-1)^n \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{\Gamma(q+1+n)q!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2q+n}, \end{aligned}$$

car $\Gamma(q+1)(q+n)! = \Gamma(q+1+n)$.

Proposition 3.1.3

$$\forall t \in \mathbb{C}/\{0\}, \forall z \in \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n J_n(z) = \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right].$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1.3 En notant $u = \frac{z}{2}$:

$$\begin{cases} \exp \left(\frac{z}{2} t \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ut)^k}{k!} \\ \exp \left(-\frac{z}{2t} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{u}{t} \right)^k \end{cases}.$$

D'où par produit :

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] &= \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \frac{(ut)^k}{k! l!} \left(-\frac{u}{t} \right)^l = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^l u^{k+l}}{k! l!} \right) \text{ avec } n = k - l \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \left(\sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l+n \in \mathbb{N}}} \frac{u^{2l+n} (-1)^l}{(l+n)! l!} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n \left(u^n \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l! (l+n)!} u^{2l} \right) + \sum_{n < 0} t^n \left(\sum_{l \geq -n} \frac{(-1)^l}{l! (l+n)!} u^{2l+n} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n J_n(z) + \sum_{n < 0} t^n \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k + n}{k! (k-n)!} u^{2k-n} \right) \text{ en posant } k = n + l \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n J_n(z) + \sum_{n < 0} (-t)^n \times \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! (k-n)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n J_n(z) + \sum_{n < 0} t^n (-1)^n J_{-n}(z). \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.4 Pour tout entier m , pour tous x, y complexes :

$$J_m(x+y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) J_{m-n}(y).$$

PREUVE DE LA COROLLAIRE 3.1.4 On procède par série entière puis identification :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} t^m J_m(x+y) &= \exp \left[\frac{x+y}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} t^p J_p(x) \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} t^q J_q(y) \right) \\ &= \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} t^{p+q} J_p(x) J_q(y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) J_{m-n}(y) \right). \end{aligned}$$

□

3.1.2 Cas d'indice non entier

Définition 3.1.5 Soit un réel ν , et soit z appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{R}^- . On pose :

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + 1 + k)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}.$$

Cette fonction J_ν est appelée fonction de Bessel de première espèce d'indice ν .

Remarque 3.1.6

- Encore une fois, par le même argument que pour n entier, la série entière ci-dessus est de rayon de convergence infini pour tout réel ν . Et donc J_ν est holomorphe sur \mathbb{C}/\mathbb{R}^- .

3.2 Zéros et factorisation de la fonction de Bessel

Nous aurons besoin des résultats de cette section à l'occasion de l'étude du processus de diffusion de Bessel.

Hormis pour $z = 0$, pour $\nu > 0$, les racines de la fonction $z \mapsto J_\nu(z)$ sont celles de la fonction paire :

$$z \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(\nu + 1 + p)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2p}.$$

Théorème 3.2.1 Soient $\nu > -1$, et $\mathcal{H}_\nu : L^2([0, 1], dx) \mapsto L^1([0, 1], dx)$, où :

$$\mathcal{H}_\nu(f) : x \mapsto \int_0^1 \sqrt{xy} \exp \left[-(\nu + 1) \left| \ln \left(\frac{x}{y} \right) \right| \right] f(y) dy.$$

Alors \mathcal{H}_ν est un opérateur auto-adjoint et de Hilbert-Schmidt.

Soit alors sa représentation spectrale : $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e_n \mapsto \mathcal{H}_\nu(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f_n e_n$, avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 < +\infty$.

Alors les zéros de J_ν sont tous des réels, et ses zéros strictement positifs $j_{\nu,n}$ sont :

$$\forall n \geq 1 : j_{\nu,n} = \sqrt{\frac{2(\nu+1)}{\lambda_n}}.$$

Définition 3.2.2 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon infini.

L'ordre de la série entière est le réel ρ défini par :

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(n)}{\ln\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

Exemple 3.2.3 Dans le cas des fonctions de Bessel de première espèce : pour $J_0(z)$:

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p 4^{-p}}{p! \Gamma(\nu+1+p)}, \quad a_{2p+1} = 0.$$

Alors :

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p \ln(p)}{p \ln(4) + \ln(p!) + \ln(\Gamma(\nu+1+p))} = 1,$$

car, d'après la Formule de Stirling 1.1.7 :

$$\ln(p!) + \ln(\Gamma(\nu+1+p)) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 2p \ln(p) (1 + o(1)).$$

$$\text{En effet : } \begin{cases} p! \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \implies \ln(p!) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} p \ln(p) [1 + o(1)] \\ \Gamma(\nu+1+p) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} (\nu+p)^{\nu+p+\frac{1}{2}} e^{-(\nu+p)} \implies \ln(\Gamma(\nu+1+p)) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} p \ln(p) [1 + o(1)] \end{cases}.$$

Théorème 3.2.4 (Factorisation de Hadamard-Weierstrass) Soit φ une fonction entière d'ordre $\rho \leq 1$ et telle que $\varphi(0) = 1$. Alors :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \varphi(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

où $(z_n)_{n \geq 1}$ est la suite des zéros de φ .

De plus : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^2} < +\infty$.

Corollaire 3.2.5 Soient $\nu > -1$, z appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{R}^- . Alors :

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j_{\nu,n}^2}\right),$$

où $(j_{\nu,n})_{n \geq 1}$ est la suite croissante des zéros strictement positifs de la fonction J_ν . Et nous

avons : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{j_{\nu,n}^2} < +\infty$.

PREUVE DE LA COROLLAIRE 3.2.5 Prenons la fonction : $z \mapsto \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma(\nu + 1)J_\nu(z)$ qui reste d'ordre 1 et l'on a fait en sorte qu'elle vaille 1 en 0, et possède les mêmes zéros que $J_\nu(z)$. Donc le Théorème 3.2.4 de factorisation de Hadamard-Weierstrass s'applique. Et nous avons donc, les a_{2p+1} étant nuls, la fonction est paire, donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}^- : \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma(1 + \nu)J_\nu(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j_{\nu,n}^2}\right).$$

D'où le résultat. □

Nous sommes maintenant en capacités de montrer la formule (3.1) que nous rappelons :

Corollaire 3.2.6 (Formule du produit d'Euler)

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (2.1)$$

PREUVE DE LA COROLLAIRE 3.2.6 Avec $\nu = \frac{1}{2}$:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1 + p\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p}.$$

Mais grâce à la formule de Legendre-Gauss 2.1.1 :

$$\begin{aligned} p! \Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right) &= \Gamma(1 + p) \Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right) \\ &= 2\sqrt{\pi} 2^{-2-2p} \Gamma(2p + 2) = \frac{\sqrt{\pi}(2p + 1)!}{2^{2p+1}}. \end{aligned}$$

Donc :

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p + 1)!} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(z)}{z}.$$

Dès lors, les zéros $j_{\frac{1}{2},n}$ de $J_{\frac{1}{2}}(z)$ sont ceux de $\frac{\sin(z)}{z} z^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(z)}{\sqrt{z}}$. Et alors $j_{\frac{1}{2},n} = n\pi, n \geq 1$. Finalement, le Corollaire 3.2.5 s'applique et donne :

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} J_{\frac{1}{2}}(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Et en appliquant la formule, non pas à z , mais à πz , on obtient la formule d'Euler. □

Remarque 3.2.7 Et la série des inverses des carrés des zéros? Dans notre cas, nous avons le célèbre raisonnement : $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1 - z^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) + o(z^2)$, et le développement limité du sinus nous permet d'identifier :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.3 Une transformée de Fourier perturbée

Proposition 3.3.1 (Von Sommel ou Schlömilch) Soient $\nu > -\frac{1}{2}$, et z appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{R}^- .

Alors :

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{itz} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.3.1 : Notons $A(z)$ le membre de droite de l'égalité à montrer.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{itz} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{-1}^1 t^n (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \end{aligned}$$

grâce au Théorème de Fubini. En effet :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(iz)^n}{n!} t^n \right| dt \right) &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} |t|^n \right) dt \\ &= 2 \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{t|z|} dt \text{ (par parité)} \\ &= 2 \int_0^1 (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{|z|\sqrt{u}} \frac{du}{2\sqrt{u}} \text{ (avec } u = t^2) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{e^{|z|\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} du + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{e^{|z|\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} du \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{e^{|z|\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} du + \int_0^{\frac{1}{2}} v^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{e^{|z|\sqrt{1-v}}}{\sqrt{1-v}} du \text{ (avec } v = 1-u) \\ &= < +\infty, \text{ car } \nu - \frac{1}{2} > -1. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t^{2n} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt &= \int_0^1 u^{n-\frac{1}{2}} (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} du \quad (\text{avec } u = t^2) \\ &= \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \nu + 1)}. \end{aligned}$$

(Intégrale eulérienne de deuxième espèce (Proposition 1.2.2) avec $a = n + \frac{1}{2}$, $b = \nu + \frac{1}{2}$.)

D'où :

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{\Gamma(\nu + p + 1)} \times \frac{2^{2p} \Gamma(p + \frac{1}{2})}{(2p)!}.$$

Et nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{2^{2p} \Gamma(p + \frac{1}{2})}{(2p)!} &= \frac{2^{2p} \Gamma(\frac{1}{2}) \left(\frac{1}{2}\right)_p}{\left(\prod_{k=1}^p (2k)\right) \times \left(\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1)\right)} \\ &= \frac{2^p \sqrt{\pi} (2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 1}{2^p p! \times (2p-1)(2p-3) \times \cdots \times 1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{p!}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 3.3.2 *Pour tout z appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{R}^- et pour tout $\nu > -\frac{1}{2}$, on a :*

$$\left(\frac{2}{\nu}\right)^\nu \Gamma(1 + \nu) J_\nu(z) = \mathbb{E}(e^{izX_\nu}),$$

où X_ν est une variable aléatoire réelle ayant pour loi :

$$d\mathbb{P}_{X_\nu} = \frac{\Gamma(1 + \nu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{]-1,1[}(t).dt.$$

PREUVE DE LA COROLLAIRE 3.3.2 La Proposition 3.3.1 justifie l'égalité, il suffit de prouver que $d\mathbb{P}_{X_\nu}$ est une mesure de probabilité.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt &= 2 \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^1 (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{du}{2\sqrt{u}}, \quad \text{avec } u = t^2 \\ &= \int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1} (1-u)^{\nu+\frac{1}{2}-1} du \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + 1)}. \end{aligned}$$

(Il s'agit encore d'une intégrale eulérienne de deuxième espèce, avec $a = \frac{1}{2}$, $b = \nu + \frac{1}{2} > 0$ (Proposition 1.2.2)) □

Remarque 3.3.3

- Pour $\nu = \frac{1}{2}$, on retrouve la loi uniforme sur $] - 1, 1[$.
- Pour $\nu = 1$, la densité de X_ν est $t \mapsto \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2}$, la densité du demi-cercle de Wigner.
- Pour $\nu > \frac{1}{2}$, cette densité est appelée densité du demi-cercle généralisée.

Chapitre 4

Moments de type Gamma

4.1 Infinie divisibilité

Définition 4.1.1 — On dit qu'une variable aléatoire x est n -divisible, pour $n \geq 2$ s'il existe les variables aléatoires i.i.d X_1, \dots, X_n telles que :

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{k=1}^n X_k.$$

— Si X est n -divisible pour tout $n \geq 2$, alors X est dite infiniment divisible (ID).

Exemple 4.1.2 $\mathcal{N}(0, 1)$ est ID. Il existe des variables aléatoires finiment décomposables qui ne sont pas ID. $|\mathcal{N}(0, 1)|$ n'est pas ID. On ne sait pas si elle est 2-divisible.

Théorème 4.1.3 (De Finetti, Levy-Khintchine) Soient $q \geq 0$, et μ une mesure positive sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} \min(1, x) d\mu(x) < +\infty.$$

Alors il existe une variable aléatoire positive X telle que :

$$\forall \lambda \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{-\lambda X} \right) = \exp \left[-q\lambda - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\mu(x) \right].$$

Corollaire 4.1.4 (De Finetti) Soit X une variable aléatoire positive X telle qu'il existe $q \geq 0$ et une mesure positive sur $]0, +\infty[$ tels que :

$$\forall \lambda \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{-\lambda X} \right) = \exp \left[-q\lambda - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\mu(x) \right].$$

Alors X est ID.

PREUVE DU COROLLAIRE 4.1.4 Pour tout $n \geq 2$, le réel positif $\frac{q}{n}$ et la mesure positive $\frac{\mu}{n}$ vérifient aussi l'hypothèse du Théorème de De Finetti 4.1.3. Alors il existe une variable aléatoire Y positive telle que :

$$\forall \lambda \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{-\lambda Y} \right) = \exp \left[-\frac{q}{n} \lambda - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\frac{\mu}{n}(x) \right].$$

Soit dès lors (Y_1, \dots, Y_n) un échantillon de la loi Y . Alors :

$$\forall \lambda \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{-\lambda(Y_1 + \dots + Y_n)} \right) = \exp \left[-q\lambda - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\mu(x) \right].$$

Donc : $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_1 + \dots + Y_n$. □

Remarque 4.1.5 De Finetti a montré que cette écriture de la transformée de Laplace caractérise les lois ID positives.

Proposition 4.1.6 — La loi γ_a est ID, et : $q = 0$, et $d\mu = \frac{ae^{-x}}{x} dx$, $x > 0$.

— La loi α -stable positive, pour α appartenant à $]0, 1[$ est ID, et $q = 0$, pour $x > 0$:

$$d\mu(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}.$$

— La loi de Poisson de paramètre $\nu > 0$ est ID et $q = 0$, $\mu = \nu\delta_1$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.1.6

— Nous avons :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda \gamma_a} \right) = \frac{1}{(1+\lambda)^a} = e^{-a \ln(1+\lambda)}.$$

Or, $-\ln(1+\lambda) = \ln \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) = \int_0^{+\infty} (e^{-(1+\lambda)x} - e^{-x}) \frac{dx}{x}$, grâce à une intégrale de Frullani (Proposition 1.1.18). Et donc :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda \gamma_a} \right) = \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{ae^{-x}}{x} dx \right].$$

— Pour $0 < \lambda < \frac{1}{\alpha}$, d'après le Lemme 2.4.4 (iii) :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda Z_\alpha} \right) = e^{-\lambda^\alpha} = \exp \left[- \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \right].$$

— Pour la loi de Poisson de paramètre $\nu > 0$:

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda \mathcal{P}_\nu} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\nu} \frac{(\nu e^{-\lambda})^n}{n!} = e^{\nu(e^{-\lambda}-1)} = \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \nu d\delta_1(x) \right].$$

Théorème 4.1.7 (Levy-Khintchine, 1932) Soient des réels q, σ et μ une mesure positive sur \mathbb{R}_* telle que :

$$\int_0^{+\infty} \min(1, x^2) d\mu(x) < +\infty.$$

Alors il existe une variable aléatoire réelle X telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E} \left(e^{-i\lambda X} \right) = \exp \left[iq\lambda - \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_*} \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \right) d\mu(x) \right],$$

où $\begin{cases} q \text{ est le coefficient de dérive} \\ \sigma \text{ est le coefficient de diffusion.} \\ \mu \text{ est la mesure de sauts} \end{cases}$

Remarque 4.1.8

- Levy montra que cette écriture de la fonction caractéristique caractérise les lois ID réelles. (confère [10])
- L'appellation de mesure de sauts est justifiée par :

$$\mathbb{E} \left(e^{i\lambda N_t} \right) = \exp \left[it\nu \int_{\mathbb{R}_*} \left(e^{i\lambda x} - 1 \right) d\delta_1(x) \right],$$

où $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\nu > 0$, et δ_1 reflète la hauteur de 1 des sauts du processus.

Corollaire 4.1.9 Soit X une variable aléatoire telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E} \left(e^{i\lambda X} \right) = \exp \left[iq\lambda - \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_*} \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \right) d\mu(x) \right],$$

où q, σ et μ respectent les hypothèses du Théorème de Levy-Khintchine 4.1.7.

Alors X est ID.

PREUVE DU COROLLAIRE 4.1.9 Pour tout $n \geq 2$, les réels $\frac{q}{n}$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et la mesure $\frac{\mu}{n}$ vérifient les conditions du Théorème de Levy-Khintchine 4.1.7. On procède dès lors que pour le Corollaire de De Finetti 4.1.4. \square

Nous retiendrons aussi le théorème de Tucker suivant :

Théorème 4.1.10 (Tucker, 1964) Soit X une variable aléatoire ID, telle que dans sa représentation de Levy-Khintchine : $\sigma^2 > 0$ et sa mesure μ est à densité non intégrable au voisinage de 0. Alors X est à densité.

Remarque 4.1.11 Caractériser les lois ID ayant une densité en fonction de (q, σ^2, μ) est encore un question ouverte actuellement.

Exemple 4.1.12 On a, par exemple avec la loi gamma :

$$\mathbb{E}(e^{s \ln(\gamma_a)}) = \exp \left[-s\psi(a) + \int_{-\infty}^0 (e^{-sx} - 1 - sx) \frac{e^{ax}}{x(1-e^x)} dx \right].$$

Cette formule, par holomorphie en s , se prolonge analytiquement sur $i\mathbb{R}$, et alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{is \ln(\gamma_a)} \right) &= \exp \left[-is\psi(a) + \int_{-\infty}^0 (e^{isx} - 1 - isx) \frac{e^{ax}}{x(1-e^x)} dx \right] \\ &= \exp \left[-is\psi(a) + \int_{\mathbb{R}} (e^{-isx} - 1 - isx \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)) \frac{e^{ax}}{x(1-e^x)} dx + is \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax}}{1-e^x} dx \right] \\ &= \exp \left[\left(\frac{e^{-a}}{1-e^{-1}} - \psi(a) \right) is + \int_{\mathbb{R}} (e^{-isx} - 1 - isx \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)) \frac{e^{ax}}{x(1-e^x)} dx \right]. \end{aligned}$$

Le Corollaire de Levy-Khintchine 4.1.9 nous dit alors que $\ln(\gamma_a)$ est ID avec les paramètres :

$$\begin{cases} q_a = \frac{e^{-a}}{1-e^{-1}} - \psi(a) \\ \sigma_a = 0 \\ \mu_a \text{ est de densité } \frac{e^{ax}}{x(1-e^x)} \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) \end{cases}.$$

Définition 4.1.13 On dit qu'une variable aléatoire positive strictement X est log-ID si $\ln(X)$ est ID. Autrement dit, pour tout réel s :

$$\mathbb{E}(X^{is}) = \exp \left[ibs - \sigma^2 \frac{s}{2} + \int_{\mathbb{R}_*} (e^{isx} - 1 - isx \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)) d\mu(x) \right].$$

Exemple 4.1.14 Ainsi γ_a et $e^{\mathcal{N}(0,1)}$ sont log-ID. On retiendra aussi que $\beta_{a,b}, Z_\alpha, |\mathcal{N}(0,1)|$, aussi et on montrera plus loin que $|\mathcal{C}|$ l'est aussi.

4.2 Problème des moments Gamma

4.2.1 Position du problème, et premières solutions dans certains cas

Remarque 4.2.1 On généralise par prolongement analytique, la notation de Pochhammer.

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C} : (a)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ a(a+1) \cdots (a+n) & \text{si } n \geq 1 \end{cases} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Dès lors si $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^-$, $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C} : (a)_s = \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} = \mathbb{E}(\gamma_a^s)$.

Notation 4.2.2 Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ appartenant à \mathbb{R}_{+*}^p . Alors, nous noterons, pour tout s appartenant à \mathbb{R}/\mathbb{Z}^- :

$$(a)_s = \prod_{k=1}^n (a_k)_s = \frac{\Gamma(a_1 + s) \times \dots \times \Gamma(a_n + s)}{\Gamma(a_1) \times \dots \times \Gamma(a_n)}.$$

Soient m, n, p, q des entiers naturels, et soient a, b, c, d appartenant respectivement à $\mathbb{R}_{+*}^m, \mathbb{R}_{+*}^n, \mathbb{R}_{+*}^p, \mathbb{R}_{+*}^q$ des listes de réels strictement positifs chacune rangées dans l'ordre croissant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \\ 0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \\ 0 < c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \\ 0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_q \end{array} \right.$$

Si par exemple : $m = 0$, alors nous considérons la liste a comme étant la liste $(+\infty)$.

La fonction $s \mapsto \frac{(a_s)(c)_{-s}}{(b)_s(d)_{-s}}$ est alors définie sur l'intervalle $] -a_1; c_1[$. (tous les $a_i + s$ doivent ne jamais s'annuler, ainsi que tous les $c_k - s$. pour avoir un numérateur bien défini, et l'ordre croissant entre alors en jeu)

Définition 4.2.3 On appelle fonction de Meijer une fonction $G_{p,q}^{m,n}$ (si elle existe), telle que :

$$\int_0^{+\infty} G_{n,q}^{m,p} \left(\begin{array}{c} a \quad c \\ b \quad d \end{array} \middle| x \right) x^{s-1} dx = \frac{(a_s)(c)_{-s}}{(b)_s(d)_{-s}}.$$

Cette fonction peut être définie, avec a, b, c, d fixés sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, avec éventuellement un atome en 1. (ce qui sera rencontré)

Question 4.2.4 À quelles conditions sur a, b, c, d existe-t-il une variable aléatoire $X_{a,b,c,d}$ positive ou nulle telle que :

$$\mathbb{E}(X_{a,b,c,d}^s) = \frac{(a_s)(c)_{-s}}{(b)_s(d)_{-s}} ?$$

Ce problème est appelé problème des moments Gamma, et dans le cas où la réponse est affirmative, $\frac{(a_s)(c)_{-s}}{(b)_s(d)_{-s}}$ est alors appelé moment Gamma. □

Remarque 4.2.5 En revanche si a et b sont vides, le problème Gamma n'a pas de solution, car dans ce cas $\frac{1}{(c)_s(d)_{-s}}$ est une fonction log-concave en s , alors qu'une transformée de Mellin est log-convexe.

Présentons des cas de résolutions faciles du problème :

- Si b et d n'existent pas, on cherche une variable aléatoire positive ou nulle $X_{a,-,c,-,d}$ telle que, pour tout s appartenant à $] - a_1, c_1[$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{a,-,c,-}^s) &= \frac{\Gamma(a_1 + s)}{\Gamma(a_1)} \times \cdots \times \frac{\Gamma(a_m + s)}{\Gamma(a_m)} \times \frac{\Gamma(c_1 - s)}{\Gamma(c_1)} \times \cdots \times \frac{\Gamma(c_p - s)}{\Gamma(c_p)} \\ &= \mathbb{E}(\gamma_{a_1}^s) \times \cdots \times \mathbb{E}(\gamma_{a_m}^s) \times \mathbb{E}(\gamma_{c_1}^{-s}) \times \cdots \times \mathbb{E}(\gamma_{c_p}^{-s}). \end{aligned}$$

Alors : $X_{a,-,c,-} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\prod_{k=1}^m \gamma_{a_k}}{\prod_{l=1}^p \gamma_{c_l}}$, toutes les lois gamma présentes dans ce produit étant prises indépendantes entre elles.

- Si c et d n'existent pas, et si $m \geq n$, avec pour tout i compris entre 1 et n : $a_i \leq b_i$, nous avons cette fois, grâce à la Proposition 1.2.4, pour tout s appartenant à $] - a_1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{a,b,-,-}) &= \frac{\Gamma(a_1 + s)}{\Gamma(a_1)} \times \cdots \times \frac{\Gamma(a_m + s)}{\Gamma(a_m)} \times \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1 + s)} \times \cdots \times \frac{\Gamma(b_n)}{\Gamma(b_n + s)} \\ &= \frac{\Gamma(a_1 + s)\Gamma(b_1 - a_1 + a_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1 - a_1 + s)} \cdots \frac{\Gamma(a_n + s)\Gamma(b_n - a_n + a_n)}{\Gamma(a_n)\Gamma(b_n - a_n + s)} \frac{\Gamma(a_{n+1} + s)}{\Gamma(a_{n+1})} \cdots \frac{\Gamma(a_m + s)}{\Gamma(a_m)} \\ &= \mathbb{E}(\beta_{a_1, b_1 - a_1}^s) \times \cdots \times \mathbb{E}(\beta_{a_n, b_n - a_n}^s) \times \mathbb{E}(\gamma_{a_{n+1}}^s) \times \cdots \times \mathbb{E}(\gamma_{a_m}^s). \end{aligned}$$

Donc : $X_{a,b,-,-} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \prod_{k=1}^n \beta_{a_k, b_k - a_k} \times \prod_{l=n+1}^m \gamma_{a_l}$, où toutes les lois beta et gamma sont prises indépendantes entre elles.

La condition disant que $a_i \leq b_i$ pour chaque i compris entre 1 et n , n'est pas la plus faible pour avoir une solution (par contre il faut $m \geq n$), dans le cas où c et d n'existent pas.

Nous allons donner des conditions plus générales pour avoir des solutions au problème Gamma dans le cas où c et d sont vides :

Proposition 4.2.6 *Pour que le problème Gamma ait des solutions dans le cas où c et d sont vides (Les deux premiers points étant indispensables pour obtenir une solution non triviale) :*

- $a_1 \leq b_1$,
- $m \geq n$,
- $\sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{j=1}^n b_j$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.6

- Supposons $a_1 > b_1$, alors $\mathbb{E}(X^s)$ est définie sur $] - a_1, +\infty[$, donc en particulier en $s = -b_1 > -a_1$. Or :

$$\mathbb{E}(X^s) = \frac{\Gamma(a_1 + s) \cdots \Gamma(a_m + s) \Gamma(b_1) \cdots \Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_m) \Gamma(b_1 + s) \cdots \Gamma(b_n + s)}.$$

Donc $\mathbb{E}(X^{-b_1}) = 0$, car $\lim_{s \rightarrow (-b_1)} = \infty$. Ce qui implique : $X = 0$, \mathbb{P} -p.s.

- Supposons $m < n$ alors d'après la formule de Stirling (Théorème 1.1.7) :

$$\begin{aligned} (x)_s^{\frac{1}{s}} &= \left[\frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x)} \right]^{\frac{1}{s}} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} (\Gamma(x+s))^{\frac{1}{s}} \\ &\underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} (2\pi)^{\frac{1}{s}} (s+x)^{\frac{1}{2s}} \left(\frac{s+x}{e} \right)^{\frac{s+x}{s}} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{s}{e}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$[\mathbb{E}(X^s)]^{\frac{1}{s}} = \left[\frac{(a)_s}{(b)_s} \right]^{\frac{1}{s}} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{s}{e}\right)^m}{\left(\frac{s}{e}\right)^n} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0.$$

Or l'inégalité de Jensen nous dit que $\mathbb{E}\left(X^{\frac{s}{s}}\right) \leq [\mathbb{E}(X^s)]^{\frac{1}{s}} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$, donc $X = 0$, \mathbb{P} -p.s.

- Admis, nous verrons l'aspect nécessaire à l'occasion d'un raisonnement plus tard. □

Lemme 4.2.7 Soit $t > 0$. Alors pour tout $\lambda > -t$:

$$\ln \left[\frac{\Gamma(t+\lambda)}{\Gamma(t)} \right] = -\psi(t)\gamma + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda v} - 1 - \lambda v \right) \frac{e^{tv} dv}{v(1-e^v)},$$

où ψ est la fonction digamma, γ la constante d'Euler-Mascheroni.

PREUVE DE LA LEMME 4.2.7 Appliquons la formule de Malmsten (Théorème 1.3.6), pour tout $\mu > 0$:

$$\Gamma(1+\mu) = \Gamma(1 - (-\mu)) = \exp \left[-\gamma\mu + \int_0^{+\infty} \left(e^{-\mu u} - 1 + \mu u \right) \frac{du}{u(e^u - 1)} \right]. \quad (2.1)$$

En prenant $\mu = t + \lambda - 1$, l'égalité (2.1) donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(t+\lambda) &= \Gamma[1 + (t - \lambda - 1)] \\ &= \exp \left[(t + \lambda - 1)\gamma + \int_0^{+\infty} \left(e^{-(t+\lambda-1)u} - 1 + (t + \lambda - 1)u \right) \frac{du}{u(e^u - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Et en prenant $\mu = t - 1$, l'égalité (2.1) donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \Gamma[1 + (t - 1)] \\ &= \exp \left[(t - 1)\gamma + \int_0^{+\infty} \left(e^{-(t-1)u} - 1 + (t - 1)u \right) \frac{du}{u(e^u - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dès lors les égalités (2.2) et (2.3) donnent :

$$\begin{aligned}
\ln \left[\frac{\Gamma(t+\lambda)}{\Gamma(t)} \right] &= (t+\lambda-1)\gamma - (t-1)\gamma \\
&+ \int_0^{+\infty} \left(e^{-(t+\lambda-1)u} e^{-(t-1)u} + (t+\lambda-1)u - (t-1)u \right) \frac{du}{u(e^u-1)} \\
&= \lambda\gamma + \int_0^{+\infty} \left(e^{-(t+\lambda-1)u} - e^{-(t-1)u} + \lambda u \right) \frac{du}{u(e^u-1)} \\
&= \lambda\gamma - \int_{-\infty}^0 \left(e^{(t+\lambda-1)v} - e^{(t-1)v} - \lambda v \right) \frac{dv}{|v|(e^{|v|}-1)} \text{ avec } v = -u.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

D'autre part, nous avons vu lors de la démonstration de la Proposition 1.3.15 (formule intégrale de ψ) que :

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= -\gamma - \int_0^{+\infty} \left(e^{(1-t)u} - 1 \right) \frac{du}{e^u-1} \\
&= -\gamma - \int_0^{-\infty} \left(e^{(t-1)v} - 1 \right) \frac{dv}{e^{|v|}-1}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Alors cette égalité (2.5)

$$\begin{aligned}
&-\psi(t)\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda v} - 1 - \lambda v \right) \frac{e^{tv} dv}{v(1-e^v)} \\
&= \gamma\lambda + \lambda \int_{-\infty}^0 \left(e^{(t-1)v} - 1 \right) \frac{dv}{e^{-v}-1} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda v} - 1 - \lambda v \right) \frac{e^{tv} dv}{v(1-e^v)} \\
&= \gamma\lambda + \lambda \int_{-\infty}^0 \left(e^{tv} - e^v \right) \frac{dv}{1-e^v} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{(\lambda+t)v} - e^{tv} - \lambda v e^{tv} \right) \frac{dv}{v(1-e^v)} \\
&= \gamma\lambda + \int_{-\infty}^0 \left[e^{(t+\lambda-1)v} - e^{(t-1)v} - \lambda v \right] \frac{e^v dv}{v(1-e^v)} \\
&= \gamma\lambda + \int_{-\infty}^0 \left[e^{(t+\lambda-1)v} - e^{(t-1)v} - \lambda v \right] \frac{dv}{v(e^{-v}-1)} \\
&= \gamma\lambda - \int_{-\infty}^0 \left[e^{(t+\lambda-1)v} - e^{(t-1)v} - \lambda v \right] \frac{e^v dv}{|v|(1-e^v)}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Les égalités (2.4) et (2.6) donnent l'égalité annoncée. \square

Proposition 4.2.8 Soient $n \leq m$ et considérons a, b des éléments respectivement de \mathbb{R}_{+*}^m et \mathbb{R}_{+*}^n , dont les éléments sont pour chacun rangés dans l'ordre croissant.

Supposons que pour tout $x \leq 0$:

$$\theta_{a,b}(x) := \sum_{i=1}^m e^{a_i x} - \sum_{j=1}^n e^{b_j x} \geq 0.$$

Alors il existe une variable aléatoire $X_{a,b,-,-}$ positive ou nulle et infiniment divisible telle que pour tout $s > -a_1$: $\mathbb{E}(x^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.8 Grâce au Lemme 4.2.7, nous avons pour tout $t > 0$, et pour tout $\lambda > -t$:

$$\ln[(t)_\lambda] = \ln \left[\frac{\Gamma(t+\lambda)}{\Gamma(t)} \right] = -\psi(t)\lambda + \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda v} - 1 - \lambda v) \frac{e^{tv} dv}{v(1-e^v)}.$$

Alors, pour tout $s > -a_1$:

$$\ln[(a)_s] = -\tilde{\psi}(a)s + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{\sum_{i=1}^m e^{a_i x}}{x(1-e^x)} dx,$$

où $\tilde{\psi}(a) = \sum_{i=1}^m \psi(a_i)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{(a)_s}{(b)_s} &= \exp \left[\left(\tilde{\psi}(b) - \tilde{\psi}(a) \right) s + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{\theta_{a,b}(x)}{x(1-e^x)} dx \right] \\ &= \exp \left[\left(\tilde{\psi}(b) - \tilde{\psi}(a) - \int_{-\infty}^1 \frac{x\theta_{a,b}(x)}{x(1-e^x)} dx \right) s + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx\mathbb{1}_{|x|\leq 1}(x)) \frac{\theta_{a,b}(x)}{x(1-e^x)} dx \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par holomorphie en s , l'égalité précédente est prolongeable analytiquement sur $i\mathbb{R}$. Ce qui donne :

$$\frac{(a)_{is}}{(b)_{is}} = \exp \left[\left(\tilde{\psi}(b) - \tilde{\psi}(a) - \int_{-\infty}^1 \frac{x\theta_{a,b}(x)}{x(1-e^x)} dx \right) is + \int_{-\infty}^0 (e^{isx} - 1 - isx\mathbb{1}_{|x|\leq 1}(x)) \frac{\theta_{a,b}(x)}{x(1-e^x)} dx \right].$$

L'hypothèse $\theta_{a,b}(x) \geq 0$, pour tout $x \leq 0$ donne grâce au Corollaire de Levy-Khintchine 4.1.9 l'existence de la variable $X_{a,b,-,-}$ positive ou nulle et ID telle que :

$$\mathbb{E}(X^{is}) = \frac{(a)_{is}}{(b)_{is}}, \text{ en particulier pour } s > -a_1 : \mathbb{E}(X^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s}.$$

□

Définition 4.2.9 Soient $n \leq m$, et soient $a = (a_1, \dots, a_m), b = (b_1, \dots, b_n)$ avec $\begin{cases} 0 < a_1 \leq \dots \leq a_m \\ 0 < b_1 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$.

On dit que a minore b , que l'on note $a \prec b$, si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^i a_j \leq \sum_{j=1}^i b_j.$$

Lemme 4.2.10 (Schur, 1900)

$$a \prec b \implies \forall t \in [0, 1] : \varphi_{a,b}(t) := \sum_{i=1}^n t^{a_i} - \sum_{i=1}^n t^{b_i} \geq 0.$$

PREUVE DU LEMME 4.2.10 C'est évident pour $n = 1$. Pour $n = 2$, on étudie la positivité de la fonction définie pour t dans $[0, 1]$, par : $t^{a_1} + t^{a_2} - (t^{b_1} + t^{b_2})$, avec les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a_1 < b_1 \\ a_1 \leq a_2, \quad b_2 \leq b_1 \\ 0 < a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2 \end{array} \right. .$$

— Si $a_1 = b_1$, on est ramené à $t^{a_2} - t^{b_2}$, $n = 1$.

— Si $a_1 < b_1$, on est ramené à montrer l'inégalité : $1 + t^{a_2-a_1} \geq t^{n_1-a_1} + t^{b_2-a_1}$, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 - a_1 > 0 \\ b_1 - a_1 > 0, \text{ de plus } b_1 - a_1 + b_2 - a_1 \geq a_2 - a_1. \\ b_2 - a_1 > 0 \end{array} \right.$$

Pour tout t de $]0, 1]$: $x \mapsto t^x = e^{x \ln(t)}$ est décroissante convexe.

Si $a_2 - a_1 \leq b_2 - b_1$ alors $t^{a_2-a_1} \geq t^{b_2-b_1}$ et $t^{b_1-a_2} \leq 1$.

Si $a_2 - a_1 > b_2 - b_1$, alors par croissance des pentes :

$$\frac{t^{a_2-a_1} - t^{b_2-a_1}}{b_2 - a_1 - a_2 + a_1} \geq \frac{t^{b_2-a_1+a_2+a_1} - 1}{b_2 - a_1 - a_2 + a_1},$$

c'est-à-dire : $t^{a_2-a_1} - t^{b_2-a_1} \geq t^{b_2-a_2} - 1 \geq t^{b_1-a_2}$.

— Pour $n \geq 3$. On suppose donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a_1 \leq b_1 \\ a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_1 + \dots + a_n \leq b_1 + \dots + b_n. \end{array} \right. .$$

Comme $0 < a_1 \leq b_1$, alors il existe un certain λ_1 de $]0, 1]$ tel que $a_1 = \lambda_1 b_1$.

Si $a_1 \leq a_2 \leq b_1 \leq b_2$ ou si $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2$, il n'y a rien à faire (notons que dans ces deux cas, a_2 s'écrit comme $\lambda_2 b_2$, pour un certain λ_2 appartenant à $[0, 1]$).

Si $a_1 \leq b_1 \leq b_2 \leq a_2$, alors $b_1 \leq a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$, soit $b_1 - a_1 \leq a_2 \leq b_1 - a_2 + b_2$.

Alors, il existe un λ_2 de $[0, 1]$, tel que :

$$a_2 = b_1 - a_1 + \lambda_2 b_2 = (1 - \lambda_1) b_1 + \lambda_2 b_2.$$

Supposons par récurrence que $a_{k-1} = \lambda_{k-1} b_{k-1}$, pour un certain λ_{k-1} de $[0, 1]$.

Si $a_{k-1} \leq b_{k-1} \leq a_k \leq b_k$, ou $a_{k-1} \leq a_k \leq b_{k-1} \leq b_k$, alors a_k s'écrit $\lambda_k b_k$, où λ_k appartient à $[0, 1]$.

Sinon : $a_k = (1 - \lambda_{k-1})b_{k-1} + \lambda_k b_k$, où λ_k appartient à $[0, 1]$.

Alors, nous avons bien $t_{a_1} + \dots + t_{a_n} \geq t^{b_1} + \dots + t^{b_n}$, car :

- Si $a_{k-1} \leq b_{k-1} \leq a_k \leq b_k$ ou $a_{k-1} \leq a_k \leq b_{k-1} \leq b_k$, alors :

$$\begin{cases} t^{a_{k-1}} + t^{a_k} = t^{\lambda_{k-1}b_{k-1}} + t^{\lambda_k b_k} \geq t^{b_{k-1}} + t^{\lambda_k b_k}, \text{ dans le cas où } a_k \leq b_k \leq b_{k+1} \leq a_{k+1} \\ t^{a_{k-1}} + t^{a_k} = t^{\lambda_{k-1}b_{k-1}} + t^{\lambda_k b_k} \geq t^{b_{k-1}} + t^{b_k}, \text{ dans le cas où : } \begin{cases} a_k \leq b_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \\ a_k \leq a_{k+1} \leq b_k \leq b_{k+1} \end{cases} \end{cases}$$

- Si $a_{k-1} \leq b_{k-1} \leq b_k \leq a_k$, alors :

$$\begin{cases} t^{a_{k-1}} + t^{a_k} = t^{\lambda_{k-1}b_{k-1}} + t^{(1-\lambda_{k-1})b_{k-1} + \lambda_k b_k} \geq t^{b_{k-1}} + t^{\lambda_k b_k}, \text{ si } a_k \leq b_k \leq b_{k+1} \leq a_{k+1} \\ t^{a_{k-1}} + t^{a_k} = t^{\lambda_{k-1}b_{k-1}} + t^{(1-\lambda_{k-1})b_{k-1} + \lambda_k b_k} \geq t^{b_{k-1}} + t^{b_k}, \text{ si } \begin{cases} a_k \leq b_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \\ a_k \leq a_{k+1} \leq b_k \leq b_{k+1} \end{cases} \end{cases}$$

□

Corollaire 4.2.11

— Si $n = m$ et $a \prec b$, alors il existe une variable aléatoire positive ou nulle $X_{a,b,-,-}$ telle

que pour tout $s > -a_1$: $\mathbb{E}(X_{a,b,-,-}^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s}$.

— Si $n < m$ et si $a \prec b$ alors il existe une variable aléatoire positive ou nulle Y telle que la variable $X_{a,b,-,-}$ égale à $Y \underset{\perp}{\times} \gamma_{a_{n+1}} \underset{\perp}{\times} \dots \underset{\perp}{\times} \gamma_{a_m}$ vérifie bien : pour tout $s > -a_1$:

$$\mathbb{E}(X_{a,b,-,-}^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s} \left(\text{et avec donc : } \mathbb{E}(Y^s) = \prod_{k=1}^n \frac{(a_k)_s}{(b_k)_s} \right).$$

PREUVE DU COROLLAIRE 4.2.11 : Le Lemme de Schur 4.2.10, nous dit alors que pour tout $x > 0$, (donc $-x \leq 0$), avec $t = e^{-x} \in [0, 1]$: $\theta_{a,b}(x) = \varphi_{a,b}(-x) = \sum_{i=1}^n e^{-a_i x} - e^{-b_i x} \geq 0$. La

Proposition 4.2.8 puis la Remarque 4.2.5 permettent de conclure.

□

Remarque 4.2.12 Ainsi dans le cadre de l'hypothèse $\varphi_{a,b} \geq 0$, on peut donc se limiter grâce à ce dernier Corollaire, à $m = n$.

