Construire des logiciels fiables

Sylvain Boulmé

Construire des logiciels fiables,
une quête de la programmation défensive formellement vérifiée

Sylvain Boulmé

mai 2023

Résumé

Les « *bugs* » informatiques, c'est-à-dire les erreurs involontaires de programmation, peuvent avoir des conséquences désastreuses, quand elles ont lieu dans un logiciel *critique*, comme dans un centre d'appel téléphonique d'urgence (cf. la panne de juin 2021 [1]), ou pire dans le système de sécurité d'une centrale nucléaire. Ce document a l'ambition d'expliquer de façon élémentaire comment la *programmation défensive formellement vérifiée*, en complément des méthodes traditionnelles du génie logiciel, permet de réduire significativement les risques de telles erreurs. En passant, nous discutons de *pensée floue*, puis de *formalisation mathématique* en l'illustrant sur des problèmes proches des « sudokus » (en fait les *problèmes SAT booléens*).

NOTE Document préparatoire à l'article https://interstices.info/construire-des-logiciels-fiables/ publié en janvier 2024 dans la revue en ligne https://interstices.info/. D'où la forme inhabituelle du document, avec de très grosses notes de bas de page : celles-ci correspondent à des sections dé/re-pliables dans la version en ligne. L'article a bénéficié de la relecture attentive et bienveillante du comité de rédaction de la revue. Merci !

À première vue, les erreurs involontaires de programmation logicielle, plus ordinairement appelées « *bugs* », ont des causes multiples : erreurs d'étourderie ou d'inattention (par exemple, interversion des noms « i » et « j ») ; contresens sur la signification d'un bout de programme ou du cahier des charges (censé donné la description du comportement attendu du logiciel) ; sur-interprétation d'un cahier des charges ambigu, incomplet ou contenant du non-dit ; vraie erreur de raisonnement (par ex. mauvaise compréhension d'un concept, utilisation d'une hypothèse implicite fausse) ; etc. Pour empêcher ou détecter de telles erreurs lors du développement logiciel, l'état de l'art recommande de combiner un ensemble de « bonnes pratiques ». [2] En pratique, il reste cependant toujours des bugs qui sont détectés bien trop tard, une fois que le logiciel est déjà entré en service.

Erreurs et pensée floue

Les sciences cognitives apportent un éclairage sur cette difficulté à construire des logiciels sans bug. Par exemple, considérons le problème suivant :

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Panne_des_num%C3%A9ros_d%27urgence_en_France
2. À titre d'exemples, citons : « bonnes » abstractions au cœur des langages de programmation (variables, fonctions, types, structures de contrôle, etc) ; patrons de conception (modèle-vue-contrôleur en programmation web, itérateurs pour les parcours de structures de données, etc) ; vérifications statiques (typage) ; vérifications dynamiques (programmation défensive, tests) ; pratiques et outils organisationnels (par ex. gestion de version, intégration continue, revue de code, *literate programming*, méthodes agiles, etc).

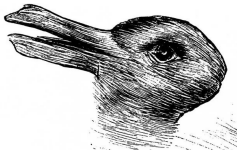
> « *Une balle et une batte coûtent au total* 1,10$. *La batte coûte* 1$ *de plus que la balle. Combien coûte la balle ?* »

Selon le psychologue Daniel Kahneman, prix Nobel d'économie en 2002 pour ces travaux les biais cognitifs, la *plupart d'entre nous*[3] répondent incorrectement « *la balle coûte* 10 *cents* », surtout si la réponse doit être donnée rapidement sans avoir le temps de réfléchir. Autrement dit, nous calculons intuitivement $1{,}10 - 1 = 0{,}10$ sans nous rendre compte que le prix de la batte serait alors lui-même de 1,10$ et donc que le coût total serait de 1,20$. Le calcul correct est en fait légèrement plus compliqué : 10 cents, c'est ce qui reste à payer quand on a donné le dollar supplémentaire pour la batte, il reste à partager ce prix équitablement entre la balle et la batte. Le calcul correct est donc $(1{,}10 - 1) \div 2$.

L'origine de telles erreurs, c'est que nous pensons principalement et préférentiellement de façon « flou ». Par exemple, considérons le concept familier de *canard*. Scientifiquement, ce concept n'est pas un taxon bien défini de la classification systématique des espèces vivantes : il est considéré comme ambigu.[4] L'intérêt de ce concept flou, c'est que tout en s'appliquant à un grand nombre d'individus différents, il nous permet de distinguer *instantanément* et *sans effort* un canard d'un lapin, ce qui s'avère par exemple très utile pour anticiper les mouvements possibles de l'animal. Mais, comme le montre le dessin ci-dessous, ce flou est déformable jusqu'à l'absurde. Un tel flou entoure en fait la plupart de nos concepts (un autre exemple : combien de cheveux doit porter une tête pour cesser d'être « *chauve* » ?), et plus généralement de nos pensées, même verbalisées.

Regardons à nouveau le dessin ci-contre. Parmi les deux phrases entre guillemets suivantes, quelle est celle qui vous semble la plus appropriée pour caractériser ce que vous voyez

> « *je vois une tête de canard* ***ou*** *je vois une tête de lapin* »
> ou
> « *je vois une tête de canard* ***et*** *je vois une tête de lapin* » ?



https://fr.wikipedia.org/wiki/Canard-lapin

Étonnamment, le « ***ou*** » et le « ***et*** » semblent ici relativement similaires à quelques nuances près : le « ***ou*** » permet de suggérer le caractère *non simultané* des deux actions « *je vois* » ; tandis que le « ***et*** » permet d'en souligner le caractère *contradictoire*. Ailleurs, par exemple, au restaurant, si le menu propose « *fromage* ***ou*** *dessert* », il faut choisir entre les deux. Au contraire, chez des proches, une proposition identique en fin de repas n'interdirait pas forcément de prendre les deux. Les mots « ***ou*** » et « ***et*** » semblent donc s'exclure ou pas en fonction du contexte. Pour éviter cette ambiguïté, les mathématicien·nes en restreignent l'usage en leur donnant un sens très précis. Nous allons y revenir.

Mais donner un sens univoque aux mots ne suffit pas à rendre les phrases non ambiguës. Par exemple, dans la phrase « *le tribunal juge l'enfant sauvage* », qui juge que l'enfant est sauvage ? Soit c'est le tribunal, si l'adjectif « *sauvage* » est considéré comme un complément du verbe « *juge* ». Soit c'est le·a locuteur·ice, si cet adjectif est considéré comme un complément du nom « *enfant* ». Bien sûr une telle ambiguïté grammaticale est évitable : il suffit ici de mettre la phrase en forme passive. La difficulté c'est qu'au moment où nous énonçons ce genre de phrase, nous ne nous apercevons pas forcément de l'ambiguïté qu'elle recèle.

Essayer de penser moins flou est donc long et difficile : il faut beaucoup d'efforts, de la concentration, mais surtout de la *méthode* dirait Descartes. Car comme illustré ci-dessus, la pensée floue se niche au cœur même des langues humaines. En réaction, depuis plusieurs milliers d'années, les humain·es construisent un langage dédié à la définition de concepts non-flous et à la vérification que les raisonnements sur ces concepts sont corrects. Ce langage, c'est la mathématique.

3. Cette affirmation est étayée par des sondages sur les campus américains.
4. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Canard.

Contrôler la pensée floue par la formalisation mathématique

La mathématique ne fait pas magiquement disparaître les difficultés, mais elle offre des outils. Notamment, le processus de *vérification de la formalisation*, qui, « *idéalement* »[5], ne suppose justement plus *aucune forme de pensée* et peut ainsi être complètement *mécanisé*. Cela n'interdit pas toute forme d'erreur, notamment des erreurs d'inattention. Mais, ce risque est évitable en délégant cette vérification à un programme informatique, pour peu que celui-ci ait été *lui-même bien vérifié*.

Ainsi, la vérification du raisonnement mathématique est un processus mécanisable, exactement comme la vérification lexicographique (qui vérifie que nos textes n'utilisent que des mots du dictionnaire) ou comme la vérification de la cohérence des unités, méthode apprise au lycée pour vérifier ses solutions aux exercices de physique/chimie. Les langages de programmation s'étant déjà inspirés de tels procédés pour détecter certains erreurs dans les programmes, via la « vérification des types », une façon de détecter plus d'erreurs de programmation, c'est d'étendre la vérification des types à la vérification des raisonnements justifiant la correction de ces programmes informatiques.[6]

Heuristique versus vérification Au contraire du processus de vérification, le processus de formalisation lui-même est extrêmement difficile : c'est là que réside l'art mathématique[7]. Aussi, généralement, les mathématicien·nes ne cherchent pas à formaliser *comment* iels inventent des mathématiques. Iels se contentent simplement de formaliser *pourquoi* leurs énoncés sont corrects.

Chacun·e peut appréhender cette dichotomie entre heuristique[8] et vérification sur des casse-têtes comme les *sudokus* : il est beaucoup plus *rapide* et *facile* de vérifier qu'un candidat de solution à un tel problème est correct, plutôt que d'inventer cette solution.

Vérifier une solution aux n-reines Illustrons cela sur les casse-têtes, un peu plus simples, de n-reines. Dans la version « de base », il s'agit de placer n reines sur un échiquier de taille $n \times n$ de façon à ce qu'aucune d'elles ne puissent en *prendre* une autre avec un seul mouvement (pour un mouvement d'une reine aux échecs : vertical, horizontal, ou diagonal). Trouver une solution pour $n = 4$ demande un peu de réflexion. Mais vérifier que la Figure 1 donne une solution est immédiat. Dans une variante, comme à la Figure 2, l'échiquier peut initialement contenir des cases avec des reines déjà posées, et des cases où il est interdit de poser une reine (mais n'interdisant pas aux reines de « passer » pour en prendre une autre).

À vous d'essayer : Le problème des 3-reines a-t-il une solution ? Et la variante du problème des 8-reines dessinée Figure 2, où une reine est déjà posée en ligne 1 et colonne 1, case notée plus simplement 11, et où il est de plus interdit de poser une reine aux cases 83 (ligne 8, colonne 3) et 64 (ligne 6, colonne 4) ?[9]

5. Cette vision un peu simpliste sera nuancée à la note 19.

6. Dans les langages de programmation, la « vérification statique des types » généralise la vérification de la cohérence des unités physiques. D'un certain de point de vue, appelé *isomorphisme de Curry-Howard*, la vérification des preuves mathématiques s'apparente aussi à de la vérification des types.

