Approximation extérieure de la prédiction crédibiliste basée sur la vraisemblance d'une variable ordinale

Sébastien Ramel, Frédéric Pichon, François Delmotte

▶ **To cite this version:**

Sébastien Ramel, Frédéric Pichon, François Delmotte. Approximation extérieure de la prédiction crédibiliste basée sur la vraisemblance d'une variable ordinale. 32e rencontres francophones sur la logique floue et ses applications, LFA'2023, Nov 2023, Bourges, France. pp.189-197. hal-04439224

HAL Id: hal-04439224
https://hal.science/hal-04439224

Submitted on 5 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approximation extérieure de la prédiction crédibiliste basée sur la vraisemblance d'une variable ordinale

Outer approximation of the likelihood-based evidential prediction of an ordinal variable

Sébastien Ramel[1] Frédéric Pichon[1] François Delmotte[1]
[1] Laboratoire de Genie Informatique et d'Automatique de l'Artois

Univ. Artois, UR 3926, Laboratoire de Genie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A), F-62400 Bethune, France,
prenom.nom@univ-artois.fr

Résumé :

Ayant observé une réalisation $\mathbf{y}$ d'un vecteur aléatoire $\mathbf{Y}$ suivant une loi multinomiale de paramètres n connu et $p_1, \ldots, p_K$ inconnus, nous souhaitons représenter notre incertitude concernant une prochaine réalisation d'une variable ordinale Z de paramètres $p_1, \ldots, p_K$. Ce problème de prédiction est abordé dans cet article avec une approche crédibiliste basée sur la vraisemblance, qui a eu un certain succès ces dernières années. Nous dérivons une expression analytique d'une approximation extérieure de la fonction de croyance prédictive issue de cette approche.

Mots-clés :

Prédiction, Fonction de croyance, Variable ordinale.

Abstract:

Having observed a sample $\mathbf{y}$ of a random vector $\mathbf{Y}$ following a multinomial distribution with parameters n known and $p_1, \ldots, p_K$ unknown, we wish to represent our uncertainty concerning a future realization of an ordinal variable Z with parameters $p_1, \ldots, p_K$. This prediction problem is addressed in this paper using an evidential approach based on the likelihood, which has had some success in recent years. We derive an analytical expression of an outer approximation of the predictive belief function resulting from this approach.

Keywords:

Prediction, Belief function, Ordinal variable.

1 Introduction

Dans [3, 4] une approche est introduite pour la prédiction statistique dans le cadre de la théorie de Dempster-Shafer [1, 7]. Contrairement à d'autres approches proposées dans ce même cadre, elle offre un certain nombre d'avantages, comme la compatibilité avec le raisonnement bayésien ou encore la possibilité de l'appliquer facilement sur des modèles statistiques complexes [3]. Ce dernier avantage est notamment dû au fait que lorsque le calcul de la fonction de croyance prédictive (FCP) qu'elle génère est trop difficile, des techniques d'approximation (simulation de Monte-Carlo ou approximation extérieure) peuvent être utilisées.

Le fonctionnement général de cette approche, qui suppose un modèle paramétrique, est le suivant. Premièrement, une fonction de croyance consonante, que nous appellerons fonction de croyance d'inférence (FCI), est construite sur l'espace du paramètre à partir des données observées ; sa fonction de contour n'est rien d'autre que la fonction de vraisemblance relative. Ensuite, la variable aléatoire à prédire est exprimée comme une fonction du paramètre et d'une variable aléatoire pivotale. Enfin, la FCI est combinée avec la distribution pivotale afin d'obtenir la FCP représentant l'incertitude quant à la future réalisation de la variable.

Cette approche a été utilisée dans le cadre de la prédiction de variables quantitatives (voir [3, 4]) et qualitatives. Au niveau qualitatif, le cas binaire a été traité pour des FCI obtenues dans différents contextes : observation d'une variable binomiale [4], étalonage de classifieurs binaires [8, 5], et classification binaire par la régression choquistique [6]. Sous certaines conditions sur la FCI dans ce cas, une expression simple est obtenue pour la FCP, cette expression pouvant s'évaluer numériquement voire analytiquement (cas de

l'observation d'une variable binomiale). Le cas non-binaire, et plus précisément, le cas nominal a été considéré dans [9] pour une FCI obtenue dans un contexte d'étalonnage de classifieurs multiclasse. Toutefois, aucune expression simple n'a été fournie pour la FCP dans ce cas ; son calcul a été réalisé à la fois seulement partiellement, c.-à-d., uniquement pour les singletons, et approximativement, par simulation de Monte-Carlo. En outre, la définition de la FCP utilisée dans ce travail est discutable : elle repose sur une structure dite du premier type, adaptée aux variables ordinales, alors que les variables nominales nécessitent une structure du second type [1].

Le cas des variables qualitatives est important, notamment pour ses applications potentielles en classification supervisée. Dans cet article, nous nous intéressons au cas des variables qualitatives ordinales. Sous certaines conditions sur la FCI, nous mettons à jour une expression simple de l'approximation extérieure, selon la technique décrite dans [3], de la FCP. De plus, cette expression admet une forme analytique lorsque la FCI est issue de l'observation d'une réalisation d'un vecteur aléatoire multinomial.

Cet article est organisé de la manière suivante. L'approche de prédiction introduite dans [3, 4] est rappelée et illustrée sur une variable binaire à la Section 2. Le cas d'une variable ordinale est traitée à la Section 3.

2 Prédiction : rappels

Cette section synthétise les éléments nécessaires de [3, 4] ; plus de détails peuvent être trouvés dans ces références.