Proposition 4.2.13 On suppose $m = n$ et $\varphi_{a,b}(x) \geq 0$, pour tout $x \leq 0$. Alors il existe une variable aléatoire $X_{a,b,-,-}$ à valeurs dans $[0, 1]$, log-ID qui vérifie, pour tout $s > -a_1$:

$$\mathbb{E}(X^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.13 : Reprenons, en changeant la variable x par $-x$:

$$\frac{(a)_s}{(b)_s} = \exp \left[\left(\tilde{\psi}(b) - \tilde{\psi}(a) \right) s + \int_{-\infty}^0 (e^{-sx} - 1 + sx) \frac{\varphi_{a,b}(e^{-x})}{x(1 - e^{-x})} dx \right].$$

Alors : $\varphi_{ab}(-x) = \sum_{i=1}^n (e^{-a_i x} - e^{-b_i x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\sum_{i=1}^n b_i - a_i \right) x = O(x)$.

Puis :

$$\ln \left[\frac{(a)_s}{(b)_s} \right] = \left[\tilde{\psi}(b) - \tilde{\psi}(a) + \sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a_i x} - e^{-b_i x}}{1 - e^{-x}} dx \right] s - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-sx}) \frac{\varphi_{a,b}(e^{-x})}{x(1 - e^{-x})} dx.$$

Grâce à la représentation intégrale de la fonction digamma (Proposition 1.3.15) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a_i x} - e^{-b_i x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-a_i x}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx - \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-b_i x}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = -\psi(a_i) + \psi(b_i).$$

Donc finalement :

$$\frac{(a)_s}{(b)_s} = \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{-sx}) \frac{\varphi_{a,b}(e^{-x})}{x(1 - e^{-x})} dx \right].$$

La formule de De Finetti (Corollaire 4.1.4) donne l'existence d'une variable Z positive ou nulle et ID telle que, pour tout $s > -a_1$: $\mathbb{E}(e^{-sZ}) = \frac{(a)_s}{(b)_s}$.

Alors $X_{a,b,-,-} = e^{-Z}$, est bien la solution au problème Gamma et est bien à valeurs dans $[0, 1]$. \square

Proposition 4.2.14 *On suppose toujours $m = n$ et $\varphi_{a,b}(x) \geq 0$, pour tout $x \leq 0$. Et soit $X_{a,b,-,-}$ la variable solution au problème Gamma selon la Proposition 4.2.13.*

- Si $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$, alors $\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} < 1$, et $\mathbb{P}(X_{a,b,-,-} = 1) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)}$ (il s'agit d'un atome)
- Si $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i$, alors $X_{a,b,-,-}$ est à densité.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.14 :

- Cas $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$, Comme $X_{a,b,-,-}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, alors nous allons montrer que :

$$\mathbb{P}(X_{a,b,-,-} = 1) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_{a,b,-,-}^s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \frac{(a_i)_s}{(b_i)_s} = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)}.$$

Ce qui impliquera tout le résultat dans ce cas.

Pour la première égalité, en fait (et ceci s'observe dans la démonstration de la formule de De Finetti...) la variable Y telle que $X_{a,b,-,-} = e^{-Y}$ suit une loi de Poisson composée : $e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \mu_{a,b}^{*n}}{n!}$, où $\lambda = \pi(]0, +\infty[) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_{a,b}(e^{-x})}{x(1-e^{-x})} dx$, et $d\mu_{a,b}(x) = \frac{1}{\lambda} f_{a,b}(x) dx$,

où $f_{a,b}(x) = \frac{\varphi_{a,b}(e^{-x})}{x(1-e^{-x})} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$.

$\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-\lambda}$, et en fait :

$$d\mathbb{P}_Y(x) = e^{-\lambda} d\delta_0(x) + (1 - e^{-\lambda}) d\mu_{a,b}(x),$$

puis :

$$d\mathbb{P}_X(x) = e^{-\lambda} d\delta_1(x) + (1 - e^{-\lambda}) \frac{d\mu_{a,b}(-\ln(x))}{x}. \quad (2.8)$$

Et alors :

$$\mathbb{P}(X_{a,b,-,-} = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(e^{-sY}) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_{a,b,-,-}^s) = \exp \left[\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_{a,b}(e^{-x})}{x(1-e^{-x})} dx \right].$$

Pour la seconde égalité, encore par la formule de Stirling (Théorème 1.1.7), pour tout i compris entre 1 et n :

$$\frac{(a_i)_s}{(b_i)_s} = \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} \times \frac{\Gamma(a_i + s)}{\Gamma(b_i + s)} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} s^{a_i - b_i},$$

Et donc :

$$\mathbb{E}(X_{a,b,-,-}^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} \right)^s \left(\sum_{i=1}^n a_i - b_i \right).$$

(Puisque $\mathbb{P}(X_{a,b,-,-} = 1) < 1$, nous trouvons sur notre passage une justification de la troisième condition donnée dans la Proposition 4.2.6).

Comme l'exposant est supposé nul, nous trouvons donc que $\mathbb{P}(X_{a,b,-,-} = 1) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)}$.

(Ce qui donne une autre condition sur a et b : $\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} < 1$)

- Cas $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i$. Dans ce cas $\mathbb{P}(X_{a,b,-,-} = 1) = 0$, et alors : $\frac{\varphi_{a,b}(e^{-x})}{x(1-e^{-x})} \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^n b_i - a_i \right)$ qui n'est pas intégrable au voisinage de 0. Le Théorème de Tucker 4.1.10 donne la conclusion.

□

Remarque 4.2.15 La condition $(\mathcal{C}) : \begin{cases} a_1 \leq b_1 \\ a_1 + \dots + a_n \leq b_1 + \dots + b_n \end{cases}$ est suffisante dans le cas $m = n = 1, m = n = 2$, mais plus quand $n \geq 3$, pour obtenir " $\varphi_{a,b}(x) \geq 0$, pour tout $x \leq 0$. Voici un exemple :

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{16}{5}, a_3 = \frac{17}{5}, b_1 = \frac{11}{5}, b_2 = \frac{12}{5}, b_3 = 4.$$

Nous avons $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{43}{5} = b_1 + b_2 + b_3$.

S'il y avait une variable aléatoire positive ou nulle $X_{a,b,-,-}$ solution au problème Gamma, alors, l'atome en 1 serait de probabilité :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} = \frac{3 \times 4 \times \Gamma\left(\frac{11}{5}\right) \Gamma\left(\frac{12}{5}\right)}{\frac{12}{5}\Gamma\left(\frac{12}{5}\right) \times \frac{11}{5}\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)} = \frac{25}{11} > 1,$$

ce qui est impossible.

4.2.2 Recherche de la densité dans le cas : c, d vides et $n = m = 2$

Remarque 4.2.16 Dans le cas $n = m = 1$, c, d vides, nous avons vu que si $0 < a_1 \leq b_1$, alors :

$$\mathbb{E}(X_{(a_1),(b_1),-,-}^s) = \frac{(a_1)_s}{(b_1)_s} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = b_1 \\ \frac{\Gamma(a_1 + s)\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1 + s)\Gamma(a_1)} & \text{si } a_1 < b_1 \end{cases}$$

Nous reconnaissons : $X_{(a_1),(b_1),-,-} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a_1, b_1 - a_1}$, avec comme convention $\beta_{a_1, 0} = \delta_1$. Dès lors dans le cas où $a_1 < b_1$, nous avons que $X_{(a_1),(b_1),-,-}$ a pour densité :

$$\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1 - a_1)} x^{a_1 - 1} (1 - x)^{b_1 - a_1 - 1} \mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

Pour étudier le cas $n = m = 2$, nous allons introduire une nouvelle famille de fonctions, les séries hypergéométriques de Gauss (ou de Kummer de seconde espèce).

Proposition 4.2.17 Soient A, B, C trois réels, tel que $C \notin \mathbb{Z}^-$.

Alors la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(A)_n (B)_n}{(C)_n n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.17 : Nous avons, par un raisonnement déjà vu via la formule de Stirling (Théorème 1.1.7) que :

$$\left[\frac{(A)_n (B)_n}{(C)_n n!} \right]^{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^2} = 1.$$

Par le critère de Hadamard, la série à un rayon de convergence de 1, la série converge sur le disque unité ouvert. \square

Définition 4.2.18 Soient A, B, C trois réels, tel que $C \notin \mathbb{Z}^-$.

On appelle série hypergéométrique de Gauss ou fonction de Kummer de seconde espèce la série entière définie pour tout complexe z de \mathbb{U} , le disque unité ouvert :

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} A & B \\ & C \end{matrix}, z \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A)_n (B)_n}{(C)_n n!} z^n.$$

Voici des propriétés de cette fonction, que nous admettrons :

Théorème 4.2.19 (Euler) Soient A, B, C trois réels, tel que $C \notin \mathbb{Z}^-$. Alors pour tout complexe z tel que $|z| < 1$:

- Première formule d'Euler : Si $C > B > 0$ ou si $C > A > 0$:

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} A & B \\ & C \end{matrix}, z \right] = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \int_0^1 u^{B-1} (1-u)^{C-B-1} (1-zu)^{-A} du$$

- Deuxième formule d'Euler :

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} A & B \\ & C \end{matrix}, z \right] = (1-z)^{C-A-B} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} C-A & C-B \\ & C \end{matrix}, z \right].$$

Théorème 4.2.20 (Formule de Kummer) Pour tous réels A, B, C et tout complexe z tel que $|z| < 1$ et $\Re(z) < \frac{1}{2}$:

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} A & B \\ & C \end{matrix}, z \right] = (1-z)^{-A} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} A & C-B \\ & C \end{matrix}, \frac{z}{z-1} \right].$$

Remarque 4.2.21

- La formule est légitime pour z tel que $|z| < 1$ et $\left| \frac{z}{z-1} \right| < 1$, cette seconde condition donnant :

$$\frac{|z|}{|z-1|} < 1 \iff 2\Re(z) < 1.$$

- Felix Klein (1890) a compté le nombre de zéros dans $] -1, 1[$ de ${}_2F_1 \left[\begin{matrix} A & B \\ & C \end{matrix}, z \right]$.

Théorème 4.2.22 La variable aléatoire réelle $X_{a,b,-,-}$ solution du problème Gamma dans le cas où $n = m = 2$ et $a < b$ et a_1, a_2, b_1, b_2 tous distincts $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$ est de densité :

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)x^{a_2-1}(1-x)^{b_1+b_2-a_1-a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1+b_2-a_1-a_2)} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1-a_1 & b_2-a_1 \\ b_1+b_2-a_1-a_2 \end{matrix}, 1-x \right] \mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

PREUVE DU THÉORÈME 4.2.22 : Remarquons premièrement que dans le cas où deux nombres parmi a_1, a_2, b_1, b_2 sont égaux, nous revenons aux cas $n = 1 = m$, ou $n = 1, m = 2$, ou $n = 2, m = 1$ (ce dernier qui n'a pas de solution) tous déjà vus et résolus.

Plaçons nous dans le cas : $0 < a_1 < b_1, a_2 < b_2$, alors lors de la Remarque 4.2.5, nous avons pu voir que :

$$X_{a,b,-,-} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a_1, b_1 - a_1} \times \beta_{a_2, b_2 - a_2}.$$

Faisant la convolution des densités $\left(f_{XY}(x) = \int_0^{+\infty} f_X\left(\frac{x}{y}\right) f_Y(y) \frac{dy}{y} \right)$, la densité f que nous cherchons est telle que :

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)x^{a_1-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1-a_1)\Gamma(b_2-a_2)} \underbrace{\int_x^1 \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{b_1-a_1-1} (1-y)^{b_2-a_2-1} y^{a_2-a_1-1} dy}_{\aleph(x)}. \quad (2.9)$$

Dès lors, pour tout x de $]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \aleph(x) &= \int_x^1 y^{a_2-b_1} (y-x)^{b_1-a_1-1} (1-y)^{b_2-a_2-1} dy \\ &= \int_0^{1-x} t^{b_1-a_1-1} (1-(x+t))^{b_2-a_2-1} (x+t)^{a_2-b_1} dt \text{ avec } t = y-x \\ &= \int_0^1 (1-x)^{b_1-a_1-1} u^{b_1-a_1-1} (1-x)^{b_2-a_2-1} (1-u)^{b_2-a_2-1} x^{a_2-b_1} \left(1 - \frac{x-1}{x}u\right)^{a_2-b_1} du, \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec $u = \frac{t}{1-x}$.

Dès lors, grâce à la première formule d'Euler (Théorème 4.2.19), avec $A = b_1 - a_2$, $B = b_2 - a_1$, et $C = b_1 + b_2 - (a_1 + a_2) > b_2 - a_1 > 0$, nous avons :

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)x^{a_1+a_2-b_1-1}(1-x)^{b_1+b_2-a_1-a_2-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1+b_2-a_1-a_2)} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_2 & b_1 - a_1 & x-1 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 & & x \end{matrix} \right]. \quad (2.11)$$

Les rôles de A et B dans la fonction de Kummer étant symétriques, puis grâce à la formule de Kummer (Théorème 4.2.20), avec $z = \frac{x-1}{x} \in]0, 1[$, sachant que si $x \in]0, 1[$, alors :

$$\frac{z}{z-1} = 1 - x \in]0, 1[:$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_2 & b_1 - a_1 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \end{matrix}, \frac{x-1}{x} \right] &= {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_1 & b_1 - a_2 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \end{matrix}, \frac{x-1}{x} \right] \\ &= \left(1 - \frac{x-1}{x} \right)^{-(b_1-a_1)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_1 & b_1 + b_2 - a_1 - a_2 - b_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \end{matrix}, 1-x \right] \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)^{a_1-b_1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_1 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \end{matrix}, 1-x \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Combinant les égalités (2.11) et (2.12) :

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)x^{a_2-1}(1-x)^{b_1+b_2-a_1-a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1+b_2-a_1-a_2)} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_1 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \end{matrix}, 1-x \right] \mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

Comme $b_1 - a_1 > 0$, $b_2 - a_1 > 0$, $(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2) > 0$, $1 - x > 0$, par analyticité de la dépendance en les paramètres, la formule s'étend à toutes les configurations telles que $b_1 + b_2 - (a_1 + a_2)$. En effet, grâce à la deuxième formule d'Euler (Théorème 4.2.19) que pour tout x appartenant à $]0, 1[$:

$$x^{a_2-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_1 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \end{matrix}, x \right] = x^{a_1-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_2 - a_2 & b_1 - a_2 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 \end{matrix}, 1-x \right]$$

□

Remarque 4.2.23

- Le théorème taubérien faible nous dit que la série de Gauss admet une limite quand x tend vers 1^- . Et si $C > A + B$, la première formule d'Euler (Théorème 4.2.19) nous dit qu'elle correspond à la limite quand x tend vers 1^- de l'intégrale :

$$\frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \int_0^1 u^{B-1}(1-u)^{C-B-1}(1-zu)^{-A} du,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} A & B \\ C \end{matrix}, x \right] &= \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \underbrace{\int_0^1 u^{B-1}(1-u)^{C-B-A-1} du}_{\text{Intégrale } B, C-B-A} \\ &= \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \times \frac{\Gamma(B)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(B+C-B-A)} \\ &= \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)}. \end{aligned}$$

- Une méthode non constructive aurait consisté à calculer les moments d'ordre $s > -a_1$ avec la densité annoncée et montrer qu'il s'agissait bien des $\frac{(a)_s}{(b)_s}$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)x^s dx \\
&= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1+b_2-a_1-a_2)} \\
& \quad \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b_1-a_1)_n(b_2-a_1)_n}{n!(b_1+b_2-a_1-a_2)_n} \underbrace{\int_0^1 x^{s+a_2-1}(1-x)^{n+b_1+b_2-a_1-a_2-1} dx}_{\text{Intégrale } B(s+a_2, n+b_1+b_2-a_1-a_2)} \right) \\
&= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1+b_2-a_1-a_2)} \\
& \quad \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b_1-a_1)_n(b_2-a_1)_n}{n!(b_1+b_2-a_1-a_2)_n} \times \frac{\Gamma(s+a_2)\Gamma(n+b_1+b_2-a_1-a_2)}{\Gamma(s+n+a_2+b_1+b_2-a_1-a_2)} \right) \\
&= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(s+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(s+b_1+b_2-a_1)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b_1-a_1)_n(b_2-a_1)_n}{n!(s+b_1+b_2-a_1)_n} \right).
\end{aligned}$$

Or, avec $C = s+b_1+b_2-a_1$, $A = b_1-a_1$, $B = b_2-a_1$, alors $C > b_1+b_2-a_1-a_1 > A+B$, car $s > -a_1$. Et la dernière remarque, nous dit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b_1-a_1)_n(b_2-a_1)_n}{n!(s+b_1+b_2-a_1)_n} = \frac{\Gamma(s+b_1+b_2-a_1)\Gamma(s+a_1)}{\Gamma(s+b_2)\Gamma(s+b_1)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)x^s dx &= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(s+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(s+b_1+b_2-a_1)} \frac{\Gamma(s+b_1+b_2-a_1)\Gamma(s+a_1)}{\Gamma(s+b_2)\Gamma(s+b_1)} \\
&= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(s+a_1)\Gamma(s+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(s+b_2)\Gamma(s+b_1)} = \frac{(a)_s}{(b)_s}.
\end{aligned}$$

Théorème 4.2.24 (Dufresne, 2010) *La variable aléatoire réelle $X_{a,b,-,-}$ solution du problème Gamma dans le cas où $n = m = 2$ et $a < b$ et $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ a pour loi :*

$$d\mathbb{P}_{X_{a,b,-,-}}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} d\delta_1(x) + \widetilde{f}_{a,b}(x)dx,$$

$$\text{où : } \widetilde{f}_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_2-1}(b_1-a_1)(b_2-a_1) \times_2 F_1 \left[\begin{matrix} b_1-a_1+1 & b_2-a_1+1 \\ 2 \end{matrix}, 1-x \right] \mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

PREUVE DU THÉORÈME 4.2.24 : Dans ce cas, il y a présence d'un dirac en 1 et alors l'égalité (2.8), donne un début :

$$d\mathbb{P}_{X_{a,b,-,-}}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}d\delta_1(x) + \widetilde{f}_{a,b}(x)dx.$$

Pour trouver $\widetilde{f}_{a,b}$ on va faire usage d'une limite de fonctions $f_{a,b}^{(\varepsilon)}$ quand ε tend vers 0.

Soit grâce à la Proposition 4.2.14 (second cas) la densité de la variable aléatoire $X_{a^{(\varepsilon)},b,-,-}$ solution au problème (Γ_ε) :

$$\forall s > -a_1 : \mathbb{E}(X^s) = \frac{(a^{(\varepsilon)})_s}{(b)_s}, \text{ où } a^\varepsilon = (a_1, a_2 - \varepsilon).$$

D'après le Théorème 4.2.22, nous avons (grâce aussi à la seconde formule d'Euler (Théorème 4.2.19)) :

$$f_{a,b}^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)x^{a_1-1}(1-x)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_2 + \varepsilon & b_2 - a_2 + \varepsilon \\ \varepsilon \end{matrix}, 1-x \right] \mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

On développe en série entière $f_{a,b}^{(\varepsilon)}$, son premier terme est égal, pour tout x de $]0,1[$ à $\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}x^{a_1-1}(1-x)^{\varepsilon-1}$, l'atome en 1 provient de l'intégrale sur $]0,1[$ de ce terme... En effet, en intégrant sur $]0,t[$ pour $t < 1$:

— Comme sur $]0,t[$, $x \mapsto (1-x)^{\varepsilon-1}$ croît et donc est majorée par $(1-t)^{\varepsilon-1}$.

Donc, comme $a_1 > 0$:

$$\int_0^t x^{a_1-1}(1-x)^{\varepsilon-1}dx < \int_0^t x^{a_1-1}(1-t)^{\varepsilon-1}dx = \frac{t^{a_1}}{a_1}(1-t)^{\varepsilon-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{t^{a_1}}{a_1(1-t)} < +\infty.$$

— Nous avons : $\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$, car $\Gamma(a_2-\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Gamma(a_2)$, $\Gamma(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$.

Donc : $\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^t x^{a_1-1}(1-x)^{\varepsilon-1}dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$. Et lorsque $t = 1$:

$$\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \underbrace{\int_0^1 x^{a_1-1}(1-x)^{\varepsilon-1}dx}_{\text{Intégrale } B(a_1,\varepsilon)} = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \times \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(a_1+\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}.$$

(l'atome)

Le reste de la série est une fonction $\widetilde{f}_{a,b}^{(\varepsilon)}$ positive (à termes positifs) sur $]0,1[$. Et, pour tout x de $]0,1[$:

$$\widetilde{f}_{a,b}^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2-\varepsilon)}x^{a_1-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(b_1 - a_2 + \varepsilon)_n (b_2 - a_2 + \varepsilon)_n}{(\varepsilon)_n n!} (1-x)^{\varepsilon+n-1} \right) \mathbb{1}_{]0,1[}(x),$$

$((\varepsilon)_n = \Gamma(\varepsilon + n))$ et cette fonction, quand ε tend vers 0^+ , converge vers :

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_{a,b}(x) &= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(b_1 - a_2)_n (b_2 - a_2)_n}{(n-1)! \times n!} (1-x)^{n-1} \right) \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \\ &= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b_1 - a_2)_{n+1} (b_2 - a_2)_{n+1}}{n! \times (n+1)!} (1-x)^n \right) \mathbb{1}_{]0,1[}(x).\end{aligned}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} (b_1 - a_2)_{n+1} = (b_1 - a_2)(b_1 - a_2 + 1) \times \cdots \times (b_1 - a_2 + n + 1) = (b_1 - a_2) \times (b_1 - a_2 + 1)_n \\ \text{De même : } (b_2 - a_2)_{n+1} = (b_2 - a_2) \times (b_2 - a_2 + 1)_n \\ (n+1)! = (1)_{n+1} = 1 \times (2)_n \end{cases}$$

Ainsi finalement :

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_{a,b}(x) &= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_2-1} (b_1 - a_1)(b_2 - a_1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b_1 - a_2 + 1)_n (b_2 - a_2 + 1)_n}{n! \times (2)_n} (1-x)^n \right) \\ &= \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_2-1} (b_1 - a_1)(b_2 - a_1) \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b_1 - a_2 + 1 & b_2 - a_2 + 1 \\ 2 \end{matrix}, 1-x \right] \mathbb{1}_{]0,1[}(x).\end{aligned}$$

Il est facile de voir (Beppo-Levy en ε) que pour tout t de $]0, 1[$:

$$\int_0^t \widetilde{f}_{a,b}^{(\varepsilon)}(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^t \widetilde{f}_{a,b}(x) dx.$$

Donc $X_{a(\varepsilon),b,-,-} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\mathcal{L} \text{ sur }]0,1[} X_{a,b,-,-}$. Ce qui clôt la démonstration. \square

4.3 Mélanges γ_2 , quasi-ID, un résultat pour c non vide

Conjecture 4.3.1 *S'il existe une variable aléatoire $X_{a,b,-,-}$ telle que :*

$$\forall s > -a_1, \mathbb{E}(X_{a,b,-,-}^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s},$$

alors $X_{a,b,-,-}$ est log-ID.

C'est-à-dire que le moment Gamma aurait une représentation :

$$\forall s > -a_1 : \frac{(a)_s}{(b)_s} = \exp \left[qs + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{\theta_{a,b}(x)}{x(1-e^x)} dx \right],$$

avec $\forall x \leq 0 : \theta_{a,b}(x) := \sum_{i=1}^m e^{a_i x} - \sum_{j=1}^n e^{b_j x} \geq 0$.

Autrement dit :

$$\mathbb{E}X_{a,b,-,-} \geq 0 \mid \forall s > -a_1 : \mathbb{E}(X^s) = \frac{(a)_s}{(b)_s} \iff \forall x \leq 0 ; \theta_{a,b}(x) \geq 0.$$

On va voir que cette conjecture ne s'applique pas au cas plus général : $s \in]-a_1, c_1[$: $\frac{(a)_s(c)_{-s}}{(b)_s(d)_{-s}}$.

Proposition 4.3.2

$$|C| \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{\frac{\gamma_{\frac{1}{2}}}{\widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}}}, \text{ où } \gamma_{\frac{1}{2}} \text{ et } \widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} \text{ sont deux copies indépendantes de la loi } \gamma_{\frac{1}{2}}.$$

PREUVE DU PROPOSITION 4.3.2 : On va identifier les transformées de Mellin sur $] - 1, 1[$. Pour tout $-1 < s < 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|C|^s) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^s}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{s+1}{2}-1}}{1+t} dt \text{ avec } t = x^2. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{t+1}$, $dt = -\frac{du}{u^2}$, $t = \frac{1}{u} - 1$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|C|^s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-u)^{\frac{s-1}{2}} u^{\frac{1-s}{2}} \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^1 u^{\frac{1-s}{2}-1} (1-u)^{\frac{1+s}{2}-1}}_{\text{Intégrale } B_{\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}}} \\ &= \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1+s}{2}\right). \end{aligned}$$

$\left(\dots = \frac{1}{\sin\left(\pi\left(\frac{1+s}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}, \text{ grâce à la formule des compléments (Théorème 1.3.5)} \right)$.

Or, sachant que pour tout $a > 0$, pour tout $s > -a$: $\mathbb{E}(\gamma_a^s) = \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}$, alors par indépendance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sqrt{\frac{\gamma_{\frac{1}{2}}}{\widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}}}\right)^s\right] &= \mathbb{E}\left(\gamma_{\frac{1}{2}}^{\frac{s}{2}}\right) \times \mathbb{E}\left(\gamma_{\frac{1}{2}}^{-\frac{s}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1+s}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.3.3 *Il existe une variable aléatoire X positive ou nulle telle que :*

$$|C| \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_2 \times_{\perp} X.$$

PREUVE DU PROPOSITION 4.3.3 : La preuve repose que la formule permettant d'avoir la densité d'un quotient de deux variables aléatoires indépendantes :

$$f_{\frac{X}{Y}}(x) = \int_0^{+\infty} f_X(xy) f_Y(y) dy.$$

La densité de $|S|$ est $\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \right)$.

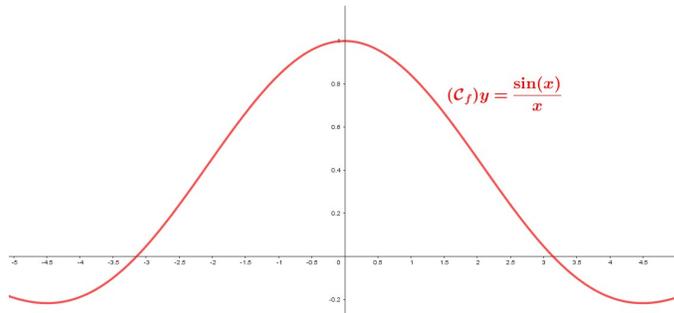
D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos\left(\frac{t}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t(1+\frac{i}{x})} dx + \int_0^{+\infty} e^{-t(1-\frac{i}{x})} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{i}{x}} + \frac{1}{1-\frac{i}{x}} \right) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi(1+x^2)} &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos\left(\frac{t}{x}\right) dt \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[1 - \cos\left(\frac{t}{x}\right) \right] dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-xy} (1 - \cos(y)) dy \text{ avec } t = xy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (xy) e^{-xy} \times \frac{1 - \cos y}{y^2} \times y dy \\ &= \int_0^{\infty} f_{\gamma_2}(xy) \times \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}} \right)^2 y dy \text{ car } 1 - \cos(y) = 2 \left(\sin \frac{y}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

On va montrer à présent que $y \mapsto \frac{1}{\pi} [\text{sinc}\left(\frac{y}{2}\right)]^2 \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$ est une densité de probabilité, où $\text{sinc}(x)$ désigne le sinus cardinal : $\frac{\sin(x)}{x}$, (Pourquoi "cardinal" ? Parce que la courbe de cette fonction autour de l'origine ressemble au chapeau des cardinaux de l'Église catholique).



Grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{y}{2} \right) \right)^2 dy &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(y)}{y^2} dy \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} -\frac{1}{y^2} \int_0^y \sin(x) dx dy \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} -\frac{1}{y^2} \sin(x) dy dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(x) \times \left[\frac{1}{y} \right]_x^{+\infty} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = 1 \text{ car } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ (Dirichlet)}.
\end{aligned}$$

Il existe donc une variable aléatoire positive ayant cette densité de probabilité. Et donc on a bien $|\mathcal{C}| = \gamma_2 \times X$. \square

Remarque 4.3.4 Stentel (1973) a conjecturé et Kristiansen (1994) a démontré que les variables aléatoires positives du type $\gamma_2 \times X$ qu'on appelle "mélanges γ_2 " sont ID.

En particulier, $|\mathcal{C}|$ est ID et sa Laplace, d'après le Théorème de De Finetti (Théorème 4.1.3) est de la forme :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{1+x^2} dx = \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda u}) \frac{\varphi(u)}{u} du \right],$$

où $\varphi(u) \geq 0$.

Diédhion (1998) a démontré que φ décroît. On parle d'autodécomposabilité (notion que l'on rencontrera lors de l'étude des processus de diffusion)

Proposition 4.3.5 $s \mapsto \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2}\right)_{-s}}{\left(1, \frac{3}{2}\right)_s}$ pour tout s appartenant à $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ est un moment Gamma.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.3.5 : Grâce à la dernière Proposition 4.3.3 :

$$\mathbb{E}(|\mathcal{C}|^s) = \mathbb{E}(\gamma_2^s) \mathbb{E}(X^s).$$

D'où, grâce à la formule de Legendre-Gauss (Théorème 2.1.1) :

$$\mathbb{E}(X^s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi \Gamma(2+s)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{2^s \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{s}{2}\right)}.$$

En posant $Y = (2X)^2$, on en déduit :

$$\mathbb{E}(Y^s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{2\Gamma(1+s)\Gamma\left(\frac{3}{2} + s\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2}\right)_{-s}}{\left(1, \frac{3}{2}\right)_s}.$$

□

Remarque 4.3.6

— $s \mapsto \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s}{\left(1, \frac{3}{2}\right)_s}$ n'est pas un moment Gamma, car $m = 1 < 2 = n$. (Proposition 4.2.6).

C'est la "perturbation" $\left(\frac{1}{2}\right)_{-s}$ qui en fait un moment Gamma.

— En reprenant la relation (2.7) (et en l'adaptant...)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^s) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2}\right)_{-s}}{\left(1, \frac{3}{2}\right)_s} \\ &= \exp \left[\left(\psi(1) + \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) s + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^x - e^{\frac{3}{2}x}}{|x|(1 - e^{-x})} dx + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{|x|(1 - e^{-x})} dx \right] \\ &= \exp \left[qs + \int_{\mathbb{R}_*} (e^{sx} - 1 - sx) \frac{\varphi(x)}{|x|(1 - e^{-x})} dx \right], \end{aligned}$$

où $\varphi(x) = \left(e^{-\frac{|x|}{2}} - e^{-|x|} - e^{-\frac{3|x|}{2}} \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) + e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$.

Et cette fonction ne demeure pas positive sur \mathbb{R} entier, ce qui contredit donc la condition rencontrée quand c était vide.

Définition 4.3.7 On dit qu'une variable aléatoire X est quasi-ID si sa fonction caractéristique est de la forme :

$$\ln [\mathbb{E}(e^{itX})] = qit - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_*} (e^{itu} - 1 - itu) \varphi(u) du,$$

où $\int_{\mathbb{R}} \min(1, u^2) |\varphi(u)| du < +\infty$, et φ est signée.

Présentons à présent une solution explicite à un autre problème Gamma avec a, b, c, d non vides. Les résultats sont inspirés de l'article [12] :

Théorème 4.3.8 Soit $\alpha > 0$, alors pour tout s de $]-\frac{1}{2}, \alpha[$, $\frac{(\frac{1}{2})_s (\alpha)_{-s}}{(1)_s (1+\alpha)_{-s}}$ est un moment Gamma, et la loi de la variable aléatoire $X_{(\frac{1}{2}), (1), (\alpha, 1+\alpha), -}$ associée est à densité :

$$f_{(\frac{1}{2}), (1), (\alpha, 1+\alpha), -}(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{J_\alpha^2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)}{x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x),$$

où J_α désigne la fonction de Bessel de première espèce d'indice α .

Nous avons besoin de la formule suivante :

Lemme 4.3.9 (Formule de Weber-Schafheitlin)

Pour tout $\alpha > 0$, et pour tout s appartenant à $]-\frac{1}{2}, \alpha[$:

$$\int_0^{+\infty} x^{-2s-1} J_\alpha^2(x) dx = \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\alpha - s)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(1+s) \Gamma(\alpha + 1 + s)}.$$

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.8 : Pour tout s de $]-\frac{1}{2}, \alpha[$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{(\frac{1}{2}), (1), (\alpha, 1+\alpha), -}(x) x^s dx &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^s \frac{J_\alpha^2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)}{x} dx \\ &= \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{-2s} \frac{J_\alpha^2(y)}{y^{-2}} y^{-3} dy \text{ avec } x = y^{-2} \\ &= \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{-2s-1} J_\alpha^2(y) dy. \end{aligned}$$

Le Lemme 4.3.9 nous dit alors que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{(\frac{1}{2}), (1), (\alpha, 1+\alpha), -}(x) x^s dx &= \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} - s - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + s + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\alpha - s) \Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(\alpha) \Gamma(s+1) \Gamma(\alpha + s + 1)} = \frac{(\frac{1}{2})_s (\alpha)_{-s}}{(1, 1+\alpha)_s}. \end{aligned}$$

□

PREUVE DU LEMME 4.3.9 : D'après la formule de Von Lommel (Proposition 3.3.1)

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \int_{-1}^1 e^{it} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt.$$

Alors, grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} x^{-2s-1} J_\alpha^2(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^{-2s-1}}{\pi \left(\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha} e^{i(t+u)x} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dudt dx \\
&= \frac{2^{-2\alpha}}{\pi \left(\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_{[-1,1]^2} \int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} e^{i(t+u)x} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx dudt \\
&= \frac{2^{-2\alpha}}{\pi \left(\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_{[-1,1]^2} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} e^{i(t+u)x} dx \right) dudt.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Le membre de gauche étant un réel, alors :

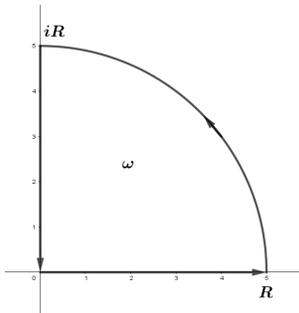
$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} x^{-2s-1} J_\alpha^2(x) dx \\
&= \frac{2^{-2\alpha}}{\pi \left(\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_{[-1,1]^2} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} \cos((t+u)x) dx \right) dudt \\
&\stackrel{(u \rightarrow -u)}{=} \frac{2^{-2\alpha}}{\pi \left(\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_{[-1,1]^2} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} \cos((t-u)x) dx \right) dudt \\
&= \frac{2^{-2\alpha}}{\pi \left(\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \int_{[-1,1]^2} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} \cos(|t-u|x) dx \right) dudt
\end{aligned}$$

Nous allons devoir calculer l'intégrale de type Fresnel : $\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} \cos(|t-u|x) dx$, pour $t \neq u$.

Comme $s \in \left] -\frac{1}{2}, \alpha \right[$, alors $-1 < 2\alpha - 2s < 0$. Donc la fonction : $f : z \mapsto z^{2\alpha-2s} e^{i|t-u|z}$ est entière. D'après la formule de Cauchy :

$$\int_{\widehat{\partial\omega}} \frac{f(z)}{z} dz = 2i\pi f(0) = 0,$$

où $\widehat{\partial\omega}$ est le contour suivant :



$$0 = \int_0^R x^{2\alpha-2s-1} e^{i|t-u|x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(Re^{i\theta} \right)^{2\alpha-2s-1} e^{i|t-u|Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta + \int_R^0 (ix)^{2\alpha-2s-1} e^{i|t-u|ix} i dx.$$

Or :

- $\int_0^R x^{2\alpha-2s-1} e^{i|t-u|x} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} e^{i|t-u|x} dx.$
- $\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(Re^{i\theta} \right)^{2\alpha-2s-1} e^{i|t-u|Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{2\alpha-2s} e^{-|t-u|\sin(\theta)} d\theta \leq \frac{\pi}{2} R^{2\alpha-2s} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$
car $-1 < 2\alpha - 2s < 0.$
- À l'aide du changement de variable $w = |t - u|x$:

$$\begin{aligned} & \int_R^0 (ix)^{2\alpha-2s-1} e^{-|t-u|x} i dx \\ &= \int_{|t-u|R}^0 e^{i\frac{\pi}{2}(2\alpha-2s)} \left(\frac{w}{|t-u|} \right)^{2\alpha-2s-1} e^{-w} \frac{dw}{|t-u|} \\ &= -\frac{e^{i\pi(\alpha-s)}}{|t-u|^{2\alpha-2s}} \int_0^{|t-u|R} w^{2\alpha-2s-1} e^{-w} dw \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -\frac{e^{i\pi(\alpha-s)}}{|t-u|^{2(\alpha-s)}} \Gamma(2(\alpha-s)). \end{aligned}$$

Et finalement, grâce à la formule des compléments (Théorème 1.3.5) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{2\alpha-2s-1} \cos(|t-u|x) dx &= \Re \left[-\frac{e^{i\pi(\alpha-s)}}{|t-u|^{2(\alpha-s)}} \Gamma(2\alpha-2s) \right] \\ &= -\cos(\pi(\alpha-s)) \frac{\Gamma(2\alpha-2s)}{|t-u|^{2(\alpha-s)}} \\ &= \sin \left(\pi \left(\alpha - s + \frac{1}{2} \right) \right) \frac{\Gamma(2\alpha-2s)}{|t-u|^{2(\alpha-s)}} \\ &= \frac{\pi \Gamma(2\alpha-2s)}{|t-u|^{2\alpha-2s} \Gamma \left(\alpha - s + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(1 - \left(\alpha - s + \frac{1}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{\pi \Gamma(2\alpha-2s)}{|t-u|^{2\alpha-2s} \Gamma \left(\alpha - s + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(s - \alpha + \frac{1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité (3.1) devient

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} x^{-2s-1} J_\alpha^2(x) dx \\ &= \frac{2^{-2\alpha} \pi \Gamma(2\alpha-2s)}{\pi \left[\Gamma \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \Gamma \left(\alpha - s + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(s - \alpha + \frac{1}{2} \right)} \int_{[-1,1]^2} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} |t-u|^{-2(\alpha-s)} dt du. \end{aligned} \tag{3.2}$$

À ce stade, nous avons besoin de connaître les intégrales de Selberg (que nous admettons) :

Lemme 4.3.10 (Intégrales de Selberg) *Pour tous $A > 0, B > 0, C \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{A,B,C} &:= \int_0^1 \int_0^1 t_1^{A-1} (1-t_1)^{B-1} t_2^{A-1} (1-t_2)^{B-1} |t_1 - t_2|^{2C} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{\Gamma(A) \Gamma(B) \Gamma(A+1) \Gamma(B+1) \Gamma(1+2C)}{\Gamma(A+B+C) \Gamma(1+C) \Gamma(A+B+2C)}. \end{aligned}$$

Alors, en posant $\begin{cases} t_1 = \frac{t+1}{2} \\ t_2 = \frac{u+1}{2} \end{cases}$, nous avons, grâce au Lemme 4.3.10 :

$$\begin{aligned} &\int_{[-1,1]^2} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} |t-u|^{-2(\alpha-s)} dt du \\ &= \int_{[0,1]^2} [-2^2 t_1 (1-t_1)]^{\alpha-\frac{1}{2}} [-2^2 t_2 (1-t_2)]^{\alpha-\frac{1}{2}} [2|t_1-t_2|]^{-2(\alpha-s)} \times 4 dt_1 dt_2 \\ &= 2^{2\alpha+2s} \mathcal{S}_{\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}, s-\alpha} \\ &= 2^{2\alpha+2s} \times \frac{[\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})]^2 [\Gamma(s+\frac{1}{2})]^2 \Gamma(1+2s-2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1+s-\alpha) \Gamma(2\alpha+1+2(s-\alpha)) \Gamma(1+s-\alpha)} \\ &= 2^{2\alpha+2s} \times \frac{[\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})]^2 [\Gamma(s+\frac{1}{2})]^2 \Gamma(1+2s-2\alpha)}{\Gamma(\alpha+s+1) \Gamma(2s+1) \Gamma(1+s-\alpha)} \end{aligned}$$

L'égalité (3.2) devient :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} x^{-2s-1} J_\alpha^2(x) dx \\ &= 2^{-2\alpha+2\alpha+2s} \times \frac{\Gamma(2\alpha-2s)}{[\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})]^2 \Gamma(\alpha-s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\alpha+\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \frac{[\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})]^2 [\Gamma(s+\frac{1}{2})]^2 \Gamma(1+2s-2\alpha)}{\Gamma(\alpha+s+1) \Gamma(2s+1) \Gamma(1+s-\alpha)} \\ &= 2^{2s} \times \frac{\Gamma(2\alpha-2s) [\Gamma(s+\frac{1}{2})]^2 \Gamma(1+2s-2\alpha)}{\Gamma(\alpha-s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(\alpha+s+1) \Gamma(2s+1) \Gamma(1+s-\alpha)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

La formule de Legendre-Gauss (Théorème 2.1.1), donne alors :

- $\Gamma(2\alpha-2s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times 2^{2\alpha-2s-1} \Gamma(\alpha-s) \Gamma\left(\alpha-s+\frac{1}{2}\right).$
- $\Gamma[2(s-\alpha)+1] = \Gamma\left[2\left(s-\alpha+\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2s-2\alpha} \Gamma\left(s-\alpha+\frac{1}{2}\right) \Gamma(s-\alpha+1).$
- $\Gamma(2s+1) = \Gamma\left[2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2s} \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \Gamma(1+s).$

Enfin, l'égalité (3.3) devient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} x^{-2s-1} J_\alpha^2(x) dx \\
&= \frac{2^{2s+2\alpha-2s-1+2s-2\alpha-2s}}{\pi} \times \frac{\Gamma(\alpha-s)\Gamma(\alpha-s+\frac{1}{2}) [\Gamma(s+\frac{1}{2})]^2 \Gamma(s-\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\alpha+\frac{1}{2})}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\alpha-s+\frac{1}{2}) \Gamma(s-\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(s+\alpha+1) \Gamma(s+\frac{1}{2}) \Gamma(s+1) \Gamma(s-\alpha+1)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha-s)\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

□

Deuxième partie

Processus de diffusion et fonctions
spéciales

Chapitre 5

Résultats généraux, premier exemple

5.1 Processus markovien

Sauf contre-indication, on suppose que b, σ sont des fonctions définies sur \mathbb{R} globalement Lipschitziennes (et donc à croissance linéaire). Soient un réel x et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel. On considère l'équation stochastique réelle :

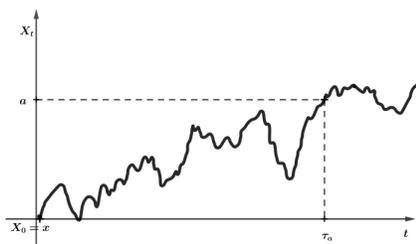
$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, t \geq 0 \\ X_0 = x \end{cases} . \quad (1.1)$$

Sous ces conditions, l'équation (1.1) admet une unique solution qui s'exprime alors sous la forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \underbrace{\int_0^t \sigma(X_s)dB_s}_{\text{(Intégrale d'Itô)}} .$$

Le but de ce chapitre est d'étudier pour certaines équations du type (1.1) la loi du temps d'atteinte des points a :

$$\tau_a = \inf\{t > 0 \mid X_t = a\} \in [0, +\infty].$$



On va faire apparaître les distinctions : $a = x$, $a > x$, et $a < x$.