7. Pour découvrir comment pense un mathématicien, lire le magnifique « *Mathematica* » de David Bessis (Seuil 2022).

8. Dans ce document, *heuristique* désigne une approche pour résoudre certains problèmes « difficiles », de manière éventuellement sous-optimale ou pas complètement formalisée. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Heuristique.

9. Voilà la réponse pour les 3-reines. Il faudra avoir lu le reste de ce document pour pouvoir la déchiffrer ;-)

$$-11 \ominus -21\ -11 \ominus -22\ -11 \ominus 23\ 21\ 22 \ominus -31\ -11 \ominus -32\ -23 \ominus -33\ -23 \supseteq 31\ 32\ 33;$$
$$-13 \ominus -22\ -13 \ominus -23\ -13 \ominus 21\ 22\ 23 \ominus -31\ -21 \ominus -32\ -21 \ominus -33\ -13 \supseteq 31\ 32\ 33;$$
$$\mathbf{F} \ominus -11 \ominus -13 \ominus 12\ 11\ 13 \ominus -21\ -12 \ominus -22\ -12\ \ominus -23\ -12 \supseteq 21\ 22\ 23.$$

La réponse au problème de la variante des 8-reines est donnée en page 7.

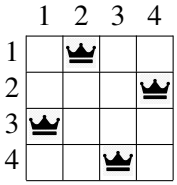


FIGURE 1 – Solution au 4-reines

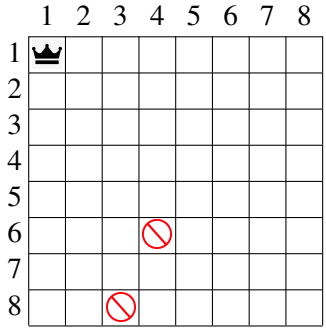


FIGURE 2 – Un problème de 8-reines

	1	2	3	4
1				
2	1	1	?	?
3	1	?	1	2
4	1	3	3	1

FIGURE 3 – Impasse de 11

	1	2	3	4
1	2	2	2	?
2				
3	2	2	2	1
4				

FIGURE 4 – Impasse de 22

Preuve visuelle de l'absence d'une solution aux *n*-reines Considérons maintenant le problème des 4-reines avec une reine déjà posée en case 11. Ce casse-tête n'a pas de solution. La preuve « *visuelle* » en Figure 3 permet de le vérifier très simplement. Dans celle-ci, le caractère « ? » représente une case pouvant éventuellement contenir une reine sans être prise ; au contraire, les cases avec un numéro k sont atteignables par la reine éventuelle de la ligne k. L'absence de solution se déduit de l'impossibilité de placer une reine à la ligne 4, celle-ci n'ayant pas de « ? ». Les cases laissées vides peuvent être ignorées dans la preuve d'absence de solution.

Preuve verbalisée de l'absence d'une solution aux *n*-reines Pour expliciter davantage le raisonnement, *rédigeons* maintenant cette preuve dans un style mathématique plus classique. Utilisons une *preuve par l'absurde* : en supposant l'existence d'une solution satisfaisant les contraintes, on déduit une contradiction. Cela garantit qu'une telle solution est impossible.

Théorème *Il n'y a pas de solution au problème des 4-reines avec une reine en case* 11.
Preuve

Supposons qu'une telle solution existe.

- Montrons d'abord que la case 32 (ligne 3, colonne 2) contient une reine : en effet, comme 21 et 22 sont atteignables depuis 11, la reine de la ligne 2 est en 23 ou 24 et elle peut donc atteindre 34 ; comme par ailleurs 31 et 33 sont atteignables depuis 11, la reine de la ligne 3 est nécessairement en 32.
- Montrons ensuite qu'il est impossible de placer une reine en ligne 4 : en effet, 41 et 44 sont atteignables depuis 11 ; de même, 42 et 43 sont atteignables depuis 32.
- Absurde : dans toute solution, il doit y avoir une reine en ligne 4.

□

Remarquons que cette preuve s'arrange pour propager des contraintes lignes à lignes, en réduisant le nombre de possibilités de placer une reine à la ligne suivante. Elle reste ainsi concise, en évitant soigneusement une approche naïve par « essai-échec », énumérant tous les placements possibles [10].

De façon plus générale, les preuves mathématiques évitent d'avoir à tester un nombre élevé, voire infini de cas. Par exemple, nous allons définir dans la suite un procédé de vérification qu'un problème

10. Une approche par « essai-échec » consiste par exemple à « *essayer de placer* » une reine par ligne en *testant* successivement toutes les colonnes, jusqu'à trouver une case de la ligne *courante* non prenable par les reines déjà placées ; si une telle case existe, une reine y est placée et l'algorithme essaye alors de placer la reine de la ligne *suivante* ; sinon, les essais de placement sur la ligne courante sont un *échec*, et ils se poursuivent sur les lignes *précédentes*. Ainsi,

de n-reines donné a ou n'a pas de solution. Et nous allons *prouver mathématiquement* que les réponses données par ce procédé sont correctes. Cette preuve le garantira quelque soit le problème de n-reines, en particulier, quelque soit le n (il y en a une infinité possible).

Mécaniser la vérification des mathématiques

Pour vérifier de façon vraiment mécanique (notamment à l'aide d'un logiciel) les raisonnements ou les théories mathématiques, il faut développer une théorie mathématique du langage mathématique : c'est ce qui s'appelle une *logique formelle*. Cela permet de comprendre de façon non-floue ce que doit faire le vérificateur et éventuellement de vérifier que ce vérificateur est correct. Comme formaliser « l'ensemble » du langage mathématique serait trop ambitieux, ce document en illustre la méthode sur un minuscule fragment, appelé *logique des propositions conjonctives de booléens*, tout juste suffisant pour formaliser les problèmes de n-reines (et de sudokus). [11] Toutefois, cela donne déjà un bon aperçu de comment formaliser la mathématique.

Propositions et variables logiques Toute logique formelle repose sur un langage de *propositions*. Une telle proposition représente un énoncé, qui peut valoir soit « *vrai* », soit « *faux* », en fonction de l'interprétation des *variables* apparaissant dans cet énoncé. Dans le cadre de notre logique, les variables sont simplement des *entiers naturels non nuls* qui sont eux-mêmes *interprétés* uniquement comme valant soit vrai, soit faux.

Typiquement, pour définir les problèmes de n-reines dans notre logique, nous représenterons chaque case de l'échiquier par une variable distincte, avec la convention que sa valeur « vrai » signifie « il y a une reine sur cette case ». Dans le cas des 4-reines, nommons chacune des 16 variables directement par l'entier qui représente la position de la case dans l'échiquier : $11, 12, \ldots, 14, 21, \ldots$

Pour définir mathématiquement le langage des propositions, nous aurons éventuellement besoin de nommer des (noms de) variables. Nous utiliserons alors x, x_1, x_2, ... Autrement dit, chacun de ces x représentera un entier qui est lui-même une variable logique. C'est un exemple de ce que nous appelons dans la suite des *méta-variables* : des noms désignant certains fragments des propositions logiques.

	1	2	3	4
1	♛			
2	1	1	♛	
3	1	2	2	2
4				

le premier essai de placement sur la ligne 2 a lieu en colonne 3 est représenté sur l'échiquier de gauche, où chaque case avec un numéro k correspond à un *test* indiquant que la case est prenable par la reine en ligne k. Ce premier essai aboutit donc à un échec en ligne 3. Le deuxième et dernier essai de placement sur la ligne 2, représenté sur l'échiquier de droite, aboutit aussi à échec en ligne 3, après un unique essai de placement possible en ligne 3, ayant lui aboutit à un échec en ligne 4, représenté lui-aussi sur la figure.

	1	2	3	4
1	♛			
2				♛
3	1	♛	2	2
4	1	3	3	2

Comme les essais de placement en ligne 2 aboutissent à un échec, le problème n'a pas de solution. Au final, cette approche par « essai-échec » teste seize cases (les cases de la ligne 3 sont testées deux fois). Le raisonnement sur la Figure 3 revient lui à ne tester qu'une fois chacune des cases des lignes 2 à 4, soit douze cases seulement. Mais, inventer une telle preuve concise, qui réduit au maximum les calculs nécessaires à sa vérification, n'est pas *à priori* évident.

11. Cette logique élémentaire est toujours un domaine actif de recherche. Les logiciels de résolution des problèmes formulés dans cette logique sont appelés solveurs-SAT. La compétition http://www.satcompetition.org/ désigne chaque année les meilleurs solveurs-SAT : cette émulation a permis à l'algorithmique du domaine de progresser de façon spectaculaire ces trente dernières années. Les solveurs-SAT ont aujourd'hui des performances qui leur permettent d'être utilisés dans de nombreuses applications pratiques (par exemple, résoudre les problèmes de dépendances entre logiciels lors d'une mise à jour ou vérifier la conception de circuits électroniques). Mais du point de vue théorique, il n'est toujours pas connu s'il pourrait exister un solveur-SAT classique donnant toujours une réponse en un temps au plus polynomial en fonction de la taille du problème d'entrée. Cette (méta)question appelée « P = NP ? » est un des fameux 7 problèmes, qualifiés « *du millénaire* » par l'institut Clay, qui en récompenserait la réponse par 1 million de dollars.

Notre langage est bâti sur une hiérarchie de 3 catégories de propositions, incluses les unes dans les autres. Ainsi, une *théorie* sera représentée par une *conjonction* (c'est-à-dire un « et logique ») de *clauses*, ces dernières étant alors considérées comme des axiomes de la dite théorie. Les clauses sont elles-mêmes des propositions plus simples que ces propositions conjonctives. Mais commençons par le début...

Littéraux Au niveau le plus élémentaire, les propositions s'appellent des *littéraux* et sont uniquement soit de la forme « $-x$ » dont la valeur de vérité est l'opposé de celle de x, soit de la forme « x » (de valeur de vérité x). Par exemple, dans la théorie des 4-reines, le littéral « 34 » exprime qu'il y a une reine en case 34. Le littéral « -34 » exprime qu'il y n'a pas de reine en case 34.

Nous utilisons ℓ, ℓ_1, ℓ_2, ... comme méta-variables de littéraux. L'opération involutive « $-\ell$ » est alors définie comme retournant le littéral de valeur opposée à ℓ (en ajoutant/supprimant le symbole « − » devant la variable).

Clauses Au niveau intermédiaire, les propositions s'appellent des *clauses* et sont des *ensembles finis* de littéraux. Nous écrirons ces ensembles sous la forme de liste de littéraux séparés par des espaces. Par définition, une telle clause vaut *vrai* si et seulement si *au moins un* de ses littéraux vaut vrai. La clause *vide* sera écrite « **F** » et a pour valeur faux.