2.1 Cadre général

Rappelons tout d'abord qu'une fonction de croyance Bel^{Θ} consonante, définie sur un cadre de discernement Θ continu, est caractérisée par sa fonction de contour pl^{Θ} et que ses ensembles focaux sont les ensembles $\Gamma(w) = \{\theta \in \Theta | pl^{\Theta}(\theta) \geq w\}$ pour tout $w \in [0,1]$. De plus, soit W une variable aléatoire ayant pour distribution λ, avec λ la mesure de probabilité uniforme sur $[0,1]$, alors Bel^{Θ} est induite par l'ensemble aléatoire $\Gamma(W)$, c.-à-d., nous avons $Bel^{\Theta}(A) = \lambda(\{w \in [0,1] |\ \Gamma(w) \subseteq A\})$ pour tout $A \subseteq \Theta$.

Soit $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ les données observées, supposées être une réalisation d'un vecteur aléatoire $\mathbf{Y}$ de fonction de probabilité f_θ. Dans [3], il est préconisé de représenter la connaissance sur Θ étant donné l'observation $\mathbf{y}$, par une FCI consonante $Bel^{\Theta}_{\mathbf{y}}$ de fonction de contour $pl^{\Theta}_{\mathbf{y}}(\theta) = L_{\mathbf{y}}(\theta)/L_{\mathbf{y}}(\hat{\theta})$, pour tout $\theta \in \Theta$ avec $L_{\mathbf{y}}(\theta) = cf_\theta(\mathbf{y})$ pour $c > 0$ une constante arbitraire et où $\hat{\theta}$ est un estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) pour θ. $Bel^{\Theta}_{\mathbf{y}}$ est appelée ci-après FCI basée sur la vraisemblance (FCIV).

Soit une variable Z, indépendante de Y, de fonction de probabilité g_θ. Supposons que Z puisse être exprimée comme une fonction, appelée φ-équation, de θ et d'une variable pivotale V dont la distribution μ ne dépend pas de θ :

$$Z = \varphi(\theta, V). \tag{1}$$

Plus précisément, nous supposons dans la suite de cet article que Z admet une φ-équation avec $V \sim \mathcal{U}([0,1])$. Si nos connaissances sur Θ après avoir observé $\mathbf{y}$ sont représentées par une FCI $Bel^{\Theta}_{\mathbf{y}}$ consonante induite par l'ensemble aléatoire $\Gamma_{\mathbf{y}}(W)$, comme cela est le cas avec la FCIV, alors notre connaissance quant à une future réalisation $z \in \mathcal{Z}$ de Z est représentée par la FCP $Bel^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}$ induite par l'ensemble aléatoire $\varphi(\Gamma_{\mathbf{y}}(W), V)$, c.-à-d., pour tout $A \subseteq \mathcal{Z}$,

$$Bel^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}(A) = \lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 |\ \varphi(\Gamma_{\mathbf{y}}(w), v) \subseteq A\}), \tag{2}$$

avec $\lambda \otimes \mu$ la mesure de probabilité uniforme sur $[0,1]^2$.

Pour quelques cas simples, dont un que nous verrons dans la prochaine section, $Bel^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}$ peut être calculée analytiquement. Sinon, on peut l'estimer par simulation de Monte-Carlo ou considérer une FCP $\underline{Bel}^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}$ l'approchant extérieurement, c'est-à-dire définie par Eq. (2)

où $\varphi(\Gamma_{\mathbf{y}}(w), v)$ est remplacé par un $\Delta(w, v)$ tel que $\varphi(\Gamma_{\mathbf{y}}(w), v) \subseteq \Delta(w, v)$, qui est plus aisé à calculer. Une telle FCP $\underline{Bel}^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}$ présente l'avantage d'être une approximation prudente de la vraie FCP, au sens que $\underline{Bel}^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}(A) \leq Bel^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}(A)$ est garanti pour tout $A \subseteq \mathcal{Z}$. De plus, il pourra éventuellement être possible d'obtenir une expression plus simple pour cette fonction, qui pourra être évaluée numériquement voire même analytiquement dans certains cas, comme nous le verrons à la Section 3.

2.2 Variable binaire

Soit $Z \in \mathcal{Z} = \{1, 2\}$ une variable aléatoire binaire de paramètre $P_1 \in \mathcal{P}_1 = [0, 1]$, avec $P_1 := \mathbb{P}_Z(Z = 1)$. Z peut être exprimée comme

$$Z = \varphi(P_1, V) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \leq P_1, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

Supposons une FCI consonante $Bel^{\mathcal{P}_1}_{\mathbf{y}}$ obtenue après avoir observé une réalisation $\mathbf{y}$ de $\mathbf{Y}$ de fonction de probabilité f_{P_1}. Sous les conditions que sa fonction de contour $pl^{\mathcal{P}_1}_{\mathbf{y}}$ soit unimodale (de mode $\hat{P}_1$ tel que $pl^{\mathcal{P}_1}_{\mathbf{y}}(\hat{P}_1) = 1$) et continue, ses ensembles focaux $\Gamma_{\mathbf{y}}(w)$ forment des intervalles fermés $\Gamma_{\mathbf{y}}(w) = [L_1(w), U_1(w)]$ pour tout $w \in [0, 1]$, avec $L_1(w)$ et $U_1(w)$ les deux racines de l'équation $pl^{\mathcal{P}_1}_{\mathbf{y}}(P_1) = w$. Dans ce cas, $Bel^{\mathcal{P}_1}_{\mathbf{y}}$ est induite par l'intervalle aléatoire $[L(W), U(W)]$. De plus, la FCP définie par (2) s'exprime par

$$Bel^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}(\{1\}) = \hat{P}_1 - \int_0^{\hat{P}_1} pl^{\mathcal{P}_1}_{z_1}(P_1) dP_1, \quad (4)$$

$$Bel^{\mathcal{Z}}_{\mathbf{y}}(\{2\}) = 1 - \hat{P}_1 - \int_{\hat{P}_1}^1 pl^{\mathcal{P}_1}_{z_1}(P_1) dP_1. \quad (5)$$