Définition 5.1.1 (Propriété de Markov faible) *On note \mathbb{P}_x la loi du processus $(X_t)_{t \leq 0}$ issu de x (ie : $X_0 = x$) On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ possède la propriété de Markov faible si pour toute fonctionnelle mesurable bornée F , on a, pour tout $t \geq 0$:*

$$\mathbb{E}_x [F((X_{t+u})_{u \geq 0}) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_x [F((X_u)_{u \geq 0})].$$

La solution d'une EDS du type (1.1), a la propriété de Markov simple parce que :

$$X_{t+u} = X_t + \int_0^u b(X_{t+s}) ds + \int_0^u \sigma(X_{t+s}) d\widetilde{B}_s,$$

où $(\widetilde{B}_s)_{s \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de X_t .

Présentons à présent la version forte. On considère un temps d'arrêt T relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. T est alors une variable aléatoire positive telle que :

$$\forall t \geq 0 : \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On définit la filtration arrêtée : $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall t \geq 0 : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$.

Faits : T, B_T, X_T sont \mathcal{F}_T -mesurables.

Définition 5.1.2 (Propriété de Markov forte) *On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ possède la propriété de Markov forte si pour tout temps d'arrêt fini T , on a, pour toute fonctionnelle mesurable bornée F :*

$$\mathbb{E}_x [F((X_{T+u})_{u \geq 0}) \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}_{X_T} [F((X_u)_{u \geq 0})].$$

Théorème 5.1.3 *La solution de l'équation 1.1 possède la propriété de Markov forte. De plus, sous des conditions standards sur σ et b , ce processus a des trajectoires continues.*

On définit le noyau Markovien P_t : pour tout réel $t \geq 0$, pour tout réel x :

$$P_t[f(x)] = \mathbb{E}_x[(f(X_t))].$$

La famille $(P_t)_{t \geq 0}$ forme un semi-groupe. En effet, en utilisant la propriété de Markov forte :

$$(P_t \circ P_s)[f(x)] = \mathbb{E}_x[P_s[f(X_t)]] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)]] = \mathbb{E}_x[f(X_{t+s})] = P_{t+s}[f(x)].$$

5.2 Temps d'atteinte, exemple du brownien

Notation 5.2.1 *Soit a un réel, on notera τ_a le temps d'atteinte :*

$$\tau_a = \inf\{t > 0 \mid X_t = a\}.$$

Exemple 5.2.2 Observons le temps d'atteinte τ_a pour le processus : $X_t = x + B_t$. (cas $b = 0$, $\sigma \equiv 1$).

Par la loi du 0-1 du brownien : si $x = a$: $\tau_a = 0$. Et pour $x \neq a$ la loi de τ_a sous \mathbb{P}_x est égale à la loi de τ_{a-x} sous \mathbb{P}_0 car $(B_t)_{t \geq 0}$ ne dépend pas de x . On se ramène alors à l'étude de τ_a sous \mathbb{P}_0 .

Par symétrie des trajectoires du brownien, on a $\tau_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tau_{-a}$. On se restreint donc au cas $a > 0$. On rappelle alors la propriété d'auto-similarité spécifique au brownien :

$$\forall c > 0 : \{B_{ct}, t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\sqrt{c}B_t, t \geq 0\}.$$

Ce qui entraîne, sous \mathbb{P}_0 , pour tout $a > 0$:

$$\begin{aligned} \tau_a = \inf\{t > 0 \mid B_t = a\} &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf\left\{t > 0 \mid \frac{1}{a}B_t = 1\right\} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf\left\{t > 0 \mid B_{\frac{t}{a^2}} = 1\right\} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} a^2 \inf\left\{\frac{t}{a^2} > 0 \mid B_{\frac{t}{a^2}} = 1\right\} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} a^2 \inf\{s > 0 \mid B_s = 1\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^2 \tau_1. \end{aligned}$$

On est donc ramené à l'étude de τ_1 sous \mathbb{P}_0 . Pour tout $t \geq 0$:

$$\{\tau_1 \leq t\} = \left\{ \sup_{0 \leq u \leq t} B_u \geq 1 \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

(Donc τ_1 est un temps d'arrêt). De plus $\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty)$ (par récurrence du mouvement brownien). La propriété de récurrence du brownien est la suivante : en dimension 1, (ça marche en dimension 2 aussi) : l'ensemble $\{t \geq 0 \mid |B_t - x| \leq r\}$ est non borné pour tout réel x et tout $r > 0$.

Enfin : $B_{\tau_1} = 1$, par continuité des trajectoires du brownien.

On considère $M_t^{(\lambda)} = e^{-\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}$, pour un $\lambda > 0$. (Le brownien géométrique de paramètre λ)

Nous avons :

$$\mathbb{E}_0(M_t^{(\lambda)}) = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \mathbb{E}_0(e^{\lambda B_t}) = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \times e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} = 1.$$

Le brownien géométrique ayant la propriété de Markov forte :

$$\mathbb{E}_0[M_{\tau_1}^{(\lambda)}] = 1, \text{ or : } M_T^{(\lambda)} = e^{\lambda B_T - \frac{\lambda^2 T}{2}}, \text{ donc : } \mathbb{E}_0\left(e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}}\right) = e^{-\lambda}.$$

Dès lors pour tout $\mu \geq 0$: $\mathbb{E}_0(e^{-\mu \tau_1}) = \mathbb{E}_0\left(e^{\frac{\sqrt{2\mu^2} \tau_1}{2}}\right) = e^{-\sqrt{2\mu}}$, qui est la transformée de Laplace d'une variable suivant la loi $2Z_{\frac{1}{2}}$, où $Z_{\frac{1}{2}}$ est la loi positive $\frac{1}{2}$ -stable.

Proposition 5.2.3 *Le temps d'atteinte τ_1 pour le processus $X_t = x + B_t$ vérifie :*

$$\tau_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2Z_{\frac{1}{2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}.$$

Et la loi explicite de τ_1 est :

$$\mathbb{P}_{\tau_1} = \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x). dx.$$

On en déduit pour tout $a > 0$:

$$\tau_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2a^2 Z_{\frac{1}{2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{a^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}, \text{ et est de densité : } x \mapsto \frac{ae^{-\frac{a^2}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.2.3 La première égalité en loi vient d'être explicitée. Pour la seconde égalité en loi, deux approches :

— Par changement de variable successif :

$$\begin{aligned} d\mathbb{P}_{\gamma_{\frac{1}{2}}} &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x). dx \implies d\mathbb{P}_{2\gamma_{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi \frac{x}{2}}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x). dx \\ &\implies d\mathbb{P}_{\frac{1}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{x}}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\implies d\mathbb{P}_{\frac{1}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{x^2} \frac{e^{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{x}}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x). dx = \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x). dx. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $2Z_{\frac{1}{2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}$ en montrant que ces deux lois ont la même transformée de Laplace. Ce qui revient à prouver que pour tout λ positif ou nul :

$$\mathcal{I}_\lambda := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} \right) dx = e^{-\sqrt{2\lambda}}.$$

Nous avons à ce stade deux moyens différents pour établir cette égalité :

i) Par équations différentielles : $\lambda \mapsto e^{-\sqrt{2\lambda}}$ est la solution unique sur $]0, +\infty[$ à

$$\text{l'équation : } \begin{cases} y' = -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ Nous allons montrer que } \lambda \mapsto \mathcal{I}_\lambda \text{ est aussi cette}$$

solution. Tout d'abord : $\mathcal{I}_0 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} dx = 1$, car $x \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$ est

une densité de probabilité.

Ensuite, par dérivation sous le signe intégral, et changement de variable $v = \frac{1}{2\lambda x}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_{\lambda} &= - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2v}} \frac{e^{-\lambda v}}{\sqrt{2\pi \times \frac{1}{2\lambda v}}} \times \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \frac{dv}{v^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2v}} \frac{e^{-\lambda v}}{\sqrt{2\pi v^3}} dv = -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \mathcal{I}_{\lambda}. \end{aligned}$$

ii) Par un calcul direct : l'égalité est vraie si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x - \frac{1}{2x} - \sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2\pi x^3}} dx = 1$,

c'est-à-dire : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2\lambda x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2}}{\sqrt{2\pi x^3}} dx = 1$. Or, en posant $\mu = \sqrt{2\lambda}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mu\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2}}{\sqrt{2\pi x^3}} dx &= 1 \stackrel{(x=y^2)}{\iff} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mu y - \frac{1}{y})^2}}{y^2} dy = 1 \\ &\stackrel{(z=\sqrt{\mu y})}{\iff} \underbrace{\sqrt{\frac{2\mu}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu}{2}(z - \frac{1}{z})^2}}{z^2} dz}_{\mathcal{J}_{\lambda}} = 1. \end{aligned}$$

Or en faisant le changement de variable : $z = \frac{1}{t}$:

$$\mathcal{J}_{\lambda} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{2}(z - \frac{1}{z})^2} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{2}(t - \frac{1}{t})^2} dt$$

En sorte que : $\mathcal{J}_{\lambda} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{2}(z - \frac{1}{z})^2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\lambda} &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\mu}{2}(t - \frac{1}{t})^2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{2}(t - \frac{1}{t})^2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &\stackrel{(u=\frac{1}{t})}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\mu}{2}(t - \frac{1}{t})^2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\mu}{2}(u - \frac{1}{u})^2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{\mu}{2}(u - \frac{1}{u})^2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du \\ &\stackrel{(v=u - \frac{1}{u})}{=} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{2}v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\mu}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- Grâce à la formule de Gauss : il y a un lien assez évident avec la loi positive $\frac{1}{2}$ -stable, nous avons prouvé :

$$\begin{cases} \forall \lambda \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{-\lambda Z_{\frac{1}{2}}} \right) = e^{-\sqrt{\lambda}} \\ \forall 0 \leq s \leq \frac{1}{2} : \mathbb{E} \left(Z_{\frac{1}{2}}^s \right) = \frac{\Gamma(1-2s)}{\Gamma(1-s)} \end{cases}$$

Or, d'après la formule de Gauss :

$$\frac{\Gamma(1-2s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{4^{-s} \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Mais :

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{4\gamma_{\frac{1}{2}}} \right)^s \right] = 4^{-s} \int_0^{+\infty} x^s \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\pi x^3}} dx = \frac{4^s}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^{-(s-\frac{1}{2})} e^{-u} du = \frac{4^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right).$$

Les transformées de Mellin correspondent donc : $Z_{\frac{1}{2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{4\gamma_{\frac{1}{2}}}$.

□

Remarque 5.2.4 Nous avons un moyen de retrouver la loi de la variable aléatoire $S_t := \sup_{0 \leq u \leq t} B_u$.

Tout d'abord, nous savons d'après le principe de réflexion du brownien, pour tout réel x

$$\mathbb{P}(S_t \leq x) = 2\mathbb{P}(B_t \leq x) = \mathbb{P}(|B_t| \leq x), \text{ donc } S_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} |B_t|.$$

D'autre part, en fait :

$$\mathbb{P}(S_t \leq x) = \mathbb{P}(\tau_x \geq t) = \mathbb{P}\left(\frac{x^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}} \geq t\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{2t\gamma_{\frac{1}{2}}} \leq t\right).$$

Or on sait que $|B_t| \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{t}|B_1|$. Il suffit d'écrire les densités de $2\gamma_{\frac{1}{2}}$ et de $|B_1|$ pour constater que ce sont les mêmes.

5.3 Générateurs infinitésimaux et équations différentielles ordinaires

Définition 5.3.1 *Le générateur infinitésimal du processus ayant la propriété forte de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ qu'on note \mathcal{L} est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définie pour toute f de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ par :*

$$\mathcal{L}(f) : x \mapsto \frac{(\sigma(x))^2}{2} f''(x) + b(x) f'(x).$$

Rappelons, la définition d'un processus d'Itô, ainsi que la formule d'Itô.

Définition 5.3.2 On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô s'il est donné par :

$$dX_t = u(t)dt + v(t)dB_t,$$

où $u : [0, +\infty[\times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ appartient presque sûrement à $L^1([0, t])$, pour tout $t \geq 0$

et $v : [0, +\infty[\times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est mesurable, adapté à la filtration naturelle du brownien et appartient à $L^2([0, t])$, pour tout $t \geq 0$.

Théorème 5.3.3 (Formule d'Itô) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô donné par l'équation aux dérivées stochastiques :

$$dX_s = \sigma(X_s)dB_s + b(X_s)ds$$

Et soit une fonction numérique déterministe appartenant à la classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Alors le processus $(f(X_t))_{t \geq 0}$ est lui aussi un processus d'Itô donné par la formule :

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)d\langle X \rangle_s,$$

où :

$$d\langle X \rangle_s = \sigma(X_s)^2 \frac{d\langle B \rangle_s}{ds} = \sigma(X_s)^2 ds.$$

\mathcal{P}_t est alors associé au générateur infinitésimal \mathcal{L} :

Proposition 5.3.4 Considérons le noyau $(P_t)_{t \geq 0}$ Markovien de l'équation (1.1), alors P_t qui s'écrit sous la forme $e^{t\mathcal{L}}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.3.4 En partant de la formule d'Itô :

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t \left[f'(X_s)b(X_s) + f''(X_s) \frac{\sigma(X_s)^2}{2} \right] ds + \int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s)dB_s,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{P_t(f) - f(x)}{t} &= \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t} \\ &= \frac{1}{t} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \left(f'(X_s)b(X_s) + f''(X_s) \frac{\sigma(X_s)^2}{2} \right) ds \right] + \frac{1}{t} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s)dB_s \right] \\ &= \frac{1}{t} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \left(f'(X_s)b(X_s) + f''(X_s) \frac{\sigma(X_s)^2}{2} \right) ds \right] \left(\text{car } \int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s)dB_s \text{ est centrée} \right) \\ &= \mathbb{E}_x \left[\frac{1}{t} \int_0^1 \mathcal{L}(f)(X_s) ds \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathbb{E}_x[\mathcal{L}(f)(X_0)] = \mathcal{L}(f)(x), \text{ par continuité.} \end{aligned}$$

D'où : $\frac{P_t - Id}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathcal{L}$. On en déduit l'expression avec le générateur infinitésimal : $P_t = e^{t\mathcal{L}}$.

□

Proposition 5.3.5 Pour toute fonction f déterministe de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{E}_x [f(X_t)] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \mathcal{L}(f)(X_s) ds \right] = f(x).$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.3.5 Encore d'après le formule d'Itô, on a pour tout réel $t \geq 0$:

$$f(X_t) - \int_0^t \mathcal{L}(f)(X_s) ds = f(x) + \int_0^t f'(X_s) \sigma(X_s) dB_s.$$

Or $\left(\int_0^t f'(X_s) \sigma(X_s) dB_s \right)_{t \geq 0}$ est une martingale centrée.

Alors on en déduit que $\left(f(X_t) - \int_0^t \mathcal{L}(f)(X_s) ds \right)_{t \geq 0}$ est aussi une martingale d'espérance constante égale à $f(x)$. Ainsi, en passant aux espérances sous x :

$$\mathbb{E}_x [f(X_t)] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \mathcal{L}(f)(X_s) ds \right] = f(x).$$

□

Remarque 5.3.6 (importante) Cette propriété s'étend aux $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêts finis :

$$f(x) = \mathbb{E}_x [f(X_T)] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^T \mathcal{L}(f)(X_s) ds \right].$$

Soit f une solution de l'équation différentielle ordinaire : $\mathcal{L}(f) = 0$ sur un intervalle $]a, b[$. Alors, pour tout x de $]a, b[$:

$$f(x) = \mathbb{E}_x [f(X_T)].$$

On a alors transformé par une méthode probabiliste une équation différentielle ordinaire en une équation sur une moyenne.

5.4 Loi du temps d'arrêt

Soit T_λ un temps d'arrêt de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, indépendant de X_t , solution de l'équation (1.1). On note le processus "tué" :

$$X_t^{(\lambda)} = \begin{cases} X_t & \text{si } t \leq T_\lambda \\ \partial & \text{sinon} \end{cases},$$

où ∂ est un "point cimetièrè."

On rappelle que $\mathbb{P}(T_\lambda > t) = e^{-\lambda t}$, et $(X_t^{(\lambda)})_{t \geq 0}$ est un processus de Markov. Son noyau est :

$P_t^{(\lambda)} = e^{-\lambda t} P_t$. C'est un semi-groupe, car pour tous $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_t^{(\lambda)} \left[P_s^{(\lambda)}(f) \right] (x) &= e^{-\lambda(t+s)} P_t [P_s(f)](x) \\ &= e^{-\lambda(t+s)} P_{s+t}(f)(x) = P_{s+t}^{(\lambda)}(f)(x). \end{aligned}$$

Dès lors :

$$P_t^{(\lambda)}(f) = e^{-\lambda t} P_t(f) = \mathbb{P}(T_\lambda > t) \times \mathbb{E}_x[f(X_t)] \stackrel{\perp}{=} \mathbb{E}_x[f(X_t)\mathbf{1}_{\{t < T_\lambda\}}] = \mathbb{E}_x \left[f(X_t^{(\lambda)}) \right].$$

(égalité encore valide en remplaçant t par un temps d'arrêt fini presque sûrement) D'autre part :

$$\frac{P_t^{(\lambda)} - Id}{t} = \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} P_t + \frac{P_t - Id}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathcal{L} - \lambda Id.$$

Le générateur infinitésimal associé est alors : $\mathcal{L}^{(\lambda)} = \mathcal{L} - \lambda Id$.

D'après la formule de Dynkin, appliquée à un temps d'arrêt T fini presque sûrement et au processus tué :

$$f(x) = \mathbb{E}_x \left[f \left(X_T^{(\lambda)} \right) \right] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^T \mathcal{L}^{(\lambda)}(f)(X_s^{(\lambda)}) ds \right].$$

Alors, si $f^{(\lambda)}$ est une solution de la "bonne" équation différentielle : $\mathcal{L}^{(\lambda)} = 0$, et en considérant le temps d'atteinte τ_a , la formule de Dynkin devient :

$$f^{(\lambda)}(x) = \mathbb{E}_x \left[f \left(X_{\tau_a}^{(\lambda)} \right) \right] - 0 = \mathbb{E}_x \left[e^{\lambda \tau_a} f^{(\lambda)}(X_{\tau_a}) \right] = \mathbb{E}_x \left[e^{-\lambda \tau_a} f^{(\lambda)}(a) \right] = f^{(\lambda)}(a) \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a} \right).$$

D'où :

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a} \right) = \frac{f^{(\lambda)}(x)}{f^{(\lambda)}(a)}.$$

Ce point de vue va permettre de déterminer la loi du temps d'arrêt, via sa transformée de Laplace. L'espace vectoriel $\mathcal{L}^{(\lambda)} = 0$ est de dimension 2. Et l'on a supprimé une dimension en divisant par $f^{(\lambda)}(a)$. La transformée de Laplace étant unique, il faut imposer une autre condition.

Théorème 5.4.1 (Dynkin)

- L'EDO $\mathcal{L}^{(\lambda)} = 0$ admet une unique solution positive $u_a^{(\lambda)}$ valant 1 en $x = a$ et décroissante sur $[a, +\infty[$, et elle est donnée par la relation :

$$\forall x > a : u_a^{(\lambda)}(x) = \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a} \right).$$

- L'EDO $\mathcal{L}^{(\lambda)} = 0$ admet une unique solution positive $u_a^{(\lambda)}$ valant 1 en $x = a$ et croissante sur $] - \infty, a]$, et elle est donnée par la relation :

$$\forall x < a : u_a^{(\lambda)}(x) = \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a} \right).$$

Exemple 5.4.2 Revenons sur le mouvement brownien, dans ce cas $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}f''$, et donc $\mathcal{L}^{(\lambda)}(f) = \frac{1}{2}f'' - \lambda f$. Les solutions de l'EDO $\mathcal{L}^{(\lambda)} = 0$ sont de la forme :

$$\alpha e^{-\sqrt{2\lambda}x} + \beta e^{\sqrt{2\lambda}x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Faisant usage du Théorème de Dynkin 5.4.1

- Si $x > a$, alors : $\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a}) = e^{-\sqrt{2\lambda}(x-a)}$.
- Si $x < a$, alors : $\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a}) = e^{\sqrt{2\lambda}(x-a)}$.

Le brownien étant invariant spatialement, on se ramène à $x = 0$, puis par symétrie à $a > 0$, et l'on retrouve l'objet de la Proposition 5.2.3, qui donne le résultat.

Chapitre 6

Étude du mouvement brownien avec dérive

Définition 6.0.1 On appelle mouvement brownien avec dérive tout processus de la forme :

$$X_t = B_t + \mu t, \text{ avec } \mu \neq 0.$$

- Si $\mu > 0$, alors presque sûrement : $X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- Si $\mu < 0$, alors presque sûrement : $X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

Ainsi $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus transitoire, c'est -à-dire qu'il quitte tout compact en un temps fini presque sûrement. Et si $a = x = X_0$ alors $\tau_a = 0$ presque sûrement, du fait des variations infinitésimales du brownien.

Si $x \neq a$, il y a 4 cas distinctes à considérer :

- i) $\mu < 0, x > a$,
- ii) $\mu > 0, x < a$,
- iii) $\mu < 0, x < a$,
- iv) $\mu > 0, x > a$.

Dans les cas (i) et (ii), la divergence presque sûre du brownien avec dérive assure que τ_a est presque fini sûrement. Dans les deux derniers cas, τ_a peut être a priori infini.

Du fait de la symétrie du brownien, on va se contenter de traiter les cas (i) et (iv), qui deviennent les cas :

- i') $\mu < 0, a < 0$,
- iv') $\mu > 0, a < 0$.

6.1 Transformée de Laplace du temps d'atteinte

Proposition 6.1.1 *Si $x = 0$ et si $a, \mu < 0$, alors pour tout $\lambda \geq 0$:*

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a} \right) = e^{a \left(\mu + \sqrt{2\lambda + \mu^2} \right)}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 6.1.1 Nous avons : $dX_t = dB_t + \mu dt$. Donc : $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}f'' + \mu f'$, puis $\mathcal{L}^{(\lambda)} = \frac{1}{2}f'' + \mu f' - \lambda f$.

On doit donc résoudre l'EDO : $f'' + 2\mu f' - 2\lambda f = 0$.

On pose $f(x) = e^{cx}g(x)$, et alors : $f'(x) = ce^{cx}g(x) + e^{cx}g'(x) = e^{cx}[cg(x) + g'(x)]$.

$f''(x) = ce^{cx}[cg(x) + g'(x)] + e^{cx}[cg'(x) + g''(x)] = e^{cx}[cg(x) + (c+1)g'(x) + g''(x)]$.

L'équation donne alors :

$$\begin{aligned} e^{cx} [cg(x) + (c+1)g'(x) + g''(x) + 2\mu (cg(x) + g'(x)) - 2\lambda] &= 0 \\ \iff e^{cx} [g''(x) + (c+\mu)g'(x) + (c^2 + 2\mu c - 2\lambda)g(x)] &= 0. \end{aligned}$$

En choisissant $c = -\mu$ l'équation différentielle devient : $g'' - (\mu^2 + 2\lambda)g = 0$, et nous sommes revenus à une EDO croisé pour le cas brownien, les solutions étant de la forme :

$$g(x) = \alpha e^{-x\sqrt{2\lambda + \mu^2}} + \beta e^{x\sqrt{2\lambda + \mu^2}}, \text{ où } : \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Et donc la solution générale est de la forme :

$$f(x) = \alpha e^{-x(\mu + \sqrt{2\lambda + \mu^2})} + \beta e^{-x(\mu - \sqrt{2\lambda + \mu^2})}, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Comme τ_a est presque sûrement fini, on peut appliquer le Théorème de Dynkin 5.4.1. En constatant la positivité ou la négativité des arguments des exponentielles, et sachant qu'en a la sution doit valoir 1 on en conclut que dans le cas $a < 0, \mu < 0$:

$$\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a} \right) = e^{a \left(\mu + \sqrt{2\lambda + \mu^2} \right)}.$$

□

Corollaire 6.1.2 *Dans le cas du brownien avec dérive, où $\mu, a < 0$: τ_a est infiniment divisible.*

PREUVE DE LA COROLLAIRE 6.1.2 Comme $\mu < 0$, alors : $\sqrt{\lambda + \mu^2} + \mu = \sqrt{\lambda + \mu^2} - \sqrt{\mu^2}$.

Or, pour tout $t > 0$, et pour tout s de $]0, 1[$:

$$t^s = \frac{s}{\Gamma(1-s)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) x^{-s-1} dx.$$

Alors, avec $s = \frac{1}{2}$, alors : $\sqrt{t} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Avec $t = \lambda + \mu^2$, et $t = \mu^2$ cela donne :

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda + \mu^2} - \sqrt{\mu^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-(\lambda + \mu^2)x}) \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu^2 x}) \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (e^{-\mu^2 x} - e^{-(\lambda + \mu^2)x}) \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{e^{-\mu^2 x} dx}{x^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\mathbb{E}_0 \left(e^{-\frac{\lambda}{2}\tau_a} \right) = \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{|a|e^{-\mu^2 x}}{2\sqrt{\pi x^3}} dx \right].$$

En posant $d\nu(x) = \frac{|a|e^{-\mu^2 x}}{2\sqrt{\pi x^3}} dx$, le Corollaire de De Finetti 4.1.4 nous dit que τ_a est bien infiniment divisible. \square

Remarque 6.1.3 Cela se comprend notamment par invariance spatiale et continuité des trajectoires : atteindre a à partir de 0 est équivalent à passer par $\frac{a}{n}$ à partir de 0 puis $\frac{2a}{n}$ à partir de $\frac{a}{n}$, etc : $\tau_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tau_{\frac{a}{n}} + \dots + \tau_{\frac{a}{n}}$.

6.2 Densité du temps d'atteinte

Proposition 6.2.1 Pour tout $a < 0$, la densité de τ_a issu de 0 est :

$$\varphi_\tau(t) = \frac{|a|}{2\sqrt{\pi x^3}} \exp \left[-2\mu^2 x - \frac{a^2}{2x} + |a\mu| \right] \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 6.2.1 Nous avons, de ce qui précède : $\mathbb{E}_0 \left(e^{-\frac{\lambda}{2}\tau_a} \right) = e^{|a\mu|} \times e^{-|a|\sqrt{\mu^2 + \lambda}}$.

Nous allons exprimer le second facteur comme la transformée de Laplace de la variable $\tilde{\tau}_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{a}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}$, grâce à la Proposition 5.2.3.

Nous avons vu que dans le cas $a < 0$, pour tout $\theta > 0$: $\mathbb{E}_0 \left(e^{-\theta\tilde{\tau}_a} \right) = e^{-|a|\sqrt{2\theta}}$. Ici il nous faut

$2\theta = \mu^2 + \lambda$, donc $\theta = \frac{\mu^2 + \lambda}{2}$. Dès lors, en notant $\varphi_{\tilde{\tau}_a}$ la densité de $\tilde{\tau}_a$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left(e^{-\frac{\lambda}{2}\tau_a} \right) &= e^{|a\mu|} \mathbb{E}_0 \left(e^{-\frac{\mu^2 + \lambda}{2}\tilde{\tau}_a} \right) \\ &= e^{|a\mu|} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2 + \lambda}{2}x} \varphi_{\tilde{\tau}_a}(x) dx. \end{aligned}$$

Par identification, la densité de τ_a est :

$$\begin{aligned}\varphi_{\tau_a}(x) &= e^{|a\mu|} e^{-\frac{\mu^2}{2}x} \varphi_{\tilde{\tau}_a}(x) \\ &= e^{|a\mu| - \frac{\mu^2}{2}x} \times \frac{|a| e^{-\frac{a^2}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \\ &= \frac{|a|}{2\sqrt{\pi x^3}} \exp\left[-2\mu^2 x - \frac{a^2}{2x} + |a\mu|\right] \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x).\end{aligned}$$

□

Remarque 6.2.2

- φ_{τ_a} est appelée densité du semi-groupe stable relativiste, ou encore semi-groupe stable tempéré d'indice $\frac{1}{2}$.
- La propriété de semi-groupe provient du caractère infiniment divisible de τ_a . En effet l'égalité en loi :

$$\tau_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tau_{\frac{a}{n}} + \dots + \tau_{\frac{a}{n}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tau_{a\frac{k}{n}} + \tau_{a\frac{n-k}{n}}$$

peut s'interpréter par : $\varphi_{\tau_a} = \varphi_{\tau_{a\frac{k}{n}}} * \varphi_{\tau_{a\frac{n-k}{n}}}$.

En fait, on peut montrer par un calcul direct de convolution que pour tous $a, b < 0$:

$$\varphi_{\tau_{a+b}} = \varphi_{\tau_a} * \varphi_{\tau_b}.$$

- Lors de la démonstration du caractère "ID" de τ_a , on a vu que :

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-\lambda\tau_a}\right) = \exp\left[-|a| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t}) \frac{e^{-\frac{\mu^2 t}{2}}}{\sqrt{2\pi t^3}} dt\right].$$

Il s'agit d'une mesure de Lévy tempérée par un paramètre exponentiel $e^{-\frac{\mu^2 t}{2}}$ qui dépend donc du drift μ .

6.2.1 Cas $a < x, \mu > 0$

On se ramène à nouveau au cas $x = 0$, soit $a < 0$, et les calculs conduisant à $\mathbb{E}_0(e^{-\lambda\tau_a})$ sont identiques, et l'on trouve :

Proposition 6.2.3 *Pour tout $\mu < 0$:*

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-\lambda\tau_a}\right) = e^{a\left(\mu + \sqrt{2\lambda + \mu^2}\right)}.$$

Corollaire 6.2.4 Pour tout $\mu > 0$:

$$\mathbb{P}_{\tau_a}(\cdot \mid \tau_a < +\infty) = \mathbb{P}_{\tau'_a},$$

où τ'_a est le temps d'atteinte pour $-\mu$, et $\mathbb{P}_{\tau_a}(\cdot \mid \tau_a < +\infty)$ est la loi de τ_a sachant l'évènement $\{\tau_a < +\infty\}$.

PREUVE DU COROLLAIRE 6.2.4 Nous avons :

$$\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-|\lambda a| \left(\sqrt{2\lambda + \mu^2} + \mu \right)} = e^{-2|a|\mu} < 1$$

Et donc : $\mathbb{P}(\tau_a = +\infty) = 1 - e^{-2|a|\mu} > 0$. Avec probabilité égale à $1 - e^{-2|a|\mu}$, le brownien avec dérive $\mu > 0$ issu de $x > a$ n'atteint jamais la valeur a .

D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a} \mid \tau_a < +\infty \right) = \frac{\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau} \mathbf{1}_{(\tau_a < +\infty)} \right)}{\mathbb{P}_0(\tau_a < +\infty)} = \frac{\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a} \right)}{e^{2a\mu}} = e^{a \left(\mu + \sqrt{2\lambda + \mu^2} \right)} = \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a} \right).$$

□

Remarque 6.2.5

— On en déduit alors la loi de τ_a dans le cas $a < 0, \mu > 0$:

$$d\mathbb{P}_{\tau_a}(t) = \left(1 - e^{-2|a|\mu} \right) \delta_{+\infty}(t) + \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left[-2|a|\mu - \frac{a^2}{2t} - 2\mu^2 t \right] \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t) dt$$

— Le cas (ii) : $\mu > 0, a > 0$ est donc analogue au cas $a < 0, \mu < 0$:

$$d\mathbb{P}_{\tau_a}(x) = \frac{a}{2\sqrt{\pi x^3}} \exp \left[-2\mu^2 x - \frac{a^2}{2x} + a\mu \right] \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x) dx.$$

— Enfin le cas (iii) : $\mu < 0, a > 0$ est analogue au cas : $\mu > 0, a < 0$:

$$d\mathbb{P}_{\tau_a}(t) = \left(1 - e^{2a\mu} \right) \delta_{+\infty}(t) + \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left[2a\mu - \frac{a^2}{2t} - 2\mu^2 t \right] \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t) dt$$

Chapitre 7

Étude du processus de Ornstein-Uhlenbeck

Définition 7.0.1 On appelle processus de Ornstein-Uhlenbeck le processus solution de l'équation aux dérivées stochastiques :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = dB_t + cX_t dt, \end{cases},$$

où c, x sont des réels.

La formulation intégrale est :

$$X_t = x + B_t + c \int_0^t X_s ds.$$

Remarque 7.0.2 D'après le Théorème 5.1.3, ce processus a une version à trajectoires continues et est de Markov.

Proposition 7.0.3 Pour tout $t \geq 0$: $X_t = e^{ct} \left(x + \int_0^t e^{-cs} dB_s \right)$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 7.0.3 En effet, $e^0(x+0) = x = X_0$. Et en posant $X_t = e^{ct}Y_t$, où $Y_t = x + \int_0^t e^{-cs} dB_s$:

$$\begin{aligned} dX_t &= ce^{ct}Y_t + e^{ct}dY_t + d\langle e^{ct}, Y_t \rangle \\ &= ce^{ct}Y_t + e^{ct}e^{-ct}dB_t + 0, \text{ car } e^{ct} \text{ est déterministe} \\ &= cX_t dt + dB_t. \end{aligned}$$

□

Proposition 7.0.4 *Considérons le cas $c < 0$:*

$$i) \text{ On a : } X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, -\frac{1}{2c}\right).$$

$$ii) \text{ Si } X_0 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, -\frac{1}{2c}\right), \text{ et si } X_0 \perp (B_t)_{t \geq 0}, \text{ alors : } \forall t \geq 0 : X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, -\frac{1}{2c}\right).$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 7.0.4

i) À t fixé, X_t est une Gaussienne (c'est une intégrale de Wiener (gaussienne centrée) plus une constante, le tout multiplié par un facteur déterministe), et son espérance est : $e^{ct}(x + 0) = e^{ct}x$. Et sa variance est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) - [\mathbb{E}(X_t)]^2 &= \mathbb{E}[e^{2ct}x^2] + \underbrace{2e^{ct}x \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-cs} dB_s\right)}_{=0} + e^{2ct} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{-cs} dB_s\right)^2\right] - e^{2ct}x^2 \\ &= e^{2ct} \|e^{-cs}\|_{L^2([0,t])}^2 \text{ par isométrie} \\ &= \int_0^t e^{2c(t-s)} ds = -\frac{1}{2c} [e^{2c(t-s)}]_0^t \\ &= \frac{1}{2c} (e^{2ct} - 1) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\frac{1}{2c}. \end{aligned}$$

ii) X_t est dans ce cas toujours une gaussienne, comme somme indépendante de deux gaussiennes, multipliée par un facteur déterministe, et alors par indépendance :

$$\mathbb{E}(X_t) = e^{ct}\mathbb{E}(X_0) + e^{ct}\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-cs} dB_s\right) = 0,$$

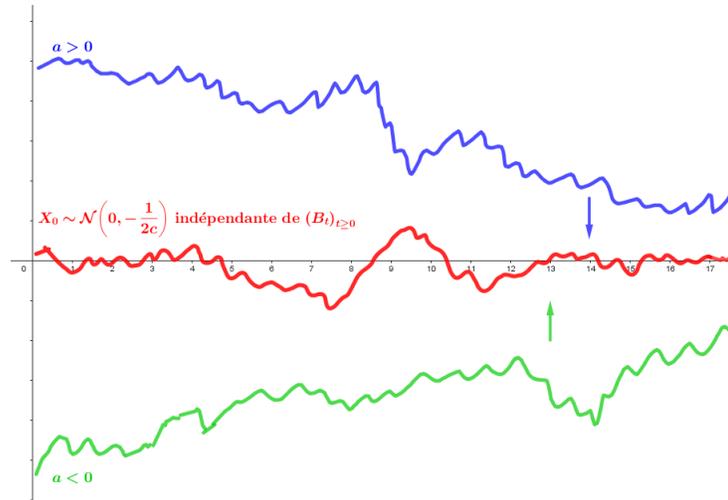
et cette fois :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &= e^{2ct} \left[\mathbb{E}(X_0^2) + 2\mathbb{E}(X_0)\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-cs} dB_s\right) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t e^{-cs} dB_s\right)^2\right) \right] \\ &= -\frac{e^{2ct}}{2c} + 0 + \frac{e^{2ct}}{2c} (1 - e^{-2ct}) = -\frac{1}{2c}. \end{aligned}$$

□

Remarque 7.0.5

— Pour $c < 0$, le processus de Ornstein-Uhlenbeck est en fait récurrent positif. On peut montrer que pour tous a, x réels : $\mathbb{E}_x(\tau_a) < +\infty$, (c'est pareil que le brownien sur ce point). Dans ce cas, le terme cX_t est une force de rappel vers l'axe des abscisses, quelque soit le signe de X_t .



— Si $c > 0$, on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{2c}(e^{2ct} - 1) = \text{Var}(X_t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \\ \mathbb{E}(X_t) = e^{ct} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pm\infty, \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Il n'y a donc plus de convergence en loi. Le processus est dit transcient.

Comme le brownien drifté (brownien avec dérive dans les cas (ii) et (iv)), on s'attend à $\mathbb{P}_x(\tau_x = +\infty) > 0$, si $a \neq 0$. Dans ce cas cX_t agit comme une force de répulsion vers $+\infty$ ou $-\infty$, suivant le signe de X_t .

7.1 Transformée de Laplace du temps d'atteinte

Le processus de Ornstein-Uhlenbeck a des oscillations browniennes infinitésimales, la loi du 0 – 1 dit que : $\mathbb{P}_x(\tau_x = 0) = 1$. Donc on exclut le cas $a = x$.

Fixons les réels λ, c , et considérons $x \mapsto \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right)$, où $\tau_a^{(c)}$ désigne le temps d'atteinte en a du processus de Ornstein-Uhlenbeck partant de $X_0 = x$ et de paramètre c .