Par exemple, dans la théorie des 4-reines, l'énoncé « *la ligne* 2 *doit contenir au moins une reine* » peut s'écrire comme la clause « 21 22 23 24 ». Autrement dit, chaque espace représente un « ou » logique. Autre exemple, l'énoncé « *les cases* 21 *et* 43 *ne peuvent pas contenir tous les deux une reine* » peut s'écrire comme la clause « -21 -43 ». Un dernier exemple, l'énoncé « *si la case* 11 *contient une reine, alors la* 34 *aussi* » s'écrit comme la clause « -11 34 ». En effet, « -11 34 » vaut vrai si et seulement si « 11 *vaut faux ou* 34 *vaut vrai* », ce qui est logiquement équivalent à « *si* 11 *vaut vrai alors* 34 *vaut vrai* » (énoncé en particulier vrai quand 11 vaut faux).

Les méta-variables de clauses sont notées c, c_1, c_2, ... Nous noterons aussi « c_1 c_2 » la clause résultant de l'union des deux clauses c_1 et c_2 (formée des littéraux étant dans c_1 ou dans c_2). Pour éviter les ambiguïtés en cas d'absence de parenthèse, nous considérons que l'espace est prioritaire sur tous les autres opérateurs binaires introduits par la suite (mais pas le moins unaire, précédemment introduit). Lorsque nous souhaiterons commencer le calcul par une opération moins prioritaire que l'espace, par exemple « \ », nous utiliserons des parenthèses, comme usuellement en arithmétique ou en algèbre, par exemple dans « c_1 (c_2 \ c_3) ». Cette expression calcule ainsi l'union de c_1 et « c_2 \ c_3 », alors que, d'après nos règles de priorités :

— « c_1 c_2 \ c_3 » est identique à « (c_1 c_2) \ c_3 »
— « c_1 \ c_2 c_3 » est identique à « c_1 \ (c_2 c_3) »

Conjonctions Enfin, dans le cas général, nos propositions conjonctives sont des *ensembles finis* de clauses, écrits sous la forme de liste de clauses séparées par le symbole « ∧ ». Par définition, une telle conjonction vaut *vrai* si et seulement si *toutes* ses clauses valent vrai. La conjonction *vide* est écrite « **T** » et a pour valeur vrai. Autrement dit, chaque « ∧ » représente un « et » logique. Par exemple, dans la théorie des 4-reines, l'énoncé « *la diagonale de* 21 *à* 43 *doit contenir au plus une reine* » peut s'écrire comme la conjonction

« -21 -32 ∧ -21 -43 ∧ -32 -43 ».

Celle-ci exprime en effet que toutes les paires de cases de la diagonale sont mutuellement exclu-

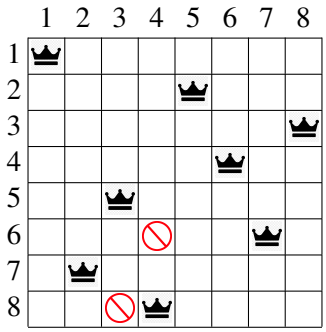


FIGURE 5 – Solution au problème des 8-reines avec une reine en 11 et les cases 83 et 64 interdites. C'est l'unique solution comme démontré page 10.

sives : au moins une case de chacune de ces paires ne contient pas une reine. [12] Les méta-variables de conjonctions sont notées p, p_1, p_2, ...

Au final, la théorie des 4-reines s'exprime sous la forme d'une conjonction de 80 clauses : 4 clauses de 4 littéraux exprimant qu'il doit y avoir au moins une reine sur chacune des lignes et 76 clauses de 2 littéraux exprimant toutes les paires de cases mutuellement exclusives. La théorie des 4-reines avec une reine en 11 s'exprime sous la forme d'une conjonction de 81 clauses : les 80 clauses précédentes et la clause réduite au littéral « 11 ».

Propositions satisfaisables Une proposition est *satisfaisable* si et seulement si elle vaut vrai pour *au moins* une interprétation des variables [13]. Dans le cas de la théorie des n-reines, la satisfaisabilité exprime l'existence d'une solution. Pour garantir qu'une proposition est satisfaisable, il suffit d'exhiber une interprétation des variables et de vérifier que dans toutes les clauses de la proposition, il y a au moins un littéral qui vaut vrai pour cette interprétation. Ici, nous écrirons une telle interprétation sous la forme de l'ensemble de *toutes* les variables qui valent vrai (dans cette interprétation). Par exemple, la théorie des 4-reines est satisfaisable avec l'interprétation « $\{12, 24, 31, 43\}$ » : c'est la solution dessinée à la Figure 1. Sur le même principe, la théorie des 8-reines avec une reine en 11 et les cases 83 et 64 interdites (incluant donc dans la théorie les deux clauses « -83 » et « -64 ») est satisfaisable avec l'interprétation « $\{11, 25, 38, 46, 53, 67, 72, 84\}$ » dessinée à la Figure 5.

Propositions insatisfaisables Une proposition est *insatisfaisable* si et seulement si elle vaut faux pour *toute* interprétation. Dans le cas de la théorie des n-reines, l'insatisfaisabilité exprime l'absence de solution. Pour la vérifier, il va falloir introduire un langage de *preuves formelles*.

Nous commençons par définir un calcul sur les clauses qui, étant donné une proposition p et une clause c, garantit que pour toute interprétation, si p est vrai pour cette interprétation, alors c aussi. Autrement dit, ce calcul assurera que c est bien une *conséquence logique* de p. Pour garantir que p est insatisfaisable, il suffira alors de montrer que **F** est une conséquence logique de p.

12. Comme vu précédemment, « $-21\ -32$ » peut s'interpréter comme l'énoncé « *si* 21 *vaut vrai alors* 32 *vaut faux* » ce qui est aussi équivalent à dire « *si* 32 *vaut vrai alors* 21 *vaut faux* ».

13. Rappelons que, pour notre logique, une *interprétation* associe à chaque variable, une valeur *vrai* ou *faux* fixée.

Différence de clauses Soient c_1 et c_2 deux clauses. Notons $c_1 \setminus c_2$ la clause obtenue à partir de c_1 en supprimant ses littéraux qui se trouvent aussi dans c_2. Par exemple,

$$-1\ -2\ 3\ 4\ \setminus\ -1\ 2\ 3\ 5\ =\ -2\ 4$$

Remarquons que $c_1 \setminus c_2 = \mathbf{F}$ revient à dire que tous les littéraux de c_1 sont dans c_2. Ce que nous notons $c_2 \supseteq c_1$. Dans ce cas, c_2 est une conséquence logique de c_1 (car tout littéral valant vrai dans c_1 se trouve aussi dans c_2). Remarquons aussi que si $c_1 \setminus c_2 = c_3$ alors $c_2 \supseteq (c_1 \setminus c_3)$ et $c_1 = c_3\ (c_1 \setminus c_3)$. Nous allons utiliser ces propriétés juste ci-dessous.

Résolution arrière Notons maintenant $c_2 \ominus c_1$ la clause égale à « $c_2\ -(c_1 \setminus c_2)$ » si $c_1 \setminus c_2$ est réduite à un unique littéral. Par exemple,

$$-1\ 2\ 3\ \ominus\ 4\ 2\ =\ -1\ 2\ 3\ -4 \qquad \text{et} \qquad -1\ 2\ 3\ \ominus\ -5\ -1\ 3\ =\ -1\ 2\ 3\ 5$$

Cette opération n'est pas définie si la clause $c_1 \setminus c_2$ n'est pas réduite à un unique littéral. Par convention, l'opération $c_2 \ominus c_1$ n'est utilisée que lorsqu'elle est bien définie. Pour faciliter la lecture, le littéral de différence est généralement écrit en tête de c_1, et son opposé sera alors écrit en queue dans le résultat.

Supposons $c_2 \ominus c_1$ bien définie. Soit ℓ le littéral valant $c_1 \setminus c_2$. Et soit $c'_1 = c_1 \setminus \ell$. D'après les propriétés de la différence de clauses, $c_2 \supseteq c'_1$ et $c_1 = \ell\ c'_1$. De plus, par définition, $c_2 \ominus c_1 = c_2\ -\ell$. On en déduit que la conjonction $(c_2 \ominus c_1)\ \wedge\ c_1$ est égale à $(c_2\ -\ell)\ \wedge\ (\ell\ c'_1)$. Lorsque cette dernière vaut vrai, on en déduit que « *si ℓ vaut vrai alors c_2 vaut vrai sinon c'_1 vaut vrai* ». On en conclut que c_2 est une conséquence logique de $(c_2 \ominus c_1)\ \wedge\ c_1$. En effet, comme $c_2 \supseteq c'_1$, la clause c_2 est une conséquence logique de c'_1, donc si $(c_2 \ominus c_1)\ \wedge\ c_1$ vaut vrai, quelque soit la valeur de vérité de ℓ, la clause c_2 vaut vrai.

Autrement dit, nous avons montré que « *sachant c_1, pour montrer c_2, il suffit de montrer $c_2 \ominus c_1$* ». C'est une forme de raisonnement dit *en arrière*, car on part de la conclusion à prouver pour en calculer une cause possible. L'opération $c_2 \ominus c_1$ effectue ce que nous appelons la « *résolution en arrière de c_2 sachant c_1* ». En combinant $\ominus$ et $\supseteq$, écrivons maintenant nos premières *preuves formelles* de théorèmes.

Preuves formelles par chaînes de résolutions Avec la convention $c_3 \ominus c_2 \ominus c_1 = (c_3 \ominus c_2) \ominus c_1$, si la relation « $c_{n+1} \ominus c_n \ominus \ldots \ominus c_2\ \supseteq\ c_1$ » est satisfaite, et que *toutes les résolutions intermédiaires sont bien définies*, alors c_{n+1} est une conséquence logique de la conjonction [14] « $c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n$ ». Si c_1, c_2, ..., c_n sont elles-mêmes des clauses d'une conjonction p, nous dirons alors que c_{n+1} est un *théorème* de la théorie p.

Par exemple, on peut exprimer que l'énoncé informel « *s'il y a une reine en* 11*, alors il y a au moins une reine en* 42 *ou* 43 » est un théorème de la théorie des 4-reines. Cet énoncé s'écrit sous la forme « -11 42 43 ». Et sa preuve formelle est donnée par

$$-11\ 42\ 43\ \ominus\ -41\ -11\ \ominus\ -44\ -11\ \ \supseteq\ \ 42\ 43\ 41\ 44$$

Elle prouve [15] le théorème en combinant 3 clauses de la théorie des 4-reines : la clause exprimant qu'il y a au moins une reine sur la ligne 4 et les deux clauses exprimant que s'il y a une reine en 11 alors il n'y a pas de reine ni en 41 ni en 44.

