



HAL
open science

Introduction à la CFD

Bouhelal Abdelhamid, Arezki Smaili

► **To cite this version:**

Bouhelal Abdelhamid, Arezki Smaili. Introduction à la CFD. École d'ingénieur. Introduction to CFD (Computational Fluid Dynamics), Algérie. 2022, pp.106. hal-04427690

HAL Id: hal-04427690

<https://hal.science/hal-04427690>

Submitted on 31 Jan 2024

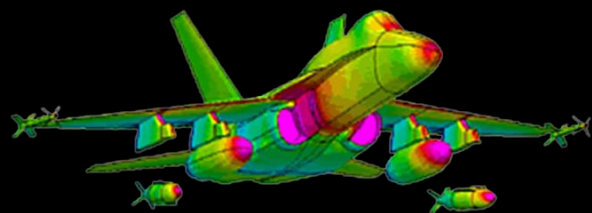
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



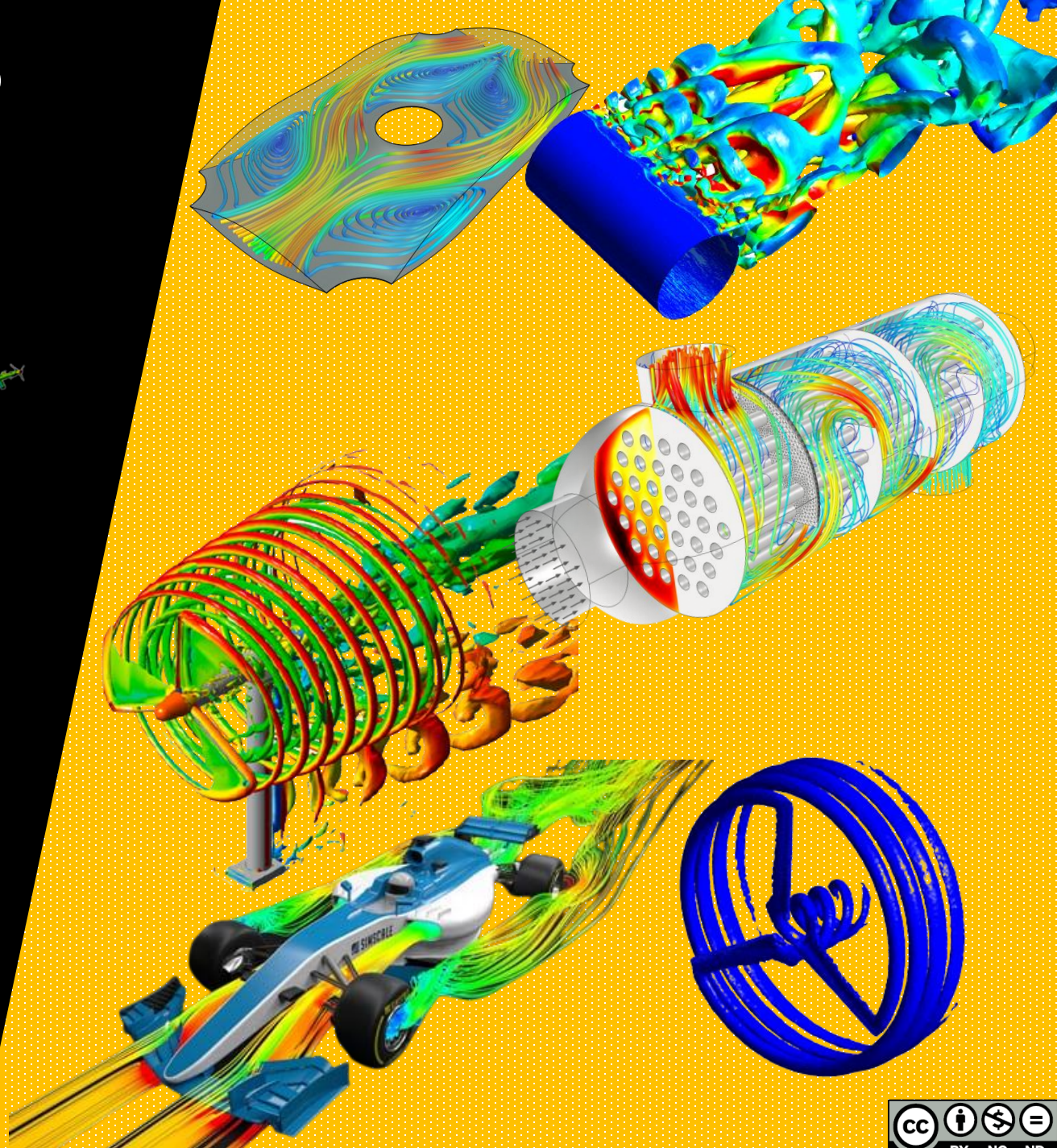
Ecole Nationale Polytechnique (ENP)
Département de Génie Mécanique