Le générateur infinitésimal pour l'équation : $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ est :

$$\mathcal{L}(f)(x) = b(x)f'(x) + \sigma(x)\frac{f''(x)}{2}.$$

Alors ici $b(x) = cx, \sigma(x) = 1$, Et donc :

$$\mathcal{L}(f)(x) = cx f'(x) + \frac{f''(x)}{2}, \text{ puis } \mathcal{L}^{(\lambda)}(x) = cx f'(x) + \frac{f''(x)}{2} - \lambda f(x).$$

Nous cherchons donc à résoudre l'équation différentielle ordinaire :

$$f''(x) + 2cx f'(x) - 2\lambda f(x) = 0 \quad (\mathcal{E})$$

Cherchons des solutions en séries entières : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \text{ et } 2cx f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2n a_n x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

L'équation (\mathcal{E}) devient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2cna_n - 2\lambda a_n] x^n = 0$$

$$\implies \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(n+2)(n+1)n!a_{n+2} + 2cnn!a_n - 2\lambda n!a_n}{n!} \right] x^n = 0.$$

En posant $b_n = a_n n!$ (on a $b_{n+2} = a_{n+2}(n+2)!$), la série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_{n+2} + 2cnb_n - 2\lambda b_n}{n!} x^n$ est nulle, pour tout réel x , donc chaque coefficient est nul, nous en déduisons :

$$b_{n+2} = (-2cn + 2\lambda)b_n = 2b_n(\lambda - cn) = -2c \left(n - \frac{\lambda}{c} \right) b_n. \quad (1.1)$$

— Si $n = 2p$:

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= (-2c) \left(2p - \frac{\lambda}{c} \right) b_{2p} \\ &= (-4c) \left(p - \frac{\lambda}{2c} \right) b_{2p} \\ &= (-4c)^2 \left(p - \frac{\lambda}{2c} \right) \left(p - \frac{\lambda}{2c} - 1 \right) b_{2p-2} \\ &= \dots = (-4c)^p \left(-\frac{\lambda}{2c} \right)_p b_0. \end{aligned}$$

— Si $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} b_{2p+3} &= (-2c) \left(2p + 1 - \frac{\lambda}{c} \right) b_{2p+1} \\ &= (-4c) \left(p + \frac{c - \lambda}{2c} \right) b_{2p+1} \\ &= (-4c)^2 \left(p + \frac{c - \lambda}{2c} \right) \left(p + \frac{c - \lambda}{2c} - 1 \right) b_{2p-1} \\ &= \dots = (-4c)^p \left(\frac{c - \lambda}{2c} \right)_p b_1. \end{aligned}$$

b_0 et b_1 sont donc des degrés de liberté. La solution générale de (\mathcal{E}) est donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= b_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-4c)^p \left(-\frac{\lambda}{2c}\right)_p}{(2p)!} x^{2p} + b_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-4c)^p \left(\frac{c-\lambda}{2c}\right)_p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \\ &= b_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p (-cx^2)^p}{(2p)!} \left(-\frac{\lambda}{2c}\right)_p + b_1 x \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p (-cx^2)^p}{(2p+1)!} \left(\frac{c-\lambda}{2c}\right)_p. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Mais la formule de Legendre-Gauss (Théorème 2.1.1) donne :
$$\begin{cases} (2p)! = 4^p p! \left(\frac{1}{2}\right)_p \\ (2p+1)! = 4^p p! \left(\frac{3}{2}\right)_p \end{cases}.$$

Donc, l'égalité 1.2 devient :

$$\begin{aligned} f(x) &= b_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{2c}\right)_p (-cx^2)^p}{\left(\frac{1}{2}\right)_p p!} + b_1 x \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{c-\lambda}{2c}\right)_p (-cx^2)^p}{\left(\frac{3}{2}\right)_p p!} \\ &= b_0 {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -\frac{\lambda}{2c} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} ; -cx^2 \right) + b_1 x {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \frac{c-\lambda}{2c} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{matrix} ; -cx^2 \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

$f(x) = \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right)$ pour b_0 et b_1 bien choisis tels que $f(a) = 1$.

Remarque 7.1.1 À ce stade, un lien peut se faire avec les lois $\beta_{\sigma,\theta}$. En fait, nous avons vu :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{\lambda \beta_{\sigma,\theta}} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{E} \left(\beta_{\sigma,\theta}^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{(\sigma)_n}{(\sigma + \theta)_n} = {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \sigma \\ \sigma + \theta \end{matrix} ; \lambda \right). \end{aligned}$$

7.2 Le cas $c < 0$

Lemme 7.2.1 Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t \geq 0}$ à paramètre $c < 0$:

- i) La loi de $\tau_a^{(c)}$ sous \mathbb{P}_x est égale à la loi de $\tau_{-a}^{(c)}$ sous \mathbb{P}_{-x} .
- ii) La loi de $\tau_a^{(c)}$ sous \mathbb{P}_x est égale à la loi de $\tau_{a\sqrt{-c}}^{(-1)}$ sous $\mathbb{P}_{x\sqrt{-c}}$.

PREUVE DU LEMME 7.2.1

i) L'intégrale de Wiener $\int_0^t e^{-cs} dB_s$ est une gaussienne centrée, donc symétrique. Alors :

$$\begin{aligned}
\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x &= \inf\{t > 0 \mid X_t = a\} \text{ sous } \mathbb{P}_x \\
&= \inf\left\{t > 0 \mid e^{ct} \left(x + \int_0^t e^{-cs} dB_s\right) = a\right\} \text{ sous } \mathbb{P}_x \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf\left\{t > 0 \mid e^{ct} \left(x - \int_0^t e^{-cs} dB_s\right) = a\right\} \text{ sous } \mathbb{P}_x \\
&= \inf\left\{t > 0 \mid e^{ct} \left(-x + \int_0^t e^{-cs} dB_s\right) = -a\right\} \text{ sous } \mathbb{P}_x \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf\{t > 0 \mid X_t = -a\} \text{ sous } \mathbb{P}_{-x} \\
&= \tau_{-a}^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_{-x}.
\end{aligned}$$

ii) L'auto-similarité du brownien donne un changement d'échelle :

$$\begin{aligned}
X_t &= e^{ct} \left(x + \int_0^t e^{-cs} dB_s\right) \text{ sous } \mathbb{P}_x \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} e^{ct} \left(x + \int_0^{-ct} e^u dB_{\frac{u}{-c}}\right) \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} e^{ct} \left(x + \frac{1}{\sqrt{-c}} \int_0^{-ct} e^u dB_u\right) \text{ car } \left(B_{\frac{u}{-c}}\right)_{u \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\sqrt{-c}} (B_u)_{u \geq 0} \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{e^{(-1) \times (-ct)}}{\sqrt{-c}} \left(x\sqrt{-c} + \int_0^{-ct} e^u dB_u\right) \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{e^{(-1) \times (-ct)}}{\sqrt{-c}} \left(x\sqrt{-c} + \int_0^{-ct} e^{-(-u)} dB_u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-c}} \widetilde{X}_{-ct} \text{ sous } \mathbb{P}_{x\sqrt{-c}},
\end{aligned}$$

où \widetilde{X}_{-ct} est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $\tilde{c} = -1$, et $\tilde{x} = x\sqrt{-c}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x &= \inf\{t > 0 \mid X_t = a\} \text{ sous } \mathbb{P}_x \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf\left\{t > 0 \mid \frac{1}{\sqrt{-c}} \widetilde{X}_{-ct} = a\right\} \text{ sous } \mathbb{P}_{x\sqrt{-c}} \\
&= \inf\left\{\frac{u}{-c} > 0 \mid \widetilde{X}_u = a\sqrt{-c}\right\} \text{ sous } \mathbb{P}_{x\sqrt{-c}} \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{-c} \inf\{u > 0 \mid \widetilde{X}_u = a\sqrt{-c}\} \text{ sous } \mathbb{P}_{x\sqrt{-c}} \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} -\frac{1}{c} \tau_{a\sqrt{-c}}^{(-1)} \text{ sous } \mathbb{P}_{x\sqrt{-c}}.
\end{aligned}$$

□

Ainsi, pour tout $c < 0$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = \mathbb{E}_{x\sqrt{-c}} \left(e^{\frac{\lambda}{c} \tau_a^{(-1)}} \right). \quad (2.1)$$

Ce qui permet de se ramener au cas : $c = -1$. Donc :

$$f(x) = b_0 {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \frac{\lambda}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; x^2 \right) + b_1 {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1+\lambda}{2} \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; x^2 \right)$$

Définition 7.2.2 En prenant $b_0^{(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda\Gamma(\frac{1+\lambda}{2})}$, $b_1^{(\lambda)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda\Gamma(\frac{\lambda}{2})}$, la fonction $f(x)$ obtenue est appelée fonction de Hermite.

Remarque 7.2.3 Ce choix de b_0, b_1 va faire apparaître la formule de Legendre-Gauss.

Nous nous plaçons dans le cas $x > a$, (grâce au Lemme 7.2.1, (i)) alors d'après le Théorème de Dynkin 5.4.1, nous devons montrer que $H_{-\lambda}(x)$ est croissante sur $[a, +\infty[$ et vaut 1 en $x = a$.

Nous avons :

$$b_0^{(\lambda)} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \frac{\lambda}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; x^2 \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda\Gamma(\frac{1+\lambda}{2})} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\lambda}{2})_p}{(\frac{1}{2})_p} \frac{x^{2p}}{p!}. \quad (2.2)$$

Or, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \left(\frac{1}{2}\right)_p p! = \frac{(2p)!}{4^p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \\ (2) \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) = \sqrt{2\pi} 2^{1-\lambda} \Gamma(\lambda) \text{ (Legendre-Gauss 2.1.1, cas } m=2) \\ \text{Ici : } \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda\Gamma(\frac{1+\lambda}{2})} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\lambda)} \\ (3) \left(\frac{\lambda}{2}\right)_p = \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2} + p)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

En injectant (1), (2) et (3) de (2.3) dans l'égalité (2.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} b_0^{(\lambda)} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \frac{\lambda}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; x^2 \right) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\lambda)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2} + p)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}) (2p)!} \times 2^{2p} x^{2p} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \sum_{p=0}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{\lambda + 2p}{2}\right) \frac{(2x)^{2p}}{(2p)!}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

De même :

$$b_1^{(\lambda)} x {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1+\lambda}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} ; x^2 \right) = -\frac{x\sqrt{\pi}}{2^\lambda \Gamma(\frac{\lambda}{2})} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1+\lambda}{2})_p}{(\frac{3}{2})_p} \frac{x^{2p}}{p!}. \quad (2.5)$$

Or, nous avons :

$$\begin{cases} (4) \left(\frac{3}{2}\right)_p p! = \frac{(2p+1)!}{4^p} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p}} \\ (5) \frac{\sqrt{\pi}}{2^\lambda \Gamma(\frac{\lambda}{2})} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda}{2})}{\Gamma(\lambda)} \\ (6) \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)_p = \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda}{2} + p)}{\Gamma(\frac{1+\lambda}{2})} \end{cases} \quad (2.6)$$

En injectant (4), (5) et (6) de (2.6) dans l'égalité 2.5, nous obtenons :

$$\begin{aligned} b_1^{(\lambda)} x {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1+\lambda}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} ; x^2 \right) &= -\frac{x}{2} \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda}{2})}{\Gamma(\lambda)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda}{2} + p)}{\Gamma(\frac{1+\lambda}{2}) (2p+1)!} \times 2^{2p} x^{2p} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \sum_{p=0}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{\lambda+2p+1}{2}\right) \frac{(-2x)^{2p+1}}{(2p)!}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ainsi, les égalités (2.4) et (2.7) donnent :

$$H_{-\lambda}(x) = \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right) \frac{(-2x)^n}{n!} \quad (2.8)$$

C'est une série alternée dont on peut calculer la transformée de Mellin sur $]0, \lambda[$. C'est grâce au Théorème dit "maître" de Ramanujan, qui appliqué à $H_{-\lambda}$, dit que :

$$\forall s \in]0, \lambda[: \int_0^{+\infty} H_{-\lambda}\left(\frac{x}{2}\right) x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{2\Gamma(\lambda)} \Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right), \quad (2.9)$$

or, par changement de variable $x = 2y$:

$$2^{-s} \int_0^{+\infty} H_{-\lambda}(y) y^{s-1} dy = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\lambda)} \Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right). \quad (2.10)$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} H_{-\lambda}(y) y^{s-1} dy = \frac{\Gamma(s)}{2^{s+1}\Gamma(\lambda)} \Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right). \quad (2.11)$$

La stratégie qui va suivre, passer par les transformées de Mellin, nous permettra d'identifier $H_{-\lambda}$ à une fonction définie par une intégrale, et l'expression de cette intégrale nous permettra de justifier le sens de variation de $H_{-\lambda}$ sur $[a, +\infty[$.

Nous avons ce lemme :

Lemme 7.2.4

$$\forall t > s > 0 : \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{(1+x)^t} dx = \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t)} \Gamma(s).$$

En particulier, pour tout s de $]0, 1[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

PREUVE DU LEMME 7.2.4 : On applique le Lemme 2.4.4 (ii), à la variable aléatoire $X = \gamma_t$, ce qui donne, pour tout $0 < s < t$:

$$\mathbb{E}(\gamma_t^{-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(e^{-s\gamma_t}) x^{s-1} dx.$$

Or, d'après l'Exemple 1.1.16 : $\mathbb{E}(e^{-x\gamma_t}) = \frac{1}{(1+x)^t}$, et $\mathbb{E}(\gamma_t^{-s}) = \frac{\Gamma(t+(-s))}{\Gamma(t)}$. D'où le résultat. Pour le cas particulier, la Formule des compléments (Théorème 1.3.5) offre la conclusion. \square

En appliquant ce Lemme 7.2.4, avec $t = \frac{\lambda}{2}$, et $s := \frac{s}{2}$, nous avons :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{s}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\lambda}{2}}} dx. \quad (2.12)$$

Cependant dans l'égalité (2.11), nous avons : $\frac{\Gamma(s)}{2^{s+1}\Gamma(\lambda)}$. Nous allons faire apparaître $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, à l'aide de la formule de Legendre-Gauss 2.1.1, cas $m = 2$:

$$\begin{cases} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-s} \Gamma(s) \\ \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-\lambda} \Gamma(\lambda) \end{cases}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(s)}{2^{s+1}\Gamma(\lambda)}\Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{1-s}} \times \frac{\sqrt{\pi}2^{1-\lambda}\Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right)}{2^{1+s}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2^{\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2^{\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{s}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\lambda}{2}}} dx \quad (\text{Lemme 7.2.4}) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2^{\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{w^{1-\frac{s}{2}}}{w^2(w+1)^{\frac{\lambda}{2}}} w^{\frac{\lambda}{2}} dw \quad \text{avec } x = \frac{1}{w} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2^{\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{w^{\frac{\lambda}{2}-\frac{s}{2}-1}}{(w+1)^{\frac{\lambda}{2}}} dw \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2^{\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{v^{\lambda-s-2+1}}{(v^2+1)^{\frac{\lambda}{2}}} \text{ avec } w = v^2.
\end{aligned}$$

Or : $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} z^{\frac{s+1}{2}-1} e^{-z} dz$, donc d'après le Théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(s)}{2^{s+1}\Gamma(\lambda)}\Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right) &= \frac{2^{-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{v^{\lambda-s-1}}{(v^2+1)^{\frac{\lambda}{2}}} z^{\frac{s-1}{2}} e^{-z} dz dv \\
&= \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{v^{\lambda-s-1}}{(v^2+1)^{\frac{\lambda}{2}}} (xv)^{s-1} e^{-x^2v^2} xv^2 dx dv \quad \text{avec } z = x^2v^2, \text{ en } x \\
&= \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{u}{x}\right)^{\lambda-s-1}}{\left[\left(\frac{u}{x}\right)^2+1\right]^{\frac{\lambda}{2}}} u^{s-1} e^{-u^2} \left(\frac{u}{x}\right)^2 dx du \quad \text{avec } u = xv, \text{ en } v \\
&= \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^\lambda}{(u^2+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}} x^{s-1} e^{-u^2} dx du \\
&= \int_0^{+\infty} \underbrace{\left[\int_0^{+\infty} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} u^\lambda \frac{e^{-u^2}}{(u^2+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}} du \right]}_{\text{que l'on appelle } F_\lambda(x)} x^{s-1} dx \quad \text{par Tonelli.}
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons, pour tout s appartenant à $]0, \lambda[$:

$$\int_0^{+\infty} H_{-\lambda}(y) y^{s-1} dy = \frac{\Gamma(s)}{2^{s+1}\Gamma(\lambda)} \Gamma\left(\frac{\lambda-s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} F_\lambda(x) x^{s-1} dx.$$

Par identifications des transformées de Mellin :

$$H_{-\lambda}(x) = F_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} u^\lambda \frac{e^{-u^2}}{(u^2+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}} du. \quad (2.13)$$

C'est cette forme intégrale qui permet d'affirmer que $H_{-\lambda}$ croit ou décroît. En effet, soit $g_\lambda : x \mapsto \frac{1}{(u^2 + x^2)^{\frac{\lambda}{2}}}$. Alors $g'_\lambda(x) = \frac{-\lambda x}{(u^2 + x^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}}$. Comme $\lambda > 0$, g_λ , (et donc F_λ) décroît sur $]0, +\infty[$ et croît sur $] - \infty, 0[$.

Et alors finalement, comme $\mathbb{E}_x \left[e^{-\lambda \tau_a^{(-1)}} \right] = \frac{H_{-\lambda}(x)}{H_{-\lambda}(a)}$:

- Si $a \geq 0$, alors : $x \mapsto \frac{H_{-\lambda}(x)}{H_{-\lambda}(a)}$ décroît sur $]0, +\infty[$, en particulier sur $]a, +\infty[$.
- Si $a < 0$, alors : $x \mapsto \frac{H_{-\lambda}(x)}{H_{-\lambda}(a)}$ croît sur $] - \infty, 0[$ donc en particulier sur $] - \infty, a[$.

Dès lors, grâce au Lemme 7.2.1, nous obtenons :

Proposition 7.2.5 *Pour le cas $c < 0$, la transformée de Laplace du temps d'atteinte du processus d'Ornstein-Uhlenbeck est :*

- Si $x > a$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) \stackrel{(ii)}{=} \mathbb{E}_{x\sqrt{-c}} \left(e^{-\frac{\lambda}{c} \tau_a^{(-1)}} \right) = \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(x\sqrt{-c})}{H_{\frac{\lambda}{c}}(a\sqrt{-c})},$$

- Si $x < a$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) \stackrel{(i)}{=} \mathbb{E}_{-x} \left(e^{-\lambda \tau_{-a}^{(c)}} \right) = \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(-x\sqrt{-c})}{H_{\frac{\lambda}{c}}(-a\sqrt{-c})}.$$

Corollaire 7.2.6 *Dans le cas $c < 0$, pour tous réels a, x : $\mathbb{P}_x(\tau_a^{(c)} < +\infty) = 1$.*

PREUVE DU COROLLAIRE 7.2.6 Plaçons nous dans le cas $c = -1$. Puisque :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0^+} H_{-\lambda}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +0^+} \int_0^{+\infty} \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} u^\lambda \frac{e^{-u^2}}{(u^2 + x^2)^{\frac{\lambda}{2}}} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2\sqrt{2},$$

alors :

$$\mathbb{P}_x(\tau_a^{(-1)} < +\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(-1)}} \right) = \frac{H_{-\lambda}(\varepsilon x)}{H_{-\lambda}(\varepsilon a)} = 1,$$

où $\varepsilon = \pm 1$. □

Remarque 7.2.7 Pour montrer que $\mathbb{E}_x \left(\tau_a^{(c)} \right) < +\infty$, il suffit juste calculer la dérivée en λ , pour $\lambda = 0$ de la Laplace : $\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(x)}} \right)$, qui est égale à cette espérance.

7.3 Calcul explicite de la densité dans le cas $a = 0$, $c < 0$

Toujours par symétrie (Lemme 7.2.1 (i)), on peut se ramener au cas $x > a$, ie $x > 0$, et on va inverser la transformation de Laplace :

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_0^{(c)}} \right) = \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(x\sqrt{-c})}{H_{\frac{\lambda}{c}}(0)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{-\frac{\lambda}{c}} (u^2 - cx^2)^{-\frac{\lambda}{2c}} du.$$

Et toujours grâce au Lemme 7.2.1 (ii), on se ramène au cas $c = -1$:

$$\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\frac{1}{c} \tau_0^{(-1)} \text{ sous } \mathbb{P}_{x\sqrt{-c}}.$$

La transformée de Laplace devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_0^{(-1)}} \right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^\lambda (u^2 + x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 v^2} v^\lambda x^{-\lambda} (v^2 + 1)^{-\frac{\lambda}{2}} x^\lambda x dv \text{ avec } v = \frac{u}{x} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 v^2} \left(\frac{v^2}{v^2 + 1} \right)^{\frac{\lambda}{2}} dv \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 w} \left(\frac{w}{w + 1} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{dw}{2\sqrt{w}} \text{ avec } v = \sqrt{w} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 w}}{\sqrt{\pi w}} \left(\frac{w}{w + 1} \right)^{\frac{\lambda}{2}} dw \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-z}}{\sqrt{\pi \frac{z}{x^2}}} \left(\frac{\frac{z}{x^2}}{1 + \frac{z}{x^2}} \right)^{\frac{\lambda}{2}} x^{-2} dz \text{ avec } z = x^2 w \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{\pi z}} \left(\frac{z}{x^2 + z} \right)^{\frac{\lambda}{2}} dz. \end{aligned}$$

Or $z \mapsto \frac{e^{-z}}{\sqrt{\pi z}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(z)$ est la densité de la loi $\gamma_{\frac{1}{2}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_0^{(-1)}} \right) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{x^2 + z} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{e^{-z}}{\sqrt{\pi z}} dz \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\gamma_{\frac{1}{2}}}{x^2 + \gamma_{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\frac{\lambda}{2} \ln \left(1 + \frac{x^2}{\gamma_{\frac{1}{2}}} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Et donc par identification des transformées de Laplace, nous avons :

$$\text{Sous } \mathbb{P}_x : \tau_0^{(-1)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{x^2}{\gamma_{\frac{1}{2}}} \right).$$

Et donc grâce à nouveau au Lemme 7.2.1, (ii) :

Proposition 7.3.1 *Dans le cas $a = 0$, $c < 0$, $x > 0$:*

$$\text{Sous } \mathbb{P}_x : \tau_0^{(c)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\frac{1}{2c} \ln \left(1 - \frac{cx^2}{\gamma_{\frac{1}{2}}} \right).$$

(résultat donc encore vrai si $x < 0$, grâce au Lemme 7.2.1, (i))

Remarque 7.3.2 Lorsque c tend vers 0^- , $\tau_0^{(0^-)}$ va se comporter, par développement limité, comme $\frac{x^2}{\gamma_{\frac{1}{2}}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2x^2 Z_{\frac{1}{2}}$, qui a pour densité : $\frac{x e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)$, d'après la Proposition 5.2.3, et qui se comporte comme $\frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}$ quand t tend vers $+\infty$. On est à nouveau dans une situation "récurrent nul".

Nous présentons maintenant une preuve stochastique de ce que nous venons d'obtenir, nous ferons usage du Théorème de Dubins-Schwarz :

Théorème 7.3.3 (Dubins-Schwarz) *Considérons $t \mapsto M_t := \int_0^t X_s dB_s$ la martingale locale L^2 , sur $[0, +\infty[$, de crochet $C(t) = \int_0^t X_s^2 ds$.*

Alors $M_t^2 - C(t)$ est aussi une martingale locale sur $]0, +\infty, [$ et nous avons :

$$(M_t)_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_{C(t)})_{t \geq 0} \text{ (loi de processus).}$$

Remarque 7.3.4 La démonstration de ce théorème est dans [13]

À nouveau dans le cas $c = -1$, : $X_t = e^{-t} \left(x + \int_0^t e^s dB_s \right)$, alors en notant $M_t = \int_0^t e^s dB_s$, nous avons, sous \mathbb{P}_x :

$$\begin{aligned} \tau_0^{(-1)} &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf \left\{ t > 0 \mid e^{-t} \int_0^t e^s dB_s = -x e^{-t} \right\} \\ &= \inf \left\{ t > 0 \mid \int_0^t e^s dB_s = -x \right\} \\ &= \inf \left\{ t > 0 \mid \int_0^t e^s dB_s = x \right\} \text{ par symétrie de l'intégrale de Wiener} \\ &= \inf \{ t > 0 \mid M_t = x \}. \end{aligned}$$

$(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale L^2 , et son crochet est, par isométrie :

$$C(t) = \left\| \int_0^t e^s dB_s \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1).$$

Alors le Théorème de Dubins-Schwarz 7.3.3 donne :

$$\tau_0^{(-1)} = \inf\{t > 0 \mid M_t = x\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf\{t > 0 \mid B_{C(t)} = x\}$$

Or la fonction C est une bijection croissante de $[0, +\infty[$ (valant 0 en 0, $+\infty$ en $+\infty$, et de dérivée égale à $e^{2t} > 0$) et sa réciproque est $C^{-1}(t) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2t)$.

Alors, $\tau_x^{(B_t)}$ désignant le temps d'atteinte en x du mouvement brownien, il suit la loi $\frac{x^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}$ d'après le Proposition 5.2.3, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tau_0^{(-1)} &= \inf\{C^{-1}(t) > 0 \mid B_t = x\} \\ &= C^{(-1)}(\inf\{t > 0 \mid B_t = x\}) = C^{-1}(\tau_x^{(B_t)}) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} C^{-1}\left(\frac{x^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{\gamma_{\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Remarque 7.3.5 Et que se passe-t-il pour la loi de $\tau_a^{(c)}$ quand $a > 0$, (toujours dans le cas $c < 0$) ?

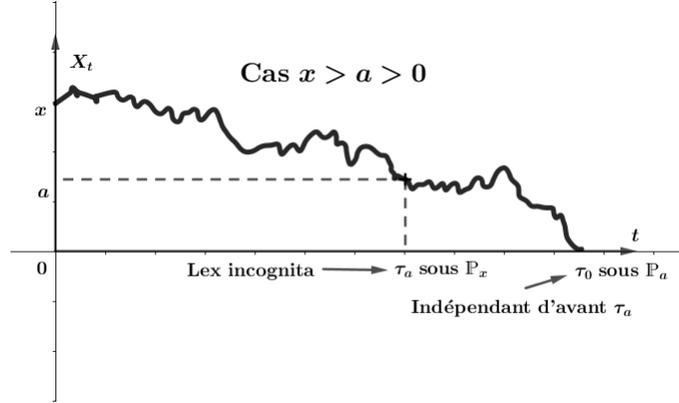
— Dans le cas $x > a > 0$, on a :

$$\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_a^{(c)}}\right) = \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(x\sqrt{-c})}{H_{\frac{\lambda}{c}}(0)} \times \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(0)}{H_{\frac{\lambda}{c}}(a\sqrt{-c})} = \frac{\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_0^{(c)}}\right)}{\mathbb{E}_a\left(e^{-\lambda\tau_0^{(c)}}\right)}. \quad (3.1)$$

Et alors : $\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_0^{(c)}}\right) = \mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_a^{(c)}}\right) \times \mathbb{E}_a\left(e^{-\lambda\tau_0^{(c)}}\right)$, ce qui donne en termes de lois, dans le cas $c < 0$, $x > a > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x\right) &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x\right) \underset{\perp}{+} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_a\right) \\ &\implies \left[-\frac{1}{2c} \ln\left(1 - \frac{cx^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}\right)\right] = \left(\tau_x^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_a\right) * \left[-\frac{1}{2c} \ln\left(1 - \frac{ca^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

On retrouve évidemment l'aspect markovien du processus.



Pour connaître $\tau_x^{(c)}$ sous \mathbb{P}_a , il faudrait "déconvoluer"...En fait voici un début de raisonnement : on peut montrer que $\tau_x^{(c)}$ sous \mathbb{P}_0 est infiniment divisible, tout comme $\tau_a^{(c)}$ sous \mathbb{P}_0 . Dès lors, si μ_a désigne la mesure de Levy de $\tau_a^{(c)}$ sous \mathbb{P}_0 , μ_x celle de $\tau_x^{(c)}$ sous \mathbb{P}_0 , alors, d'après le Théorème de De Finetti 4.1.3, d'après le Proposition 7.2.5 :

$$\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(a\sqrt{-c})}{H_{\frac{\lambda}{c}}(0)} = \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{\frac{\lambda}{c}t}) d\mu_a(t) \right]$$

De même pour $\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_x^{(c)}} \right)$. L'égalité (3.2) donne alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) &= \mathbb{E}_a \left(e^{-\lambda \tau_x^{(c)}} \right) \times \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_x^{(c)}} \right) \\ \implies \mathbb{E}_a \left(e^{-\lambda \tau_x^{(c)}} \right) &= \frac{\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right)}{\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_x^{(c)}} \right)} = \frac{\exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{\frac{\lambda}{c}t}) d\mu_a(t) \right]}{\exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{\frac{\lambda}{c}t}) d\mu_x(t) \right]} \\ &= \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{\frac{\lambda}{c}t}) d(\mu_a - \mu_x)(t) \right]. \end{aligned}$$

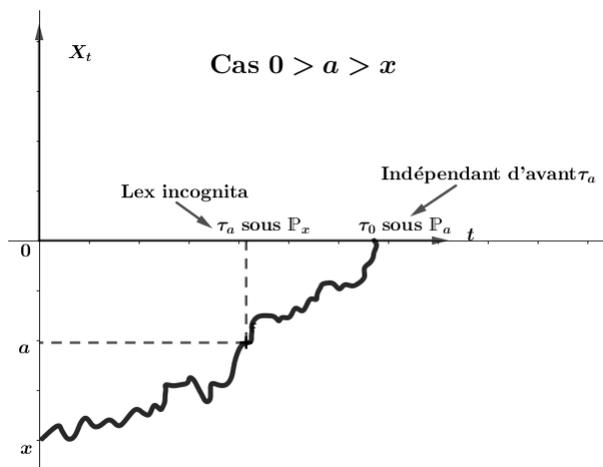
($\mu_a - \mu_x$ reste une mesure positive, car la mesure de Levy associée est croissante et $a > x > 0$) Mais déterminer μ_a par exemple revient, d'après la Proposition 7.3.1, à avoir une représentation exponentielle pour :

$$\frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(a)}{H_{\frac{\lambda}{c}}(0)} = \mathbb{E} \left[\left(1 - \frac{ca^2}{\gamma_{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{\lambda}{c}} \right] \dots$$

- Et dans le cas $a < 0$? le Lemme 7.2.1 (i), nous permet d'avoir :
- Cas $0 > a > x$, il s'apparente à $(-x) > (-a) > 0$, et alors par indépendance et

symétrie :

$$\begin{aligned} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x \right) &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_{(-x)} \right) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\tau_{(-x)}^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_{(-a)} \right) \underset{\perp}{+} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_{(-x)} \right) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\tau_x^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_a \right) \underset{\perp}{+} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x \right) \end{aligned}$$



— Cas $x > 0 > a$, une relation analogue à (3.1) est :

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(x\sqrt{-c})}{H_{\frac{\lambda}{c}}(a\sqrt{-c})} = \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(x\sqrt{-c})}{H_{\frac{\lambda}{c}}(0)} \frac{H_{\frac{\lambda}{c}}(0)}{H_{\frac{\lambda}{c}}(a\sqrt{-c})} = \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_0^{(c)}} \right) \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right).$$

On aurait : $\left(\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x \right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\tau_0^{(x)} \text{ sous } \mathbb{P}_x \right) \underset{\perp}{+} \left(\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_0 \right)$. Mais là on connaît encore moins de termes de la somme indépendante $\left(\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_0 \right)$. C'est encore plus difficile.

— Les cas : $0 < x < a$ et $0 > x > a$, le Corollaire 7.2.6 nous enseigne que par exemple dans le cas $0 < x < a$ et malgré la force d'attraction vers l'axe des abscisses, que ce soit avant τ_0 ou après, l'ordonnée a sera presque sûrement atteinte par X_t .

7.4 Le cas transitoire $c > 0$

L'équation différentielle (\mathcal{E}) : $f'' + 2cx f' - 2\lambda f = 0$ est à résoudre pour $c > 0$. Posons $f(x) = e^{-cx^2} g(x)$, alors nous avons :

$$\begin{cases} f'(x) = -2cx f(x) + e^{-cx^2} g'(x) \\ f''(x) = -2cf(x) - 2cx f'(x) - 2cxe^{-cx^2} g'(x) + e^{-cx^2} g''(x) \end{cases}$$

L'équation (\mathcal{E}) devient :

$$e^{-cx^2} [g'' + 2cxg' - 2\lambda g - 4c^2x^2g - 2cg - 4cxg' + 4c^2x^2g] = 0$$

Finalement : $g'' - 2cxg' - 2(\lambda + c)g = 0$ qui est une équation de type (\mathcal{E}) mais dans le cas $c < 0$, car cette fois $c' = -2c < 0$, et $\lambda' = \lambda + c > 0$, et donc tout le travail du cas $c < 0$ donne :

$$g(x) = H_{\frac{\lambda'}{c}}(\pm x\sqrt{-c'}) = H_{-\frac{\lambda+c}{c}}(\pm x\sqrt{c}) \implies f(x) = e^{-cx^2} H_{-1-\frac{\lambda}{c}}(\pm x\sqrt{c}).$$

Et alors, cette fois, nous aurons un résultat analogue au Lemme 7.2.1 (ii), appliqué à $-\check{c} = c$ pour se ramener au cas $c = 1$:

iii) La loi de $\tau_a^{(c)}$ sous \mathbb{P}_x est égale à la loi de $\frac{1}{c}\tau_{a\sqrt{c}}^{(1)}$ sous $\mathbb{P}_{x\sqrt{c}}$.

Dès lors, nous avons, l'égalité de série entière, dans le cas $c = 1$:

$$H_{-1-\lambda}(x) = \frac{1}{2\Gamma(\lambda+1)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1+p}{2}\right)}{p!} (-2x)^p$$

Or : $\Gamma\left(\frac{\lambda+p+1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{\lambda+p-1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} y^{p+\lambda} e^{-y^2} dy$, via le changement $y^2 = t$, donc grâce au Théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} H_{-1-\lambda}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{y^p \times (-2x)^p}{p!} \right) y^\lambda e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^{+\infty} e^{-2xy-y^2} y^\lambda dy. \end{aligned}$$

Cette fonction décroît sur \mathbb{R} en x car $h_\lambda(x) = y^\lambda e^{-2xy-y^2}$ a pour dérivée : $-2y^{\lambda-1} e^{-2xy-y^2}$ qui est négative.

Et alors, pour $x > a$, le produit $e^{a^2-x^2} H_{-1-\lambda}(x)$ décroît sur $]0, +\infty[$, et donc d'après le Théorème de Dynkin 5.4.1, si $a > 0$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda\tau_a^{(1)}} \right) = \frac{f(x)}{f(a)} = \frac{e^{-x^2} H_{-1-\lambda}(x)}{e^{-a^2} H_{-1-\lambda}(a)}.$$

C'est encore la bonne solution si $a \leq 0$, en effet il suffit de prouver que $e^{a^2-x^2}H_{-1-\lambda}(x)$ décroît encore sur $[a, 0]$. En fait le produit $e^{-x^2}H_{-1-\lambda}(x)$ décroît aussi sur $] -\infty, 0]$, car :

$$\begin{aligned} e^{-x^2}H_{-\lambda-1}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-2xy-y^2} y^\lambda dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)^2} y^\lambda dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \left[\int_0^{-x} e^{-(x+y)^2} y^\lambda dy + \int_{-x}^{+\infty} e^{-(x+y)^2} y^\lambda dy \right] \\ &:= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} [i(x) + j(x)]. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que i et j décroissent pour $x < 0$.

— Pour j :

$$j(x) = \int_{-x}^{+\infty} e^{-(x+y)^2} y^\lambda dy \stackrel{(u=x+y)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} [u + (-x)]^\lambda du,$$

fonction qui décroît car : $t < x < 0 \implies \forall u > 0 : [u + (-t)]^\lambda \geq [u + (-x)]^\lambda$.

— Pour i (c'est là que ça se gâte) :

$$i(x) = \int_0^{-x} e^{-(x+y)^2} y^\lambda dy \stackrel{(v=(-x)-y)}{=} \int_0^{-x} e^{-v^2} [(-x) - v]^\lambda dv.$$

Soient $t < x < 0$, on va prouver que $i(t) > i(x)$.

Pour tout $v \in]0, -x[$:

$$(-t) - v > (-x) - v > 0 \implies e^{-v^2} [(-t) - v]^\lambda > e^{-v^2} [(-x) - v]^\lambda > 0.$$

En intégrant sur $]0, -x[$, sachant que $]0, -x[\subset]0, -t[$:

$$i(t) = \int_0^{-t} e^{-v^2} [(-t) - v]^\lambda dv > \int_0^{-x} e^{-v^2} [(-t) - v]^\lambda dv > \int_0^{-x} e^{-v^2} [(-x) - v]^\lambda dv = i(x).$$

Donc finalement, $e^{-x^2}H_{-1-\lambda}(x)$ décroît aussi sur $] -\infty, 0]$.

Et dans le cas $x < a$, le changement $-x$ rend décroissante $e^{-x^2}H_{-1-\lambda}(-x)$ sur \mathbb{R} , on prend :

$$e^{-x^2}H_{-\lambda-1}(-x) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2} y^\lambda dy,$$

qui est croissante sur \mathbb{R} en x . Et donc, cette fois, pour $x < a$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(1)}} \right) = \frac{f(x)}{f(a)} = \frac{e^{-x^2}H_{-1-\lambda}(-x)}{e^{-a^2}H_{-1-\lambda}(-a)}.$$

En effectuant le changement de 1 à $c > 0$:

Proposition 7.4.1 *Pour le cas $c > 0$, la transformée de Laplace du temps d'atteinte du processus d'Ornstein-Uhlenbeck est :*

— Si $x < a$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = e^{c(a^2 - x^2)} \frac{H_{-1 - \frac{\lambda}{c}}(-x\sqrt{c})}{H_{-1 - \frac{\lambda}{c}}(-a\sqrt{c})},$$

— Si $x > a$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = e^{c(a^2 - x^2)} \frac{H_{-1 - \frac{\lambda}{c}}(x\sqrt{c})}{H_{-1 - \frac{\lambda}{c}}(a\sqrt{c})}.$$

7.5 Lien avec le brownien passant une frontière parabolique

Revenons à $\tau_a^{(c)}$ sous \mathbb{P}_x en général pour $x \neq a$. Nous avons, par symétrie de l'intégrale de Wiener et au Théorème de Dubins-Schwarz 7.3.3 :

$$\begin{aligned} \tau_a^{(c)} &= \inf \left\{ t > 0 \mid e^{ct} \left(x + \int_0^t e^{-cs} dB_s \right) = a \right\} \\ &= \inf \left\{ t > 0 \mid \int_0^t e^{-cs} dB_s = ae^{-ct} - x \right\} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf \left\{ t > 0 \mid \int_0^t e^{-cs} dB_s = x - ae^{-ct} \right\} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf \{ t > 0 \mid B_{C_c(t)} = x - ae^{-ct} \}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $C_c(t)$ est le crochet de la martingale $(M_t^{(c)})_{t \geq 0} = \left(\int_0^t e^{-sc} dB_s \right)_{t \geq 0}$. C'est-à-dire :

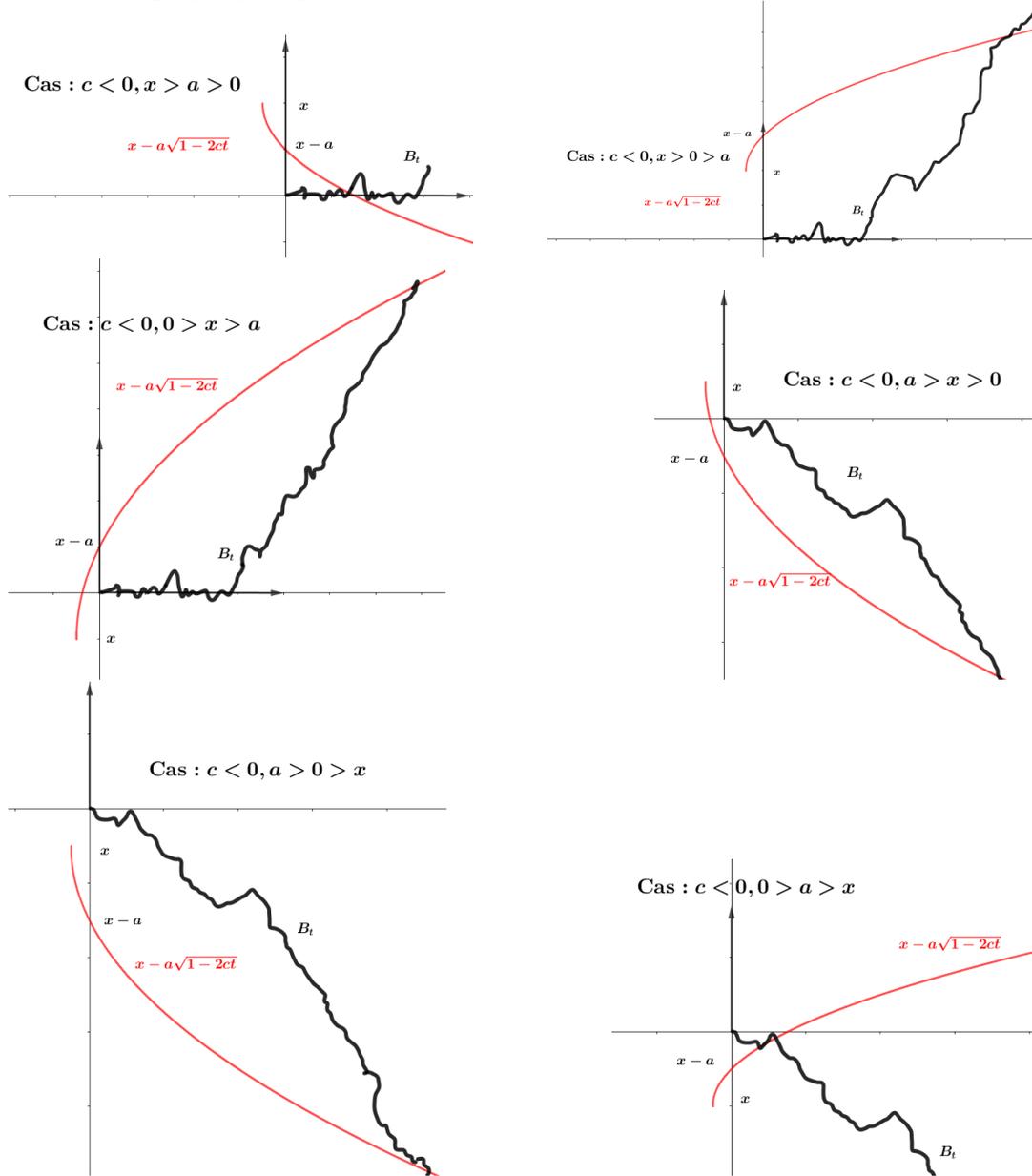
$$C_c(t) = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t e^{-sc} dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t e^{-2cs} ds = \frac{1}{2c} (1 - e^{-2ct}).$$

$C_c(t)$, quelque soit le signe de c est croissante (de dérivée $e^{-2ct} > 0$), positive, s'annulant en $t = 0$, et de limite en $+\infty$ égale à 1 si $c > 0$, et à $+\infty$, si $c < 0$. Sa réciproque quand elle est définie est : $C_c^{-1}(y) = -\frac{1}{2c} \ln(1 - 2cy)$. Dès lors :

— Si $c < 0$, $C_c(t)$ réalise une bijection croissante de $]0, +\infty[$, et donc :

$$\begin{aligned} \tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf \{ t > 0 \mid B_{C_c(t)} = x - ae^{-ct} \} \\ &= \inf \{ C_c^{-1}(t) > 0 \mid B_t = x - ae^{-cC_c^{-1}(t)} \} \\ &= C_c^{-1} \left[\inf \{ t > 0 \mid B_t = x - ae^{-cC_c^{-1}(t)} \} \right] \\ &= -\frac{1}{2c} \ln \left[1 - 2c \inf \{ t > 0 \mid B_t = x - a\sqrt{1 - 2ct} \} \right]. \end{aligned}$$

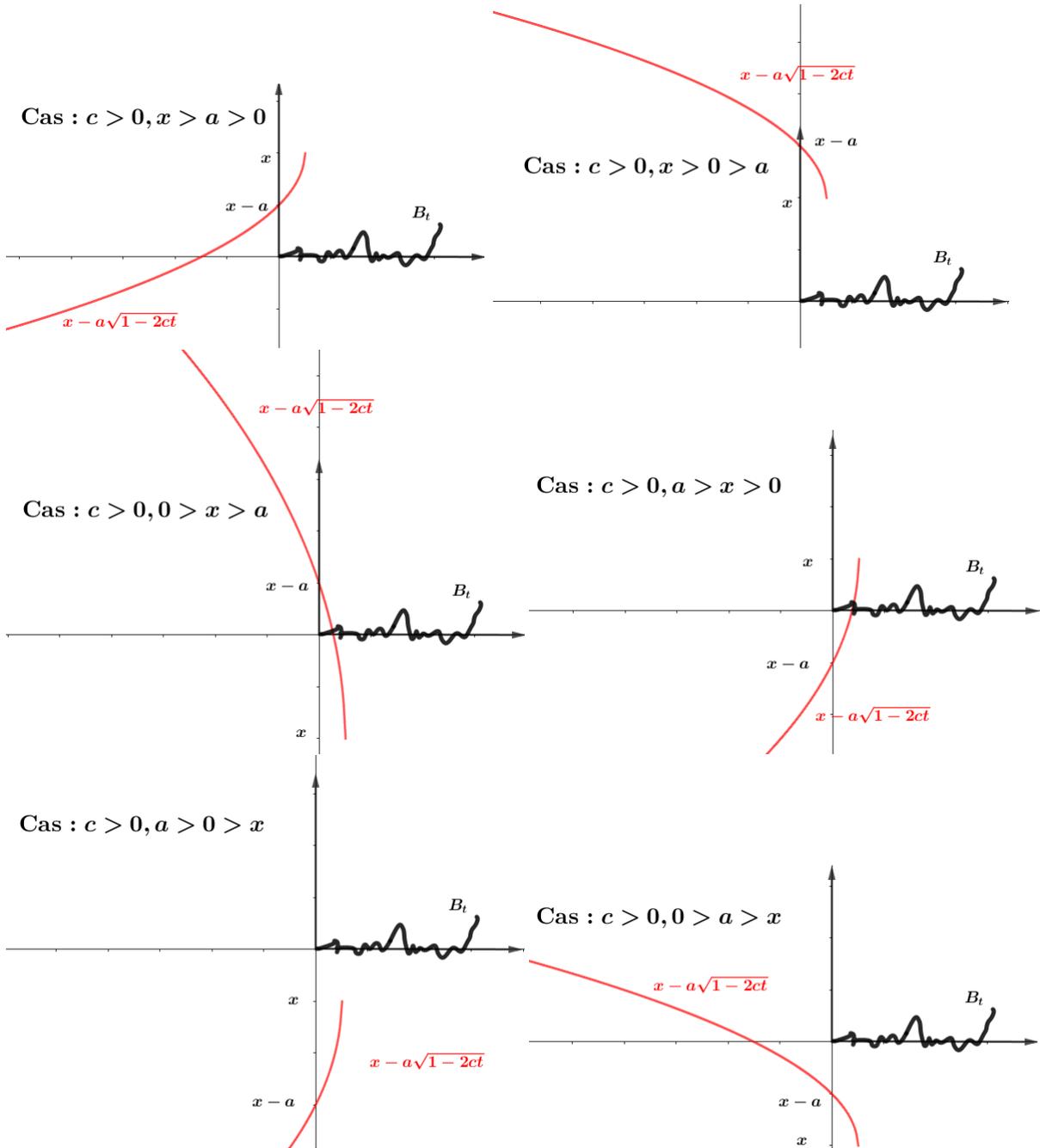
Voici les es graphiques qui illustrent les situations :



— Si $c > 0$ nous obtenons cette fois :

$$\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\frac{1}{2c} \ln \left[1 - 2c \inf \left\{ t \in \left[0, \frac{1}{2c} \left[| B_t = x - a\sqrt{1-2ct} \right] \right\} \right].$$

Voici les graphiques qui illustrent les situations :



Remarque 7.5.1 Dans le cas $c > 0$, avec $a = 0$, nous avons en fait :

$$C_c(\tau_0^{(c)}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf\{t > 0 \mid B_t = x\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{x^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}},$$

donc : $\mathbb{P}(\tau_0^{(c)} = +\infty) = \mathbb{P}(\gamma_{\frac{1}{2}} < cx^2) > 0$. Il y a un dirac en $+\infty$ pour $\tau_0^{(c)}$.