14. Peu importe l'ordre des clauses dans cette conjonction. Par contre, l'ordre importe dans la chaîne de résolutions.

15. Pour vérifier que cette preuve est correcte, il faut d'abord vérifier que toutes les clauses utilisées, en dehors de la clause à prouver, sont dans la théorie. Ensuite, il faut effectuer les calculs de la chaîne de résolutions en vérifiant que les opérations de résolution sont bien définies. Enfin, il faut vérifier que la clause obtenue, ici « −11 42 43 41 44 », contient l'ensemble des littéraux de « 42 43 41 44 ». C'est bien le cas ici.

En s'inspirant de la preuve visuelle de la Figure 4, on peut prouver l'énoncé informel « *il n'y a pas de reine en* 22 » (pour le problème des 4-reines de base). C'est le théorème formel « −22 » dont la preuve formelle [16] est :

$$-22 \ominus -11\ -22 \ominus -12\ -22 \ominus -13\ -22 \ominus 14\ 11\ 12\ 13$$
$$\ominus -31\ -22 \ominus -32\ -22 \ominus -33\ -22 \ominus -34\ -14 \ \supseteq\ 31\ 32\ 33\ 34$$

L'intérêt de ce format de preuve, c'est qu'il n'exige pas d'écrire le résultat des résolutions intermédiaires : celles-ci sont directement calculées par le vérificateur de preuve. En même temps, les calculs du vérificateur sont très faciles et très rapides à effectuer.

Preuves formelles par suites de théorèmes Soit p une théorie. Si c est un théorème prouvé dans cette théorie, alors la conjonction $p \wedge c$ est elle-même une conséquence logique de cette théorie. Nous généralisons maintenant cette notion de théorème en autorisant les chaînes de résolutions à utiliser un théorème précédemment prouvé à partir de la théorie. Concrètement, nous écrirons une telle preuve de théorème comme une séquence de chaînes de résolutions séparées par un point-virgule. Par exemple, considérons la théorie suivante :

$$-1\ 2\ -3 \ \wedge\ 1\ 2\ -3 \ \wedge\ 2\ 3\ -4 \ \wedge\ 2\ 3\ 4$$

Dans cette théorie, le théorème « 2 » est démontré par la preuve formelle suivante, qui commence par prouver le théorème intermédiaire « 2 3 ».

$$2\ 3 \ominus -4\ 2\ 3 \ \supseteq\ 2\ 3\ 4\ ;$$
$$2 \ominus 3\ 2 \ominus -1\ 2\ -3 \ \supseteq 2\ -3\ 1$$

Là encore, la vérification est très facile et très rapide. [17]

Méta-théorème (preuves formelles d'insatisfaisabilité) *Soit p une théorie dont* **F** *est un théorème. Alors p est insatisfaisable.*

Preuve

Nous avons déjà justifié dans les paragraphes qui précèdent que tout théorème c de p est une conséquence logique de p. Donc **F** est une conséquence logique de p. Si p était satisfaisable, alors **F** le serait aussi. **F** est insatisfaisable, donc p aussi.

□

Il se trouve que la réciproque de ce méta-théorème est aussi démontrable : cela nous garantit que pour toute proposition p insatisfaisable, il existe une preuve formelle de **F**. Mais, si nous sommes juste intéressés à garantir la correction de notre procédé de vérification, cette garantie n'est pas strictement nécessaire. [18]

16. La chaîne de résolutions produit ici la clause « −22 11 12 13 −14 31 32 33 34 ».

17. Il existe d'autres formats de preuves formelles, encore plus compacts, mais plus complexes à vérifier. Notamment, le format RUP qui est produit très facilement par les solveurs-SAT de l'état de l'art. Ce format consiste à donner uniquement la liste des théorèmes, sans leur preuve sous forme de chaînes de résolution. Celles-ci se retrouvent par un algorithme appelé *propagation unitaire* (RUP est l'acronyme de Reverse Unit Propagation), qui, pour être au niveau d'efficacité de l'état de l'art, nécessite une représentation des données très astucieuse, dont la formalisation mathématique est complexe (les solveur-SATs modernes étant en effet capables de résoudre en moins d'une heure certains problèmes avec des millions de clauses et de variables). Voir https://www.cs.utexas.edu/~marijn/drup/.

18. Pour des logiques plus complexes, permettant par exemple de formaliser les entiers naturels, la réciproque du méta-théorème de correction des preuves formelles est même nécessairement fausse. Dans ce cas, la logique est dite *incomplète*. C'est le fameux premier (méta-méta)théorème d'incomplétude de Gödel. Voir https://interstices.info/linformatique-au-coeur-des-limites-de-lesprit/.

Preuve formelle de l'absence de solution au problème des 4-reines avec une reine en case 11 :

$$-11\ 32 \ominus -31\ -11 \ominus -33\ -11 \ominus 34\ 32\ 31\ 33$$
$$\ominus -21\ -11 \ominus -22\ -11 \ominus -23\ -34 \ominus -24\ -34\ \supseteq 21\ 22\ 23\ 24\ ;$$
$$\mathbf{F} \ominus 11 \ominus -41\ -11 \ominus 32\ -11 \ominus -42\ -32 \ominus -43\ -32 \ominus -44\ -11 \supseteq 41\ 42\ 43\ 44$$

Cette preuve formelle est proche de la preuve par l'absurde donnée en page 4, même si elles ont un style très différent (la preuve formelle utilisant des raisonnements « *en arrière* » alors que la preuve verbalisée est rédigée dans un style « *en avant* »). En particulier, cette preuve formelle est concise : chaque clause de la théorie n'est utilisée qu'au plus une fois. Et, son théorème intermédiaire, de la forme « *s'il y a une reine en* 11 *alors il y a une reine en* 32 », correspond à celui introduit dans la preuve verbalisée.

Preuve formelle de l'unicité de la solution au problème de la Figure 2 :
Notre logique permet de montrer que le problème de la Figure 2 n'a pas d'autre solution que celle donnée à la Figure 5. Il suffit de prouver l'insatisfaisabilité de la théorie qui ajoute à la théorie initiale une clause *interdisant* cette solution, comme « $-25\ -38\ -46\ -53\ -67\ -72\ -84$ » : cette clause exprime qu'il faut trouver un placement des reines qui diffère de celui en Figure 5 sur au moins une case. N'importe quel solveur-SAT récent (voir note 11) en trouve une preuve formelle en quelques millisecondes.

La Figure 6 page 15 donne une telle preuve formelle, en utilisant une légère généralisation du format précédent, qui permet de rendre la preuve un peu plus courte. Cette généralisation consiste à autoriser à donner un *nom* optionnel aux théorèmes. Pour ne pas être confondu avec une variable, un tel nom de théorème doit commencer par une lettre. Il est associé à un théorème via un symbole « : » (voir la syntaxe utilisée par la Figure 6). Cela autorise les résolutions à utiliser le nom à la place de l'énoncé de son théorème associé. Pour être correcte, une preuve doit seulement contenir des noms de théorème qui sont associés à un théorème et un seul. [19]

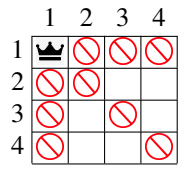
Heuristique versus vérification des problèmes SAT En résumé, nous avons défini ci-dessus un procédé automatisable de vérification des solutions (ou d'absence de solution) aux problèmes encodables en logique des propositions à variables booléennes ; ce qui inclut les *n*-reines, les sudokus et bien d'autres choses. Ce procédé a l'avantage d'être beaucoup plus simple que les heuristiques de résolution dans cette logique, appelées communément solveurs-SAT. [20]

19. Pour un·e humain·e, vérifier la preuve formelle en Figure 6 est long et fastidieux (contre moins de 1 milliseconde avec les vérificateurs automatiques de la note 24). Cette pénibilité rend le risque d'erreur d'inattention très probable. Nous touchons ici aux limites des preuves complètement formalisées : elles sont parfaitement adaptées à la vérification par une machine, mais pas vraiment aux humain·es, dont les capacités de calcul sont plus faibles et moins fiables. C'est une des raisons pour lesquelles les mathématicien·nes, quand iels rédigent des preuves pour d'autres humain·es, ne rédigent pas dans un style complètement formalisé : il est préférable de faire (modérément) appel aux capacités de « compréhension » des lecteur·ices via leurs différentes aptitudes (visualisation 2D, analogies, abstractions, etc) plutôt que de reposer intégralement sur leurs capacités de calcul. De même, un énoncé formel, s'il est destiné à être compris par les humain·es, doit contenir des explications informelles en commentaires, comme n'importe quel code informatique. C'est finalement la complémentarité entre le texte formel et ses explications informelles qui permet d'éviter les erreurs.

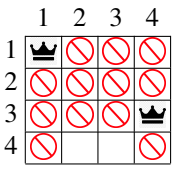
20. En complément de la note 11, esquissons un peu une famille d'heuristiques de solveur-SAT très courante, appelée CDCL (pour « *Conflict Driven Clause Learning* », ou en français « *apprentissage de clause par analyse de conflit* »). Étant donné une théorie, un solveur-SAT donne soit un *modèle* de cette théorie, c'est-à-dire une interprétation des variables dans laquelle la théorie vaut vrai, soit une garantie que la théorie est insatisfaisable. Les heuristiques CDCL procèdent par « essai-échec » en construisant progressivement un *modèle partiel* de la théorie : c'est-à-dire une interprétation d'un *sous-ensemble* (initialement vide) des variables pour laquelle aucune des clauses de la théorie ne vaut *faux*. Par définition, une clause, dont tous les littéraux ont une valeur de vérité *déterminée* par le modèle partiel, a elle la valeur vrai (puisque la clause a une valeur *déterminée* qui ne vaut pas faux). Et, si toutes les clauses ont ainsi une valeur *déterminée*, la théorie est donc satisfaite par

le modèle. Au contraire, tant qu'il reste des clauses qui ont une valeur de vérité indéterminée par le modèle partiel courant, l'heuristique est amenée à *choisir* un littéral qui rend certaines d'entre elles vraies, pour tenter d'ajouter ce littéral au modèle partiel courant.