Remarquons que lorsque Y_1 est une variable binomiale de paramètres n connu et P_1 inconnu et que l'on a observé y_1 fois la modalité 1 sur les n expériences (et $n - y_1$ fois la modalité 2), alors la FCIV $Bel^{\mathcal{P}_1}_{y_1}$ a pour fonction de contour

$$pl^{\mathcal{P}_1}_{y_1}(P_1) = \frac{P_1^{y_1}(1 - P_1)^{n-y_1}}{\hat{P}_1^{y_1}(1 - \hat{P}_1)^{n-y_1}}, \quad \forall P_1 \in [0, 1], \quad (6)$$

avec $\hat{P}_1 = y_1/n$ l'EMV de P_1, qui est unimodale et continue. Il a été montré [8] que les Eqs. (4) et (5) peuvent alors se calculer analytiquement. On a par exemple, si $0 < \hat{P}_1 < 1$,

$$Bel^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{1\}) = \hat{P}_1 - \frac{\underline{B}(\hat{P}_1; y_1 + 1, n - y_1 + 1)}{\hat{P}_1^{y_1}(1 - \hat{P}_1)^{n-y_1}} \quad (7)$$

où $\underline{B}(z; a, b)$ est la fonction bêta incomplète inférieure.

Exemple 1. *Soit $y_1 = 5$ et $n = 15$. L'EMV est $\hat{P}_1 = 1/3$. La figure 1 montre $pl^{\mathcal{P}_1}_{y_1}$. On obtient $m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{1\}) \approx .20, m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{2\}) \approx .51, m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\mathcal{Z}) \approx .29$, avec $m^{\mathcal{Z}}_{y_1}$ la fonction de masse associée à $Bel^{\mathcal{Z}}_{y_1}$ ($m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{i\}) = Bel^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{i\})$, i=1,2, et $m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\mathcal{Z}) = 1 - \sum_{i=1}^2 m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{i\})$).*

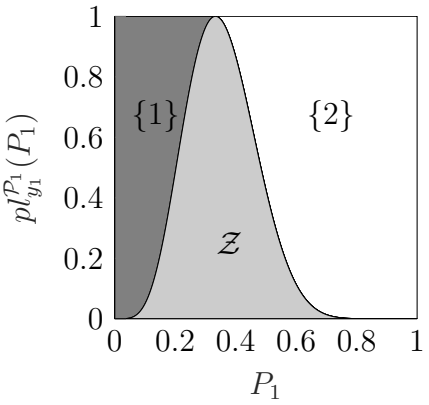

FIGURE 1 – Fonction de vraisemblance relative $pl^{\mathcal{P}_1}_{y_1}$. Aires correspondant aux masses : ■ $m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{1\})$, □ $m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\{2\})$, ■ $m^{\mathcal{Z}}_{y_1}(\mathcal{Z})$.

3 Prédiction d'une variable ordinale

3.1 Modèle

Soit $Z \in \mathcal{Z} = \{1, \ldots, K\}$ une variable aléatoire ordinale à K modalités ordonnées, par convention, selon l'ordre naturel sur les entiers. La mesure de probabilité de Z est caractérisée par les paramètres $P_j := \sum_{i=1}^j \mathbb{P}(Z = i)$, $1 \leq j < K$. Soit le vecteur $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_{K-1})$. Nous avons $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ avec

$$\mathcal{P} = \{(P_1, \ldots, P_{K-1}) \in [0, 1]^{K-1} \mid P_1 \leq \cdots \leq P_{K-1}\}. \quad (8)$$

Selon [1], Z peut être exprimée comme

$$Z = \varphi(\mathbf{P}, V) = j \quad \text{si} \quad P_{j-1} < V \leq P_j, \quad (9)$$

avec $P_0 := 0$ et $P_K := 1$.

Soit une FCI consonante $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$, de fonction de contour $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$ et ensembles focaux $\Gamma_{\mathbf{y}}(w)$, obtenue après avoir observé une réalisation $\mathbf{y}$ de $\mathbf{Y}$ de fonction de probabilité $f_{\mathbf{P}}$. En général, il n'est pas possible de calculer exactement la FCP $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ définie par (2) et il faut donc l'approcher. Dans la suite de cet article, nous nous intéressons à la technique d'approximation extérieure décrite dans [3]. Nous verrons que si les marginales de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$ sur les composants de $\mathbf{P}$ respectent certaines conditions, alors il est possible d'obtenir une FCP $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ approchant extérieurement $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ qui admet une expression simple généralisant celles (cf Eqs. (4) et (5)) du cas binaire.

3.2 Approximation extérieure

Soit $\mathcal{P}_j = [0, 1]$, $1 \leq j < K$, et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$ la fonction de contour marginale de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$ pour le composant j de $\mathbf{P}$, définie par [3, Eq. (76)]

$$pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P_j) = \sup_{\mathbf{P}_{-j}} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}(\mathbf{P}), \quad (10)$$

où $\mathbf{P}_{-j}$ est le sous vecteur de $\mathbf{P}$ avec le composant j enlevé.