7.6 Compléments sur les fonctions de Hermite

En premier lieu, rappelons la relation (2.8) définissant la fonction de Hermite, sous la forme d'une série :

$$H_{-\lambda}(x) = \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right) \frac{(-2x)^n}{n!}$$

Définition 7.6.1 Le polynôme de Hermite d'ordre $m \geq 0$ est le polynôme $\mathcal{H}_m(z)$ de degré m égal à :

$$\mathcal{H}_m(z) = (-1)^m \frac{d^m}{dz^m} \left(e^{-z^2} \right) \times e^{z^2}.$$

Proposition 7.6.2 *Pour tout entier naturel m , $H_m(x)$ est un polynôme de degré m (appelé polynôme de Hermite d'ordre m).*

PREUVE DE LA PROPOSITION 7.6.2

Nous avons, pour $\nu = m$ entier naturel :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{\Gamma(-m)} = 0, \text{ pour } n > m, \text{ et } n \leq m, \text{ avec } m - n \text{ impair.}$$

Donc

$$H_m(z) = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \varphi(n) (-2z)^{m-2n},$$

avec :

$$\varphi(n) = \lim_{t \rightarrow m} \frac{\Gamma\left(-n + \frac{m-t}{2}\right)}{2\Gamma(-t)(m-2n)!} = \lim_{t \rightarrow m} \frac{(-t)_{m+1} \Gamma\left(1 + \frac{m-t}{2}\right)}{2 \left(\frac{m-t}{2}\right)_m \Gamma(m-t+1)(m-2n)!} = (-1)^{m-n} \frac{m!}{n!},$$

où $(x)_{m+1}$ est la notation de Pochhammer : $(x)_m = x \times (x+1) \times \cdots \times (x+m)$.

Et alors :

$$H_m(z) = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{(-1)^n (2z)^{m-2n} m!}{n!(m-2n)!} \text{ qui est polynomiale de degré } m.$$

$$(H_0(z) = 1, H_1(z) = 2z, H_2(z) = 4z^2 - 2)$$

Calculons la fonction génératrice exponentielle des $H_n(z)$. Grâce au Théorème de de Fubini :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{H_m(z)}{m!} t^m &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{E(\frac{m}{2})} \frac{(-1)^n (2z)^{m-2n} t^n}{p!(m-2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{m=2n}^{+\infty} \frac{(2z)^{m-2n} t^n}{n!(m-2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2z)^p t^{2n+p}}{k!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \right) \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2z)^p t^p}{p!} \right) \\ &= e^{2zt-t^2}. \end{aligned}$$

Donc, nous avons :
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m H_m(z)}{m!} t^m = e^{-(t+z)^2} e^{z^2}.$$

Et par unicité du développement de Taylor : $H_n(z) = (-1)^m \frac{d^m}{dz^m} (e^{-z^2}) e^{z^2} = \mathcal{H}_m(z)$. \square

Proposition 7.6.3 *Pour tout réel x , pour tous $\mu, \lambda > 0$, on a :*

- $\mathcal{H}_{\lambda, \mu} : x \mapsto \frac{[H_{-(\mu+\lambda)}(x)]^2}{H_{-\lambda}(x)H_{-(\lambda+2\mu)}(x)}$ est décroissante sur \mathbb{R} .
- Pour tous $\lambda > 1, \mu > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{H}_{\lambda, \mu}(x) = 1^+$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 7.6.3 Prenons $c = -1, \mu > 0$, et $x > y$, alors on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left(e^{-(\lambda+\mu)\tau_y^{(-1)}} \right) &= \mathbb{E}_x \left(e^{-(\frac{\lambda}{2}+\mu)\tau_y^{(-1)}} e^{-\frac{\lambda}{2}\tau_y^{(-1)}} \right) \\ &< \left[\mathbb{E}_x \left(e^{-(\lambda+2\mu)\tau_y^{(-1)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda\tau_y^{(-1)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui se traduit, grâce à la Proposition 7.2.5 :

$$\left[\frac{H_{-(\lambda+\mu)}(x)}{H_{-(\lambda+\mu)}(y)} \right]^2 \leq \frac{H_{-(\lambda+2\mu)}(x)H_{-\lambda}(x)}{H_{-(\lambda+2\mu)}(y)H_{-\lambda}(y)}, \text{ ou encore : } \frac{[H_{-(\mu+\lambda)}(x)]^2}{H_{-\lambda}(x)H_{-(\lambda+2\mu)}(x)} < \frac{[H_{-(\mu+\lambda)}(y)]^2}{H_{-\lambda}(y)H_{-(\lambda+2\mu)}(y)}$$

Ainsi : $\mathcal{H} : x \mapsto \frac{[H_{-(\mu+\lambda)}(x)]^2}{H_{-\lambda}(x)H_{-(\lambda+2\mu)}(x)}$ est décroissante sur \mathbb{R} .

D'autre part, nous avons vu que : $H_{-\lambda-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^\infty t^\lambda e^{-t^2-2xt} dt$, donc en effectuant le changement $\nu = \lambda + 1$, pour tout $\nu > 1$:

$$\begin{aligned} H_{-\nu}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t^2-2xt} dt \\ &= \frac{1}{(2x)^\nu} \Gamma(\nu) \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} e^{-s-\frac{s^2}{4x^2}} ds \text{ avec } s = 2xt \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (2x)^{-\nu} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} e^{-s} ds \right) = (2x)^{-\nu}. \end{aligned}$$

Les fonctions de Hermite sont toutes strictement positives (la représentation intégrale le dit), et donc, pour $\lambda > 1$, $\mu > 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda,\mu}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2x)^{-2(\lambda+\mu)}}{(2x)^{-\lambda} \times (2x)^{-(\lambda+2\mu)}} = 1.$$

D'où le résultat. □

On en déduit alors :

Corollaire 7.6.4 — Pour tout réel x , et pour tous $\lambda > 1$, $\mu > 0$: on a :

$$[H_{-\lambda+\mu}(x)]^2 > H_{-\lambda}(x)H_{-\lambda+2\mu}(x),$$

donc pour tout réel x , la fonction : $\lambda \mapsto H_{-\lambda}(x)$ est log-concave sur $]1, +\infty[$.

— Inégalité de Turán : pour tout réel x et pour tout $\lambda > 1$:

$$H_{-\lambda}(x)H_{-\lambda-2}(x) \leq [H_{-\lambda-1}(x)]^2$$

— En notant, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme H_n le n -ème polynôme de Hermite, on a aussi, pour tout réel x :

$$[H_{n+1}(x)]^2 \geq H_n(x)H_{n+2}(x).$$

PREUVE DU COROLLAIRE 7.6.4

- $\mathcal{H}_{\lambda,\mu}$ décroît vers 1.
- C'est l'inégalité quand $\lambda > 1$, et $\mu = 1$.
- Lorsque $\lambda = n \geq 1$, $H_{-\lambda}(x)$ est le polynôme de Hermite $H_n(x)$.

□

Remarque 7.6.5 Nous avons pour $x > 0$: pour tout $\lambda > 1$: $\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda\tau_0^{(-1)}} \right) = \frac{H_{-\lambda}(x)}{H_{-\lambda}(0)}$.

Nous avons un quotient de deux fonctions log-concaves en λ qui donne une transformée de Laplace qui est donc log-convexe en λ .

Chapitre 8

Etude de la diffusion de Bessel

Définition 8.0.1 On appelle diffusion de Bessel un processus solution de l'équation aux dérivées stochastiques :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = dB_t + \frac{c}{X_t} dt, \end{cases} \quad (0.1)$$

où $c \geq 0$

Remarque 8.0.2

- x est non nul, sinon nous avons un problème de définition.
- Si $c = 0$, il s'agit du cas limite : $X_t = B_t + x$.
- Si c est non nul, on se ramène à $x > 0$, par symétrie. Pour $x, a > 0$, nous allons donc chercher à calculer $\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right)$, puis la loi de $\tau_a^{(c)}$ sous \mathbb{P}_x .

8.1 Un lien avec le mouvement brownien n -dimensionnel

Soient pour $n \geq 1$: $(B_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (B_t^{(n)})_{t \geq 0}$, n browniens indépendants issus tous de 0.

Et considérons $Z_t = \sum_{i=1}^n \left(B_t^{(i)} \right)^2$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, par la Formule d'Itô 5.3.3 ($\left(B_t^{(i)} \right)^2 = f(B_t^{(i)})$, où f est la fonction carré) :

$$Z_t = y^2 + nt + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^t B_s^{(i)} dB_s^{(i)} \leq 0.$$

Puis :

$$dZ_t = n dt + 2 \sum_{i=1}^n B_t^{(i)} dB_t^{(i)}. \quad (1.1)$$

Soit alors $Y_t = x + \sqrt{Z_t} = x + g(Z_t)$ où g est la fonction racine carrée. Alors d'après la Formule d'Itô 5.3.3 :

$$\begin{aligned} dY_s &= \frac{dZ_s}{2\sqrt{Z_s}} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4Z_s\sqrt{Z_s}} \right) d\langle Z_s \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{dZ_s}{\sqrt{Z_s}} - \frac{1}{8} \frac{d\langle Z_s \rangle}{Z_s\sqrt{Z_s}}. \end{aligned}$$

Or, nous avons, par indépendance :

$$\begin{aligned} d\langle Z_s \rangle &= n^2(ds)^2 + 4n \left(\sum_{i=1}^n B_s^{(i)} dB_s^{(i)} \right) ds + 4 \left(\sum_{i=1}^n B_s^{(i)} dB_s^{(i)} \right)^2 \\ &= 0 + 0 + 4 \sum_{1 \leq i, j \leq n} B_s^{(i)} B_s^{(j)} dB_s^{(i)} dB_s^{(j)} \\ &= 4 \left(\sum_{i=1}^n \left(B_s^{(i)} \right)^2 \left(dB_s^{(i)} \right)^2 \right) = 4 \left(\sum_{i=1}^n \left(B_s^{(i)} \right)^2 \right) ds \\ &= 4Z_s ds. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} dY_s &= \frac{dZ_s}{2\sqrt{Z_s}} - \frac{1}{8} \times \frac{4Z_s ds}{Z_s\sqrt{Z_s}} \\ &= \frac{dZ_s - ds}{2\sqrt{Z_s}} = \frac{nds - ds}{2Y_s} + \sum_{i=1}^n \frac{B_s^{(i)} dB_s^{(i)}}{2Y_s} \\ &:= \frac{n-1}{2Y_s} ds + dM_s, \end{aligned}$$

où M_t désigne la martingale : $\sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_s^{(i)}}{2Y_s} dB_s^{(i)}$.

En fait, nous avons $\langle M_t \rangle_t = t$. En effet, des calculs précédents, on tire :

$$\begin{cases} dY_s = \frac{dZ_s ds}{2Y_s} \\ dM_s = dY_s - \frac{n-1}{2} ds \end{cases}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
d\langle M_s \rangle_s &= (dM_s)^2 = \left[dY_s - \frac{n-1}{2} ds \right] \left[dY_s - \frac{n-1}{2} ds \right] \\
&= (dY_s)^2 - \frac{(n-1)}{Y_s} dY_s ds \\
&= \frac{(dZ_s)^2}{4Z_s} - \frac{1}{2Z_s} dZ_s ds + \frac{1}{2Z_s} dZ_s ds - \frac{n-1}{2} dZ_s ds \\
&= \frac{4}{4Z_s} \left(\sum_{i=1}^n (B_s^{(i)})^2 \right) ds = \frac{1}{Z_s} \times Z_s ds = ds.
\end{aligned}$$

Et donc cette martingale $(M_t)_t$ est un mouvement brownien (une martingale de crochet t). Et alors, le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ ainsi construit à partir de $(Z_t)_t$ résout l'équation (0.1), pour toute condition initiale non nulle x , dans le cas $c = \frac{n-1}{2}$.

8.2 Transformée de Laplace du temps d'atteinte

8.2.1 Résolution de l'équation différentielle associée

Remarque 8.2.1 Considérons le processus solution $(Y_t)_{t \geq 0}$, trouvée à l'équation (0.1) dans la sous-section précédente, donc dans le cas où $c = \frac{n-1}{2}$, $n \in \mathbb{N}/\{0, 1\}$.

Le Théorème du potentiel du mouvement brownien n -dimensionnel ($n \geq 2$) entraîne que :

$$\forall n \geq 2 : \tau_0^{(\frac{n-1}{2})} = \inf \{t > 0 \mid Y_t = 0\} = +\infty, \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

Le Théorème de comparaison des diffusions entraînent par ailleurs que si $c \leq c'$, alors nous avons $\tau_0^{(c)} \leq \tau_0^{(c')}$. Donc $\tau_0^{(c)} = +\infty$, $\mathbb{P} - \text{p.s.}$, pour tout $c \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi dans le cas où $a = 0$, on sait comment se comporte $\tau_0^{(c)}$ si $c \geq \frac{1}{2}$. (Nous redémontrons ce résultat par un autre moyen)

Ainsi dans le cas $a = 0$, il faudra étudier $\tau_0^{(c)}$ pour $0 < c < \frac{1}{2}$, parce que si $c = 0$, nous retrouvons : $X_t = x + B_t$, et nous savons que $\tau_0^{(0)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tau_{-x} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{x^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}$, où τ_{-x} est le temps d'atteinte du brownien $(B_t)_t$ de la valeur $(-x)$ (Proposition 5.2.3)

Soit $c \neq 0$, et soient $a, x > 0$, nous avons : $dX_s = \sigma(X_s)dB_s + b(X_s)ds$, où :
$$\begin{cases} \sigma(x) = 1 \\ b(x) = \frac{c}{x} \end{cases}$$

Donc, le générateur infinitésimal est :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{(\sigma(x))^2}{2} f''(x) + b(x)f'(x) = \frac{1}{2} f''(x) + \frac{c}{x} f'(x).$$

Ainsi l'équation différentielle ordinaire associée à l'équation (0.1) est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\lambda)}(f)(x) = 0 &\iff \frac{1}{2}f''(x) + \frac{c}{x}f'(x) - \lambda f(x) = 0 \\ &\iff x f''(x) + 2c f'(x) - 2\lambda x f(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Comme dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, nous allons chercher une solution à cette équation (2.1) sous la forme d'une série entière : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Nous avons : $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, et $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Alors :

$$\begin{aligned} x f''(x) + 2c f'(x) - 2\lambda x f(x) = 0 &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2c a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-2\lambda) a_n x^{n+1} = 0 \\ &\iff 2ca_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2c(n+2)a_{n+2} - 2\lambda a_n] x^{n+1} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2ca_1 = 0 \\ a_0 \text{ est un degré de liberté} \\ \text{Si } n \geq 1 : (n+2)(n+1)a_{n+2} + 2c(n+2)a_{n+2} - 2\lambda a_n = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_1 = 0, \text{ car } c \neq 0 \\ a_0 \text{ est un degré de liberté} \\ \text{Si } n \geq 1 : a_{n+2} = \frac{2\lambda a_n}{(n+2)(n+1+2c)} \end{cases} \end{aligned}$$

— Si $n = 2p + 1$, où $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{2\lambda a_{2p-1}}{(2p+1)(2p+1+2c)} = \frac{\lambda a_{2p-1}}{2(p+\frac{1}{2})(p+\frac{1}{2}+c)} \\ &= \dots = \frac{\lambda^p}{2^p (-\frac{1}{2})_p \times (c - \frac{1}{2})_p} a_1 = 0. \end{aligned}$$

— Si $n = 2p$, où $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{2\lambda a_{2p-2}}{(2p)(2p+1+2c)} = \frac{\lambda a_{2p-2}}{2p(p+\frac{1}{2}+c)} \\ &= \dots = \frac{\lambda^p}{2^p p! \times (c - \frac{1}{2})_p} a_0. \end{aligned}$$

Donc, en posant $\nu = c - \frac{1}{2}$, et comme $(\nu)_p = \frac{\Gamma(\nu + p + 1)}{\Gamma(\nu)}$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0 \lambda^p x^{2p}}{2^p (\nu)_p p!} \\ &= a_0 \Gamma(\nu) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{\lambda})^{2p}}{\Gamma(\nu + p + 1) p!} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^{2p} \\ &= a_0 \Gamma(\nu) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1 + \nu + p) p!} \left(\frac{x\sqrt{2\lambda}}{2} \right)^{2p}. \end{aligned}$$

Définition 8.2.2 On appelle fonction de Bessel modifiée la fonction \mathcal{I}_ν définie pour tout z appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{R}^- et pour tout ν complexe, par :

$$\mathcal{I}_\nu(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu + p + 1) p!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2p+\nu}.$$

Nous avons dès lors une première famille de fonctions solution de l'équation (2.1) :

$$f_{1,\nu}(x) = a_0 \Gamma(\nu) \left(\frac{x\sqrt{2\lambda}}{2} \right)^{-\nu} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1 + \nu + p) p!} \left(\frac{x\sqrt{2\lambda}}{2} \right)^{2p+\nu} = a_0 \Gamma(\nu) \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2} \right)^{-\nu} \times x^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x\sqrt{2\lambda}).$$

On cherche une seconde famille de solutions à l'équation (2.1), (les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2), sous la forme : $f_{2,\nu}(x) = x^{-2\nu} g(x)$. Nous avons dès lors :

$$\begin{cases} f'(x) = -2\nu x^{-2\nu-1} g(x) + x^{-2\nu} g'(x) \\ f''(x) = 2\nu(2\nu+1)x^{-2\nu-2} g(x) - 4\nu x^{-2\nu-1} g'(x) + x^{-2\nu} g''(x) \end{cases}.$$

Ainsi, après calculs :

$$x f''(x) + 2c f'(x) - 2\lambda x f(x) = 0 \iff x^{-2\nu} [x g''(x) + (2\nu+1)g'(x) - 2\lambda x g(x)] = 0.$$

Donc $g(x)$ est la solution de l'équation différentielle :

$$x g''(x) + 2\tilde{c} g'(x) - 2\lambda x g(x) = 0, \text{ où } \tilde{c} = \frac{1-2\nu}{2} = 1-c. \quad (2.2)$$

Alors, d'après tout le travail fait pour l'équation (2.1), une solution de l'équation (2.2) est de la forme :

$$g(x) = x^{-\tilde{\nu}} I_{\tilde{\nu}}(x\sqrt{2\lambda}), \text{ où } \tilde{\nu} = \tilde{c} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - c = -\nu.$$

Donc : $g(x)$ est de la forme $x^\nu \mathcal{I}_{-\nu}(x\sqrt{2\lambda})$. Et donc finalement la deuxième famille de solutions de l'équation (2.1) est constituée des multiples de :

$$f_{2,\nu}(x) = x^{-2\nu} x^\nu \mathcal{I}_{-\nu}(x\sqrt{2\lambda}) = x^{-\nu} \mathcal{I}_{-\nu}(x\sqrt{2\lambda}).$$

8.2.2 La fonction de Mac Donald

Définition 8.2.3 *La fonction de Mac Donald est la fonction K_ν pour tout ν appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{Z} , et pour tout z appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{R}^- par :*

$$\mathcal{K}_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{I}_{-\nu}(z) - \mathcal{I}_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)}.$$

Remarque 8.2.4 Présentons quelques propriétés élémentaires des fonctions \mathcal{I}_ν , \mathcal{K}_ν :

- Nous avons de manière immédiate que : $\mathcal{I}_\nu(z) = i^{-\nu} \mathcal{J}_\nu(iz)$, où J_ν désigne la fonction de Bessel de première espèce d'indice ν (Définition 3.1.5)
- On en déduit que pour tout entier naturel $n \geq 1$, et tout z de \mathbb{C}/\mathbb{R}^- : $\mathcal{I}_{-n}(z) = \mathcal{I}_n(z)$, car nous avons vu $\mathcal{J}_{-n}(z) = (-1)^n \mathcal{J}_n(z)$, et alors :

$$\mathcal{I}_{-n}(z) = i^{-(-n)} \mathcal{J}_{-n}(iz) = i^n (-1)^n \mathcal{J}_n(iz) = (-i)^n \mathcal{J}_n(iz) = i^{-n} \mathcal{J}_n(iz) = \mathcal{I}_n(z).$$

Donc, dans le cas où ν est entier, la question de définir \mathcal{K}_ν ne se pose pas vraiment.

- Pour tout ν complexe non entier, $\mathcal{K}_{-\nu} = \mathcal{K}_\nu$, car $\sin(-\pi\nu) = -\sin(\pi\nu)$.
- $x^{-\nu} \mathcal{K}_\nu$ pour $\nu = c - \frac{1}{2}$ est une solution de l'équation (2.1), car combinaison linéaire de $f_{1,\nu}$ et $f_{2,\nu}$.

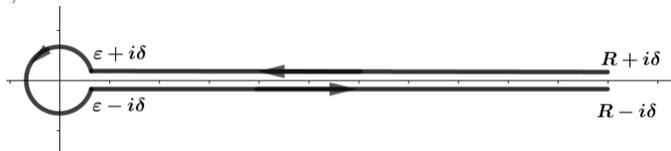
Proposition 8.2.5 *Pour tout ν réel non entier, et pour tout réel $x > 0$:*

$$\mathcal{K}_\nu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} t^{\nu-1} dt.$$

Lemme 8.2.6 — *Pour tout réel $x > 0$, non entier :*

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2i \sin(\pi x)} \int_{\widehat{\partial\omega}} (-z)^{x-1} e^{-z} dz,$$

où $\widehat{\partial\omega}$ est le contour limite quand δ tend vers 0^+ , ε tend vers 0^+ et R tend vers $+\infty$ du contour $\partial\omega_{\delta,\varepsilon,R}$ suivant :



— *Formule de Hankel : pour tout réel $x > 0$:*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\widehat{\partial\omega}} (-z)^{-x} e^{-z} dz$$

PREUVE DU LEMME 8.2.6

— Soit $f(z) = (-z)^{x-1}e^{-z}$, on va calculer $\int_{\partial\omega_{\delta,\varepsilon,R}} f(z)dz$, en fonction de δ , ε , et R .

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_{\delta,\varepsilon,R}} f(z)dz &= \int_R^\varepsilon [-(r+i\delta)]^{x-1} e^{-r-i\delta} dr \\ &\quad + \int_{\theta_\delta}^{2\pi-\theta_\delta} \left(\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}e^{i\pi}e^{i\theta}\right)^{x-1} e^{\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}e^{i\pi}e^{i\theta}} d\left(\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}e^{i\theta}\right) \\ &\quad + \int_\varepsilon^R [-(r-i\delta)]^{x-1} e^{-r+i\delta} dr, \end{aligned}$$

où θ_δ est la mesure entre 0 et π de l'argument du complexe $\varepsilon+i\delta$. Lorsque δ tend vers 0^+ :

— Dans la première intégrale de l'égalité ci-dessus : $-(r+i\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} e^{-i\pi}r$.

— Et dans la troisième : $-(r-i\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} e^{i\pi}r$.

— Dans la seconde intégrale : $\theta_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0^+$, et :

$$\int_{\theta_\delta}^{2\pi-\theta_\delta} \left(\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}e^{i\pi}e^{i\theta}\right)^{x-1} e^{\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}e^{i\pi}e^{i\theta}} d\left(\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}e^{i\theta}\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon e^{i\pi}e^{i\theta}\right)^{x-1} e^{\varepsilon e^{i\pi}e^{i\theta}} i\varepsilon d\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\partial\omega_{\delta,\varepsilon,R}} f(z)dz &= e^{-i\pi(x-1)} \int_R^\varepsilon r^{x-1} e^{-i\pi}r dr \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon e^{i\pi}e^{i\theta}\right)^{x-1} e^{\varepsilon e^{i\pi}e^{i\theta}} i\varepsilon d\theta + e^{i\pi(x-1)} \int_\varepsilon^R r^{x-1} e^{i\pi}r dr. \end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\left| \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon e^{i\pi}e^{i\theta}\right)^{x-1} e^{\varepsilon e^{i\pi}e^{i\theta}} i\varepsilon d\theta \right| \leq \varepsilon^x \int_0^{2\pi} e^{-\varepsilon \cos(\theta)} d\theta \leq \varepsilon^x \int_0^{2\pi} e^{-\varepsilon} d\theta = 2\pi \varepsilon^x e^{-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0,$$

car $x > 0$. Donc, par convergence monotone (pour les deux autres intégrales) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\partial\omega_{\delta,\varepsilon,R}} f(z)dz = e^{-i\pi(x-1)} \int_R^0 r^{x-1} e^{-i\pi}r dr + e^{i\pi(x-1)} \int_0^R r^{x-1} e^{i\pi}r dr.$$

Et enfin, encore par convergence monotone :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\partial\omega}} (-z)^{x-1} e^{-z} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\partial\omega_{\delta,\varepsilon,R}} f(z)dz \\ &= -e^{-i\pi(x-1)} \int_0^{+\infty} r^{x-1} e^{-r} dr + e^{i\pi(x-1)} \int_0^{+\infty} r^{x-1} e^{-r} dr \\ &= (e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}) \int_0^{+\infty} r^{x-1} e^{-r} dr \\ &= -2i \sin(\pi x) \Gamma(x). \end{aligned}$$

— Pour $0 < x < 1$:

$$\Gamma(1-x) = -\frac{1}{2i \sin(\pi(1-x))} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-z)^{1-x-1} e^{-z} dz = -\frac{1}{2i \sin(\pi x)} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-z)^{-x} e^{-z} dz$$

Grâce à la Formule des compléments (Théorème 1.3.5) :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)\Gamma(x)} = \Gamma(1-x) = -\frac{1}{2i \sin(\pi x)} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-z)^{-x} e^{-z} dz.$$

Donc pour tout $0 < x < 1$: $\frac{1}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-z)^{-x} e^{-z} dz$.

En considérons x complexe, les deux membres de la dernière égalité sont holomorphes en x appartenant à \mathbb{C} ($\frac{1}{\Gamma(z)}$ est entière et e^{-z} l'emporte sur tous les monômes z^{-x}) avec x en $-\infty$) et sont égaux sur tout l'intervalle réel $]0, 1[$ et ne s'annulent pas. Alors par prolongement analytique, les deux membres sont égaux pour tout réel strictement positif. (en fait pour tout complexe).

□

PREUVE DE LA PROPOSITION 8.2.5 : Grâce à la Formule de Hankel (Lemme 8.2.6 (ii)), pour tout $x > 0$, et pour tout p entier naturel, pour tout réel ν :

$$\begin{aligned} \frac{x^{p-\nu}}{\Gamma(p-\nu+1)} &= \frac{x^{p-\nu}}{2i\pi} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-z)^{\nu-p-1} e^{-z} dz \\ &= -\frac{x^{p-\nu}}{2i\pi} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-sx)^{\nu-p-1} e^{-sx} ds, \text{ avec } z = xs, \text{ } dz = x ds. \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-s)^{\nu-p-1} e^{-sx} ds \text{ (le contour n'est pas affecté)}. \end{aligned}$$

Et de même : $\frac{x^{p+\nu}}{\Gamma(\nu+p+1)} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\widehat{\partial\bar{w}}} (-s)^{-\nu-p-1} e^{-sx} ds$.

Dès lors, pour tout $x > 0$, tel que x et $2x$ ne sont pas entiers :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\nu(2x) &= -\frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{I}_\nu(2x) - \mathcal{I}_{-\nu}(2x)}{\sin(\pi\nu)} \\
&= \frac{\pi}{2 \sin(\pi\nu)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} \left[\frac{x^{p+\nu}}{\Gamma(p+\nu+1)} - \frac{x^{p-\nu}}{\Gamma(p-\nu+1)} \right] \\
&= \frac{\pi}{2 \sin(\pi\nu)} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2i\pi} \right) \frac{x^p}{p!} \int_{\widehat{\partial\bar{\omega}}} [(-s)^{-\nu-p-1} - (-s)^{\nu-p-1}] e^{-sx} ds \\
&= -\frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} \int_{\widehat{\partial\bar{\omega}}} [(-s)^{-\nu-p-1} - (-s)^{\nu-p-1}] e^{-sx} ds \\
&= \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} \int_0^{+\infty} (-t)^{-p} e^{-tx} [t^{-\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) + t^{\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu})] dt \\
&= \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \int_0^{+\infty} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-tx)^{-p}}{p!} e^{-tx} [t^{-\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) + t^{\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu})] dt \right] \\
&= \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \times \int_0^{+\infty} 2i \sin(\pi\nu) e^{-tx - \frac{x}{i}} (t^{\nu-1} + t^{-\nu-1}) dt
\end{aligned}$$

Encore, par contour :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \times \int_0^{+\infty} 2i \sin(\pi\nu) e^{-tx - \frac{x}{i}} (t^{\nu-1} + t^{-\nu-1}) dt \\
&= \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} \int_0^{+\infty} (-t)^{-p} e^{-tx} [t^{-\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) + t^{\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu})] dt \\
&= \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \int_0^{+\infty} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-tx)^{-p}}{p!} e^{-tx} [t^{-\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) + t^{\nu-1} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu})] dt \right] \\
&= \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \times \int_0^{+\infty} 2i \sin(\pi\nu) e^{-tx - \frac{x}{i}} (t^{\nu-1} + t^{-\nu-1}) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(t + \frac{1}{i})} (t^{\nu-1} + t^{-\nu-1}) dt.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+\frac{1}{t})} (t^{\nu-1} + t^{-\nu-1}) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+\frac{1}{t})} (t^{\nu-1} + t^{-\nu-1}) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+\frac{1}{t})} t^{\nu-1} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+\frac{1}{t})} t^{-\nu-1} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+\frac{1}{t})} t^{\nu-1} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(\frac{1}{u}+u)} u^{\nu-1} du, \text{ avec } t = \frac{1}{u} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x(t+\frac{1}{t})} t^{\nu-1} dt.
\end{aligned}$$

Et donc, en remplaçant $2x$ par x : $\mathcal{K}_\nu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} t^{\nu-1} dt.$ □

8.2.3 Le résultat sur les transformées de Laplace

Proposition 8.2.7 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ la diffusion de Bessel, pour $x > 0, c > 0$.

— Si $x > a > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = \frac{x^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{a^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(a\sqrt{2\lambda})}.$$

— Si $0 < x < a$, alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = \frac{x^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{a^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(a\sqrt{2\lambda})}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 8.2.7 :

— Cas $x > a > 0$: d'après la Proposition 8.2.5, et sachant que $x^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})$ est solution de l'équation 2.1 :

$$\begin{aligned}
x^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda}) &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})\sqrt{2\lambda}} x^{-\nu} t^{\nu-1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}(xu+\frac{1}{xu})\sqrt{2\lambda}} x u^\nu \left(\frac{1}{xu} \right) du, \text{ avec } u = \frac{t}{x}, du = \frac{dt}{x} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}u\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{2u}} u^{\nu-1} du,
\end{aligned}$$

expression qui montre que $x^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})$ décroît en $x > 0$, donc sur $[a, +\infty[$. Dès lors le Théorème de Dynkin 5.4.1 s'applique :

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = \frac{x^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{a^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(a\sqrt{2\lambda})}.$$

— Si $0 < x < a$: on cherche une solution de l'équation 2.1 croissante sur $]0, a[$.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x\sqrt{2\lambda}) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\sqrt{2\lambda}\right)^{2p}}{\Gamma(\nu + p + 1)p!}$$

est croissante et strictement positive en $x > 0$ pour $\nu \geq 0$, c'est-à-dire $c - \frac{1}{2} \geq 0$. Et donc :

— Si $c \geq \frac{1}{2}$: le Théorème de Dynkin 5.4.1 donne cette fois :

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda\tau_a^{(c)}} \right) = \frac{x^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{a^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(a\sqrt{2\lambda})}.$$

— Si $0 < c < \frac{1}{2}$, alors $\nu < 0$, et dans ce cas, $\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x\sqrt{2\lambda})$ est encore croissante et strictement positive en $x > 0$. La conclusion s'en suit. □

8.3 Loi du temps d'atteinte

8.3.1 Le cas $0 < a < x$ (et a proche de 0)

Remarque 8.3.1 Nous allons retrouver la conclusion de la Remarque 8.2.1 quand $c \geq \frac{1}{2}$, pour $\tau_0^{(c)}$.

Proposition 8.3.2 *Considérons $0 < a < x$, alors :*

— Si $\nu < 0$, ie $c < \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}_x \left(\tau_a^{(c)} < +\infty \right) = 1, \text{ et } \tau_0^{(c)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{x^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}-c}}.$$

— Si $\nu > 0$, ie $c > \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}_x \left(\tau_a^{(c)} < +\infty \right) = \left(\frac{a}{x}\right)^{2c-1}, \text{ en particulier : } \mathbb{P}_x \left(\tau_0^{(c)} < +\infty \right) = 1 \iff c \leq \frac{1}{2}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 8.3.2 : Pour a proche de zéro, nous tombons dans la situation $0 < a < x$, nous avons :

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda\tau_a^{(c)}} \right) = \frac{x^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{a^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(a\sqrt{2\lambda})} = \frac{(x\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{(a\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(a\sqrt{2\lambda})}. \quad (3.1)$$

Dès lors, pour tout $x > 0$, d'après la Proposition 8.2.5

$$\begin{aligned}
(x\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda}) &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})\sqrt{2\lambda}} (x\sqrt{2\lambda})^{-\nu} t^{\nu-1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}\left(ux\sqrt{2\lambda} + \frac{1}{ux\sqrt{2\lambda}}\right)\sqrt{2\lambda}} (x\sqrt{2\lambda})^{-\nu+\nu} u^{-\nu-1} du, \text{ avec } t = xu\sqrt{2\lambda} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x^2\lambda u} e^{-\frac{1}{2u}} u^{-\nu-1} du.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

— Si $\nu < 0$, alors par convergence monotone, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (x\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda}) &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2u}} u^{-\nu-1} du \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-v} \left(\frac{1}{2v}\right)^{\nu-1} \frac{dv}{2v^2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \int_0^{+\infty} v^{-\nu-1} e^{-v} dv = 2^{-\nu} \Gamma(-\nu).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ainsi, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}_x \left(\tau_a^{(c)} < +\infty \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(x\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{(a\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(a\sqrt{2\lambda})} = 1.$$

Et dans ce cas de $\nu < 0$, concernant la loi de $\tau_0^{(c)}$, nous avons alors trouvé, grâce à l'égalité (3.2), et la fin du calcul (3.3) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_0^{(c)}} \right) &= \frac{\int_0^{+\infty} e^{-x^2\lambda u} e^{-\frac{1}{2u}} u^{-\nu-1} du}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2u}} u^{-\nu-1} du} \\
&= \frac{\int_0^{+\infty} e^{-x^2\lambda u} e^{-\frac{1}{2u}} u^{-\nu-1} du}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu)} \\
&= \frac{(x^2)^{-\nu-1}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} e^{-\frac{x^2}{2y}} y^{-\nu-1} dy, \text{ avec } y = x^2 u.
\end{aligned}$$

Avec un raisonnement analogue à la démonstration de la Proposition 5.2.3 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\gamma-\nu}(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} t^{-\nu-1} e^{-t} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t) dt \\
\implies \mathbb{P}_{\frac{x^2}{2\gamma-\nu}}(y) &= \frac{(x^2)^{-\nu+1}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu)} e^{-\frac{x^2}{2y}} y^{-\nu-1} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(y) dy.
\end{aligned}$$

En identifiant les Laplace, nous avons bien lorsque $\nu < 0$: $\tau_0^{(c)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{x^2}{2\gamma-\nu} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{x^2}{2\gamma\frac{1}{2}-c}$.