En fait, le paradigme CDCL cherche à éviter les nombreux calculs inutiles inhérents à cette approche « essai-échec » (voir la discussion en note 10). Aussi, elle ne procède *au choix* d'essayer un nouveau littéral qu'après avoir soigneusement analysé les clauses de valeur indéterminée dans le modèle partiel courant. En particulier, elle recherche les clauses dites *unitaires*, c'est-à-dire dont la valeur est indéterminée à cause d'un unique littéral (ce sont donc les clauses dont tous les littéraux valent faux dans le modèle courant sauf un unique littéral qui reste indéterminé). L'heuristique sélectionne alors un tel littéral de manière prioritaire puisque c'est en quelque sorte une conséquence nécessaire des choix de littéraux antérieurs. Ainsi, les heuristiques CDCL pratiquent la *propagation unitaire* déjà mentionnée à la note 17 : cet algorithme correspond à sélectionner en cascade les littéraux à partir de clauses unitaires jusqu'à aboutir soit sur un modèle partiel sans clause unitaire, soit sur une clause valant faux dans l'interprétation partielle courante. Illustrons ci-dessous ces idées sur le problème des 4-reines en supposant que le premier littéral *choisi* soit 11. La propagation unitaire sélectionne alors tous les littéraux ℓ qui apparaissent dans une clause « ℓ -11 » de la théorie (ce sont des clauses unitaires dans l'interprétation partielle contenant uniquement le littéral « 11 »).



À l'issue de cette propagation unitaire, l'état du modèle partiel est représenté sur l'échiquier de gauche. Supposons ensuite que le deuxième littéral *choisi* soit -32. Dans cette nouvelle interprétation partielle, la clause « 31 32 33 34 » a un unique littéral indéterminé 34, qui est donc sélectionné par la propagation unitaire. Celle-ci aboutit alors à l'interprétation partielle représentée sur l'échiquier de droite où la clause « 21 22 23 24 » vaut faux.



Dans le cas où la propagation unitaire aboutit un modèle partiel sans clause unitaire, soit il ne reste aucune clause indéterminée et la théorie est donc satisfaite, soit les clauses non satisfaites restent indéterminées à cause d'au moins deux littéraux (comme dans l'échiquier de gauche ci-dessus). Dans ce second cas, les heuristiques CDCL guident alors leur *choix* d'un nouveau littéral grâce à des analyses statistiques (prenant en compte la fréquence des littéraux et de leur opposé dans la théorie, leur utilisation par l'heuristique jusqu'ici, etc). Il y a ici beaucoup de stratégies possibles, entraînant une grande diversité d'heuristiques CDCL.

Sinon, la propagation unitaire aboutit à un *contre-modèle* de la théorie initiale, c'est-à-dire à une interprétation (partielle) dans laquelle la théorie vaut faux (comme dans l'échiquier de droite ci-dessus). C'est la situation que la note 10 a désignée comme « échec », mais qui s'appelle en fait « *conflit* » en résolution SAT. Techniquement, ce contre-modèle peut être vu comme une conjonction de littéraux, qui force donc les variables de ces littéraux à prendre une valeur de vérité fixée. Par exemple, sur l'échiquier de droite ci-dessus, ce contre-modèle correspond à la conjonction « $11 \wedge -12 \wedge \ldots \wedge -33 \wedge 34 \wedge -41 \wedge -44$ ». Pour des raisons d'efficacité détaillées plus loin, l'heuristique commence par *minimiser* le contre-modèle modulo propagation unitaire : elle ne conserve qu'une conjonction minimale de littéraux qui rend la théorie fausse (après propagation unitaire) – c'est « l'analyse du conflit ». Sur l'exemple, « $11 \wedge -32$ » (l'interprétation réduite aux littéraux *choisis*) est un tel contre-modèle minimal. Autrement dit, en appelant p la théorie des 4-reines, si « $11 \wedge -32$ » vaut vrai alors p vaut faux. C'est logiquement équivalent à dire que si p vaut vrai alors « $11 \wedge -32$ » vaut faux et donc que la clause « -11 32 » vaut vrai. Plus généralement, la clause formée de l'opposé des littéraux du contre-modèle correspond toujours à une *conséquence logique* de la théorie initiale. L'ajouter à la théorie est logiquement équivalent à considérer la théorie initiale. Et c'est ce que fait une heuristique CDCL : elle étend la théorie avec cette clause « *apprise de l'analyse d'un conflit* » avant de repartir d'un modèle partiel antérieur qui ne rend pas fausse cette clause apprise (si un tel modèle partiel n'existe pas, c'est que la clause apprise est **F**, et que la théorie initiale est insatisfaisable). Cela revient à *mémoriser* le contre-modèle dans la théorie (en l'interdisant explicitement) pour éviter d'en refaire le calcul plusieurs fois. Sur l'exemple, l'heuristique CDCL ajoute donc la clause « -11 32 » à la théorie des 4-reines et repart avec le modèle partiel correspondant à l'échiquier de gauche (issu de la propagation unitaire après le choix de « 11 »). La nouvelle clause est alors unitaire dans ce modèle ; la propagation unitaire sélectionne donc « 32 » et aboutit finalement à un conflit avec la clause « 41 42 43 44 ». De ce conflit, l'heuristique CDCL apprend finalement la clause « -11 » et repart avec un modèle partiel vide, etc.

En résumé, le paradigme CDCL permet, modulo des « bons » choix de littéraux, de découvrir automatiquement le raisonnement schématisé à la Figure 3. Il y a aussi d'autres optimisations que peuvent faire les heuristiques CDCL, notamment la suppression de clauses de la théorie estimées redondantes (par exemple de clauses apprises), etc. Pour plus de détails, consulter la bible sur le sujet : *Handbook of Satisfiability* (Second Edition - April 2021 - IOS Press).

Programmation défensive formellement vérifiée

Le constat que « *la vérification est généralement nettement plus facile que la recherche* » inspire un paradigme de conception de logiciels par *programmation défensive* [21], où la recherche de solution est effectuée par un *oracle* basé sur des heuristiques efficaces, mais jugé potentiellement non fiable, et où un vérificateur rigoureux se charge de valider la correction des résultats, en signalant les résultats non validés quand il y en a. Ce paradigme est notamment très utile dans les outils de développement des logiciels, comme les compilateurs qui traduisent un programme « source » écrit dans un langage de haut-niveau, en code machine optimisé pour un processeur donné. En effet, un bug dans le compilateur pourrait introduire un bug dans le code machine généré, à l'insu des développeur·euses. Dans ce contexte, la programmation défensive cherche à vérifier que le code machine est conforme au programme source. Quand ce n'est pas le cas, la compilation échoue, ce qui est beaucoup moins problématique que de produire silencieusement un code machine incorrect. Ainsi, en pratique, la programmation défensive est appliquée sur des problèmes SAT, mais aussi sur des problèmes très différents. Pour chaque famille de problèmes, il faut donc inventer des techniques de vérification adaptées, qui peuvent se révéler très différentes du cas des problèmes SAT. Par exemple, la vérification de compilateur s'appuie (entre autres) sur des techniques d'*exécution symbolique* [22].

Vérification formelle Lorsque la correction des résultats est vraiment critique (notamment si les « résultats » sont eux-mêmes des logiciels critiques), *vérifier formellement* le vérificateur lui-même apporte une sécurité supplémentaire. C'est ce qui s'appelle la *programmation défensive formellement vérifiée*, d'acronyme PDFV. Concrètement, il s'agit de prouver formellement que l'implémentation du vérificateur est correcte. Cela nécessite aussi de formaliser sa méta-théorie (par exemple, la méta-théorie de la vérification en logique propositionnelle exposée à la section précédente). Le tout dans une logique formelle vérifiée par ordinateur. Ce serait de toute façon trop laborieux (et par conséquent pas réellement convaincant) à vérifier en mode « papier/crayon ». Des assistants à la preuve formelle tels que Coq ou Isabelle [23] ont permis d'appliquer la PDFV à des logiciels « *complexes* », comme des solveurs-SAT de l'état de l'art. [24] En particulier, ces assistants de preuve ont permis d'appliquer la

https://ebooks.iospress.nl/volume/handbook-of-satisfiability-second-edition.

21. En génie logiciel, la *programmation défensive* consiste à intégrer des vérifications à l'exécution d'un logiciel qui détectent certains comportements « inattendus » et permettent d'empêcher le logiciel de continuer son exécution comme si de rien était. Au contraire, généralement, lorsqu'un tel comportement est détecté, le logiciel est stoppé avec un message d'erreur qui aide à identifier le problème. Cette pratique aide donc à détecter, localiser et identifier des bugs. Elle empêche surtout certains bugs de rester inaperçus des programmeurs et des utilisateurs du logiciel.

22. Voir https://en.wikipedia.org/wiki/Symbolic_execution.

23. Voir https://coq.inria.fr/ et https://isabelle.in.tum.de/.

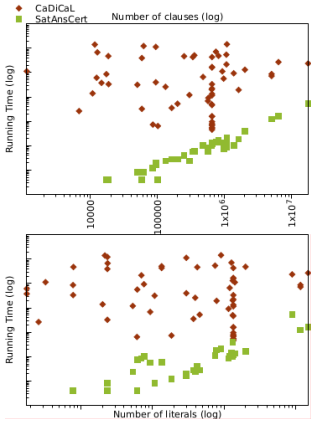
24. Expliquons maintenant la PDFV des solveurs-SAT CDCL (dont le fonctionnement est expliqué en note 20). Cette discussion s'inspire de deux logiciels. Premièrement, SatAnsCert(https://github.com/boulme/satans-cert) un vérificateur formellement vérifié en Coq des réponses de solveurs-SAT, développé à l'été 2018, par Thomas Vandendorpe et moi pendant son stage d'étudiant en 3° année de licence. Le mérite principal de ce logiciel est de montrer qu'il est possible de certifier les solveurs-SAT de l'état de l'art en 2018 de manière *légère*, c'est-à-dire avec environ 1000 lignes de formalisation Coq (scripts de preuve inclus) et quelques semaines de travail. Deuxièmement, le vérificateur Grat(https://www21.in.tum.de/~lammich/grat/) de Peter Lammich, formellement vérifié en Isabelle, qui est significativement plus efficace (mais plus complexe) que SatAnsCert.

Leur principe est très simple. Étant donnée une proposition conjonctive de booléens p (écrite dans un certain fichier), un solveur-SAT CDCL cherche à retourner : (1) soit un *interprétation des variables* qui doit donc permettre de vérifier que p est satisfaisable ; (2) soit une *liste de clauses apprises* (cf. note 20), qui doit permettre de prouver que p est insatisfaisable, et donc en particulier contenir la clause **F**. Un solveur-SAT peut aussi échouer à résoudre le problème, à cause d'un manque de place mémoire, ou d'un temps de calcul trop long, ou d'un bug interne, etc. Ici, nous nous intéressons uniquement à garantir que les réponses données par le solveur-SAT en cas de succès sont correctes.