Supposons que les fonctions de contour marginales soient unimodales (avec mode $\hat{P}_j$ tel que $0 < \hat{P}_j < 1$ pour $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$) et continues. Nous désignons par $[L_j(w), U_j(w)]$ l'intervalle formé par les deux solutions de l'équation $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P_j) = w$. Dans ce cas, l'intersection de l'espace $\mathcal{P}$ (8) des paramètres avec le produit Cartésien des intervalles $[L_j(w), U_j(w)]$ contient $\Gamma_{\mathbf{y}}(w)$, c.-à-d.,

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w) &:= \left\{ \mathbf{P} \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{P} \in \prod_{j=1}^{K-1} [L_j(w), U_j(w)] \right\} \\ &\supseteq \Gamma_{\mathbf{y}}(w). \end{aligned} \quad (11)$$

Soient $\tilde{\ell}(w, v)$ et $\tilde{u}(w, v)$ les minimum et maximum, respectivement, de $\varphi(\mathbf{P}, v)$ sous la contrainte $\mathbf{P} \in \underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w)$. De (11), nous avons

$$\tilde{\ell}(w, v) \leq \ell(w, v) \leq u(w, v) \leq \tilde{u}(w, v) \quad (12)$$

où $\ell(w, v)$ et $u(w, v)$ sont les minimum et maximum, respectivement, de $\varphi(\mathbf{P}, v)$ sous la contrainte $\mathbf{P} \in \Gamma_{\mathbf{y}}(w)$.

L'intervalle approché $[\![\tilde{\ell}(w, v), \tilde{u}(w, v)]\!]$ contient donc le vrai ensemble focal $\varphi(\Gamma_{\mathbf{y}}(w), v)$, résultant en une approximation extérieure $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ de la vraie FCP $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$, définie par

$$\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(A) = \lambda \otimes \mu(\{(w, v) \in [0, 1]^2 | \, [\![\tilde{\ell}(w, v), \tilde{u}(w, v)]\!] \subseteq A\}) \quad (13)$$

Remarque 1. *$\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ est caractérisée par $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![i, j]\!])$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq K$ puisque ses ensembles focaux, définis par $\underline{\Gamma}'(w, v) := [\![\tilde{\ell}(w, v), \tilde{u}(w, v)]\!]$, sont des intervalles [2].*

Sous certaines conditions supplémentaires sur les marginales de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$, la Proposition 1 offre une caractérisation de deux $\mathbf{P} \in \underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w)$ pour lesquels le minimum $\tilde{\ell}(w, v)$ et le maximum $\tilde{u}(w, v)$ de $\varphi(\mathbf{P}, v)$ sous la contrainte $\mathbf{P} \in \underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w)$, sont obtenus.

Proposition 1. *Si, pour tout $1 \leq i < j < K$, $\hat{P}_i < \hat{P}_j$ et il existe un unique point d'intersection $P_{i,j} \in (0, 1)$ entre $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}$ et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$, c.-à-d., $P_{i,j}$ est tel que pour tout $P \in (0, 1), pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) = pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$ si et seulement si $P = P_{i,j}$, alors*

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}(w, v) &= \varphi(\mathbf{U}(w), v), \\ \tilde{u}(w, v) &= \varphi(\mathbf{L}(w), v), \end{aligned}$$

avec $\mathbf{U}(w) = (U_1(w), \ldots, U_{K-1}(w))$ et $\mathbf{L}(w) = (L_1(w), \ldots, L_{K-1}(w))$.

Preuve. Montrons tout d'abord que $\mathbf{L}(w) \in \mathcal{P}$ ou, de manière équivalente, que $L_{j-1}(w) \leq L_j(w)$, pour tout $1 < j < K$.

Pour cela, remarquons premièrement que nécessairement $\hat{P}_i < P_{i,j} < \hat{P}_j$ pour tout $1 \leq i < j < K$, puisque les marginales étant

unimodales, sur $[\hat{P}_i, \hat{P}_j]$, $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}$ est décroissante de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(\hat{P}_i) = 1$ à $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(\hat{P}_j) < 1$, et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$ est croissante de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(\hat{P}_i) < 1$ à $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(\hat{P}_j) = 1$, et donc dans $[\hat{P}_i, \hat{P}_j]$, il existe P tel que $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) = pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$.

Ensuite, remarquons que, pour tout $1 \leq i < j < K$,

$$pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) > pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P), \quad \forall P \in (0, P_{i,j}). \quad (14)$$

En effet, comme il n'existe pas de $P \in (0, \hat{P}_i]$ tel que $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) = pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$, cela implique que, pour tout $P \in (0, \hat{P}_i]$, soit $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) > pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$ soit $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) < pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$. Or, $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) = 1 > pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$ pour $P = \hat{P}_i$, donc pour tout $P \in (0, \hat{P}_i]$, nous avons $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) > pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$. De plus, sur $P \in [\hat{P}_i, P_{i,j}]$, $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}$ est décroissante de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(\hat{P}_i) = 1$ à $w_{i,j} := pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P_{i,j})$, et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$ est croissante de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(\hat{P}_i)$ à $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P_{i,j}) = w_{i,j}$, avec nécessairement $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(\hat{P}_i) \leq w_{i,j}$, et donc pour tout $P \in [\hat{P}_i, P_{i,j})$, nous avons $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) > pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$.