— Si $\nu > 0$, Quand nous faisons tendre λ vers 0, nous aurons :

$$\begin{aligned}
(a\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(a\sqrt{2\lambda}) &= (a\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}(t+\frac{1}{t})\sqrt{2\lambda}} t^{\nu-1} dt \\
&= (a\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(\frac{2u}{a\sqrt{2\lambda}} + \frac{a\sqrt{2\lambda}}{2u}\right)\sqrt{2\lambda}} \times \left(\frac{2u}{a\sqrt{2\lambda}}\right)^{\nu-1} \times \frac{2du}{a\sqrt{2\lambda}} \\
&= (a\sqrt{\lambda})^{-2\nu} \int_0^{+\infty} e^{-u} e^{-\frac{a^2\lambda}{2u}} u^{\nu-1} du, \text{ avec } t = \frac{2u}{a\sqrt{2\lambda}} \\
&\underset{\lambda \rightarrow 0^+}{\sim} (a\sqrt{\lambda})^{-2\nu} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\nu-1} = (a\sqrt{\lambda})^{-2\nu} \Gamma(\nu).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > a > 0$:

$$\mathbb{P}_x(\tau_a^{(c)} < +\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a^{(c)}}) = \left(\frac{a}{x}\right)^{2\nu}. \quad (3.4)$$

Et alors, lorsque a tend vers 0, nous retrouvons, pour $\nu > 0$, c'est-à-dire $c > \frac{1}{2}$, pour tout $x > 0$:

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^{(c)} < +\infty) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{a}{x}\right)^{2\nu} = 0 \implies \mathbb{P}_x(\tau_0^{(c)} = +\infty) = 1.$$

— Etude du cas $\nu = 0$. Supposons $\nu > 0$ petit. Par comparaison des drifts (égalité (3.4)) : pour $t > 0$ assez grand :

$$0 < \nu_1 < \nu_2 \implies \mathbb{P}_x(\tau_a^{(c_1)} \leq t) \geq \mathbb{P}_x(\tau_a^{(c_2)} \leq t)$$

Faisant tendre ν_1 vers 0 : $\mathbb{P}_x(\tau_a^{(0)} < +\infty) \geq \left(\frac{a}{x}\right)^\nu$. Ainsi : $\mathbb{P}_x(\tau_a^{(0)} < +\infty) = 1$.

En conclusion $\mathbb{P}_x(\tau_a^{(c)} < +\infty) = 1 \iff \nu \leq 0 \iff c \leq \frac{1}{2}$.

Et dans le cas $\nu > 0$, ie $c > \frac{1}{2}$, donne : $\mathbb{P}_x(\tau_a^{(c)} < +\infty) = \left(\frac{a}{x}\right)^{2\nu} = \left(\frac{a}{x}\right)^{2c-1}$.

Enfin, lorsque $\nu = -\frac{1}{2}$, alors $c = 0$, et nous retrouvons $\tau_0^{(0)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{x^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}}$. (le cas brownien). □

Discutons à présent de la loi pour $0 < a < x$: Par la propriété de Markov :

$$\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x\right) \uparrow_{\perp} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_a\right).$$

Ce qui donne grâce à la Proposition 8.3.2, dans le cas $\nu < 0$:

$$\frac{x^2}{2\gamma_{-\nu}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{a^2}{2\gamma_{-\nu}} \uparrow_{\perp} \left(\tau_0^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_a\right) \implies \frac{1}{\gamma_{\frac{1}{2}-c}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\frac{a}{x}\right)^2 \frac{1}{\gamma_{\frac{1}{2}-c}} \uparrow_{\perp} \frac{2}{x^2} \left(\tau_a^{(x)} \text{ sous } \mathbb{P}_x\right). \quad (3.5)$$

Définition 8.3.3 Soit X une variable aléatoire positive ou nulle.

On dit que X est autodécomposable si pour tout c appartenant à $]0, 1[$, il existe une variable aléatoire X_c indépendante de X telle que :

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} cX \underset{\perp}{+} X_c.$$

Remarque 8.3.4 Dans mon mini-mémoire, j'ai étudié la classe \mathcal{L} , dont les éléments sont exactement les variables autodécomposables (tout signe confondu).

Proposition 8.3.5 Une variable aléatoire positive ou nulle est autodécomposable si et seulement s'il existe $K \geq 0$, et $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, décroissante tels que :

$$\begin{cases} x \mapsto \frac{f(x)}{x} \text{ est intégrable au voisinage de } +\infty \\ \mathbb{E}(e - \lambda x) = \exp \left[-K\lambda - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{f(x)}{x} dx \right]. \end{cases}$$

Remarque 8.3.6

— En particulier x est infiniment divisible avec mesure de Levy ayant une densité $\frac{f(x)}{x}$ avec f décroissante.

— Par l'égalité en lois (3.5), on observe que $\frac{1}{\gamma_{\frac{1}{2}-c}}$ est autodécomposable et donc la variable $(\tau_0^{(c)})$ sous \mathbb{P}_x l'est aussi.

Soit alors f_ν la fonction spectrale décroissante correspondant à $\frac{1}{\gamma_{-\nu}}$, alors partant de l'égalité

(3.1), et ayant identifié la densité de $\frac{x^2}{2\gamma_{-\nu}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) &= \frac{2^{-\nu} \Gamma(-\nu) (x\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu) (a\sqrt{2\lambda})^{-\nu} \mathcal{K}_\nu(a\sqrt{2\lambda})} \\ &= \frac{\mathbb{E} \left(e^{-\frac{x^2 \lambda}{2\gamma_{-\nu}}} \right)}{\mathbb{E} \left(e^{-\frac{a^2 \lambda}{2\gamma_{-\nu}}} \right)} \\ &= \exp \left[- \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda u}) f_\nu \left(\frac{2u}{x^2} \right) \frac{du}{u} + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda u}) f_\nu \left(\frac{2u}{a^2} \right) \frac{du}{u} \right] \\ &= \exp \left\{ \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda u}) \left[f_\nu \left(\frac{2u}{a^2} \right) - f_\nu \left(\frac{2u}{x^2} \right) \right] \frac{du}{u} \right\}. \end{aligned}$$

Grosswald a calculé en 1976 : $f_\nu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-uy} \varphi_\nu(y) dy$, avec φ_ν explicite.

8.3.2 Cas $0 \leq x < a$

Rappelons la fonction de Bessel de deuxième espèce : $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu + p + 1)p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$.

Nous avons vu que $\mathcal{I}_\nu(x) = i^{-\nu} \mathcal{J}_\nu(ix)$, donc :

$$\left(\frac{x}{2}i\right)^{-i} \mathcal{J}_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x).$$

La factorisation de Hadamard (Corollaire 3.2.5), nous donne pour $\nu > -1$ (ie $c > -\frac{1}{2}$) :

$$\Gamma(1 + \nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{j_{\nu,n}^2}\right),$$

où $0 < j_{\nu,1} < \dots < j_{\nu,n} < \dots$ sont les zéros de \mathcal{J}_ν .

— Tout d'abord dans le cas où $x = 0$, comme $0 \geq c$, ie $\nu \geq -\frac{1}{2} > -1$, la Proposition 8.2.7 donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) &= \frac{1}{\Gamma(1 + \nu) \left(\frac{a\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(a\sqrt{2\lambda})} = \frac{1}{\Gamma(1 + \nu) \left(\frac{ia\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{J}_\nu(ia\sqrt{2\lambda})} \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{ia\sqrt{2\lambda}}{j_{\nu,n}}\right)^2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{2\lambda a^2}{j_{\nu,n}^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E} \left(e^{-2a^2 \lambda \xi_{j_{\nu,n}^2}} \right), \end{aligned}$$

où les $\xi_{j_{\nu,n}^2}$ sont indépendantes et suivent respectivement la loi exponentielle de paramètre $j_{\nu,n}^2 > 0$. Donc, dans ce cas :

$$\left(\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_0 \right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2a^2 \sum_{n=1(\perp)}^{+\infty} \xi_{j_{\nu,n}^2}.$$

— Si l'on prend maintenant $x > 0$, alors une factorisation de Hadamard au numérateur en x et au dénominateur en a , donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \tau_a^{(c)}} \right) &= \frac{\Gamma(1 + \nu) \left(\frac{x\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(x\sqrt{2\lambda})}{\Gamma(1 + \nu) \left(\frac{a\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{I}_\nu(a\sqrt{2\lambda})} = \frac{\Gamma(1 + \nu) \left(\frac{ix\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{J}_\nu(ix\sqrt{2\lambda})}{\Gamma(1 + \nu) \left(\frac{ia\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{J}_\nu(ia\sqrt{2\lambda})} \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \left(\frac{ix\sqrt{2\lambda}}{j_{\nu,n}}\right)^2}{1 - \left(\frac{ia\sqrt{2\lambda}}{j_{\nu,n}}\right)^2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{2\lambda x^2}{j_{\nu,n}^2}}{1 + \frac{2\lambda a^2}{j_{\nu,n}^2}} \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-2a^2 \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{j_{\nu,n}^2}^{(a,x)} \right) \right], \end{aligned}$$

où les $\chi_{j_{\nu,n}}^{(a,x)}$ sont indépendantes, et de lois respectives :

$$\frac{x^2}{a^2} \delta_0(t) + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) j_{\nu,n}^2 e^{-j_{\nu,n}^2 t} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) dt.$$

En effet, on vérifie que les Laplace des $\chi_{j_{\nu,n}}^{(a,x)}$ sont les facteurs $\frac{j_{\nu,n}^2 + \frac{\lambda x^2}{a^2}}{j_{\nu,n}^2 + \lambda}$.

En identifiant les Laplace, on obtient :

$$(\tau_a^{(c)} \text{ sous } \mathbb{P}_x) \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{j_{\nu,n}}^{(a,x)}$$

Remarque 8.3.7 Kent (1980) a donné les densités de ces fonctions sous forme de séries :

— Dans le cas $x = 0$:

$$f_{\tau_a^{(c)}}(t) = \frac{\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{j_{\nu,n}^{\nu+1}}{\mathcal{J}_{\nu+1}(j_{\nu,n})} e^{-\frac{j_{\nu,n}^2 t}{2a^2}}.$$

— Dans le cas $x > 0$:

$$f_{\tau_a^{(c)}}(t) = \frac{\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)}{a^2} \left(\frac{a}{x}\right)^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} j_{\nu,n} \frac{\mathcal{J}_\nu\left(\frac{x j_{\nu,n}}{a}\right)}{\mathcal{J}_{\nu+1}(j_{\nu,n})} e^{-\frac{j_{\nu,n}^2 t}{2a^2}}.$$

Ces densités sont deux exemples de densités de mélanges d'exponentielles.

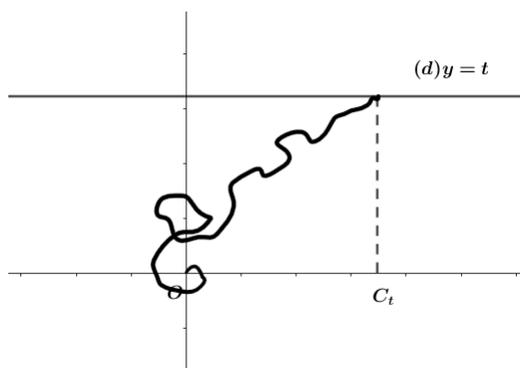
Troisième partie

Fonctions spéciales et processus de
Levy

Chapitre 9

Un premier exemple pour l'étude du processus de Cauchy

Définition 9.0.1 On considère un mouvement brownien bi-dimensionnel issu de l'origine. Soient la droite horizontale d'équation $\{y = t\}$ et C_t l'abscisse du brownien au premier instant où il touche cette droite. Le processus $(C_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus de Cauchy.



Ainsi si $B_t = (B_t^{(x)}, B_t^{(y)})$, et si $\tau_{t,y} = \inf\{u > 0, B_u^{(y)} = t\}$, alors pour tout $t \geq 0$, nous avons : $C_t = B_{\tau_{t,y}}^{(x)}$.

Remarque 9.0.2

- Comme le brownien est récurrent, C_t est \mathbb{P} -ps fini et donc $(C_t)_{t \geq 0}$ est bien défini.
- $C_0 = 0$ par continuité du brownien bi-dimensionnel.
- Par Markov, $\tau_{t,y} \perp \{B_u^{(x)}, u > 0\}$.

Proposition 9.0.3 Pour tout $t > 0$, $C_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} tC_1$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.0.3 : Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{i\lambda C_t}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{i\lambda B_{\tau_{t,y}}^{(x)}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{i\lambda\sqrt{\tau_{t,y}}B_1^{(x)}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda^2\frac{\tau_{t,y}}{2}}\right).\end{aligned}$$

Or, on a vu : $\tau_{t,y} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{t^2}{2\gamma_{\frac{1}{2}}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2t^2 Z_{\frac{1}{2}}$.

$$\mathbb{E}\left(e^{i\lambda C_t}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_{t,y}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda^2 t^2 Z_{\frac{1}{2}}}\right) = e^{-\sqrt{\lambda^2 t^2}} = e^{-|\lambda|t}.$$

Donc, $C_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} tC_1$. □

Proposition 9.0.4 *La loi de C_1 est la loi de Cauchy (d'où le nom du processus)*

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.0.4 : On calcule la densité de C_1 (f_{C_1}), par inversion de Fourier :

$$\begin{aligned}f_{C_1}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda|} e^{-ix\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda} e^{ix\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} e^{-ix\lambda} d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left[\frac{1}{-1+ix} e^{-\lambda+ix\lambda} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{1}{1+ix} e^{-\lambda-ix\lambda} \right]_0^{+\infty} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} \right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.\end{aligned}$$

□

Remarque 9.0.5

- C_t est symétrique, pour tout $t \geq 0$.
- Nous avons vu lors de la démonstration de la Proposition 4.3.2, et grâce à la formule des compléments 1.3.5 que la transformée de Mellin de $|C_1|$ est pour tout s appartenant à $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$:

$$\mathbb{E}(|C_1|^s) = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\pi\left(\frac{1+s}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)}.$$

En fait, pour tout réel s , (par extension à $i\mathbb{R}$ par holomorphicité) :

$$\mathbb{E}(|C_1|^{is}) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi s}{2}\right)},$$

qui est la fonction caractéristique de la loi logistique. Donc $\ln(|C_1|)$ a pour fonction caractéristique $\frac{1}{\text{ch}\left(\frac{\pi s}{2}\right)}$, et donc a pour densité : $\frac{1}{\pi \text{ch}(x)}$ (la densité de la loi logistique).

9.1 Transformée de Stieljes

Définition 9.1.1 Soit f une fonction continue strictement positive sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt < +\infty$. On définit sa transformée de Stieljes par :

$$\forall \xi \in \mathbf{C}/\mathbf{R}^- : \mathcal{S}(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t + \xi} dt.$$

Remarque 9.1.2 Les hypothèses dans la définition ci-dessus ne sont pas minimales mais ça suffira ici.

Proposition 9.1.3 Pour toute fonction continue strictement positive sur $]0, +\infty[$, $\mathcal{S}(f)$ est une double transformée de Laplace.

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.1.3 : Nous avons pour tous $t, \xi > 0$:

$$\frac{1}{t + \xi} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+\xi)} d\lambda,$$

donc :

$$\mathcal{S}(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+\xi)} f(t) dt \right) d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\xi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \right) d\lambda.$$

□

Proposition 9.1.4 Pour toute fonction f continue strictement positive sur $]0, +\infty[$, nous avons, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{S}(f)(-x - i\eta) - \mathcal{S}(f)(-x + i\eta)}{2i\pi},$$

que nous noterons (abusivement) :

$$f(x) = \frac{\mathcal{S}(f)(xe^{-i\pi}) - \mathcal{S}(f)(xe^{i\pi})}{2i\pi}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.1.4 : Nous avons, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{S}(f)(-x - i\eta) - \mathcal{S}(f)(-x + i\eta)}{2i\pi} &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{t - x - i\eta} - \frac{1}{t - x + i\eta} \right) dt \\ &= \frac{2i\eta}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t - x)^2 + \eta^2} dt \\ &\stackrel{(u=t-x)}{=} \frac{\eta}{\pi} \int_{-x}^{+\infty} \frac{f(u+x)}{u^2 + \eta^2} dt \\ &= \mathbb{E} [f(x + C_\eta) \mathbb{1}_{(C_\eta > -x)}] \xrightarrow[\mathbb{P}\text{-ps}]{\eta \rightarrow 0^+} f(x), \end{aligned}$$

par convergence dominée car f est continue et $C_\eta \xrightarrow[\mathbb{P}\text{-ps}]{\eta \rightarrow 0^+} 0$. □

Exemple 9.1.5 (simple et illustrant les calculs) Considérons pour tout réel $x > 0$: $f(x) = \mathbb{1}_{]0,1]}(x)$, et $g(x) = xf(x)$. On a, pour tout ξ appartenant à \mathbb{C}/\mathbb{R}^- :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(g)(\xi) &= \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t + \xi} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{t + \xi} dt = 1 - \xi \log \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \end{aligned}$$

Dès lors, calculons pour tout $x > 0$, la transformation de Stieljes inverse, grâce à la Proposition 9.1.4, montrons que nous retrouvons $f(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi x} [\mathcal{S}(xe^{-i\pi}) - \mathcal{S}(xe^{i\pi})] &= \frac{1}{2i\pi x} \left[xe^{-i\pi} \log \left(1 + \frac{e^{i\pi}}{x} \right) - xe^{i\pi} \log \left(1 + \frac{e^{-i\pi}}{x} \right) \right] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x > 1 \\ 1 + \frac{1}{2i\pi} \left[\log \left(\frac{1}{x} + e^{-i\pi} \right) - \log \left(\frac{1}{x} + e^{i\pi} \right) \right] & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{]0,1]}(x) = f(x). \end{aligned}$$

Présentons à présent l'aspect "Levy" du processus de Cauchy :

Définition 9.1.6 On appelle processus de Levy tout processus à accroissements indépendants et stationnaires (P.A.I.S).

Proposition 9.1.7 $(C_t)_{t \geq 0}$ est de Levy.

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.1.4 : Par la propriété de Markov du brownien, pour tous $t > s \geq 0$:

$$C_t = B_{\tau_t}^{(x)} = B_{\tau_s}^{(x)} \underset{\perp}{+} \widetilde{B_{\tau_t - \tau_s}^{(x)}}$$

où $\widetilde{B_{\tau_{t-s}}^{(x)}} \perp B_{\tau_s}^{(x)}$. Donc $C_t = C_s + \widetilde{C_{t-s}}$, où $(\widetilde{C_t})_{t \geq 0}$ est une copie de $(C_t)_{t \geq 0}$ indépendante de $(C_t)_{t \geq 0}$. Donc $(C_t)_{t \geq 0}$ est de Levy. \square

Proposition 9.1.8 *À tout processus de Levy $(X_t)_{t \geq 0}$ on peut lui associer la marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 1}$.*

PREUVE DE LA PROPOSITION : Pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_{n-2}) + \cdots + (X_2 - X_1) + X_1,$$

tous les termes à droite sont i.i.d de loi X_1 . \square

Considérons la "marche aléatoire de Cauchy" pour $n \geq 1$: $\{C_n, n \geq 1\}$. où $C_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} nC_1$, qui a pour densité $\frac{n}{\pi(x^2 + n^2)}$.

Et soit le processus dit "discrétisé" : $\left\{ \frac{C_{\lfloor nt \rfloor}}{n}, t \geq 0 \right\}$ construit sur la marche aléatoire $(C_n)_{n \geq 1}$.

Proposition 9.1.9 *Pour tout $t > 0$: $\frac{C_{\lfloor nt \rfloor}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} C_t$.*

PREUVE DE LA PROPOSITION : Elle se démontre à l'aide des fonctions caractéristiques :

$$\mathbb{E} \left(e^{i \frac{\lambda}{n} C_{\lfloor nt \rfloor}} \right) = e^{-|\lambda| \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-|\lambda| t}.$$

\square

Remarque 9.1.10 En fait, par accroissements indépendants et stationnaires, on peut montrer que :

$$\left\{ \frac{C_{\lfloor nt \rfloor}}{n}, t \geq 0 \right\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \{C_t, t \geq 0\}, \text{ (lois de processus) dans l'espace de Skorokhod.}$$

Nous avons donc une approche discrète du processus continu. Confère [15]

9.2 Temps de dépassement d'un processus de Cauchy

Remarque 9.2.1

- Pour $x > 0$, $\tilde{\tau}_x = \inf\{t > 0, C_t = x\}$. Le processus de Cauchy ne visite pas les points, on peut montrer que pour tout $x > 0$: $\tilde{\tau}_x = +\infty$.

- Soit pour $x > 0$: $T_x = \inf\{t > 0, C_t = x\}$ le temps de dépassement de x . On va dans cette partie trouver la loi de T_x .

Considérons $M_t = \max\{C_u, 0 \leq u \leq t\}$. Alors : $M_t = tM_1$, car :

$$\begin{aligned} M_t &= \max\{C_u, 0 \leq u \leq t\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \max\{uC_1, 0 \leq u \leq t\} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} t \max\left\{\frac{u}{t}C_1, 0 \leq u \leq t\right\} \\ &= t \max\{vC_1, 0 \leq v \leq 1\} = tM_1. \end{aligned}$$

Proposition 9.2.2 $(C_t)_{t \geq 1}$ est 1-autosimilaire.

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.2.2 : En effet, pour tous $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, nous avons par accroissement indépendants et stationnaires, et sachant que pour tout $t \geq 0$: $C_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} tC_1$:

$$(C_{t_0}, C_{t_1} - C_{t_0}, \dots, C_{t_n} - C_{t_{n-1}}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t_0C_1^{(0)}, (t_1 - t_0)C_1^{(1)}, \dots, (t_n - t_{n-1})C_1^{(n)}),$$

où $(C_1^{(0)}, \dots, C_1^{(n)})$ est un échantillon de taille $n + 1$ de C_1 .

Dès lors, $(C_{t_0}, \dots, C_{t_n}) = F(C_{t_0}, C_{t_1} - C_{t_0}, \dots, C_{t_n} - C_{t_{n-1}})$, où pour tout (x_0, \dots, x_n) dans \mathbb{R}^{n+1} :

$$F(x_0, \dots, x_n) = (x_0, x_1 + x_0, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

qui est linéaire dans \mathbb{R}^{n+1} , donc borélienne. Ainsi :

$$\begin{aligned} (C_{t_0}, \dots, C_{t_n}) &= F(C_{t_0}, C_{t_1} - C_{t_0}, \dots, C_{t_n} - C_{t_{n-1}}) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} F(t_0C_1^{(0)}, (t_1 - t_0)C_1^{(1)}, \dots, (t_n - t_{n-1})C_1^{(n)}) \\ &= (t_0C_1^{(0)}, t_1C_1^{(1)}, \dots, t_nC_1^{(n)}). \end{aligned}$$

□

Proposition 9.2.3

$$T_x \stackrel{\mathcal{L}}{=} xT_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{x}{M_1}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.2.3 : Pour tous $x, t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_x > t) &= \mathbb{P}(\inf\{s > 0, C_s > x\} > t) \\ &= \mathbb{P}(\sup\{C_u, 0 \leq u \leq t\} \leq x) \\ &= \mathbb{P}(M_t \leq x) = \mathbb{P}(tM_1 \leq x) = \mathbb{P}\left(M_1 \leq \frac{x}{t}\right). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\mathbb{P}(T_x > t) = \mathbb{P}(xT_1 > t) = \mathbb{P}\left(T_1 > \frac{t}{x}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{T_1} < \frac{x}{t}\right).$$

□

Proposition 9.2.4 *Nous avons :*

$$\frac{1}{n} \max(0, C_1, \dots, C_n) = \max \left\{ \frac{C_{\lfloor nt \rfloor}}{n}, 0 \leq t \leq 1 \right\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \max\{C_t, 0 \leq t \leq 1\} = M_1.$$

Nous avons en particulier : $M_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{t}{T_1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{T_1^{\frac{1}{t}}}$.

Corollaire 9.2.5 *Pour t de $]0, 1[$: $\mathcal{G}(t)$ désignant la loi géométrique, soit $G_t \sim \mathcal{G}(t) + 1$, avec $G_t \perp \{C_u, u \geq 0\}$. Alors :*

$$\frac{\max(0, C_1, \dots, C_{G_t})}{G_t} \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{\mathcal{L}} M_1.$$

PREUVE DU COROLLAIRE 9.2.5 : Rappelons la densité de la loi géométrique : $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-t)t^n \delta_n$.

Tout d'abord justifions le fait suivant : $G_t \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{\mathbb{P}\text{-ps}} +\infty$.

En effet, G_t prend ses valeurs sur les entiers naturels non nuls, et pour tout k entier naturel non nul :

$$\mathbb{P}(G_t = k) = \mathbb{P}(\mathcal{G}_t = k - 1) = (1-t)t^{k-1} \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 0.$$

Donc : $\mathbb{P}(G_t = +\infty) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 1$. Alors, d'après la Proposition 9.2.4 :

$$\bar{\delta}_n := \frac{\max(0, C_1, \dots, C_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} M_1.$$

Ceci équivaut, pour réel λ , à :

$$\phi_{\bar{\delta}_n}(\lambda) = \mathbb{E} \left[e^{i\lambda \bar{\delta}_n} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E} \left(e^{i\lambda M_1} \right).$$

Dès lors par indépendance de G_t par rapport à $\{C_u, u \geq 0\}$, pour tout λ réel :

$$\phi_{\bar{\delta}_{G_t}}(\lambda) = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(e^{i\lambda \bar{\delta}_{G_t}} \mid G_t \right) \right] \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \mathbb{E} \left(e^{i\lambda M_1} \right).$$

D'où le résultat annoncé. □

Nous allons trouver la loi de T_1 (donc de T_x) par le biais de M_1 . Nous allons utiliser le Théorème suivant :

Théorème 9.2.6 (Baxter-Spitzer, 1956) *Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire issue de 0. On note, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $x \geq 0$:*

$$\begin{cases} \phi_0(x) = 1 \\ \phi_n(x) = \mathbb{E} \left[e^{-x \max(0, S_1, S_2, \dots, S_n)} \right] \\ \psi_n(x) = \mathbb{E} \left[e^{-x \max(0, S_n)} \right] \end{cases}.$$

Alors, pour tout t tel que $|t| < 1$, et pour tout $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \phi_n(x) = \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)}{n} t^n \right].$$

En particulier, la loi de $M_n = \max(0, S_1, \dots, S_n)$ est encodée par la loi tronquée $S_n^+ = \max(0, S_n)$.

Remarque 9.2.7 La démonstration de ce théorème est détaillée dans l'article [14]

Remarque 9.2.8

— Nous avons :

$$\phi_n(x) = \mathbb{E}[-xM_n] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(M_n = 0) = \mathbb{P}(T_1 > n).$$

Et :

$$\psi_n(x) = \mathbb{E}\left(e^{-xS_n^+}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n^+ = 0) = \mathbb{P}(S_n \leq 0).$$

Donc quand x tend vers $+\infty$, la formule de Baxter-Spitzer devient la formule de Sparre-Anderson (1954) : pour tout t tel que $|t| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(T_1 > n) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n \leq 0)}{n} t^n \right]. \quad (2.1)$$

— M_n, S_n, T_n sont définissables pour un processus de Levy autre que $(C_t)_{t \geq 0}$.

Corollaire 9.2.9 Soit μ la loi de S_1 . Si μ est symétrique sans atome, alors :

$$\forall n \geq 0 : \mathbb{P}(T_1 > n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

PREUVE DE LA COROLLAIRE 9.2.9 : Dans ce cas, S_n est aussi symétrique de loi sans atome, et alors : $\mathbb{P}(S_n \leq 0) = \mathbb{P}(S_n < 0) = \frac{1}{2}$. Et donc pour tout t tel que $|t| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n \leq 0)}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2n} = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{1-s} = -\frac{1}{2} \ln(1-t).$$

Alors, la formule de Sparre-Anderson (2.1) donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 > n) t^n = \exp \left[-\frac{1}{2} \ln(1-t) \right] = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} t^n$$

Et l'on identifie coefficient par coefficient : $\mathbb{P}(T_1 > n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$. □

Considérons maintenant la marche aléatoire de Cauchy : $(S_n)_{n \geq 1} = (C_n)_{n \geq 1}$.

Théorème 9.2.10 (Darling, (1956)) *La densité de T_1 est :*

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)^{\frac{3}{4}}} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\ln(u)}{1+u^2} du \right] \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

PREUVE DE LA THÉORÈME 9.2.10 : Nous avons, en reprenant les notations présentes dans le Théorème de Baxter-Spitzer 9.2.6, grâce à la symétrie de C_n :

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \mathbb{E} \left(e^{-xC_n^+} \right) = \mathbb{P}(C_n \leq 0) + \frac{n}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{n^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nxv}}{1+v^2} dv, \text{ grâce au changement } v = \frac{y}{n}. \end{aligned}$$

Donc en faisant usage du Corollaire 9.2.9, et du fait que pour tout X tel que $|X| < 1$:

$$-\ln(1-X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{n}, \text{ pour tout } t \text{ tel que } |t| < 1 :$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)}{n} t^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{2n} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-xy})^n}{n} \right) \frac{dy}{1+y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-t) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln(1-te^{-xy}) \frac{dy}{1+y^2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Or : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}$, alors l'égalité (2.2) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)}{n} t^n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-t)}{1+y^2} dy - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln(1-te^{-xy}) \frac{dy}{1+y^2} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln[(1-t)(1-te^{-xy})] \frac{dy}{1+y^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le Théorème de Baxter-Spitzer 9.2.6 affirme que pour tout $x > 0$, et pour tout t tel que $|t| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \phi_n(x) = \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)}{n} t^n \right]. \tag{2.4}$$

Transformons cette égalité (2.4), nous avons grâce à l'égalité (2.3) (astucieusement) :

$$\begin{aligned}
(1-t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \phi_n(x) \right) &= (1-t) \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln [(1-t)(1-te^{-xy})] \frac{dy}{1+y^2} \right] \\
&= \exp \left[\ln(1-t) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln [(1-t)(1-te^{-xy})] \frac{dy}{1+y^2} \right] \\
&= \exp \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-t)}{1+y^2} dy - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln [(1-t)(1-te^{-xy})] \frac{dy}{1+y^2} \right] \\
&= \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln [(1-t)(1-te^{-xy})] - 2 \ln(1-t)}{1+y^2} dy \right] \\
&= \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{1-te^{-xy}}{1-t} \right) \frac{dy}{1+y^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Or, nous avons pour tous réels x, y :

$$1 - te^{-xy} = 1 - t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-xy)^n}{n!} \right) = (1-t) - t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (xy)^n \right).$$

En appliquant cette égalité à $x = (1-t)z$, pour tous réels z, y :

$$\begin{aligned}
1 - te^{-(1-t)zy} &= (1-t) - t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (1-t)^n (zy)^n \right) \\
&\underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t) - 1 \times (-t)(1-t)zy \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)(1+zy).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Donc, appliquant cet équivalent (2.6) à l'égalité (2.5) pour $x = (1-t)z$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(1-t) \left[\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \phi_n[(1-t)z] \right] &= \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left[\frac{1-te^{-(1-t)zy}}{1-t} \right] \frac{dy}{1+y^2} \right] \\
&\xrightarrow{t \rightarrow 1^-} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln(1+zy) \frac{dy}{1+y^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+zy)}{1+y^2} dy$ est appelé intégrale de Darling. Et pour calculer cette intégrale, le chemin sera long...

Reprenons le membre de gauche de l'égalité 2.5, et considérons G_t la variable aléatoire réelle suivant la loi de $\mathcal{G}(t) + 1$ et indépendante de $\{C_u, u \geq 0\}$ et que nous avons croisée dans le Corollaire 9.2.5.

Par cette indépendance, le membre de gauche de l'égalité 2.5, fait penser à une espérance via

la loi géométrique de paramètre t , comme suit :

$$\begin{aligned}
(1-t) \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n(x) t^n \right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n(x) (1-t) t^n \\
&= \mathbb{E} [\phi_{G_t}(x)] = \mathbb{E} \left[e^{-x \max(0, C_1, \dots, C_{G_t})} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-x G_t \check{\delta}_{G_t}} \right],
\end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $\check{\delta}_{G_t} = \frac{\max(0, C_1, \dots, C_{G_t})}{G_t}$.

Pour $x = (1-t)z$, avec $z \neq -1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-z(1-t)G_t} \right] &= (1-t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} e^{-z(n-1)(1-t)} \right) \\
&= \frac{1-t}{1-t e^{-z(1-t)}} = \frac{1-t}{1-t + t(1-e^{-z(1-t)})} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{t}{1-t} (1-e^{-z(1-t)})} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+z},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

qui est la transformée de Laplace de la loi $Exp(1)$.

D'où $(1-t)G_t \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{\mathcal{L}} L$, où L est une variable aléatoire suivant $Exp(1)$.

D'autre part, le Corollaire 9.2.5 nous dit que $\check{\delta}_{G_t} \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{\mathcal{L}} M_1$, (indépendamment d'ailleurs de G_t (Proposition 9.2.4)). Alors nous allons montrer en conditionnant par rapport à G_t :

$$\mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_t \check{\delta}_{G_t}} \right) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \mathbb{E} (e^{-zLM_1}), \tag{2.10}$$

où $L \perp M_1$. En effet, il existe un évènement presque sûr Ω^* tel que pour tout ω appartenant à Ω^* :

$$\forall N_1 \geq 1, \exists \delta > 0 \mid \forall t > 0 : 01-t < \delta \implies G_t(\omega) \geq N_1. \tag{2.11}$$

D'autre part, pour tout réel y :

$$\mathbb{E} \left[e^{-y(1-t)G_t} \right] \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \mathbb{E} (e^{-yL}) \tag{2.12}$$

Comme $G_t \perp (C_u)_{u \geq 0}$, alors à la limite : $G_t \perp M_1$.

Dès lors, la relation (2.12) devient :

$$\mathbb{E} \left[e^{-yM_1(1-t)G_t} \right] \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \mathbb{E} (e^{-yM_1L}). \tag{2.13}$$

Ensuite, la suite de variables aléatoires $(\check{\delta}_n)_n$ est convergente en loi vers M_1 , donc la suite des transformées de Laplace converge simplement vers la transformée de Laplace de M_1 ,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z \in \mathbb{R}, \exists N_2 \geq 1 \mid \forall n \geq N_2 : \left| \mathbb{E} (e^{-z\check{\delta}_n}) - \mathbb{E} (e^{-zM_1}) \right| < \varepsilon \tag{2.14}$$

Alors appliquée à $z = (1-t)yG_t$, la relation (2.14) donne, pour tout $n \geq N_2$:

$$\left| \mathbb{E} \left(e^{-z\delta_n} \right) - \mathbb{E} \left(e^{-zM_1} \right) \right| < \varepsilon. \quad (2.15)$$

D'autre part cette suite des transformées de Laplace est aussi de Cauchy ponctuellement, ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z \in \mathbb{R}, \exists N_2 \geq 1 \mid \forall n, k \geq N_3 : \left| \mathbb{E} \left(e^{-z\delta_n} \right) - \mathbb{E} \left(e^{-z\delta_k} \right) \right| < \varepsilon \quad (2.16)$$

Alors pour un $\delta > 0$ assez proche de 0, pour tout $t > 0$, tel que $0 < 1-t < \delta$, presque sûrement : $G_t \geq \max(N_1, N_2)$, et pour tout $k \geq N_3$:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[e^{-z(1-t)G_t\delta_{G_t}} \right] - \mathbb{E} \left[e^{-z(1-t)G_t\delta_k} \right] \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_t\delta_{G_t}} \mid G_t \right) \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_t\delta_k} \mid G_t \right) \right] \right| < \varepsilon \end{aligned} \quad (2.17)$$

Finalement, pour tout z réel, pour $\delta > 0$ assez proche de 0, pour $t > 0$ tel que $0 < 1-t < \delta$, l'on ait presque sûrement $G_t \geq \max(N_1, N_2, N_3)$, et pour tout $k \geq \max(N_2, N_3)$, les relations (2.13), (2.15) et (2.17)

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_t\delta_{G_t}} \right) - \mathbb{E} \left(e^{-zLM_1} \right) \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_t\delta_{G_t}} \right) - \mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_t\delta_k} \right) \right| \\ & + \left| \mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_t\delta_k} \right) - \mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_tM_1} \right) \right| \\ & + \left| \mathbb{E} \left(e^{-z(1-t)G_tM_1} \right) - \mathbb{E} \left(e^{-zLM_1} \right) \right| \\ & < 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'où (2.10). Et donc par unicité de la somme $(1-t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)t^n \right)$, finalement pour tout z non nul :

$$\mathbb{E} \left(e^{-zLM_1} \right) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+zy)}{1+y^2} dy \right].$$

D'autre puisque $L \sim Exp(1)$, et $L \perp M_1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-zLM_1} \right) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{1+zM_1} \right) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{T_1}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{T_1}{T_1+z} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{x f_1(x)}{x+z} dx, \text{ où } f_1 \text{ est la densité de } T_1 \\ &= \mathcal{S}(x f_1)(z). \end{aligned}$$

Il va donc falloir inverser la transformée de Stieljes de la fonction

$$G : z \mapsto \mathbb{E}(e^{-zLM_1}) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+zy)}{1+y^2} dy \right],$$

puis diviser par x . Ainsi d'après la Proposition 9.1.4, pour tout $x \geq 0$:

$$f_1(x) = \frac{1}{2i\pi x} [G(xe^{-i\pi}) - G(xe^{i\pi})]. \quad (2.19)$$

Nous avons dès lors, η étant égal à ± 1

$$\begin{aligned} \log [G(xe^{i\eta\pi})] &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+xye^{i\eta\pi})}{1+y^2} dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\log(1+xye^{i\eta\pi})}{1+y^2} dy - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\log(1+xye^{i\eta\pi})}{1+y^2} dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

(La première intégrale étant sur un intervalle bornée et vaut la même chose quand η vaut 1 ou -1 , $e^{i\eta\pi}$ ne pose plus de problème de définition, et est changé en -1) En effectuant le changement de variable $u = xy$ dans la première intégrale, et le changement $v = xy - 1$ dans la seconde intégrale ci-dessus, l'égalité (2.21) devient :

$$\begin{aligned} \log [G(xe^{i\eta\pi})] &= -\frac{1}{x\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{1+(\frac{u}{x})^2} du - \frac{1}{x\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\log(e^{i\eta\pi}v)}{1+(\frac{v+1}{x})^2} dv \\ &= -\frac{1}{x\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{1+(\frac{u}{x})^2} du - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\log(e^{i\eta\pi}v)}{x^2+(v+1)^2} dv \\ &= -\frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{x^2+u^2} du - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(v)}{x^2+(v+1)^2} dv - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\log(e^{i\eta\pi})}{x^2+(v+1)^2} dv \\ &= -\frac{x}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{x^2+u^2} du - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(v)}{x^2+(v+1)^2} dv - \frac{x\eta i\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{x^2+(v+1)^2} \\ &= -x\eta i \int_0^{+\infty} \frac{dv}{x^2+(v+1)^2} - \frac{x}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{x^2+u^2} du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(v)}{x^2+(v+1)^2} dv \right] \\ &\stackrel{(w=v+1)}{=} -x\eta i \int_0^{+\infty} \frac{dv}{x^2+(v+1)^2} - \frac{x}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{x^2+u^2} du + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(w-1)}{x^2+w^2} dw \right] \\ &= -x\eta i \int_0^{+\infty} \frac{dv}{x^2+(v+1)^2} - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|1-u|)}{x^2+u^2} du \end{aligned} \quad (2.21)$$

Or, avec le changement de variable $t = \frac{1+v}{x}$, nous avons :

$$-x\eta i \int_0^{+\infty} \frac{dv}{x^2+(v+1)^2} = -i\eta \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = -i\eta \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{x} \right) \right].$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\log [G(xe^{i\eta\pi})] &= -i\eta \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right] - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|1-u|)}{x^2+u^2} du \\ &= -i\eta \arctan(x) - \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|1-u|)}{x^2+u^2} du.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Ainsi, les relations (2.22) et (2.19) donne :

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \frac{1}{2\pi ix} \exp \left[-\frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|1-u|)}{x^2+u^2} du \right] [\exp(i \arctan(x)) - \exp(-i \arctan(x))] \\ &= \frac{1}{x\pi} \sin[\arctan(x)] \exp \left[-\frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|1-u|)}{x^2+u^2} du \right].\end{aligned}\quad (2.23)$$

x étant positif ou nul, alors $\sin[\arctan(x)] \geq 0$, et donc :

$$\sin[\arctan(x)] = \sqrt{1 - [\cos(\arctan(x))]^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + [\tan(\arctan(x))]^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\quad (2.24)$$

D'autre part, en effectuant le changement $t = \frac{u}{x}$:

$$\frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|u-1|)}{x^2+u^2} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|xt-1|)}{1+t^2} dt.$$

Et en effectuant le changement de variable $t = \tan(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|u-1|)}{x^2+u^2} du &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln[|\tan(\varphi)x - 1|] d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln[|\sin(\varphi)x - \cos(\varphi)|] d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln[|\cos(\varphi)|] d\varphi.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Or, grâce à la relation (2.24), et ayant observé que $\cos[\arctan(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\begin{aligned}\ln[|\sin(\varphi)x - \cos(\varphi)|] &= \ln \left[\frac{|\sin(\varphi)x - \cos(\varphi)|}{\sqrt{1+x^2}} \right] + \ln(\sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln[|\sin[\arctan(x)]\sin(\varphi) - \cos[\arctan(x)]\cos(\varphi)|] + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \\ &= \ln[|\cos[\varphi + \arctan(x)]|] + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).\end{aligned}$$

Alors, la relation (2.25) devient :

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|u-1|)}{x^2+u^2} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+x^2) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln[|\cos[\varphi + \arctan(x)]|] - \ln[|\cos(\varphi)|]] d\varphi \\
&= \frac{\ln(1+x^2)}{4} + \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \arctan(x)} \ln[|\cos(\theta)|] d\theta + \int_{\arctan(x)}^{\frac{\pi}{2}} \ln[|\cos(\theta)|] d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln[|\cos(\varphi)|] d\varphi \right] \\
&= \frac{\ln(1+x^2)}{4} + \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \arctan(x)} \ln[|\cos(\theta)|] d\theta - \int_0^{\arctan(x)} \ln[|\cos(\theta)|] d\theta \right] \\
&\stackrel{(\theta = \beta + \frac{\pi}{2})}{=} \frac{\ln(1+x^2)}{4} + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\arctan(x)} \ln \left[\left| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \right| \right] d\beta - \int_0^{\arctan(x)} \ln[\cos(\theta)] d\theta \right] \\
&= \frac{\ln(1+x^2)}{4} + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\arctan(x)} \ln[|\sin(\beta)|] d\beta - \int_0^{\arctan(x)} \ln[\cos(\theta)] d\theta \right] \\
&= \frac{\ln(1+x^2)}{4} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\arctan(x)} \ln(\tan(\beta)) d\beta \\
&\stackrel{(u = \tan(\beta))}{=} \frac{\ln(1+x^2)}{4} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\ln(u)}{1+u^2} du.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Et alors, grâce aux relations (2.24) et (2.26), la relation (2.19) devient :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1+x^2}} \exp \left[-\frac{1}{4} \ln(1+x^2) \right] \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\ln(u)}{1+u^2} du \right] \\
&= \frac{1}{\pi(1+x^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\ln(u)}{1+u^2} du \right].
\end{aligned}$$

□

Corollaire 9.2.11 *La densité de M_1 est $g_1(x) = \frac{f_1(x)}{\sqrt{x}}$.*

PREUVE DU COROLLAIRE 9.2.11 : Tout d'abord, nous avons (cela paraît au premier abord surprenant) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = 0. \tag{2.27}$$

En effet, par le changement $v = \frac{1}{u}$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln(v)dv}{\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)v^2} = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(v)}{1+v^2} dv.$$

L'égalité (2.27) découle alors de la relation de Chasles.