PDFV à des logiciels avec des *spécifications complexes* [25], comme le compilateur optimisant CompCert (formalisé en Coq) ou le système d'exploitation sécurisé seL4 (formalisé en Isabelle). [26]

Assistants de preuve En fait, les logiciels Coq et Isabelle sont eux-mêmes réalisés en programmation défensive. Ils offrent tous les deux des heuristiques puissantes pour construire des preuves formelles, mais utilisent un vérificateur assez réduit pour garantir que ces heuristiques ne permettent pas de prouver des théorèmes faux. [27] Depuis plusieurs dizaines d'années que ces deux logiciels existent, nous avons maintenant un certain recul sur la quantité de bugs critiques (c'est-à-dire qui permettent *potentiellement* de prouver des théorèmes faux) découverts dans ces logiciels. Il est extrêmement faible : pour Coq, de l'ordre de un par an en moyenne. [28] Dans ces conditions, étant donné de plus le caractère interactif des preuves formelles dans ces assistants de preuve, il est extrêmement peu probable qu'un de leur bug critique permette aux utilisateur·ices de prouver un théorème faux sans que celleux-ci ne s'en aperçoivent.

Base informatique de confiance (Trusted Computing Base) Par construction, les *bugs de correction* d'un logiciel en PDFV ne peuvent que se trouver dans un sous-ensemble très réduit du logiciel qui s'appelle *la base informatique de confiance* (TCB pour *Trusted Computing Base* en anglais). Celle-ci comprend surtout la formalisation des spécifications (par exemple, dans le cas de CompCert, les lan-



Dans le cas (1), il suffit de vérifier que la proposition s'évalue sur « vrai » dans l'interprétation fournie par le solveur-SAT. Formaliser et prouver la correction de ce vérificateur est très facile. De plus, le sur-coût en temps d'exécution de cette vérification par rapport au solveur-SAT est complètement négligeable. Par exemple dans les figures ci-contre, chacun des points représente une parmi 120 propositions satisfaisables de la compétition SAT 2018. L'abscisse de chaque point donne une de ses tailles : nombre de clauses dans la figure de haut, versus nombre de littéraux dans celle du bas. Son ordonnée donne un de ses temps de calcul : pour les points de couleur orange, le temps du solveur-SAT, en l'occurrence CaDiCaL (un des plus rapides en 2018 - voir https://github.com/arminbiere/cadical), versus pour les points de couleur vert, le temps du vérificateur de SatAnsCert. Abscisse et ordonnées sont en échelle logarithmique. Ces mesures montrent que non seulement le temps de calcul du vérificateur est infime par rapport au temps du solveur-SAT, mais aussi que ce premier, au contraire du second, est fortement corrélé à la « taille » du problème.

Le cas (2) est plus complexe. À partir de la liste de clauses apprises, il faut commencer par construire une preuve de **F**, ce qui demande encore une algorithmique sophistiquée, comme expliqué en note 17, surtout qu'il est important d'obtenir une preuve élaguée de théorème intermédiaire inutile (pour économiser l'espace mémoire). Par contre, cet outil intermédiaire, qui transforme un « squelette de preuve » en une « preuve détaillée », n'a pas besoin d'être lui-même formellement vérifié. Seul le vérificateur de la « preuve détaillée » nécessite d'être formellement vérifié, ce qui dans le cas de SatAnsCert est assez simple. Le sur-coût en temps d'exécution de la vérification de la preuve trouvée par le solveur-SAT n'est là pas négligeable. Ainsi, la vérification effectuée par Grat prend souvent un temps comparable à celui pris par le solveur-SAT, mais parfois un temps jusqu'à 4 fois plus long (voir https://satcompetition.github.io/2023/downloads/proposals/grat.pdf). Ces temps peuvent être multipliés par 2 ou 3 dans le cas de SatAnsCert. Ces sur-coûts semblent en grande partie induits par l'imposante taille (en giga-octets) des preuves détaillées : celles-ci transitent en effet par le système de fichiers de l'ordinateur, qui est de beaucoup plus grande taille que la mémoire vive du processeur, mais dont les accès en lecture/écriture sont beaucoup plus lents. Malgré ça, le sur-coût de la vérification semble acceptable : le quotient du temps d'exécution du vérificateur par celui du solveur-SAT reste borné par une (petite) constante. Cela correspond à ce qui était naïvement espéré : le vérificateur n'effectue que des calculs déjà faits par le solveur-SAT.

25. La spécification d'un logiciel décrit ce que doit faire le logiciel : c'est en quelque sorte un « mode d'emploi » complètement détaillé.
26. Voir https://compcert.org et https://sel4.systems.
27. Certains prototypes expérimentaux de ces logiciels ont même pu partiellement s'auto-vérifier (ce qui bien sûr n'offre pas une garantie absolu). C'est donc une forme de PDFV réflexive.
28. Cf. https://github.com/coq/coq/blob/master/dev/doc/critical-bugs

gages de programmation d'entrée et de sortie du compilateur), et éventuellement les composants du logiciel non couverts par la PDFV. [29]

Dans le cas de CompCert, les spécifications formelles sont complexes : elles nécessitent plusieurs milliers lignes de code Coq. Mais beaucoup moins que le reste du logiciel qui comprend des centaines de milliers de lignes de code. Depuis plus de 15 ans d'existence, ses bugs critiques [30] sont exclusivement apparus dans sa TCB, et jamais dans une partie couverte par la PDFV. Et c'est une très bonne nouvelle, car la TCB est non seulement moins complexe que le reste du logiciel, mais elle évolue aussi beaucoup plus lentement (par exemple, la définition d'un langage de programmation évolue beaucoup plus lentement que l'implémentation de son compilateur). Finalement, le nombre de bugs critiques dans CompCert est lui même très faible : moins d'une dizaine par an (très rapidement corrigés) contre plusieurs centaines (qui restent la plupart du temps non corrigés pendant plusieurs mois - les optimisations responsables étant par exemple simplement désactivées) pour des compilateurs traditionnels comme GCC ou LLVM. [31]

En conclusion, la PDFV est une méthode effective pour rendre les logiciels beaucoup plus fiables, en complément des méthodes traditionnelles du génie logiciel. Pour la généraliser, il faut inventer les techniques de vérification défensive adaptées aux heuristiques de l'état de l'art dans chaque domaine d'application. Pour un complément de détails, voir par exemple mon manuscrit d'Habilitation à Diriger des Recherches https://hal.science/tel-03356701.

29. Les TCB de SatAnsCert et GRAT (voir note 24) sont assez comparables. Elles comprennent l'assistant de preuve (et le compilateur de programmes prouvés avec cet assistant) ; la spécification formelle des solveurs-SAT (quelques dizaines de lignes dans la logique formelle de l'assistant de preuves, définissant essentiellement la représentation des propositions conjonctives et leur satisfaisabilité) ; un composant logiciel (dont le code source fait quelques dizaines de lignes) qui lit la suite des caractères du fichier d'entrée et la convertit dans la représentation formalisée des propositions (définissant, par exemple, une proposition comme une liste de clauses où chaque clause est un ensemble de littéraux, chaque littéral étant un entier non nul) ; et enfin, la partie « principale » du logiciel (dont le code source fait aussi quelques dizaines de lignes) qui enchaîne les appels aux différents composants du logiciel, dont le vérificateur, et affiche le résultat.

Pour compléter, listons les composants logiciels exclus de la TCB : le vérificateur et sa (méta)preuve formelle, mais aussi le solveur-SAT (des dizaines de milliers de ligne de code pour un solveur-SAT de l'état de l'art) et les outils de transformation des preuves retournées par le solveur-SAT via le système de fichiers, dont la correction correspond au succès final du vérificateur.

Même si le nombre de lignes d'un fragment de code n'est qu'une indication très grossière de sa « complexité », c'est une mesure simple qui en donne un premier aperçu. Pour ces solveurs-SAT en PDFV, si on ne considère que le *code source* spécifique au logiciel (et pas les outils, compilateurs ou assistants de preuves, qui *traitent* ce code source), on peut estimer que la taille (en nombre de lignes) de la TCB est d'un ordre de grandeur 100 fois plus petit que celle du reste du logiciel. Et la technique de programmation défensive permet d'obtenir une taille de texte en logique formelle (incluant définitions, énoncés et scripts de preuve) d'un ordre de grandeur 10 fois plus petit que le reste du code source.

30. Rappelons que, dans le cas de CompCert, ils correspondent à des bugs introduits silencieusement par le compilateur dans le programmes compilé, à partir d'un programme source sans bug.

31. D'après l'étude « An empirical study of optimization bugs in GCC and LLVM »(https://doi.org/10.1016/j.jss.2020.110884) de Zhide Zhou et ses coauteurs en 2020, les développeur·euses de GCC et LLVM prennent plus d'un an en moyenne pour corriger un bug critique d'optimisation. Dans mon expérience, une correction de bug critique dans la TCB de CompCert ne prend généralement que quelques jours.