On peut alors montrer $\mathbf{L}(w) \in \mathcal{P}$ de la manière suivante. Pour tout $w \in [0,1]$, et tout $1 < j < K$, on a $L_{j-1}(w) \leq \hat{P}_{j-1}$. Comme, pour tout $P \in (0, \hat{P}_{j-1}]$, on a, par (14), $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{j-1}}(P) > pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$, on déduit que

$$pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(L_{j-1}(w)) < pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{j-1}}(L_{j-1}(w)) = w. \quad (15)$$

De plus, pour tout $w \in [0,1]$, on a $L_j(w) \leq \hat{P}_j$ et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(L_j(w)) = w$. De cela, et (15), on obtient $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(L_{j-1}(w)) < pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(L_j(w))$. $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$ est croissante sur $[0, \hat{P}_j]$ et $L_j(w) \leq \hat{P}_j$, donc $L_{j-1}(w) \leq L_j(w)$.

De manière similaire, on montre $\mathbf{U}(w) \in \mathcal{P}$.

On prouve ensuite que $\tilde{u}(w,v) = \varphi(\mathbf{L}(w), v)$ en montrant que $\varphi(\mathbf{L}(w), v) \geq \varphi(\mathbf{P}, v)$ pour tout $\mathbf{P} \in \underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w)$ de la manière suivante.

Pour tout $w \in [0,1]$, on a, pour tout $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_{K-1}) \in \underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w)$,

$$L_j(w) \leq P_j, \quad \forall 1 \leq j < K. \quad (16)$$

Par ailleurs, pour tout $v \in [0,1]$ et tout $\mathbf{P} \in \underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w)$, si

$$P_{i-1} < v \leq P_i \quad (17)$$

pour un certain $1 \leq i \leq K$, alors $\varphi(\mathbf{P}, v) = i$. De plus, de (16) et (17), il vient $L_{i-1}(w) \leq P_{i-1} < v$ et donc $\varphi(\mathbf{L}(w), v) \geq i = \varphi(\mathbf{P}, v)$.

On montre de manière similaire $\tilde{\ell}(w,v) = \varphi(\mathbf{U}(w), v)$. □

Si les conditions de la Proposition 1 sont respectées, alors $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$, définie par (13), étant donné la Remarque 1, est caractérisée par, pour tout $1 \leq i \leq j \leq K$,

$$\begin{aligned} \underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![i,j]\!]) &= \lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 \\ &\quad | \, [\![\varphi(\mathbf{U}(w), v), \varphi(\mathbf{L}(w), v)]\!] \subseteq [\![i,j]\!]\}) \\ &= \lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 | \, i \leq \varphi(\mathbf{U}(w), v), \varphi(\mathbf{L}(w), v) \leq j\}) \end{aligned} \quad (18)$$

Proposition 2. *Si, pour tout $1 \leq i < K$, $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P_i) = 0$ si et seulement si $P_i = 0$ ou $P_i = 1$, alors $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![i,j]\!])$ définie par (18) est égale à :*

$$\begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, j = K, \\ \hat{P}_j - \int_0^{\hat{P}_j} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P) dP & \text{si } i = 1, j < K, \\ 1 - \hat{P}_{i-1} - \int_{\hat{P}_{i-1}}^1 pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(P) dP & \text{si } 1 < i, j = K, \end{cases} \quad (19)$$

et, sinon (c.-à-d., $1 < i, j < K$), à

$$\hat{P}_j - \hat{P}_{i-1} - \int_{\hat{P}_{i-1}}^{P_{i-1,j}} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(P) dP - \int_{P_{i-1,j}}^{\hat{P}_j} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P) dP, \quad (20)$$

où $P_{i-1,j}$ est l'unique point d'intersection entre entre $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}$ et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$.

Preuve. $1 \leq \varphi(\mathbf{U}(w), v)$ et $\varphi(\mathbf{L}(w), v) \leq K$ sont vrais pour tout $(w,v) \in [0,1]^2$ et donc $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![1,K]\!]) = \lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2\}) = 1$.

Pour $i = 1$ et $j < K$, Eq. (18) se réduit à $\lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 | \, \varphi(\mathbf{L}(w), v) \leq j)$, qui revient à $\lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 | \, L_j(w) \geq v))$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{L_j(w)} 1 dv dw = \int_0^1 L_j(w) dw \\ &= \int_{pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(0)}^{pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(\hat{P}_j)} L_j(w) dw = \int_0^{\hat{P}_j} L_j(pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(t)) pl_{\mathbf{y}}^{'\mathcal{P}_j}(t) dt \end{aligned}$$

qui se réduit à (étant donné que pour tout $w \in [0,1]$, $L_j(w) = g_{L_j}(w)$ avec g_{L_j} la bijection réciproque de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(t)$ sur $[0, \hat{P}_j]$)

$$= \int_0^{\hat{P}_j} t\, pl_{\mathbf{y}}^{'\mathcal{P}_j}(t)dt = [t\, pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(t)]_0^{\hat{P}_j} - \int_0^{\hat{P}_j} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(t)dt$$
$$= \hat{P}_j - \int_0^{\hat{P}_j} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(t)dt$$