Dès lors, puisque d'après la Proposition 9.2.4 : $M_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{T_1}$, donc :

$$g_1(x) = \frac{1}{x^2} f_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{4}} x^2} \exp\left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u) du}{1+u^2}\right] \mathbb{1}_{]0;+\infty[}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, $\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = \int_0^x \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$ est invariante par le changement $v = \frac{1}{u}$. En effet, tout d'abord en effectuant le changement $v = \frac{1}{u}$:

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = - \int_x^{+\infty} \frac{\ln(v)}{1+v^2} dv.$$

Dès lors :

$$- \int_x^{+\infty} \frac{\ln(v)}{1+v^2} dv = \int_0^x \frac{\ln(v)}{1+v^2} dv - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(v)}{1+v^2} dv = \int_0^x \frac{\ln(v)}{1+v^2} dv,$$

grâce à l'égalité (2.27). Finalement :

$$g_1(x) = \frac{1}{\pi \left(1 + x^2\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{x}} \exp\left[-\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\ln(u) du}{1+u^2}\right] \mathbb{1}_{]0;+\infty[(x)} = \frac{f_1(x)}{\sqrt{x}}.$$

□

Chapitre 10

Subordinateurs, exposant de Laplace

10.1 Subordinateurs, fonction de Bernstein

Théorème 10.1.1 (Plongement de Levy (1930)) Soit X une variable aléatoire infiniment divisible. Alors il existe un processus de Levy unique en loi de processus tel que $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$.

Exemple 10.1.2 Un premier processus de Levy a été vu avec le processus de Cauchy. Outre ce processus, nous avons le processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ de paramètre λ qui est bien à accroissements indépendants et stationnaires :

- Pour tout $t \geq 0$: N_t suit une loi de Poisson d'intensité $t\lambda$.
- Pour tous $t > s \geq 0$: $N_t - N_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_{t-s}$, et $N_t - N_s \perp\!\!\!\perp \sigma(\{N_u, 0 \leq u \leq s\})$.
- La fonction caractéristique de N_t est, pour tout réel x :

$$\mathbb{E}(e^{ixN_t}) = \exp[-\lambda t (e^{ix} - 1)].$$

- La transformée de Laplace de N_t est, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-xN_t}) &= \exp[-\lambda t (1 - e^{-x})] \\ &= \exp\left[-t\lambda \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xu}) d\delta_1(u)\right] \\ &= \exp\left[-t \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xu}) d(\lambda\delta_1)(u)\right] \end{aligned}$$

- Pour tout $t > 0$, N_t est ID. En effet, pour tout entier naturel non nul n :

$$N_t = \left(N_t - N_{\frac{(n-1)t}{n}}\right) \perp\!\!\!\perp \left(N_{\frac{(n-1)t}{n}} - N_{\frac{(n-2)t}{n}}\right) \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp N_{\frac{t}{n}},$$

qui est égal en loi à une somme indépendante de copies de $N_{\frac{t}{n}}$ qui suit la loi de Poisson d'intensité $\frac{t\lambda}{n}$. Cette démonstration se généralise à tous les processus de Levy, ce qui donne...

Proposition 10.1.3 *Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Levy. Alors pour tout $t > 0$, X_t est ID.*

Définition 10.1.4 *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoires i.i.d de loi de probabilité π . Et soit $(L_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes $Exp(\lambda)$, où $\lambda > 0$.*

On appelle processus de Poisson marqué, noté $(N_t^{\pi, \lambda})_{t \geq 0}$, le processus défini par :

$$N_t^{\pi, \lambda} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < L_1 \\ X_1, & \text{si } L_1 \leq t < L_1 + L_2 \\ X_1 + X_2, & \text{si } L_1 + L_2 \leq t < L_1 + L_2 + L_3 \\ \dots & \dots \end{cases}.$$

On peut démontrer que $(N_t^{\pi, \lambda})_{t \geq 0}$, est un processus de Levy et pour tout réel x :

$$\mathbb{E} \left(e^{-x N_t^{\pi, \lambda}} \right) = \exp \left[-t \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xu}) d(\lambda\pi)(u) \right].$$

Lorsque λ tend vers $+\infty$, $Exp(\lambda) \xrightarrow[\mathcal{L}]{\lambda \rightarrow +\infty} 0$, ce qui signifie que les sauts ont lieu de plus en plus fréquemment. Et en faisant converger π vers δ_0 , de façon convenable (de façon à ce que $\lambda\pi$ converge vers une certaine mesure), on montre le théorème suivant :

Théorème 10.1.5 (De Finetti, version processus) *Soit π une mesure positive sur $]0, +\infty[$ telle que :*

$$\int_0^{+\infty} \min(1, x) d\pi(x) < +\infty.$$

Alors il existe une unique processus de Levy croissant $(S_t)_{t \geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$, et tout $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda S_t} \right) = \exp \left[-t \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\pi(x) \right].$$

Remarque 10.1.6 Une démonstration se trouve dans [11]

Définition 10.1.7 *On dit que le processus $(S_t)_{t \geq 0}$ rencontré dans l'énoncé Théorème 10.1.5 est un subordinateur.*

Remarque 10.1.8 "Subordinateur" : Terminologie du changement de temps pour les processus de Markov.

Définition 10.1.9 Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, +\infty[$. On dit que ϕ est une fonction de Bernstein si ϕ' est complètement monotone. Autrement dit, d'après le Théorème de Bernstein 2.3.1, s'il existe une mesure positive μ telle que :

$$\forall x > 0 : \phi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\mu(t).$$

Proposition 10.1.10 Une fonction ϕ est de Bernstein relativement à une mesure positive $\mu \iff$ elle admet une représentation de Levy-Khintchine, c'est-à-dire : il existe $q, b \geq 0$ et une mesure π intégrant x au voisinage de 0 et 1 au voisinage de $+\infty$, tels que :

$$\forall x > 0 : \phi(x) = q + bx + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) d\pi(t).$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.1.10 :

\Leftarrow : La condition d'intégrabilité se traduit par : $\int_0^{+\infty} \min(1, x) d\pi(x) < +\infty$.

Par dérivation sous le signe \int , pour tout $x > 0$:

$$\phi'(x) = b + \int_0^{+\infty} te^{-tx} d\pi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\mu(t),$$

où $d\mu(t) = b\delta_0(t) + t d\pi(t)$.

\Rightarrow : Soit $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(0) &= \int_0^x \phi'(y) dy = \int_0^x \int_0^{+\infty} e^{-yt} d\mu(t) dy \\ &\stackrel{(Tonelli)}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^x e^{-yt} dy d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-yt}}{t} \right]_0^x d\mu(t) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{-xt}}{t} + \frac{1}{t} \right) d\mu(t) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{d\mu(t)}{t}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Posons $q = \phi(0)$, $b = \mu(\{0\})$, et $d\pi(t) = \frac{1}{t} (d\mu(t) - b\delta_0(t))$.

Alors :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(0) + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{d\pi(t)}{t} + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{d\delta_0(t)}{t} \\ &= \phi(0) + b \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-xt}}{t} + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{d\pi(t)}{t} \\ &= \phi(0) + bx + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{d\pi(t)}{t} \end{aligned}$$

Il reste la condition d'intégrabilité sur π :

- On a, grâce à l'égalité (1.1) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x d\pi(x) &\leq \int_0^1 d\mu(x) = \int_0^1 e^x e^{-x} d\mu(x) \\ &\leq e \int_0^1 e^{-x} d\mu(x) = e\phi'(1) < +\infty. \end{aligned}$$

- Et, encore grâce à l'égalité (1.1), puisque $0 \notin]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} d\pi(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{d\mu(x)}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-1}} (\phi(1) - \phi(0)) < +\infty. \end{aligned}$$

□

On déduit du Théorème de plongement de Levy 10.1.1 et du Théorème de De Finetti 10.1.5 le corollaire suivant :

Corollaire 10.1.11 (De Finetti) *Soit X une variable aléatoire positive.*

Alors X est ID \iff Pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) = e^{-\phi(\lambda)}$, où ϕ est une fonction de Bernstein.

Dans ce cas, le processus de Levy $(X_t)_{t \geq 0}$ associé à X est le subordonneur, ainsi pour tous $t, \lambda \geq 0$:

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) = e^{-t\phi(\lambda)}.$$

Remarque 10.1.12 (Retour sur le processus $(N_t^{(\pi, \lambda)})_{t \geq 0}$)

- q est le paramètre de meurtre : En posant $X = \begin{cases} 0, & \text{si } L_q \geq 1 \\ +\infty, & \text{si } L_q < 1 \end{cases}$, où L_q suit la loi

$Exp(q)$, pour $q > 0$, ($\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) = \mathbb{P}(L_q \geq 1) = e^{-q}$) alors le processus de Levy associé à cette variable X est en fait : $X_t = (+\infty)\mathbb{1}_{\{t > L_q\}}$.

- b est le paramètre de dérive : Si $X_t = bt$: $\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) = e^{-\lambda bt}$.
- π est le mesure de saut : Considérons π_ε la mesure π restreinte à l'ouvert $]\varepsilon, +\infty[$.

D'après l'hypothèse $\int_0^{+\infty} \min(1, t) d\pi(t) < +\infty$, alors π_ε est une mesure finie de masse

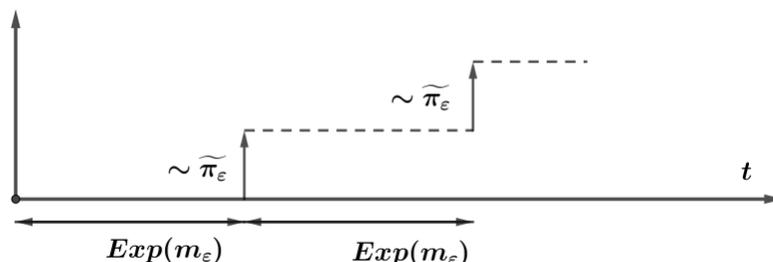
égale à $m_\varepsilon = \pi_\varepsilon(]\varepsilon, +\infty[)$, et alors $\tilde{\pi}_\varepsilon = \frac{\pi_\varepsilon}{m_\varepsilon}$ est une mesure de probabilité.

Dès lors, si $q = b = 0$, pour tout $\lambda \geq 0$:

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) = e^{-t\phi(\lambda)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp \left[-tm_\varepsilon \int_\varepsilon^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\tilde{\pi}_\varepsilon(x) \right].$$

Nous avons deux phénomènes possibles :

- Si m_ε croît, quand ε tend vers 0^+ , vers un réel positif m , alors $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus marqué (d'intensité m).



- Si m_ε croît, quand ε tend vers 0^+ , vers $+\infty$, alors $(X_t)_{t \geq 0}$ est un subordonneur d'intensité infini : le processus saute infiniment souvent.

Exemple 10.1.13

- Subordonneur Gamma : Considérons, pour tout $t \geq 0$, γ_t de loi gamma de densité : $\frac{1}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$. Nous avons (c'est du revu), pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-\lambda \gamma_t} \right) &= \frac{1}{(1+\lambda)^t} = e^{-t \ln(1+\lambda)} \\ &= \exp \left[t \ln \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) \right] = \exp \left[-t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(1+\lambda)x}}{x} dx \right], \end{aligned}$$

d'après la Formule de Frullani (Proposition 1.1.18).

Ainsi :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda \gamma_t} \right) = \exp \left[-t \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(1+\lambda)x}}{x} dx}_{(=\phi(\lambda) \text{ (Bernstein)})} \right]$$

D'après le Corollaire 10.1.11, il existe donc un processus de Levy $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ appelé le subordonneur Gamma (d'intensité infinie, sans meurtre ni dérive : $b = q = 0$, $d\pi(x) = \frac{e^{-x}}{x} dx$) tel que pour tout $t \geq 0$: $\Gamma_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_t$.

(Ce qui correspond bien à la relation : pour tous $t, s \geq 0$: $\gamma_{s+t} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_s \perp \gamma_t$.)

- Subordonneur stable positif d'indice α appartenant à $]0, 1[$
Soit Z_α la loi α -stable positive, dont nous rappelons la transformée de Laplace (Théorème 2.4.5) : pour tout $\lambda \geq 0$: $\mathbb{E} \left(e^{-\lambda Z_\alpha} \right) = e^{-\lambda^\alpha}$.

D'après le Lemme 2.4.4 (iii) : $\lambda^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$. Alors :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda Z_\alpha} \right) = \exp \left[-t \underbrace{\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{\alpha dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha+1}}}_{(=\phi(\lambda) \text{ (Bernstein)})} \right].$$

D'après le Corollaire 10.1.11, il existe donc un processus de Levy $(Z_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$ tel que pour tous $t, \lambda \geq 0$:

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda Z_t^{(\alpha)}} \right) = e^{-\lambda^\alpha t}.$$

Concernant ce processus stable, nous déduisons de cette construction la proposition suivante.

10.2 Variable $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma_t} dt$, où $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ est un subordonateur

Soit $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ un subordonateur, tel que pour tout $\lambda \geq 0$:

$$\phi(\lambda) = q + b\lambda + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t}) dt.$$

Et soit : $\tilde{\phi}(\lambda) = \phi(\lambda) - q$, ayant pour subordonateur associé $(\tilde{\sigma}_t)_{t \geq 0}$, avec :

$$\sigma_t = \tilde{\sigma}_t \mathbb{1}_{\{t \leq L_q\}} + (+\infty) \mathbb{1}_{\{t > L_q\}}, \text{ où } L_q \sim \text{Exp}(q), \text{ et } L_q \perp (\sigma_t)_{t \geq 0}.$$

Proposition 10.2.1 *Considérons, pour tout $t \geq 0$: $I_t = \int_0^t e^{-\tilde{\sigma}_u} du$. Alors :*

— Pour tous $t, \lambda \geq 0$, I_t admet un moment d'ordre λ . Et si $\lambda \geq 1$, alors :

$$\mathbb{E} \left(I_t^\lambda \right) = \lambda \int_0^t e^{-s\tilde{\phi}(\lambda)} \mathbb{E} \left(I_{t-s}^{\lambda-1} \right) ds.$$

— Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma_u} du$ (qui est en fait égal à $\int_0^{L_q} e^{-\tilde{\sigma}_u} du$). Alors la variable aléatoire I est déterminée par ses moments d'ordres entiers.

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.2.1 :

— La fonction dérivée de $s \mapsto I_s = \int_0^s e^{-\tilde{\sigma}_u} du$ est égale à $e^{-\tilde{\sigma}_s}$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, et tout $\lambda \geq 1$:

$$\lambda \int_0^t (I_t - I_s)^{\lambda-1} e^{-\tilde{\sigma}_s} ds = \left[-(I_t - I_s)^\lambda \right]_0^t = I_t^\lambda. \quad (2.1)$$

Or, nous avons

$$I_t - I_s = \int_s^t e^{-\widetilde{\sigma}_u} du = e^{-\widetilde{\sigma}_s} \int_s^t e^{-(\widetilde{\sigma}_u - \widetilde{\sigma}_s)} du = e^{-\widetilde{\sigma}_s} \int_0^{t-s} e^{-(\widetilde{\sigma}_{u+s} - \widetilde{\sigma}_s)} du \quad (2.2)$$

Étant en présence d'un processus de Levy, alors, pour tous $u, s \geq 0$: $\widetilde{\sigma}_{u+s} - \widetilde{\sigma}_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} \widehat{\sigma}_u$, et $\widetilde{\sigma}_{u+s} - \widetilde{\sigma}_s \perp \widehat{\sigma}_s$, où $(\widehat{\sigma}_s)_{s \geq 0}$ est une copie indépendante du processus $(\widetilde{\sigma}_s)_{s \geq 0}$.

Ainsi les relations (2.1) et (2.2), le Théorème de Tonelli et l'indépendance donnent, pour tout $\lambda \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_t^\lambda) &= \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \widetilde{\sigma}_s} \left(\int_0^{t-s} e^{-\widehat{\sigma}_u} du \right)^{\lambda-1} \right] ds \\ &= \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left(e^{-\lambda \widetilde{\sigma}_s} \right) \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t-s} e^{-\widehat{\sigma}_u} du \right)^{\lambda-1} \right] ds \\ &= \lambda \int_0^t e^{-s \widetilde{\phi}(\lambda)} \mathbb{E} \left(I_{t-s}^{\lambda-1} \right) ds. \end{aligned}$$

— Nous allons maintenant démontrer que pour tout $\lambda \geq 1$: $\mathbb{E}(I^\lambda) = \frac{\lambda}{\phi(\lambda)} \mathbb{E}(I^{\lambda-1})$.

En effet, $L_q \perp (\sigma_t)_{t \geq 0}$, le Théorème de Tonelli, et la relation (2.2) donnent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I^\lambda) &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{L_q} e^{-\widetilde{\sigma}_u} du \right)^\lambda \right] \\ &= \int_0^{+\infty} q e^{-qt} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t e^{-\widetilde{\sigma}_u} du \right)^\lambda \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} q e^{-qt} \mathbb{E}(I_t^\lambda) dt \\ &= \lambda q \int_0^{+\infty} e^{-qt} \left[\int_0^t e^{-s \widetilde{\phi}(\lambda)} \mathbb{E} \left(I_{t-s}^{\lambda-1} \right) ds \right] dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} q e^{-s \widetilde{\phi}(\lambda)} \left[\int_s^{+\infty} \mathbb{E} \left(I_{t-s}^{\lambda-1} \right) dt \right] ds \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} q e^{-s \widetilde{\phi}(\lambda)} \int_0^{+\infty} e^{-q(t+s)} \mathbb{E} \left(I_t^{\lambda-1} \right) dt ds \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-s(\widetilde{\phi}(\lambda)+q)} \int_0^{+\infty} q e^{-qt} \mathbb{E} \left(I_t^{\lambda-1} \right) dt ds \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-s \phi(\lambda)} \mathbb{E} \left(I^{\lambda-1} \right) ds \\ &= \lambda \mathbb{E} \left(I^{\lambda-1} \right) \times \int_0^{+\infty} e^{-s \phi(\lambda)} ds = \frac{\lambda}{\phi(\lambda)} \mathbb{E} \left(I^{\lambda-1} \right). \end{aligned}$$

On en déduit alors que I est déterminée par ses moments entiers, puisque pour tout entier $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}(I^n) = \frac{n}{\phi(n)} \mathbb{E}(I^{n-1}) = \dots = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n \phi(k)} \mathbb{E}(I^0) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{\phi(k)}.$$

Comme $\phi(\lambda) \geq q$, alors : $\mathbb{E}(I^n) \leq \frac{n!}{q^n}$. Et alors pour tout $0 \leq x < q$:

$$\mathbb{E}(e^{xI}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!} \left(\frac{x}{q}\right)^n < +\infty.$$

□

Remarque 10.2.2 Considérons $I_{L_q} = \int_0^{L_q} e^{-\tilde{\sigma}_t} dt$, on va étudier le comportement quand q tend vers 0^+ .

Tout d'abord : $L_q \xrightarrow[q \rightarrow 0^+]{\mathbb{P}\text{-ps}} +\infty$.

En effet, pour tout $t \geq 0$: $\mathbb{P}(L_q \geq t) = e^{-qt} \xrightarrow[q \rightarrow 0^+]{} 1$.

Donc :

$$\mathbb{P}(L_q = +\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(L_q \geq t) \xrightarrow[q \rightarrow 0^+]{} \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Dès lors, par convergence monotone, $\mathbb{P}\text{-ps}$:

$$I_{L_q} = \int_0^{L_q} e^{-\tilde{\sigma}_t} dt \xrightarrow[q \rightarrow 0^+]{} \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{\sigma}_t} dt = I.$$

Et nous avons : $\mathbb{P}\text{-ps}$: $I < +\infty$, parce que :

$$\mathbb{E}(I_{L_q}) = \frac{1}{q + \tilde{\phi}(1)} \xrightarrow[q \rightarrow 0^+]{} \frac{1}{\tilde{\phi}(1)} < +\infty,$$

sauf si $q = b = 0$, ce qui équivaudrait à $\tilde{\phi}(1) = 0$.

Et alors, pour tout $n \geq 1$: $\mathbb{E}(I^n) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{\phi(k)} \leq \frac{n!}{(\phi(1))^n}$.

Proposition 10.2.3 Nous avons :

a) Pour tout $c > 0$: $\frac{\phi(\lambda + c)}{\phi(\lambda)} \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} 1$.

b) Pour tout $\lambda \geq 1$:

$$\frac{\phi(\lambda)}{\lambda} = b + \int_0^1 x^{\lambda-1} [q + \pi(\cdot - \ln(x); +\infty)] dx,$$

$$\text{où } \pi(\cdot; +\infty) = \int_u^{+\infty} d\pi(t).$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.2.3 :

a) ϕ est croissante concave, alors pour tous $\lambda, c > 0$:

$$\phi(\lambda + c) = \phi(\lambda) + \underbrace{\phi(\lambda + c) - \phi(\lambda)}_{\text{décroissante en } \lambda} \leq \phi(\lambda) + \phi(c) - \phi(0)$$

Donc :

$$1 = \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)} \leq \frac{\phi(\lambda + c)}{\phi(\lambda)} \leq 1 + \frac{\phi(c) - \phi(0)}{\phi(\lambda)}.$$

En appliquant le Théorème des gendarmes, on obtient le résultat.

b) Nous avons pour tout $\lambda \geq 1$:

$$\frac{\phi(\lambda)}{\lambda} = \frac{q}{\lambda} + b + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} d\pi(t) = \left(\int_0^1 x^{\lambda-1} dx \right) q + b + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} d\pi(t). \quad (2.3)$$

La fonction $t \mapsto \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$ a pour fonction dérivée : $t \mapsto e^{-\lambda t}$. Et $d\pi(t)$ a pour primitive $-\pi(]t; +\infty[)$. Alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} d\pi(t) &= [-\pi(]t; +\infty[)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \pi(]t; +\infty[) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \pi(]t; +\infty[) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \pi(]t; +\infty[) dt. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \pi(]t; +\infty[) = 0$. En effet :

$$\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t, \text{ et } \pi(]t; +\infty[) = - \int_t^{+\infty} d\pi(s).$$

Et alors, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $0 < t < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \pi(]t; +\infty[) \leq t \pi(]t; +\infty[) \\ &\leq t \pi(]t, \varepsilon[) + t \pi(] \varepsilon; +\infty[) \\ &\leq t \int_t^\varepsilon d\pi(s) + t \pi(] \varepsilon; +\infty[) \leq t \left(\int_0^\varepsilon d\pi(s) + \pi(] \varepsilon; +\infty[) \right), \end{aligned}$$

et le Théorème des gendarmes permet de conclure.

Finalement la relation (2.3) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} &= b + \left(\int_0^1 x^{\lambda-1} dx \right) q + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \pi(]t; +\infty[) dt \\ &= b + \left(\int_0^1 x^{\lambda-1} dx \right) q + \int_0^1 x^{\lambda-1} \pi(] - \ln(x); +\infty[) dx, \text{ où } x = e^{-t} \\ &= b + \int_0^1 x^{\lambda-1} [q + \pi(] - \ln(x); +\infty[)] dx. \end{aligned}$$

□

Remarque 10.2.4 Ainsi, pour tout $\lambda \geq 1$:

$$\frac{\lambda}{\phi(\lambda)} \left[b + \int_0^1 x^{\lambda-1} [q + \pi(\cdot - \ln(x); +\infty)] dx \right] = 1. \quad (2.4)$$

Ce qui offre une loi de probabilité.

Définition 10.2.5 Soit X une variable aléatoire positive ou nulle. Et soit un réel t tel que $0 < \mathbb{E}(X^t) < +\infty$.

Alors la variable aléatoire biaisée par la taille issue de X par t est la variable aléatoire positive notée $X^{(t)}$ vérifiant : pour tout fonction mesurable bornée f :

$$\mathbb{E} \left[f(X^{(t)}) \right] = \frac{\mathbb{E} \left[X^t f(X) \right]}{\mathbb{E}(X^t)}.$$

Exemple 10.2.6 Si X suit la loi $\beta_{a,b}$, pour deux réels $a, b > 0$, alors pour tout $t > -a$: $X^{(t)}$ suit la loi $\beta_{a+t,b}$.

Théorème 10.2.7 Soit $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ un subordonateur de triplet (b, q, π) .

Soit Y_1 une variable aléatoire positive de loi égale à :

$$d\mathbb{P}_{Y_1}(x) = \frac{1}{\phi(1)} \left[b d\delta_1(x) + (q + \pi(\cdot - \ln(x); +\infty)) \mathbb{1}_{]0;1[}(x) dx \right],$$

et soient pour tout entier $k \geq 2$: Y_k la variable aléatoire biaisée de Y_1 par $k-1$.

Considérons les Y_k indépendantes, et soit $(T_n)_{n \geq 1}$ la suite de variables aléatoires positives telle que, pour tout $n \geq 1$:

$$T_n = \prod_{k=1}^n \frac{\phi(k)(k+1)}{k\phi(k+1)} Y_k.$$

Alors $(T_n)_{n \geq 1}$ converge \mathbb{P} -presque sûrement vers une variable notée T_∞ . De plus :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma_u} du \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\phi(1)} T_\infty.$$

PREUVE DE LA THÉORÈME 10.2.7 : Puisque pour tout $k \geq 2$, $Y_k \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_1^{(k-1)}$, alors sa loi est :

$$d\mathbb{P}_{Y_k}(x) = \frac{k}{\phi(k)} \left[b d\delta_1(x) + x^{k-1} (q + \pi(\cdot - \ln(x); +\infty)) \mathbb{1}_{]0;1[}(x) dx \right],$$

et nous avons :

$$\mathbb{E}(Y_k) = \frac{k}{\phi(k)} \left[b + \int_0^1 x^k (q + \pi(\cdot - \ln(x); +\infty)) dx \right] = \frac{k\phi(k+1)}{(k+1)\phi(k)},$$

grâce à la relation (2.4) appliqué en $\lambda = k + 1$.

Alors chaque $\mathbb{E}(T_n)$ vaut 1, et $(T_n)_{n \geq 1}$ est une martingale positive $L^1(\Omega)$ pour sa propre filtration, elle converge \mathbb{P} -presque sûrement vers une variable aléatoire positive T_∞ .

Pour démontrer que $I \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\phi(1)} T_\infty$, nous allons montrer que les deux variables I et $\frac{1}{\phi(1)} T_\infty$ ont les mêmes moments entiers. D'après le Théorème de Tonelli et grâce à l'indépendance, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{\phi(1)} T_\infty \right)^n \right] = \frac{1}{[\phi(1)]^n} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)^n [\phi(k)]^n}{[\phi(k+1)]^n k^n} \mathbb{E}(Y_k^n).$$

Or, de nouveau grâce à la relation (2.4) appliqué à $\lambda = k + n$:

$$\mathbb{E}(Y_k^n) = \frac{k}{\phi(k)} \left[b + \int_0^1 x^{k+n-1} (q + \pi(\cdot - \ln(x); +\infty)) dx \right] = \frac{k\phi(k+n)}{(k+n)\phi(k)},$$

ainsi donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{\phi(1)} T_\infty \right)^n \right] &= \frac{1}{[\phi(1)]^n} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)^n [\phi(k)]^{n-1}}{[\phi(k+1)]^n k^{n-1}} \times \frac{\phi(k+n)}{k+n} \\ &= \frac{1}{[\phi(1)]^n} \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{(k+1)^n [\phi(k)]^{n-1}}{[\phi(k+1)]^n k^{n-1}} \times \frac{\phi(k+n)}{k+n} \\ &= \frac{1}{[\phi(1)]^n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^n [\phi(k)]^{n-1}}{[\phi(k+1)]^n k^{n-1}} \frac{\phi(k+n)}{k+n} \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N \frac{(k+1)^n [\phi(k)]^{n-1}}{[\phi(k+1)]^n k^{n-1}} \frac{\phi(k+n)}{k+n} \\ &= \frac{1}{[\phi(1)]^n} \times \frac{n! \times [\phi(1)]^n}{\phi(1) \times \dots \times \phi(n)} \times \left(\frac{n}{\phi(n)} \right)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\phi(k+n)}{k+n} \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N \frac{(k+1)^n [\phi(k)]^{n-1}}{[\phi(k+1)]^n k^{n-1}} \frac{\phi(k+n)}{k+n} \\ &= \frac{n!}{\prod_{j=1}^n \phi(j)} \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(N+1)^{n-1}}{[\phi(N+1)]^{n-1}} \prod_{k=1}^N \frac{\phi(k+n)}{k+n} \times \prod_{k=n}^N \frac{k+1}{\phi(k+1)} \\ &= \frac{n!}{\prod_{j=1}^n \phi(j)} \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(N+1)^{n-1}}{[\phi(N+1)]^{n-1}} \times \prod_{k=N-n+2}^N \frac{\phi(k+n)}{k+n} \\ &= \frac{n!}{\prod_{j=1}^n \phi(j)} \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(N+1)^{n-1}}{[\phi(N+1)]^{n-1}} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\phi(N+k+1)}{N+k+1} \\ &= \frac{n!}{\prod_{j=1}^n \phi(j)} \times 1 \times \dots \times 1 = \mathbb{E}(I^n). \end{aligned}$$

En effet, chaque facteur dans le produit a pour limite 1 quand N tend vers ∞ , d'après la Proposition 10.2.3 (a), appliquée en $c = 1, 2, \dots, n$. \square

Exemple 10.2.8 Traduisons le Théorème 10.2.7, dans certains cas :

- Avec un meurtre pur : $q > 0, b = 0$, π est la mesure nulle, alors :

$$I = \int_0^{L_q} 1 dt = L_q \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{q} L, \text{ où } L \sim \text{Exp}(1).$$

$\phi(1) = q$, et pour tout $k \geq 1$: $d\mathbb{P}_{Y_k}(x) = kx^{k-1} \mathbb{1}_{]0;1[}(x) dx$, qui est la loi de la variable $\mathcal{U}^{\frac{1}{k}}$, où \mathcal{U} est de loi uniforme sur $]0;1[$. Alors le Théorème 10.2.7 donne :

$$L \stackrel{\mathcal{L}}{=} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \mathcal{U}^{\frac{1}{k}} \text{ (en fait : } L \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\ln(\mathcal{U})\text{)}.$$

Et nous obtenons la formule de Knar : pour tout $s > 0$:

$$\Gamma(1+s) = \mathbb{E}(L^s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^s \frac{k}{k+s}$$

- Avec un drift pur : $b > 0, q = 0$, π est la mesure nulle, alors le cas est pathologique :

$$I = \frac{1}{b}, \quad \phi(\lambda) = b\lambda, \quad d\mathbb{P}_{Y_k}(x) = d\delta_1(x).$$

- Cas sans saut : $b, q > 0$, la mesure π est nulle.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{L_q} e^{-bt} dt \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1 - e^{-bL_q}}{b} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1 - e^{-\frac{b}{q}L}}{b} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1 - \mathcal{U}^{\frac{b}{q}}}{b} \text{ (car } L \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\ln(\mathcal{U})\text{)} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{b} \beta_{1, \frac{q}{b}} \text{ (évident avec un calcul de la densité)} \end{aligned}$$

Nous avons $\phi(1) = q + b$, et alors : $\frac{\phi(k)(k+1)}{k\phi(k+1)} = \frac{(k+1)(k+\frac{q}{b})}{k(k+1+\frac{q}{b})}$. Donc :

$$\begin{aligned} d\mathbb{P}_{Y_k}(x) &= \frac{k}{\phi(k)} \left(b d\delta_1(x) + q x^{k-1} \mathbb{1}_{]0;1[}(x) dx \right) \\ &= \frac{k}{k+\frac{q}{b}} \left(d\delta_1(x) + \frac{q}{b} x^{k-1} \mathbb{1}_{]0;1[}(x) dx \right). \end{aligned}$$

Et, à l'aide du Théorème 10.2.7, et en notant $\kappa = \frac{q}{b} > 0$, nous obtenons :

$$\beta_{1, \kappa} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{1+\kappa} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+\kappa)(n+1)}{n(n+1+\kappa)} Y_n.$$

— Prenons enfin le subordonateur $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ associé au triplet : $b = q = 0$, et $\pi(\cdot - \ln(x), +\infty[\cdot]) = \varphi_{a,c}(x)$, où $a \geq 1$, $0 < c < 1$, et $\varphi_{a,c}$ désigne la densité de la loi $\beta_{a,c}$, soit :

$$\varphi_{a,c}(x) = \frac{\Gamma(a+c)}{\Gamma(a)\Gamma(c)} x^{a-1} (1-x)^{c-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

Alors, dans ce cas, pour tout $k \geq 1$: $Y_k \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{a,c}$ et :

$$\frac{\phi(k)}{k} = \mathbb{E}(\beta_{a,c}^{k-1}) = \mathbb{E}(\beta_{a+k-1,c}) = \frac{a+k-1}{a+c+k-1}.$$

Et $\phi(1) = 1$, Le Théorème 10.2.7 donne, si $\mathcal{T}_{a,1,c}$ désigne la variable aléatoire $\frac{I}{\mathbb{E}(I)}$, où $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} dt$, et si pour $n \geq 1$: X_n désigne $\frac{a+c+n}{a+n} \beta_{a+n,c}$, prises indépendantes :

$$\mathcal{T}_{a,1,c} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \prod_{n=0}^{+\infty} X_n,$$

le produit existant \mathbb{P} -presque sûrement.

Remarque 10.2.9 (Retour sur le processus de Cauchy, questions ouvertes)

- T_1 désignant le temps de dépassement en 1 du processus $(C_t)_{t \geq 1}$. Kuznetsov-Pardo, en 2013, ont prouvé que :

$$T_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\mathcal{T}_{1,1,\frac{1}{2}}}{\mathcal{T}_{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}}} \text{ (quotient indépendant).}$$

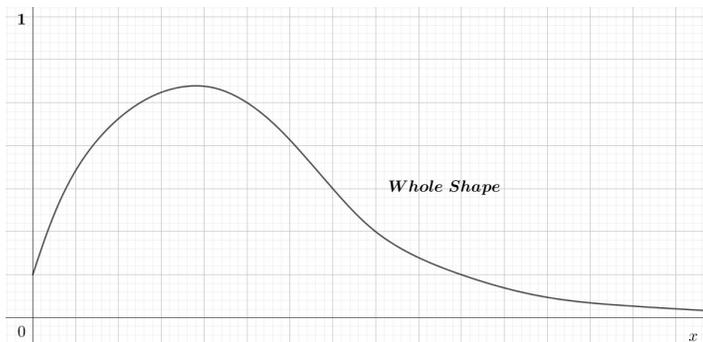
Par ailleurs, on peut prouver que $\gamma_{\frac{1}{2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}_{\frac{1}{2},1,1}$, et donc la Proposition 4.3.2 devient :

$$|C_1| \stackrel{\mathcal{L}}{=} |C| \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{T}_{\frac{1}{2},1,1}}{\mathcal{T}_{\frac{1}{2},1,1}}} \text{ (quotient indépendant).}$$

- On ne sait pas si T_1 est infiniment divisible. Mais il a été prouvé que $\frac{1}{\mathcal{T}_{a,1,c}}$ l'est. Cependant, on a un critère pour savoir si T_1 est infiniment divisible : Si f_n désigne la densité de T_n ($T_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} nT_1$) : si f_1 a une courbe dite "baleinière" / "whole shape", c'est-à-dire :

$$\text{card}((f'_n)^{-1}(\{0\})) = \text{card}((f''_n)^{-1}(\{0\})) = 1,$$

alors T_1 sera ID.



10.3 Fonctions caractéristiques et processus de Levy

Présentons maintenant un résultat pour les fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles ID (plus nécessairement positives) :

Théorème 10.3.1 (Levy-Khintchine, version processus) Soit X une variable aléatoire réelle infiniment divisible. Alors il existe un processus de Levy $(X_t)_{t \geq 0}$ unique en loi, tel que $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$. De plus, pour tout réel λ , pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E} \left(e^{i\lambda X_t} \right) = e^{t\psi(\lambda)},$$

où

$$\psi(\lambda) = ib\lambda - \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}/\{0\}} \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \right) d\pi(x),$$

et où :

- le réel b est le paramètre de dérive,
- σ^2 est le paramètre de diffusion,
- π , appelée mesure de saut, est une mesure positive sur $\mathbb{R}/\{0\}$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}/\{0\}} \min(1, x^2) d\pi(x) < +\infty.$$

Exemple 10.3.2

- Le mouvement brownien : $\mathbb{E} \left(e^{i\lambda X} \right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. On retrouve : pour tout $t \geq 0$: $\mathbb{E} \left(e^{i\lambda B_t} \right) = e^{-t\frac{\lambda^2}{2}}$.
- Processus de Cauchy : C_t a pour densité $x \mapsto \frac{t}{\pi(x^2 + t^2)}$, la fonction caractéristique étant : $\mathbb{E} \left(e^{i\lambda C_t} \right) = e^{-t|\lambda|}$.

En fait :

$$|\lambda| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|x| \geq \varepsilon} \left(e^{ix\lambda} - 1 \right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}/\{0\}} \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \right) \frac{dx}{x^2}.$$

- Considérons la loi γ_a pour $a > 0$. Et considérons $X^{(a)} = \ln(\gamma_a)$. Nous avons, pour tout $\lambda > -a$:

$$\mathbb{E} \left(e^{\lambda X^{(a)}} \right) = \mathbb{E} \left(\gamma_a^\lambda \right) = \frac{\Gamma(\lambda + a)}{\Gamma(a)}.$$

Nous avons vu, par la Formule de Malmsten (Lemme 4.2.7) :

$$\ln \left[\frac{\Gamma(\lambda + a)}{\Gamma(a)} \right] = \psi(a)\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \right) \frac{e^{ax} dx}{|x|(1 - e^{-x})},$$

formule en $\lambda > -a$, qui s'étend à $i\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\mathbb{E} \left(e^{i\lambda X^{(a)}} \right) = \exp \left[i\psi(a)\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \right) \frac{e^{ax} dx}{|x|(1 - e^{-x})} \right].$$

Le Corollaire 4.1.9, affirme alors que $X^{(a)}$ est ID, pour tout $a > 0$, de mesure de saut : $\frac{e^{ax}}{|x|(1 - e^{-x})} \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) dx$, et le Théorème 10.3.1 nous dit qu'il existe un processus de Levy associé $(X_t^{(a)})_{t \geq 0}$: le processus log-Gamma.

10.4 Exposant de Laplace

Soit $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ un subordonateur. On considère le processus à dérive, pour $c > 0$ fixé, et pour tout $t \geq 0$: $Z_t = ct - \sigma_t$.

Alors $(Z_t)_{t \geq 0}$ est aussi un processus de Levy, appelé processus de Cramer-Lundberg.

Exemple 10.4.1 En assurance : ct désigne les cotisations, σ_t désigne les sinistres (il faut un processus non tué : $q = 0$).

Calculons donc sa fonction génératrice des moments, pour $q = 0$. Pour tout réel λ et pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{\lambda Z_t} \right) &= e^{\lambda ct} \mathbb{E} \left(e^{-\lambda \sigma_t} \right) = e^{\lambda ct} \exp \left[\left(-b\lambda - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\pi(x) \right) t \right] \\ &= e^{\lambda(c-b)t} \exp \left[-t \int_0^{-\infty} (1 - e^{\lambda x}) d\pi(-x) \right] \\ &= e^{\lambda(c-b)t} \exp \left[t \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1) d\pi^-(x) \right] \quad (\text{où } \pi^- (]-\infty, -x]) = \pi ([x, +\infty[)) \\ &= e^{\lambda(c-b)t} \exp \left[\left(\lambda \int_{-1}^0 x d\pi^-(x) + \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{]-1, 0[}(x)) d\pi^-(x) \right) t \right] \\ &= e^{\lambda \bar{b}t} \exp \left[t \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{]-1, 0[}(x)) d\pi^-(x) \right], \end{aligned}$$

où $\tilde{b} = c - b + \int_{-1}^0 x d\pi^-(x)$.