Conventions de nommage : « L*n* » liste les reines plaçables en ligne n ; « H*x* » et « I*x* » sont *généralement* (mais pas toujours) utilisés pour introduire le littéral x par résolution arrière (après une différence sur $-x$) ; « Z*x* » est similaire à « H*x* » mais en échangeant x et $-x$. Seul les théorèmes réduits à des littéraux ne sont pas nommés.

```
L2: 23 24 25 26 27 28 ⊖ 11 ⊖ -21 -11 ⊖ -22 -11 ⊇ 21 22 23 24 25 26 27 28;
L3: 32 34 35 36 37 38 ⊖ 11 ⊖ -31 -11 ⊖ -33 -11 ⊇ 31 32 33 34 35 36 37 38;
L4: 42 43 45 46 47 48 ⊖ 11 ⊖ -41 -11 ⊖ -44 -11 ⊇ 41 42 43 44 45 46 47 48;
L5: 52 53 54 56 57 58 ⊖ 11 ⊖ -51 -11 ⊖ -55 -11 ⊇ 51 52 53 54 55 56 57 58;
L6: 62 63 65 67 68 ⊖ 11 ⊖ -61 -11 ⊖ -64 ⊖ -66 -11 ⊇ 61 62 63 64 65 66 67 68;
L7: 72 73 74 75 76 78 ⊖ 11 ⊖ -71 -11 ⊖ -77 -11 ⊇ 71 72 73 74 75 76 77 78;
L8: 82 84 85 86 87 ⊖ 11 ⊖ -81 -11 ⊖ -83 ⊖ -88 -11 ⊇ 81 82 83 84 85 86 87 88;
H35: -35 63 67 ⊖ -62 -35 ⊖ -65 -35 ⊖ -68 -35 ⊇ L6;
H47: -47 32 34 35 ⊖ -36 -47 ⊖ -37 -47 ⊖ -38 -47 ⊇ L3;
H42: -42 53 56 57 58 73 78 ⊖ -52 -42 ⊖ L5 ⊖ -72 -42 ⊖ -74 -54 ⊖ -75 -42 ⊖ L7 ⊖ -82 -42 ⊖ -84 -54 ⊖ -85 -76 ⊖ -86 -42 ⊖
     -87 -54 ⊇ L8;
H68: -68 32 34 35 43 45 53 56 73 78 ⊖ -57 -68 ⊖ -58 -68 ⊖ H42 ⊖ -46 -68 ⊖ -48 -68 ⊖ L4 ⊖ -36 -47 ⊖ -37 -47 ⊖ -38 -68 ⊇ L3;
H38: -38 43 45 47 53 56 63 67 68 73 78 ⊖ -65 -38 ⊖ L6 ⊖ -42 -62 ⊖ -48 -38 ⊖ L4 ⊖ -52 -62 ⊖ -57 -46 ⊖ -58 -38 ⊖ L5 ⊖ -72
     -62 ⊖ -74 -38 ⊖ -76 -46 ⊖ L7 ⊖ -82 -62 ⊖ -84 -54 ⊖ -85 -75 ⊖ -86 -46 ⊖ -87 -54 ⊇ L8;
H37: -37 43 45 47 53 56 73 78 ⊖ -46 -37 ⊖ -48 -37 ⊖ L4 ⊖ -57 -37 ⊖ H42 ⊖ -72 -42 ⊖ -75 -42 ⊖ -76 -58 ⊖ L7 ⊖ -82 -37 ⊖ -84
     -74 ⊖ -85 -58 ⊖ -86 -42 ⊖ -87 -37 ⊇ L8;
I42: -42 63 67 68 72 73 76 78 ⊖ -62 -42 ⊖ L6 ⊖ -75 -42 ⊖ L7 ⊖ -82 -42 ⊖ -84 -74 ⊖ -85 -74 ⊖ -86 -42 ⊖ -87 -65 ⊇ L8;
-23 ⊖ -63 -23 ⊖ -67 -23 ⊖ H35 ⊖ -32 -23 ⊖ -34 -23 ⊖ H47 ⊖ -43 -23 ⊖ -45 -23 ⊖ -53 -23 ⊖ -56 -23 ⊖ -73 -23 ⊖ -78 -23 ⊖ H37
     ⊖ H68 ⊖ H38 ⊖ L3 ⊖ -72 -36 ⊖ -76 -36 ⊖ I42 ⊖ -46 -36 ⊖ L4 ⊖ -75 -48 ⊖ L7 ⊖ -52 -74 ⊖ -54 -36 ⊖ -57 -48 ⊖ -58 -36 ⊇
     L5;
H48: -48 25 26 27 63 67 68 72 76 86 ⊖ -23 ⊖ -28 -48 ⊖ L2 ⊖ -74 -24 ⊖ -75 -48 ⊖ -78 -48 ⊖ L7 ⊖ -62 -73 ⊖ L6 ⊖ -82 -73 ⊖
     -84 -48 ⊖ -85 -65 ⊖ -87 -65 ⊇ L8;
H43: -43 25 26 27 54 56 58 63 67 68 72 76 86 ⊖ -52 -43 ⊖ -53 -43 ⊖ L5 ⊖ -23 ⊖ -24 -57 ⊖ L2 ⊖ -65 -43 ⊖ L6 ⊖ -82 -62 ⊖ -84
     -57 ⊖ -87 -57 ⊖ L8 ⊖ -73 -62 ⊖ -74 -85 ⊖ -75 -57 ⊖ -78 -28 ⊇ L7;
Z68: 68 25 26 27 45 46 47 54 56 58 63 67 72 76 86 ⊖ H43 ⊖ H48 ⊖ L4 ⊖ -52 -42 ⊖ -53 -42 ⊖ L5 ⊖ -62 -42 ⊖ L6 ⊖ -82 -42 ⊖
     -84 -57 ⊖ -85 -65 ⊖ -87 -57 ⊇ L8;
H36: -36 47 63 67 ⊖ -25 -36 ⊖ -26 -36 ⊖ -27 -36 ⊖ -45 -36 ⊖ -46 -36 ⊖ -54 -36 ⊖ -56 -36 ⊖ -58 -36 ⊖ -72 -36 ⊖ -76 -36 ⊖
     -86 -36 ⊖ Z68 ⊖ -23 ⊖ -24 -68 ⊖ -28 -68 ⊇ L2;
I68: -68 32 34 35 36 ⊖ -38 -68 ⊖ L3 ⊖ -23 ⊖ -24 -68 ⊖ -26 -37 ⊖ -27 -37 ⊖ -28 -68 ⊖ L2 ⊖ -43 -25 ⊖ -45 -25 ⊖ -46 -68 ⊖
     H47 ⊖ -48 -68 ⊖ L4 ⊖ -53 -42 ⊖ -57 -68 ⊖ -58 -68 ⊖ -73 -37 ⊖ -78 -68 ⊖ H42 ⊖ -72 -42 ⊖ -74 -56 ⊖ -75 -25 ⊖ -76 -56 ⊇
      L7;
H56: -56 32 34 35 63 67 ⊖ -47 -56 ⊖ H36 ⊖ I68 ⊖ -65 -56 ⊖ L6 ⊖ -72 -62 ⊖ -73 -62 ⊖ -74 -56 ⊖ -76 -56 ⊖ -78 -56 ⊖ L7 ⊖ -82
     -62 ⊖ -84 -75 ⊖ -85 -75 ⊖ -86 -75 ⊖ -38 -56 ⊖ L3 ⊖ -87 -37 ⊇ L8;
H62: -62 45 46 47 48 56 57 58 ⊖ -42 -62 ⊖ L4 ⊖ -54 -43 ⊖ -52 -62 ⊖ -53 -62 ⊇ L5;
H78: -78 32 34 35 63 67 ⊖ H47 ⊖ H36 ⊖ -38 -78 ⊖ L3 ⊖ -45 -78 ⊖ -46 -37 ⊖ -48 -37 ⊖ -56 -78 ⊖ -57 -37 ⊖ -58 -78 ⊖ H62 ⊖
     -68 -78 ⊖ L6 ⊖ -23 ⊖ -25 -65 ⊖ -26 -37 ⊖ -27 -37 ⊖ -28 -78 ⊖ L2 ⊖ -42 -24 ⊖ -43 -65 ⊇ L4;
H65: -65 26 27 28 46 47 48 ⊖ -23 ⊖ -25 -65 ⊖ L2 ⊖ -42 -24 ⊖ -43 -65 ⊖ -45 -65 ⊇ L4;
Z45: 45 -37 47 56 63 67 68 78 ⊖ -26 -37 ⊖ -27 -37 ⊖ -28 -37 ⊖ -46 -37 ⊖ -48 -37 ⊖ H65 ⊖ L6 ⊖ -42 -62 ⊖ L4 ⊖ -52 -62 ⊖ -53
     -62 ⊖ -54 -43 ⊖ -57 -37 ⊖ L5 ⊖ -23 ⊖ -25 -58 ⊖ L2 ⊖ -72 -62 ⊖ -73 -37 ⊖ -74 -24 ⊖ -76 -43 ⊖ L7 ⊖ -82 -37 ⊖ -84 -24 ⊖
      -85 -58 ⊖ -86 -75 ⊖ -87 -37 ⊇ L8;
I37: -37 47 56 63 67 68 78 ⊖ -26 -37 ⊖ -27 -37 ⊖ -28 -37 ⊖ -46 -37 ⊖ -48 -37 ⊖ H65 ⊖ L6 ⊖ -23 ⊖ Z45 ⊖ -25 -45 ⊖ L2 ⊖ -82
     -37 ⊖ -84 -24 ⊖ -85 -45 ⊖ -87 -37 ⊖ L8 ⊖ -52 -62 ⊖ -53 -86 ⊖ -54 -24 ⊖ -57 -37 ⊖ L5 ⊖ -72 -62 ⊖ -73 -37 ⊖ -74 -24 ⊖
     -75 -45 ⊖ -76 -58 ⊇ L7;
H45: -45 26 27 28 52 53 56 58 ⊖ -23 ⊖ -25 -45 ⊖ L2 ⊖ -54 -24 ⊖ -57 -24 ⊇ L5;
Z32: 32 34 35 63 67 ⊖ H47 ⊖ H36 ⊖ H56 ⊖ H78 ⊖ I68 ⊖ I37 ⊖ L3 ⊖ -65 -38 ⊖ L6 ⊖ -26 -62 ⊖ -27 -38 ⊖ -28 -38 ⊖ -52 -62 ⊖ -53
     -62 ⊖ -58 -38 ⊖ H45 ⊖ -73 -62 ⊖ H38 ⊖ -54 -43 ⊖ L5 ⊖ -72 -62 ⊖ -74 -38 ⊖ -75 -57 ⊖ -76 -43 ⊇ L7;
H28: -28 42 43 45 52 53 54 56 ⊖ -58 -28 ⊖ L5 ⊖ -46 -57 ⊖ -47 -57 ⊖ -48 -28 ⊇ L4;