Pour $1 < i$ et $j = K$, Eq. (18) se réduit à $\lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 |\ i \leq \varphi(\mathbf{U}(w), v))$, qui revient à $\lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 |\ U_{i-1}(w) < v))$

$$= \int_0^1 \int_{U_{i-1}(w)}^1 1 dv dw = \int_0^1 1 - U_{i-1}(w)dw$$
$$= 1 - \int_0^1 U_{i-1}(w)dw = 1 - \int_{pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(1)}^{pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(\hat{P}_{i-1})} U_{i-1}(w)dw$$
$$= 1 - \int_1^{\hat{P}_{i-1}} U_{i-1}(pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(t))pl_{\mathbf{y}}^{'\mathcal{P}_{i-1}}(t)dt$$
$$= 1 + \int_{\hat{P}_{i-1}}^1 U_{i-1}(pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(t))pl_{\mathbf{y}}^{'\mathcal{P}_{i-1}}(t)dt$$

qui se réduit à (étant donné que pour tout $w \in [0,1]$, $U_{i-1}(w) = g_{U_{i-1}}(w)$ avec $g_{U_{i-1}}$ la bijection réciproque de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{y-1}}(t)$ sur $[\hat{P}_{i-1}, 1]$)

$$= 1 + \int_{\hat{P}_{i-1}}^1 t\, pl_{\mathbf{y}}^{'\mathcal{P}_{i-1}}(t)dt$$
$$= 1 + [t\, pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(t)]_{\hat{P}_{i-1}}^1 - \int_{\hat{P}_{i-1}}^1 pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(t)dt$$
$$= 1 - \hat{P}_{i-1} - \int_{\hat{P}_{i-1}}^1 pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(t)dt$$

Pour $1 < i$ et $j < K$, Eq. (18) revient à

$$\lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 |\ U_{i-1}(w) < v, L_j(w) \geq v))$$
$$= \lambda \otimes \mu(\{(w,v) \in [0,1]^2 |\ U_{i-1}(w) < v \leq L_j(w)) \quad (21)$$

Soit $w_{i-1,j} := pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(P_{i-1,j}) = pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P_{i-1,j})$. Comme $0 < \hat{P}_{i-1} < P_{i-1,j} < \hat{P}_j < 1$, on a $0 < w_{i-1,j} < 1$. Sur $[\hat{P}_{i-1}, 1]$, $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}$ est décroissante de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(\hat{P}_{i-1}) = 1$ à $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(1) = 0$. Ainsi, pour tout $1 \geq w_1 > w_2 \geq 0$, $g_{U_{i-1}}(w_1) < g_{U_{i-1}}(w_2)$ ou encore $U_{i-1}(w_1) < U_{i-1}(w_2)$, et donc U_{i-1} est décroissante sur $[0,1]$. Sur $[0, w_{i-1,j}]$, elle décroit de $U_{i-1}(0) = 1$ à $U_{i-1}(w_{i-1,j}) = P_{i-1,j}$, et sur $[w_{i-1,j}, 1]$ elle décroit de $U_{i-1}(w_{i-1,j}) = P_{i-1,j}$ à $U_{i-1}(1) = \hat{P}_{i-1}$. De manière similaire, on obtient que L_j croit sur $[0, w_{i-1,j}]$ de $L_j(0) = 0$ à $L_j(w_{i-1,j}) = P_{i-1,j}$, et sur $[w_{i-1,j}, 1]$ elle croit de $L_j(w_{i-1,j}) = P_{i-1,j}$ à $L_j(1) = \hat{P}_j$. Donc, pour tout $w \in [0, w_{i-1,j}]$, on a $U_{i-1}(w) \geq L_j(w)$, et pour tout $w \in [w_{i-1,j}, 1]$, $U_{i-1}(w) \leq L_j(w)$.

Eq.(21) est donc égale à

$$\lambda \otimes \mu(\{v \in [0,1], w_{i-1,j} \leq w \leq 1 |\ U_{i-1}(w) < v \leq L_j(w))$$
$$= \int_{w_{i-1,j}}^1 \int_{U_{i-1}(w)}^{L_j(w)} 1 dv dw$$
$$= \int_{w_{i-1,j}}^1 L_j(w) - U_{i-1}(w)dw$$
$$= \int_{w_{i-1,j}}^1 L_j(w)dw - \int_{w_{i-1,j}}^1 U_{i-1}(w)dw \quad (22)$$

Nous avons (prouvé de manière similaire aux cas précédents)

$$\int_{w_{i-1,j}}^1 L_j(w)dw = \hat{P}_j - P_{i-1,j}\, w_{i-1,j} - \int_{P_{i-1,j}}^{\hat{P}_j} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(t)dt,$$
$$\int_{w_{i-1,j}}^1 U_{i-1}(w)dw = \hat{P}_{i-1} - P_{i-1,j}\, w_{i-1,j} + \int_{\hat{P}_{i-1}}^{P_{i-1,j}} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(t)dt.$$

Eq.(22) devient alors

$$\hat{P}_j - \hat{P}_{i-1} - \int_{P_{i-1,j}}^{\hat{P}_j} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(t)dt - \int_{\hat{P}_{i-1}}^{P_{i-1,j}} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_{i-1}}(t)dt.$$

□

Notons que grâce à [2, Eq. (29)], il est aisé d'obtenir une expression simple permettant de calculer la fonction de masse $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ associée à la FCP $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ de la Proposition 2. Les masses ainsi obtenues seront illustrées dans la prochaine section (exemple 2).

3.3 Cas particulier : FCIV multinomiale

Soit $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire suivant une loi multinomiale de paramètres n connu et $P_j :=$

$\sum_{i=1}^{j} p_i$, $1 \leq j < K$, inconnus, avec $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq K$ et $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$. Ayant observé une réalisation $\mathbf{y} := (y_1, ..., y_K)$ de $\mathbf{Y}$, avec y_i le nombre de fois que la modalité i a été observée sur les n expériences, alors la FCIV $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$ a pour fonction de contour

$$pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}(\mathbf{P}) = \prod_{j=1}^{K} \left(\frac{P_j - P_{j-1}}{\hat{P}_j - \hat{P}_{j-1}} \right)^{y_j}, \quad \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}, \tag{23}$$

avec $\hat{P}_j = \sum_{i=1}^{j} y_i/n$ l'EMV de P_j, et $P_0 := 0$, $P_K := 1$, $\hat{P}_0 = 0$.