En étendant sur $i\mathbb{R}$, nous obtenons, pour tout réel λ :

$$\mathbb{E} \left(e^{i\lambda Z_t} \right) = \exp \left[i\lambda \tilde{b}t + \tilde{\psi}(\lambda)t \right],$$

où $\tilde{\psi}(\lambda) = \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{]-1,0[}(x) \right) d\pi^-(x)$, ce qui présente une représentation de type Levy-Khintchine, avec $\sigma = 0$, $\text{supp}(\pi^-) \subset \mathbb{R}^-$.

Définition 10.4.2 *Un processus de Levy est dit sans saut positif ou spectralement négatif si sa mesure de saut dans sa représentation de Levy-Khintchine est à support dans \mathbb{R}^- .*

Du calcul précédent, pour tout processus de Levy spectralement négatif $(Z_t)_{t \geq 0}$, on définit pour tout $\lambda \geq 0$:

$$\psi(\lambda) = i b \lambda - \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{]-1,0[}(x) \right) d\nu(x),$$

où ν est une mesure positive à support dans \mathbb{R}^- .

Cette fonction ψ est appelé exposant de Laplace de $(Z_t)_{t \geq 0}$. Cette fonction ψ est analytique sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \leq 0\}$. Et pour tout $\lambda \geq 0$: $\mathbb{E} \left(e^{i\lambda Z_t} \right) = e^{t\psi(\lambda)}$.

En posant, pour tout $\lambda \geq 0$: $\varphi(\lambda) = \psi(-i\lambda)$, on retrouve : $\mathbb{E} \left(e^{\lambda Z_t} \right) = e^{t\psi(-i\lambda)} = e^{t\varphi(\lambda)}$, et :

$$\varphi(\lambda) = b\lambda + \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{]-1,0[}(x) \right) d\nu(x).$$

Exemple 10.4.3

- D'après la formule de Malmsten (Lemme 4.2.7) :

$$\Gamma(1 + \lambda) = \exp \left[-\gamma\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \right) \frac{dx}{|x|(e^{|x|} - 1)} \right] = \mathbb{E} \left(e^{\lambda \ln(L)} \right),$$

où $L \sim \text{Exp}(1)$.

$\ln(L)$ est la variable aléatoire de Gumbel, que l'on peut associer à un processus de Levy spectralement négatif $(G_t)_{t \geq 0}$, avec donc $G_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \ln(L)$ est qui a pour densité e^{x-e^x} .

- Soit α appartenant à $]1, 2[$. Considérons pour $\lambda > 0$: $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$.

D'après le Lemme 2.4.4 (iii) : $\lambda^{\alpha-1} = \frac{\alpha-1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \frac{dx}{x^\alpha}$. Et $\lambda^{\alpha-1} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}$,

donc :

$$\begin{aligned}\lambda^\alpha = \psi(\lambda) &= \frac{\lambda(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{-\infty}^0 -\left(1 - e^{\lambda|x|}\right) \frac{dx}{|x|^\alpha} \\ &= \frac{\lambda(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda|x|} - 1\right) \frac{dx}{|x|^\alpha} = \ln \left[\mathbb{E} \left(e^{\lambda Z_{\alpha-1}} \right) \right],\end{aligned}$$

$Z_{\alpha-1}$ désignant la loi stable positive d'indice de stabilité $\alpha - 1$.

Ainsi, $\psi(\lambda)$ est l'exposant de Laplace d'un processus qui est spectralement négatif. En effet :

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \frac{\lambda(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \frac{dx}{x^\alpha} \\ &= \frac{\alpha-1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{e^{-\lambda x} + \lambda x - 1}{x^\alpha} \right]_0^{+\infty} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\lambda x} + \lambda x - 1\right) \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\lambda x} + \lambda x - 1\right) \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda u} - \lambda u - 1\right) \frac{du}{|u|^{\alpha+1}} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda u} - \lambda u - 1\right) \frac{du}{|u|^{\alpha+1}}\end{aligned}$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^0 \min(1, u^2) \frac{du}{|u|^{\alpha+1}} < +\infty.$$

$$\text{Donc : } \psi(\lambda) = \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda u} - \lambda u - 1\right) d\nu_\alpha(u), \text{ où :}$$

$$d\nu_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(x) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Définition 10.4.4 Soit α appartenant à $]1, 2[$.

Le processus d'exposant de Laplace $\psi(\lambda) = \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda u} - \lambda u - 1\right) d\nu_\alpha(u)$, où :

$$d\nu_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(x) \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}.$$

est appelé processus stable spectralement négatif, et est encore noté $(Z_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$.

Proposition 10.4.5 Considérons, pour α appartenant à $]0, 2[$, le processus $(Z_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$. Alors :

- Pour tout $t > 0$: $Z_t^{(\alpha)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} t^{\frac{1}{\alpha}} Z_1^{(\alpha)}$.
- Le processus $(Z_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$ est $\frac{1}{\alpha}$ -autosimilaire. Nous avons en fait :

$$\forall c > 0 : (Z_{ct}^{(\alpha)})_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (c^{\frac{1}{\alpha}} Z_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.4.5 :

— Nous avons en effet, pour tous $t, \lambda \geq 0$:

$$e^{-t\lambda^\alpha} = e^{-\left(\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha} = \mathbb{E} \left[e^{-\lambda t^{\frac{1}{\alpha}} Z_1^{(\alpha)}} \right].$$

— Il s'agit de la même démonstration (à adapter avec l'exposant $\frac{1}{\alpha}$) que celle de la Proposition 9.2.2.

□

Remarque 10.4.6 Le subordonateur α -stable vu ci-dessus est le seul processus (à une constante multiplicative près) de Levy autosimilaire. Ce qui devient faux pour les processus à accroissements indépendants (sans accroissements stationnaires) (processus dits de Sato).

Remarque 10.4.7

- Les processus $(Z_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$ (respectivement les variable $Z^{(\alpha)}$) pour α appartenant à $]0, 2[$, donc dit "positif" (en fait : "spectralement positif") pour α dans $]0, 1[$ et "spectralement négatif" pour α dans $]1, 2[$ font partie d'une classe de processus (respectivement variables) plus générale : les processus et variables aléatoires stables (dont les lois n'ont plus nécessairement leur support sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$). Voir [Lois stables](#) pour un résumé ou pour des éléments plus précis encore : [16]
- $(C_t)_{t \geq 1}$ est en fait le processus stable symétrique pour $\alpha = 1$... Connaître la loi du temps de dépassement pour un processus stable, et savoir si cette loi est ID sont des problèmes ouverts (sujet de thèse en 2023).
- Enfin, une conjecture relative à ce sujet :

T_1 est ID pour un processus stable d'indice α appartenant à $]0, 2[\iff \alpha \geq 1$.

L'exemple du processus $(Z_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$ stable spectralement négatif d'indice α dans $]1, 2[$, $\left(\frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \right)$ où ψ est un exposant de Laplace) motive une généralisation que nous allons présenter : la classe de Jurek.

Définition 10.4.8 La classe de Jurek est l'ensemble des fonctions φ de Bernstein dont la mesure positive π associée (en vertu du Théorème de Bernstein 2.3.1) est à densité décroissante.

Proposition 10.4.9 Soit φ une fonction de la classe de Jurek.

Alors, la fonction $\psi : \lambda \mapsto \lambda\varphi(\lambda)$ est l'exposant de Laplace d'un processus de Levy spectralement négatif.

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.4.9 : D'après la Proposition 10.1.10, il existe $b, q \geq 0$, il existe une mesure positive μ sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} \min(1, t) d\mu(t) < +\infty$, tels que :

$$\forall \lambda > 0 : \varphi(\lambda) = q + b\lambda + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t}) d\mu(t).$$

Par hypothèse, il existe une fonction f positive décroissante sur $]0, +\infty[$ telle que $d\mu(t) = f(t)dt$.

Ainsi, pour tout $\lambda > 0$:

$$\lambda\varphi(\lambda) = q\lambda + b\lambda^2 + \int_0^{+\infty} \lambda(1 - e^{-\lambda t}) f(t)dt. \quad (4.1)$$

Comme f décroît sur $]0, +\infty[$, alors il existe une mesure positive ν sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$\forall x > 0 : f(x) = \nu(]x, +\infty]).$$

$t \mapsto \lambda(1 - e^{-\lambda t})$ a pour primitive $t \mapsto e^{-\lambda t} + \lambda t - 1$, et $t \mapsto f(t) = \nu(]t, +\infty])$ a pour dérivée : $-d\nu(t)$. Par intégration par parties, l'égalité (4.1) devient, pour tout $\lambda > 0$:

$$\lambda\varphi(\lambda) = q\lambda + b\lambda^2 + \left[(e^{-\lambda t} + \lambda t - 1) f(t) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda t} + \lambda t - 1) d\nu(t). \quad (4.2)$$

Il faut prouver que le crochet intégral, dans l'égalité (4.2) ci-dessus, est nul.

On va en fait prouver que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t f(t) = 0$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t f(t) = 0$, (les seules limites posant problème).

Partant de $\int_0^{+\infty} \min(1, t) d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \min(1, t) f(t) dt < +\infty$, on a : $\int_0^1 t f(t) dt < +\infty$.

Ainsi par convergence monotone : $\int_{\frac{x}{2}}^x t f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Mais comme f décroît :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{x}{2}}^x t f(t) dt &\geq f(x) \int_{\frac{x}{2}}^x t dt = f\left(\frac{x}{2}\right) \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^x \\ &= f(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8}\right) = \frac{3x^2}{8} f(x). \end{aligned}$$

Donc : $x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Puis $\int_1^{+\infty} d\mu(t) = \int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty$, alors : $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Mais, toujours par décroissance de f :

$$\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \geq f(x) \times \frac{x}{2}, \text{ donc : } x f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc finalement :

$$\psi(\lambda) = q\lambda + b\lambda^2 + \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t) d\nu(t). \quad (4.3)$$

D'autre part : $\int_0^1 tf(t)dt < +\infty$, or encore par intégration par parties :

$$\int_0^1 tf(t)dt = \left[\frac{t^2}{2} f(t) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^2}{2} d\nu(t) = \frac{f(1)}{2} + \int_0^1 \frac{t^2}{2} d\nu(t),$$

donc : $\int_0^1 t^2 d\nu(t) < +\infty$.

Enfin, comme $\int_1^{+\infty} f(t)dt < +\infty$, de manière analogue :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = [tf(t)]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} t d\nu(t) = -f(1) + \int_1^{+\infty} t d\nu(t) \geq \int_1^{+\infty} d\nu(t),$$

donc nous avons : $\int_0^{+\infty} \min(t^2, 1) d\nu(t) < +\infty$.

Et alors, l'égalité (4.3) devient, pour tout $\lambda > 0$:

$$\psi(\lambda) = q\lambda + b\lambda^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t) d\tilde{\nu}(t),$$

où $\tilde{\nu}]-\infty, -t[= \nu]t, +\infty[$. □

Remarque 10.4.10 Tous les exposants de Laplace de ce type s'écrivent sous la forme $\lambda\phi(\lambda)$, où ϕ est dans la classe de Jurek.

Définition 10.4.11 Une fonction ϕ est une fonction de Bernstein complète si $\phi \sim (q, b, \nu)$, où la mesure ν est à densité f complètement monotone.

Remarque 10.4.12 En particulier, f décroît est ϕ est de Jurek.

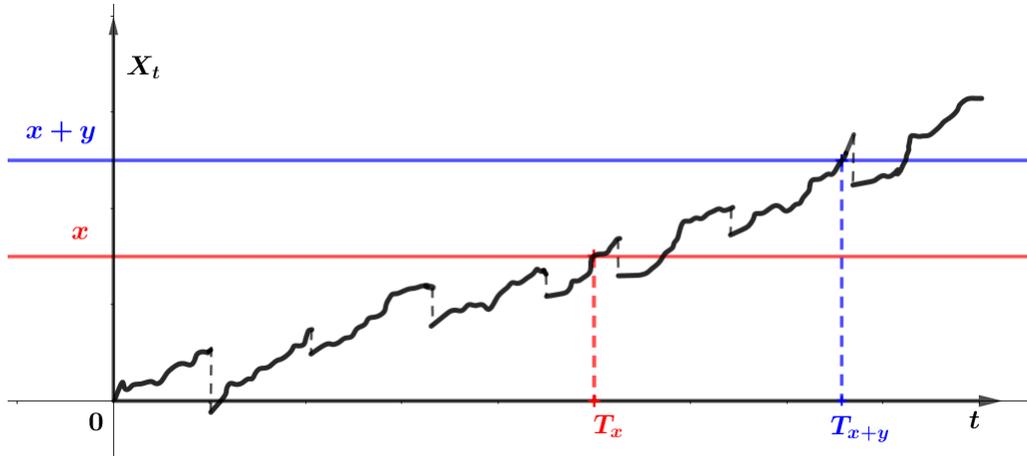
En écrivant $f(x) = \nu]x, +\infty[$, ν a pour densité $-f'$ qui est, elle aussi, complètement monotone. Donc $\lambda\phi(\lambda)$ est l'exposant de Laplace d'un processus de Levy spectralement négatif dont la mesure de sauts a une densité absolument continue sur \mathbb{R}^- (ses dérivées sont positives sur \mathbb{R}^-).

10.5 Temps de passage des processus de Levy spectralement négatifs

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Levy spectralement négatif issu de 0 et d'exposant de Laplace ψ . Et considérons le temps de passage, pour tout $x > 0$:

$$T_x = \inf \{t > 0 \mid X_t = x\} = \inf \{t > 0 \mid X_t > x\}.$$

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ saute vers le bas, comme le graphe ci-dessous en exemple :



Ainsi $x \mapsto T_x$ est une fonction croissante \mathbb{P} -presque sûrement. De plus :

$$\forall x, y > 0 : T_{x+y} - T_x \perp \sigma(\{X_t \mid t \leq T_x\}), \text{ et } T_{x+y} - T_x \stackrel{\mathcal{L}}{=} T_y.$$

Ainsi $(T_x)_{x \geq 0}$ est un subordonateur. Soit alors ϕ la fonction de Bernstein associée. Uene question se présente alors : quel est le lien entre ϕ et ψ ?

Proposition 10.5.1 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Levy spectralement négatif, d'exposant de Laplace ψ . On considère le processus positif défini pour tout $t \geq 0$:*

$$\mathcal{M}_t^{(\lambda)} = e^{\lambda X_t - t\psi(\lambda)},$$

où $\lambda \geq 0$ est fixé tel que : $\forall t \geq 0 : \mathcal{M}_t^{(\lambda)} \in L^1(\Omega)$.

Alors $(\mathcal{M}_t^{(\lambda)})_{t \geq 0}$ est une martingale positive L^1 pour la filtration de $(X_t)_{t \geq 0}$.

Et nous avons, pour tous $x, t > 0$:

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda X_{\min(T_x, t)} - \psi(\lambda) \min(T_x, t)} \right] = 1. \quad (5.1)$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.5.1 : Pour tous $t, s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\mathcal{M}_{t+s}^{(\lambda)} \mid \mathcal{F}_t^{(X)} \right] &= e^{-(t+s)\psi(\lambda)} \mathbb{E} \left[e^{\lambda X_{t+s}} \mid \mathcal{F}_t^{(X)} \right] \\
&= e^{-(t+s)\psi(\lambda)} \mathbb{E} \left[e^{\lambda(X_{t+s}-X_s)} e^{\lambda X_s} \mid \mathcal{F}_t^{(X)} \right] \\
&= e^{\lambda X_t} e^{-(t+s)\psi(\lambda)} \mathbb{E} \left[e^{\lambda(X_{t+s}-X_t)} \mid \mathcal{F}_t^{(X)} \right] \\
&= e^{\lambda X_t - (t+s)\psi(\lambda)} \mathbb{E} \left[e^{\lambda X_s} \right], \text{ car } (X_t)_{t \geq 0} \text{ est de Levy} \\
&= e^{\lambda X_t - (t+s)\psi(\lambda)} e^{s\psi(\lambda)} = e^{\lambda X_t - t\psi(\lambda)} = \mathcal{M}_t^{(\lambda)}.
\end{aligned}$$

On applique alors le théorème d'arrêt au temps d'arrêt $\min(T_x, t)$:

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{M}_{\min(T_x, t)}^{(\lambda)} \right] = 1 = \mathbb{E} \left[\mathcal{M}_0^{(\lambda)} \right], \text{ donc : } 1 = \mathbb{E} \left[e^{\lambda X_{\min(T_x, 1)} - \psi(\lambda) \min(T_x, 1)} \right].$$

□

D'après la Définition 10.4.2, nous avons :

$$\psi(\lambda) = b\lambda + \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{]-1; 0[}(x) \right) d\pi(x)$$

Il s'agit d'une somme de fonctions convexes sur $[0, +\infty[$ donc convexe, et $\psi(0) = 0$. En effet

$\lambda \mapsto \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2}$ est convexe sur $[0, +\infty[$, et la fonction $\eta : \lambda \mapsto b\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{]-1; 0[}(x) \right) d\pi(x)$

est aussi convexe sur $[0, +\infty[$ puisque :

$$\eta'(\lambda) = b + \int_{-\infty}^0 x \left(e^{\lambda x} - \mathbb{1}_{]-1; 0[}(x) \right) d\pi(x), \text{ et : } \eta''(\lambda) = \int_{-\infty}^0 x^2 e^{\lambda x} d\pi(x) > 0.$$

Remarque 10.5.2 Nous avons :

$$\mathbb{E} \left(e^{\lambda X_1} \right) = e^{\psi(\lambda)}, \text{ et } \mathbb{E} \left(X_1 e^{\lambda X_1} \right) = \psi'(\lambda) e^{\psi(\lambda)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \psi'(0),$$

donc : $\psi'(0) = \mathbb{E}(X_1) \in [-\infty, +\infty[$. Dès lors, trois cas se présentent :

- $\psi'(0) < 0$, alors d'après le loi des grands nombres : $X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}-ps} -\infty$. Le Théorème du potentiel dit alors que pour tout $x > 0$: $\mathbb{P}(T_x = +\infty) > 0$.
- $\psi'(0) > 0$, alors encore d'après le loi des grands nombres : $X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}-ps} +\infty$. Le Théorème du potentiel dit alors que pour tout $x > 0$: $\mathbb{P}(T_x = +\infty) = 0$.
- $\psi'(0) = 0$, on trouve aussi pour tout $x > 0$: $\mathbb{P}(T_x = +\infty) = 0$.

Ainsi deux cas se présentent :

10.5.1 Cas $\psi'(0) \geq 0$

Dans le cas $\psi'(0) \geq 0$, par convexité ψ croit et tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $+\infty$, et par analyticité sur $]0, +\infty[$, ψ est strictement croissante et pour tout $\lambda > 0$, $\psi(\lambda) > 0$.

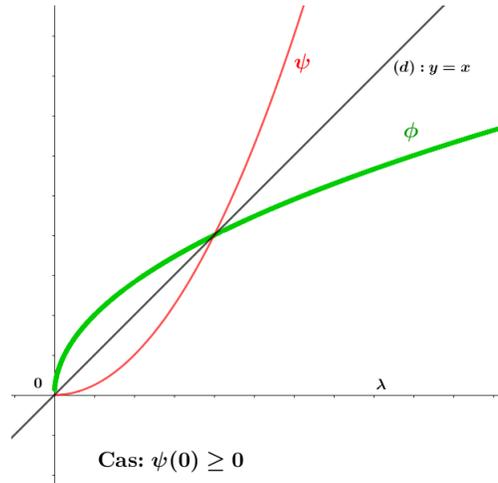
Nous avons, pour tous $\lambda, t > 0$:

$$\begin{cases} X_{\min(T_x, 1)} \leq x \\ \psi(\lambda) \min(T_x, t) \geq 0 \end{cases} .$$

La relation (5.1), pour tout $t > 0$: $\mathbb{E} \left[e^{\lambda X_{\min(T_x, t)} - \psi(\lambda) \min(T_x, t)} \right] = 1$ donne par convergence bornée, quand t tend vers $+\infty$: $1 = \mathbb{E} \left(e^{\lambda x - \psi(\lambda) T_x} \right)$, car $X_{\min(T_x, t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X_{T_x} = x$, et $\mathbb{P}(T_x < +\infty) = 1$, d'après les deux derniers cas de la Remarque (10.5.2). D'où :

$$\forall \lambda \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{-\psi(\lambda) T_x} \right) = e^{-\lambda x} .$$

La fonction ψ est strictement croissante, convexe sur $[0, +\infty[$ et nulle en 0. Alors elle admet une fonction réciproque ϕ strictement croissante concave sur $[0, +\infty[$ (et qui s'annule en 0).



On obtient alors, pour tous $x, \lambda \geq 0$:

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda T_x} \right) = e^{-x\phi(\lambda)} .$$

Donc $\phi = \psi^{-1}$ est la fonction de Bernstein associée au subordonateur $(T_x)_{x \geq 0}$.

Exemple 10.5.3 Avec $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$ où α appartient à $]1, 2]$ (le processus α -stable spectrale-ment négatif), alors $(T_x)_{x \geq 0}$ est le processus β -stable positif où β appartient à $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

En effet, dans ce cas $\phi(\lambda) = \lambda^\beta$, où $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

Et alors : $T_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} x^\alpha T_1$, avec $\mathbb{E} \left(e^{-\lambda T_1} \right) = e^{-\lambda^\beta}$.

Proposition 10.5.4 *Soit ψ un exposant de Laplace, alors :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda^{2+\varepsilon}} = 0.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.5.4 : Nous avons, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\psi(\lambda)}{\lambda^{2+\varepsilon}} = b\lambda^{-1-\varepsilon} + \lambda^{-\varepsilon} \left[\frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbf{1}_{]-1;0[}(x)}{\lambda^2 x^2} \times x^2 d\pi(x) \right].$$

Le crochet du membre de droite est bornée indépendamment de λ , car pour tout $u < 0$: $e^u \leq 1 + u + u^2$.

Donc : $0 \leq \frac{\psi(\lambda)}{\lambda^{2+\varepsilon}} \leq b\lambda^{-1-\varepsilon} + \lambda^{-\varepsilon} M \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$. □

Remarque 10.5.5

- A-t-on la réciproque ? Si ψ est de Bernstein avec $\psi(0) = 0$, alors ψ^{-1} est-il un exposant de Laplace ? La réponse est non. Un contreexemple est donné par le cas : $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$, où α appartient à $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$. On a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\psi^{-1}(\lambda)}{\lambda^{2+\varepsilon}} = \lambda^{\frac{1}{\alpha} - 2 - \varepsilon} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'après la Proposition 10.5.4, la fonction ψ^{-1} ne peut pas être un exposant de Laplace.

- Cependant, sous les hypothèses : ψ Bernstein et $\psi(0) = 0$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour laquelle ψ^{-1} est un exposant de Laplace est encore aujourd'hui un problème ouvert.
- Un autre exemple où $\psi'(0) \geq 0$ est $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha + c\lambda$ où $c \geq 0$, le processus stable avec dérive.

10.5.2 Cas $\psi'(0) < 0$

Dans le cas où $\psi(0) < 0$, nous avons vu, d'après la Remarque 10.5.2, que pour tout $x > 0$ T_x possède un atome en $+\infty$.

- Si pour tout $t \geq 0$, $X_t = -\sigma_t$ où $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ est un subordonneur, alors on a P-presque sûrement : $T_x = +\infty$, car $x > 0$, et $\psi(\lambda) = -\phi(\lambda) \leq 0$, où ϕ est la fonction de Bernstein associé à $(\sigma_t)_{t \geq 0}$.
- Si $(X_t)_{t \geq 0}$ n'est pas l'opposé d'un subordonneur, alors nous allons démontrer que $\psi(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$, et qu'il existe un seul $z_0 > 0$ tel que $\psi(z_0) = 0$.

$$\forall \lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = b\lambda + \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbf{1}_{]-1;0[}(x) \right) d\pi(x).$$

- Cas où la variation est finie : $\int_{-1}^0 |x|d\pi(x) < +\infty$. Alors :

$$\psi(\lambda) = \tilde{b}\lambda + \sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) d\tilde{\pi}(x), \text{ avec } \begin{cases} \tilde{\pi}(]t; +\infty[) = \pi(] - \infty; -t]) \\ \tilde{b} = b - \int_{-1}^0 x d\pi(x) \end{cases}.$$

Puisque $(X_t)_{t \geq 0}$ n'est pas l'opposé d'un subordonateur, alors $\tilde{b} > 0$, ou bien $\sigma > 0$.

Nous avons : $\frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \leq 1$, si $\lambda > 1$, et si $\lambda \geq 0$, alors $\frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \leq x$.

Donc au final : $\frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \leq \min(1, x)$. Et $x \mapsto \min(1, x)$ est intégrable, ainsi :

$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} d\tilde{\pi}(x)$ est majorée par $M = \int_0^{+\infty} \min(1, x) d\tilde{\pi}(x)$ qui est indépendant

de λ , et alors quand $\lambda \rightarrow +\infty$, alors $\tilde{b}\lambda$ ou $\sigma^2 \frac{\lambda^2}{2}$ l'emportent.

Donc $\psi(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$.

- Cas où la variation est infinie : $\int_{-1}^0 |x|d\pi(x) = +\infty$. Il suffit de montrer que :

$\xi(\lambda) := \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{]-1, 0[}(x)) d\pi(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$. $\xi(\lambda)$ l'emportera sur $b\lambda$ quand λ tendra vers $+\infty$, quelque soit le signe de b .

Nous avons :

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{-1} (e^{\lambda x} - 1) d\pi(x) + \int_{-1}^0 \left(\frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} - x \right) d\pi(x) \quad (5.2)$$

La première intégrale du membre de droite tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$. Et

la seconde intégrale est croissante en λ et tend vers : $\int_{-1}^0 -x d\pi(x) = +\infty$, quand

λ tend vers $+\infty$, par convergence monotone.

Ainsi, ψ devient définitivement croissante à partir d'un certain λ et donc le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un unique $z_0 > 0$ tel que $\psi(z_0) = 0$. Par convexité, ψ définit une bijection de $[z_0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, soit alors ϕ sa réciproque : $\phi : [0, +\infty[\rightarrow [z_0, +\infty[$.

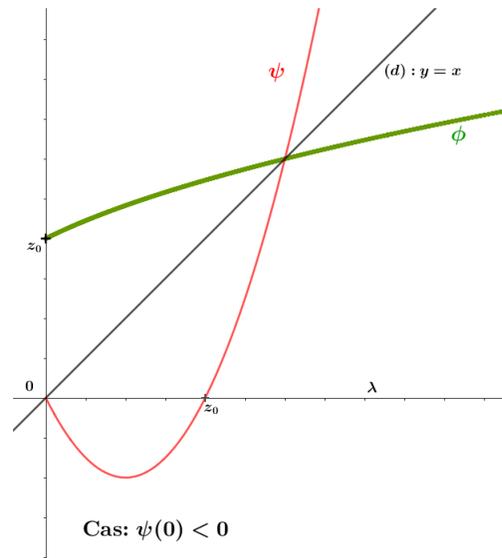
Alors cette fois-ci, pour tout $\lambda \geq z_0$, la relation (5.1) donne par convergence bornée :

$$\mathbb{E} \left(e^{-T_x \psi(\lambda)} \right) = e^{-\lambda x}.$$

Alors pour tout $\mu \geq 0$, ($\lambda = \phi(\mu)$), nous obtenons : $\mathbb{E} (e^{-\mu T_x}) = e^{-x\phi(\mu)}$. Faisant tendre μ vers 0, le membre de droite tend vers $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$ et celui de droite tend vers :

e^{-xz_0} . Donc, finalement :

$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = e^{-xz_0}$, alors z_0 est un paramètre de meurtre.



Exemple 10.5.6 Considérons le processus de Gumbel : $\psi(\lambda) = \ln[\Gamma(1 + \lambda)]$. D'après la Formule de Malmsten :

$$\psi(\lambda) = -\gamma\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \right) \frac{dx}{|x| (e^{|x|} - 1)}.$$

Alors $\psi'(0) = -\gamma < 0$. Soit T_1 son temps d'atteinte en 1. Alors :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\lambda T_1} \right) = e^{-\phi(\lambda)},$$

où $\phi(\lambda) = \psi^{-1}(\lambda)$, pour $\lambda \geq 0$. ϕ désigne la fonction réciproque de $\lambda \mapsto \ln[\Gamma(\lambda)]$ sur $[2, +\infty[$ qui est de Bernstein.

10.6 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé

Définition 10.6.1 Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ un processus de Levy spectralement négatif.

On peut donner un sens (via "le calcul d'Itô avec sauts") à l'EDS :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = -\lambda X_t dt + dZ_t \end{cases}.$$

La solution de cette EDS est appelée processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé.

Remarque 10.6.2

— La solution est donnée par un intégrale de Wiener :

$$X_t = e^{-\lambda t} \left(x + \int_0^t e^{\lambda s} dZ_s \right), \text{ où } \int_0^t e^{\lambda s} dZ_s \text{ est une limite de sommes de Riemann.} \quad (6.1)$$

— Remarquons que la filtration naturelle du processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ est la même que celle du processus $(X_t)_{t \geq 0}$, soit :

$$\forall s \geq 0 : \mathcal{F}_s := \sigma(\{Z_u, 0 \leq u \leq s\}) = \sigma(\{X_u, 0 \leq u \leq s\}).$$

Proposition 10.6.3 Soit ψ l'exposant de Laplace du processus $(Z_t)_{t \geq 0}$.

Pour tous $0 \leq s \leq t$, pour tout $z \geq 0$:

$$\mathbb{E}(e^{zX_t} | \mathcal{F}_s) = \exp \left(ze^{-\lambda(t-s)} X_s + \int_s^t \psi \left(ze^{\lambda(u-t)} \right) du \right).$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.6.3 : Nous avons :

$$\begin{aligned} X_t &= e^{-\lambda(t-s)} \left[e^{-\lambda s} \left(x + \int_0^s e^{\lambda s} dZ_u + \int_s^t e^{\lambda v} dZ_v \right) \right] \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \left(X_s + e^{-\lambda s} \int_s^t e^{\lambda v} dZ_v \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$e^{zX_t} = \exp \left[z \left(e^{-\lambda(t-s)} X_s + e^{-\lambda t} \int_s^t e^{\lambda v} dZ_v \right) \right],$$

donc :

$$\mathbb{E}(e^{zX_t} | \mathcal{F}_s) = \exp \left(ze^{-\lambda(t-s)} X_s \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(ze^{-\lambda t} \int_s^t e^{\lambda v} dZ_v \right) | \mathcal{F}_s \right].$$

Or : $s = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$ désignant toute subdivision de taille $n+1$ du segment $[s, t]$, et faisant tendre n vers $+\infty$, par définition de l'intégrale stochastique $\int_s^t e^{\lambda v} dZ_v$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\exp \left(ze^{-\lambda t} \int_s^t e^{\lambda v} dZ_v \right) | \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(ze^{-\lambda t} \sum_{i=1}^n e^{\lambda t_i} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \right) | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(ze^{-\lambda t} \sum_{i=1}^n e^{\lambda t_i} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \right) \right] \text{ car les accroissements sont indépendants} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{i=1}^n ze^{\lambda(t_i-t)} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \right) \right] \text{ par Beppo-Levy} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left[\sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \psi \left(ze^{\lambda(t_i-t)} \right) \right], \text{ par indépendance et par définition de } \psi \\ &= \exp \left[\int_s^t \psi \left(ze^{\lambda(u-t)} \right) du \right]. \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\mathbb{E} \left(e^{zX_t} \mid \mathcal{F}_s \right) = \exp \left[ze^{-\lambda(t-s)} X_s + \int_s^t \psi \left(ze^{\lambda(u-t)} \right) du \right].$$

□

Novikov a étudié en 1981 le cas du processus α -stable. La loi de Z_t à $t \geq 0$ fixé est caractérisée, avec α appartenant à $]1, 2[$, par :

$$\forall t, z \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{zZ_t} \right) = e^{tz^\alpha}.$$

Nous allons nous placer dans ce contexte pour la suite de cette section.

Corollaire 10.6.4 *Nous avons :*

$$X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{Z_1}{(\alpha\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

PREUVE DU COROLLAIRE 10.6.4 : D'après la Proposition 10.6.3, et sachant que dans le cas du processus stable $\psi = x^\alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{zX_t} \mid \mathcal{F}_s \right] &= \exp \left[ze^{-\lambda(t-s)} X_s + \int_s^t z^\alpha e^{-\alpha\lambda(t-u)} du \right] \\ &= \exp \left[ze^{-\lambda(t-s)} X_s + \int_0^{t-s} z^\alpha e^{-\alpha\lambda u} du \right] \\ &= \exp \left[ze^{-\lambda(t-s)} X_s + \frac{1}{\alpha\lambda} \left(1 - e^{-\alpha\lambda(t-s)} \right) \right]. \end{aligned}$$

On applique cette égalité à $s = 0$:

$$\mathbb{E} \left(e^{zX_t} \right) = \exp \left[ze^{-\lambda t} x + \frac{1}{\alpha\lambda} \left(1 - e^{-\alpha\lambda t} \right) \right] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \exp \left(\frac{z^\alpha}{\alpha\lambda} \right) = \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{z}{(\alpha\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} Z_1 \right) \right].$$

□

Remarque 10.6.5

- Ce processus $(X_t)_{t \geq 0}$ n'a pas de saut vers le haut, il y a alors un problème de définition de $T_a = \inf\{t > 0 \mid X_t = a\}$, si $a < x$.
- On étudie le cas $a > x$ et $\lambda > 0$, dernière hypothèse qui s'exprime par une "force de rappel" vers l'axe des abscisses dans la définition du processus.

Proposition 10.6.6 Soit $a > x$, et $\lambda > 0$.

La transformée de Laplace du temps d'arrêt T_a vaut :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta T_a} \right) = \frac{\mathcal{L}(-x)}{\mathcal{L}(-a)},$$

où \mathcal{L} est la transformée de Laplace de la variable aléatoire $(\alpha\lambda\gamma_u)^{\frac{1}{\alpha}}$, où $u = \frac{\theta}{\alpha\lambda}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.6.6 : Considérons, pour tout $y > 0$:

$$g(y) = -\frac{1}{\lambda} \int_1^y \frac{\psi(u)}{u} du = -\frac{1}{\alpha\lambda} \int_1^y \alpha u^{\alpha-1} du = \frac{1}{\alpha\lambda} (1 - y^\alpha).$$

Et on considère, pour tout $\theta > 0$:

$$\mathcal{I}_t(\theta) = e^{-\theta t} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp(yX_t + g(y)) dy.$$

Cette intégrale converge bien car $\frac{\theta}{\lambda} > 0$, et : $g(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{y^\alpha}{\alpha\lambda}$, sachant que $1 < \alpha < 2$.

Par le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{I}_t(\theta)) &= e^{-\theta t} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \mathbb{E}[\exp(yX_t + g(y))] dy \\ &= e^{-\theta t} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp\left[\frac{1}{\alpha\lambda}(1 - y^\alpha)\right] \mathbb{E}(e^{yX_t}) dy \\ &= e^{-\theta t} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp\left[xye^{-\lambda t} + \frac{1}{\alpha\lambda}(1 - y^\alpha e^{-\alpha\lambda t})\right] dy \\ &= \int_0^{+\infty} u^{\frac{\theta}{\lambda}} \exp\left[xu + \frac{1}{\alpha\lambda}(1 - u^\alpha)\right] du, \text{ avec } u = ye^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est finie et ne dépend pas de t . Voilà notre fonction spéciale !

On vérifie sans difficulté que $(\mathcal{I}_t(\theta))_{t \geq 0}$ est une martingale.

Appliquons dès lors le théorème d'arrêt pour cette martingale et le temps d'arrêt borné $\min(T_a, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\theta \min(T_a, t)} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp\left(yX_{\min(T_a, x)} - \frac{y^\alpha}{\alpha\lambda}\right) dy \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp\left(yX_0 - \frac{y^\alpha}{\alpha\lambda}\right) dy \right] \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp\left(xy - \frac{y^\alpha}{\alpha\lambda}\right) dy. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Notons alors : $f_\theta(z) = \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp\left(zy - \frac{y^\alpha}{\alpha\lambda}\right) dy$.

En faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'égalité (6.2), on obtient l'égalité :

$$\mathbb{E} \left[e^{-\theta T_a} \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda}-1} \exp\left(ay - \frac{y^\alpha}{\alpha\lambda}\right) dy \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\theta T_a} f_\theta(a) \right] = f_\theta(x),$$

ou encore : $\mathbb{E} \left(e^{-\theta T_a} \right) = \frac{f_\theta(x)}{f_\theta(a)}$.

On considère la variable aléatoire réelle $\gamma_u^{\frac{1}{\alpha}}$, qui a pour densité : $\frac{\alpha}{\Gamma(u)} y^{\alpha u - 1} e^{-y^\alpha} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(y)$.

Alors nous avons :

$$\mathbb{E} \left(e^{-x \gamma_u^{\frac{1}{\alpha}}} \right) = \frac{\alpha}{\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha u - 1} e^{xy - y^\alpha} dy.$$

Or, on peut écrire f_θ sous la forme : $f_\theta(z) = \kappa \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{\lambda} - 1} e^{-y^\alpha} e^{(\alpha\lambda)^{\frac{1}{\alpha}} zy} dy$.

Donc finalement, avec $u = \frac{\theta}{\alpha\lambda}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_a} \right) &= \frac{f_\theta(x)}{f_\theta(a)} = \frac{\mathbb{E} \left[\exp \left(x (\alpha\lambda)^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_u^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]}{\mathbb{E} \left[\exp \left(a (\alpha\lambda)^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_u^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]} \\ &= \frac{\mathbb{E} \left[\exp \left(x (\alpha\lambda\gamma_u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]}{\mathbb{E} \left[\exp \left(a (\alpha\lambda\gamma_u)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]} \end{aligned}$$

□

Remarque 10.6.7

- La variable aléatoire réelle $\left[\alpha\lambda\gamma_{\frac{\theta}{\alpha\lambda}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$ est une variable de Weibull de paramètre $\alpha > 1$.
- On peut démontrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} y^{\mu-1} e^{-y^\alpha} e^{-xy} dy$ définie sur $]0, +\infty[$ est du type $ce^{-\Psi(x)}$, où Ψ est une fonction de Bernstein si et seulement si $0 < \alpha \leq 1$. Cela a un rapport avec la question de savoir quelles puissances de la loi Gamma sont infiniment divisibles.

Bibliographie

- [1] Paul APPELL et Joseph Kampé DE FÉRIET : *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques : polynômes de Hermite*. Gauthier-villard, 1926
- [2] Fabrice BAUDOUIN et Neil O'CONNEL : *EXponential functionals of brownian motion ans class-one Whittaker functions*. 47(4) :1096-1120, 2011.
- [3] Alain COMTET et Yves TOURIGNY : Explicit formulae in probability ans in statistical physics. In *mémoriam Marc Yor - Séminaire de Probabilités XLVII*, pages 505-519. Springer, 2015.
- [4] Arthur ERDÉLYI, Wilhem MAGNUS et Fritz OBERHETTINGER : Higher transcendental functions, 1953
- [5] William FELLER : Diffusion processes in one dimension. *Transactions of the American Mathematical Society*, 77(1) :1-3, 1954.
- [6] Lancelot F JAMES, Bernard ROYNETTE et Marc YOR : Generalized gamma convolutions, Dirichlet means, Thorin measure, with explicit examples, *Probability Surveys*, 5 :346-415, 2008.
- [7] Alexey KUZNETSOV : On extrema of stable processes, *The annals of Probability*, 39(3) :1027-1060, 2011.
- [8] Gérard LETAC et Mauro PICCIONI : Dirichlet curves, convex order and Cauchy distribution, *Bernoulli*, 24(1) :1-29, 2018.
- [9] Walter RUDIN : Real and complex analysis. 1966.
- [10] B.V. GNEDENKO, A.N. KOLMOGOROV (1968), *Limit Distributions for Sum of Independent Random Variables* Addison-Wesley publishing company. Reading Massachussets, Menlo Park, California,, London, Don Mills, Ontario
- [11] Jean BERTOUIN : Subordinators : examples and applications Ecole d'et'e de Probabilit'es de St-Flour, Laboratoire de Probabilités, Université Peirre et MARie Curie, 1997
- [12] Tetyana KADANKOVA, Thomas SIMON, and Min WANG : On some new moments of Gamma type, Vakgroep Wiskunde, Vrije Universiteit Brussel, Gebauw G, Pleinlaan 2, 1050 Elsene, Belgium. Laboratoire Paul Painlev'e, Universit'e de Lille, Cit'e Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France. Jingzhai 301, Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Haidian District, Beijing 100084, China.

- [13] Jean François LE GALL , Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique, Département de mathématiques, Université Paris-Sud, Campus d'Orsay, France, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
- [14] Frank SPITZER : A Combinatorial Lemma And Its Application To Probability Theory, California Institute of Technology, Pasadena, Calif, 1956.
- [15] A.N SHIRYAEV, Probability, Springer GTM95
- [16] G. SAMORODNITSKY and M.S. TAQQU (1994), *Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance*. Chapman & Hall, New York.

Les références ci-dessus sont composées de celles indiquées par M. SIMON dans le programme des cours 2021-2023, plus des références où l'on peut trouver des démonstrations, enfin des articles approfondissant les éléments du cours.