I62: -62 24 25 43 45 52 54 56 84 ⊖ -42 -62 ⊖ -53 -62 ⊖ H28 ⊖ -23 ⊖ -26 -62 ⊖ L2 ⊖ -57 -27 ⊖ L5 ⊖ -47 -27 ⊖ -48 -58 ⊖ L4 ⊖
     -82 -62 ⊖ -85 -58 ⊖ -86 -46 ⊖ -87 -27 ⊇ L8;
H58: -58 43 45 47 62 63 67 72 74 78 84 87 ⊖ -68 -58 ⊖ L6 ⊖ -75 -65 ⊖ -76 -58 ⊖ L7 ⊖ -82 -73 ⊖ -85 -65 ⊖ L8 ⊖ -42 -86 ⊖
     -46 -86 ⊖ -48 -58 ⊇ L4;
H27: -27 43 45 52 54 56 62 63 67 74 78 84 ⊖ -47 -27 ⊖ -72 -27 ⊖ -87 -27 ⊖ H58 ⊖ -57 -27 ⊖ L5 ⊖ -73 -53 ⊖ -75 -53 ⊖ L7 ⊖
     -85 -76 ⊖ -86 -53 ⊖ L8 ⊖ -42 -53 ⊖ -46 -82 ⊖ L4 ⊖ -65 -76 ⊖ -68 -48 ⊇ L6;
I48: -48 24 25 27 ⊖ -23 ⊖ -26 -48 ⊖ -28 -48 ⊇ L2;
I28: -28 43 45 48 62 63 67 84 ⊖ -82 -28 ⊖ -68 -28 ⊖ L6 ⊖ -85 -65 ⊖ -87 -65 ⊖ L8 ⊖ -42 -86 ⊖ -46 -86 ⊖ L4 ⊖ -32 -65 ⊖ H35 ⊖
      Z32 ⊖ -52 -34 ⊖ -53 -86 ⊖ -54 -34 ⊖ -56 -34 ⊖ -57 -47 ⊖ -58 -28 ⊇ L5;
H87: -87 52 53 54 56 62 63 67 ⊖ -65 -87 ⊖ -57 -87 ⊖ L5 ⊖ -68 -58 ⊇ L6;
Z47: 47 43 45 46 48 52 53 54 56 62 63 67 74 78 84 86 ⊖ L4 ⊖ -72 -42 ⊖ -82 -42 ⊖ H87 ⊖ L8 ⊖ -65 -85 ⊖ H58 ⊖ L5 ⊖ -68 -57 ⊇
     L6;
H34: -34 63 67 ⊖ -24 -34 ⊖ -25 -34 ⊖ -43 -34 ⊖ -45 -34 ⊖ -52 -34 ⊖ -54 -34 ⊖ -56 -34 ⊖ -84 -34 ⊖ I62 ⊖ -74 -34 ⊖ -78 -34 ⊖
      H27 ⊖ I48 ⊖ I28 ⊖ -23 ⊖ L2 ⊖ -46 -26 ⊖ -53 -26 ⊖ -86 -26 ⊖ Z47 ⊖ -57 -47 ⊖ -58 -47 ⊇ L5;
I47: -47 24 28 52 54 57 58 ⊖ -56 -47 ⊖ L5 ⊖ -63 -53 ⊖ -67 -47 ⊖ H34 ⊖ -35 -53 ⊖ Z32 ⊖ -62 -32 ⊖ -65 -32 ⊖ L6 ⊖ -72 -32 ⊖
     -73 -53 ⊖ -74 -47 ⊖ -76 -32 ⊖ -78 -68 ⊖ L7 ⊖ -23 ⊖ -25 -75 ⊖ -26 -53 ⊖ -27 -47 ⊇ L2;
Z67: 67 35 63 ⊖ H34 ⊖ Z32 ⊖ -62 -32 ⊖ -65 -32 ⊖ L6 ⊖ -24 -68 ⊖ -28 -68 ⊖ -52 -32 ⊖ -54 -32 ⊖ -57 -68 ⊖ -58 -68 ⊖ I47 ⊖
     -42 -32 ⊖ -43 -32 ⊖ -46 -68 ⊖ -48 -68 ⊖ L4 ⊖ -82 -32 ⊖ -85 -45 ⊖ -86 -68 ⊖ -87 -32 ⊖ L8 ⊖ -72 -32 ⊖ -74 -84 ⊖ -75
     -45 ⊖ -76 -32 ⊖ -78 -68 ⊖ L7 ⊖ -53 -73 ⊖ -56 -45 ⊇ L5;
H53: -53 24 25 27 43 45 47 ⊖ -42 -53 ⊖ I48 ⊖ L4 ⊖ -82 -46 ⊖ -35 -53 ⊖ -63 -53 ⊖ Z67 ⊖ -85 -67 ⊖ -86 -53 ⊖ -87 -67 ⊖ L8 ⊖
     -73 -53 ⊖ -74 -84 ⊖ -75 -84 ⊖ -76 -67 ⊖ -78 -67 ⊖ L7 ⊖ -32 -72 ⊖ -34 -67 ⊖ -36 -46 ⊖ -37 -67 ⊖ -23 ⊖ -26 -46 ⊖ L2 ⊖
     -38 -28 ⊇ L3;
Z25: 25 24 27 34 35 37 43 45 47 52 56 57 58 85 87 ⊖ H53 ⊖ L5 ⊖ -32 -54 ⊖ -36 -54 ⊖ L3 ⊖ -23 ⊖ -28 -38 ⊖ L2 ⊖ -46 -26 ⊖
     I48 ⊖ L4 ⊖ -82 -42 ⊖ -84 -54 ⊖ -86 -42 ⊇ L8;
H24: -24 52 56 57 58 76 78 85 87 ⊖ -84 -24 ⊖ -54 -24 ⊖ L5 ⊖ -86 -53 ⊖ L8 ⊖ -72 -82 ⊖ -73 -53 ⊖ -74 -24 ⊖ -42 -24 ⊖ -43
     -53 ⊖ -35 -24 ⊖ -63 -53 ⊖ Z67 ⊖ -45 -67 ⊖ -46 -24 ⊖ -47 -67 ⊖ L4 ⊖ -75 -48 ⊇ L7;
H82: -82 34 35 36 37 73 75 76 78 ⊖ -52 -82 ⊖ -72 -82 ⊖ L7 ⊖ -54 -74 ⊖ -63 -74 ⊖ Z67 ⊖ -56 -67 ⊖ -57 -67 ⊖ -58 -67 ⊖ L5 ⊖
     -42 -82 ⊖ -43 -53 ⊖ -45 -67 ⊖ -46 -82 ⊖ -47 -67 ⊖ L4 ⊖ -32 -82 ⊖ -38 -48 ⊇ L3;
I53: -53 -25 -67 35 43 ⊖ -34 -67 ⊖ -36 -25 ⊖ -37 -67 ⊖ -73 -53 ⊖ -75 -25 ⊖ -76 -67 ⊖ -78 -67 ⊖ H82 ⊖ -85 -67 ⊖ -86 -53 ⊖
     -87 -67 ⊖ L8 ⊖ -74 -84 ⊖ L7 ⊖ -32 -72 ⊖ L3 ⊖ -42 -53 ⊖ -45 -67 ⊖ -47 -67 ⊖ -48 -84 ⊖ L4 ⊇ -25 -38 -46 -53 -67 -72
     -84;
Z43: 43 -67 35 52 ⊖ -56 -67 ⊖ -57 -67 ⊖ -58 -67 ⊖ -76 -67 ⊖ -78 -67 ⊖ -85 -67 ⊖ -87 -67 ⊖ H24 ⊖ -27 -67 ⊖ -34 -67 ⊖ -37
     -67 ⊖ -45 -67 ⊖ -47 -67 ⊖ Z25 ⊖ I53 ⊖ L5 ⊖ -72 -54 ⊖ -74 -54 ⊖ -75 -25 ⊖ L7 ⊖ -32 -54 ⊖ -36 -25 ⊖ L3 ⊖ -82 -73 ⊖
     -84 -54 ⊖ L8 ⊖ -42 -86 ⊖ -46 -86 ⊖ -48 -38 ⊇ L4;
Z52: 52 -67 35 ⊖ Z43 ⊖ -53 -43 ⊖ -54 -43 ⊖ -56 -67 ⊖ -57 -67 ⊖ -58 -67 ⊇ L5;
H86: -86 32 34 35 37 42 43 45 47 ⊖ -36 -86 ⊖ -46 -86 ⊖ L4 ⊖ -38 -48 ⊇ L3;
Z35: 35 -67 ⊖ Z52 ⊖ -82 -52 ⊖ -85 -67 ⊖ -32 -52 ⊖ -34 -67 ⊖ -37 -67 ⊖ -42 -52 ⊖ -43 -52 ⊖ -45 -67 ⊖ -47 -67 ⊖ H86 ⊖ -87
     -67 ⊖ L8 ⊖ -23 ⊖ -24 -84 ⊖ -25 -52 ⊖ -27 -67 ⊖ I48 ⊖ L4 ⊖ -26 -46 ⊖ L2 ⊖ -73 -28 ⊖ -72 -52 ⊖ -74 -52 ⊖ -75 -84 ⊖
     -76 -67 ⊖ -78 -67 ⊇ L7;
I78: -78 52 53 54 57 ⊖ -56 -78 ⊖ -58 -78 ⊇ L5;
H84: -84 52 53 54 72 73 74 ⊖ -75 -84 ⊖ -57 -84 ⊖ I78 ⊖ L7 ⊖ -56 -76 ⊖ -58 -76 ⊇ L5;
H57: -57 43 45 84 85 ⊖ -46 -57 ⊖ -47 -57 ⊖ -48 -57 ⊖ L4 ⊖ -82 -42 ⊖ -86 -42 ⊖ -87 -57 ⊇ L8;
I58: -58 27 43 45 72 73 74 78 ⊖ -76 -58 ⊖ L7 ⊖ -42 -75 ⊖ -47 -58 ⊖ -48 -75 ⊖ L4 ⊖ -23 ⊖ -24 -46 ⊖ -25 -58 ⊖ -26 -46 ⊖ -28
     -58 ⊇ L2;
-63 ⊖ -52 -63 ⊖ -53 -63 ⊖ -54 -63 ⊖ -72 -63 ⊖ -73 -63 ⊖ -74 -63 ⊖ H84 ⊖ -43 -63 ⊖ -45 -63 ⊖ -85 -63 ⊖ H57 ⊖ I78 ⊖ -27 -63
     ⊖ I58 ⊖ L5 ⊖ -76 -56 ⊖ L7 ⊖ -42 -75 ⊖ -46 -56 ⊖ -47 -56 ⊖ -48 -75 ⊇ L4;
67 ⊖ -63 ⊖ H35 ⊇ Z67;
F ⊖ 67 ⊖ Z35 ⊖ -23 ⊖ -24 -35 ⊖ -25 -35 ⊖ -26 -35 ⊖ -27 -67 ⊖ L2 ⊖ -45 -67 ⊖ -46 -35 ⊖ -47 -67 ⊖ I48 ⊖ -53 -35 ⊖ -56 -67 ⊖
     -57 -67 ⊖ -58 -67 ⊖ -73 -28 ⊖ -78 -67 ⊖ H42 ⊖ L4 ⊖ -52 -43 ⊖ -54 -43 ⊇ L5
```

FIGURE 6 – Preuve formelle que le problème en Figure 2 n'a pas d'autre solution que celle en Figure 5