Proposition 3. *Si $y_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq K$, alors les marginales de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$ définie par (23) satisfont, pour tout $1 \leq j < K$,*

$$pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P) = \frac{P^{n_j}(1-P)^{n-n_j}}{\hat{P}_j^{n_j}(1-\hat{P}_j)^{n-n_j}} \tag{24}$$

avec $n_j := \sum_{i=1}^{j} y_i$, et elles vérifient les propriétés suivantes :

- *(P1) pour tout $1 \leq i < K$, $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $P = 1$.*
- *(P2) $0 < \hat{P}_i < \hat{P}_j < 1$, $\forall 1 \leq i < j < K$;*
- *(P3) continuité ;*
- *(P4) unimodalité ;*
- *(P5) il existe un unique point d'intersection $P_{i,j} \in (0,1)$ entre $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}$ et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$, $\forall 1 \leq i < j < K$;*

Preuve. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on montre que pour tout $1 \leq j < K$, Eq. (10) se réduit à

$$pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P) = pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}(\mathbf{P}^{*j}),$$

avec $\mathbf{P}^{*j} = (P_1^{*j}, \ldots, P_{K-1}^{*j})$ tel que, pour tout $1 \leq i < K$,

$$P_i^{*j} = \begin{cases} \frac{n_i}{n_j} P & \text{si } i \leq j, \\ \frac{n_i - n_j}{n - n_j}(1-P) + P & \text{sinon.} \end{cases} \tag{25}$$

À partir de ce résultat, on obtient :

$$pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P) = \left(\frac{P}{\hat{P}_j} \right)^{n_j} \left(\frac{1-P}{1-\hat{P}_j} \right)^{n-n_j}, \tag{26}$$

ce qui établit Eq. (24).

P1 et P2 sont immédiates. P3 et P4 sont vraies car Eq. (24) n'est rien d'autre que la fonction de vraisemblance relative d'une variable Y_j binomiale de paramètres n et P_j pour laquelle on a observe n_j succès sur les n expériences.

Soit $h(P) = \log pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P) - \log pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)$ pour $P \in (0,1)$. On a $\frac{\partial h(P)}{\partial P} < 0$ pour $P \in (0,1)$, c.-à-d., h est décroissante. De plus $h(\hat{P}_i) > 0$ et $h(\hat{P}_j) < 0$, donc il existe un unique $P_{i,j} \in (\hat{P}_i, \hat{P}_j)$ t.q. $h(P_{i,j}) = 0 \Leftrightarrow pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P_{i,j}) = pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P_{i,j})$, i.e, P5 est vraie. □

Étant donné les Propositions 2 et 3, à partir de la FCIV $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$, on obtient une FCP $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ définie par (19)-(20), approchant extérieurement la vraie FCP. De plus, cette FCP $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ peut être calculée analytiquement :

Proposition 4. *$\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![i,j]\!])$ est égale à :*

- *1, si $i = 1, j = K$,*
- *$\hat{P}_j - c_j \underline{B}(\hat{P}_j; n_j + 1, n - n_j + 1)$, si $i = 1, j < K$,*
- *$1 - \hat{P}_{i-1} - c_{i-1} \overline{B}(\hat{P}_{i-1}; n_{i-1} + 1, n - n_{i-1} + 1)$, si $1 < i, j = K$,*
- *$\hat{P}_j - \hat{P}_{i-1} - c_{i-1}(\underline{B}(P_{i-1,j}; n_{i-1}+1, n - n_{i-1}+1) - \underline{B}(\hat{P}_{i-1}; n_{i-1}+1, n-n_{i-1}+1)) - c_j(\underline{B}(\hat{P}_j; n_j + 1, n - n_j + 1) - \underline{B}(P_{i-1,j}; n_j+1, n-n_j+1))$, sinon (c.-à-d., $1 < i, j < K$),*

où $c_j = 1/(\hat{P}_j^{n_j}(1-\hat{P}_j)^{n-n_j})$, $\overline{B}(z;a,b)$ est la fonction bêta incomplète supérieure et $P_{i,j}$ est le point d'intersection entre $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}$ et $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}$, $\forall 1 \leq i < j < K$, égal à

$$P_{i,j} = \left(\left(\left(\frac{\hat{P}_j}{1-\hat{P}_j} \right)^{\hat{P}_j} \left(\frac{1-\hat{P}_i}{\hat{P}_i} \right)^{\hat{P}_i} \left(\frac{1-\hat{P}_j}{1-\hat{P}_i} \right) \right)^{-1/(\hat{P}_j - \hat{P}_i)} + 1 \right)^{-1}. \tag{27}$$

Preuve. Les intégrales des fonctions de contours marginalisées de l'équation (19) sont données pour $1 \leq j < K$, par

$$\int_0^{\hat{P}_j} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P) dP = c_j \underline{B}(\hat{P}_j; n_j + 1, n - n_j + 1)$$

$$\int_{\hat{P}_j}^{1} pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P)dP = c_j \overline{B}(\hat{P}_j; n_j + 1, n - n_j + 1).$$

Chacune des intégrales de l'équation (20) se décompose en deux intégrales qui peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction bêta incomplète inférieure. Le point $P_{i,j}$ est obtenu en résolvant l'équation : $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_i}(P_{i,j}) = pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_j}(P_{i,j})$. □

Exemple 2. *Soit* $K = 3$ *et* $\mathbf{y} = (2, 4, 3)$. *La figure 2 montre, pour* $w \in \{0.2, 0.8, 1\}$, *les ensembles focaux* $\Gamma_{\mathbf{y}}(w)$ *- ainsi que leurs approximations extérieures* $\underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(w)$ *- de la FCIV* $Bel_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$, *de fonction contour* $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$ *définie par Eq. (23). Les marginales de* $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}$, *définies par* (24), *sont montrées sur la figure 3, ainsi que le point d'intersection* $P_{1,2}$ *défini par* (27). *La fonction de masse associée à la FCP* $\underline{Bel}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}$ *est telle que :* $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\{1\}) \approx .09$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\{2\}) \approx .11$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\{3\}) \approx .17$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![1, 2]\!]) \approx .25$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![2, 3]\!]) \approx .29$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}) \approx .07$. *Les aires associées à ces masses sont montrées sur la figure 3 avec trois couleurs primaires pour les ensembles focaux singletons et des mélanges de ces couleurs pour les ensembles focaux non singletons.*

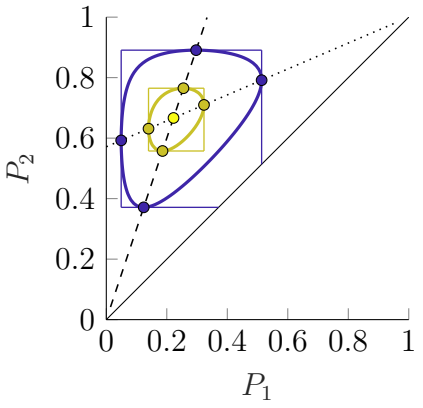

FIGURE 2 – Approximations extérieures $\underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(.2)$(—) et $\underline{\Gamma}_{\mathbf{y}}(.8)$(—) de $\Gamma_{\mathbf{y}}(.2)$(—) et $\Gamma_{\mathbf{y}}(.8)$(—) de $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}}(\mathbf{P})$. Maximums (o) induits par ses marginalisations sur $\mathcal{P}_1$(··o··) et $\mathcal{P}_2$(-o-) pour $w \in \{.2, .8, 1\}$.

4 Conclusions

Dans cet article, une fonction de croyance prédictive, approchant de manière conservatrice la vraie et ayant une expression simple, est dérivée pour une variable ordinale. Les perspectives incluent son utilisation dans le cadre de la régression ordinale et poursuivre dans cette voie avec le cas d'une variable qualitative nominale.

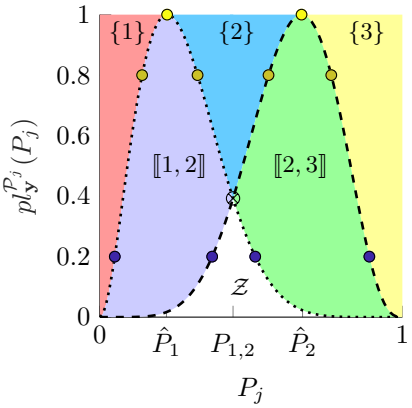

FIGURE 3 – Fonctions contour $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_1}$ (·o··), $pl_{\mathbf{y}}^{\mathcal{P}_2}$ (-o-). Point d'intersection $P_{1,2}(\otimes)$. Fonction de masse : $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\{1\})$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\{2\})$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\{3\})$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![1, 2]\!])$, $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}([\![2, 3]\!])$, □ $\underline{m}_{\mathbf{y}}^{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z})$.

Remerciements :

Ces travaux ont été financés en partie par le projet ELSAT2020, qui est cofinancé par l'Union européenne avec le Fonds européen de développement régional, l'État français et le Conseil Régional des Hauts de France.

Références

[1] A.P. Dempster. New methods for reasoning towards posterior distributions based on sample data. *The Annals of Mathematical Statistics*, 355-374, 1966.

[2] T. Denœux. Constructing belief functions from sample data using multinomial confidence regions. *Int. J. Approx. Reason.*, 42(3) : 228-252, 2006.

[3] O. Kanjanatarakul, T. Denœux, S. Sriboonchitta. Prediction of future observations using belief functions : a likelihood-based approach. *Int. Journal of Approximate Reasoning*, 72 : 71-94, 2016.

[4] O. Kanjanatarakul, S. Sriboonchitta, T. Denœux. Forecasting using belief functions : an application to marketing econometrics. *International Journal of Approximate Reasoning*, 55(5) : 1113-1128, 2014.

[5] P. Minary, F. Pichon, D. Mercier, E. Lefevre, B. Droit. Evidential joint calibration of binary SVM classifiers. *Soft Computing*, 23 : 4655-4671, 2019.

[6] S. Ramel, F. Pichon, F. Delmotte. A reliable version of choquistic regression based on evidence theory. *Knowledge-Based Systems*, 205 : 106-252, 2020.

[7] G. Shafer. A mathematical theory of evidence. *Princeton university press*, 1976.

[8] P. Xu, F. Davoine, H. Zha, T. Denœux. Evidential calibration of binary SVM classifiers. *Int. Journal of Approximate Reasoning*, 72 : 55-70, 2016.

[9] P. Xu, F. Davoine, T. Denœux. Evidential multinomial logistic regression for multiclass classifier calibration. *Int. Conf. on Information Fusion (FUSION),2015*, pp. 1106-1112.