Cours

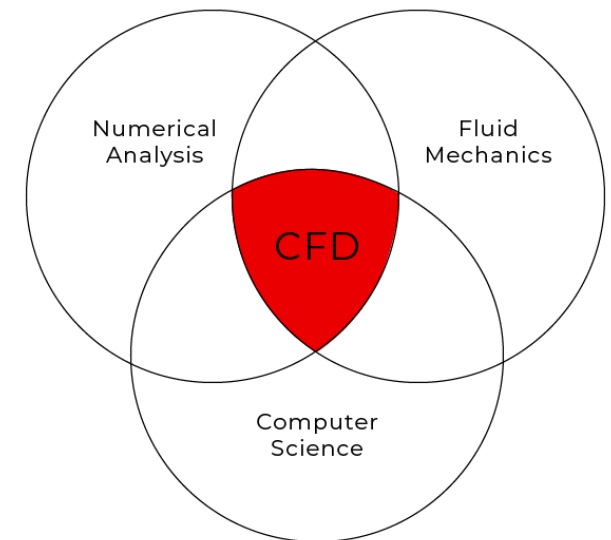
Introduction à la CFD (Computational Fluid Dynamics)

Dr. BOUHELAL Abdelhamid | Pr. SMAILI Arezki
Ecole Nationale Polytechnique, Alger



Qu'est ce que la CFD ?

- La CFD (**Computational Fluid Dynamics**) ou la dynamique des fluides numérique est la science permettant de prédire les caractéristiques des écoulements des fluides, le transfert thermique, le transfert de masse, les réactions chimiques en résolvant les **équations différentielles** qui régissent ces processus à partir d'un codage **numérique**.
- L'écoulement des fluides est couramment étudié de l'une des trois manières suivantes:
 - Dynamique des fluides expérimentale.
 - Dynamique des fluides théorique.
 - **Dynamique des fluides numérique (CFD)**.
- La CFD est principalement basée sur la **résolution** des équations de Navier-Stokes **numériquement** à l'aide d'un **ordinateur**.



Pourquoi utiliser la CFD ?

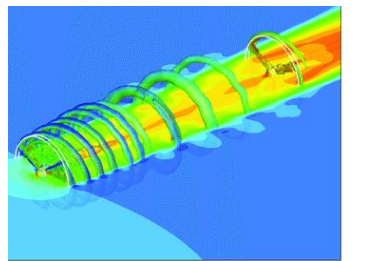
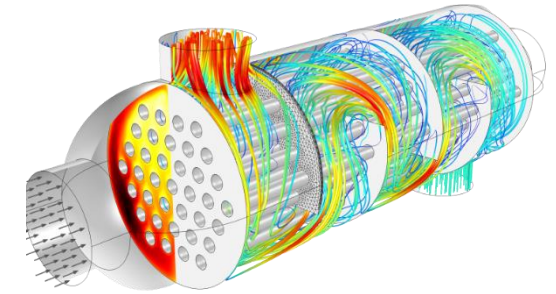
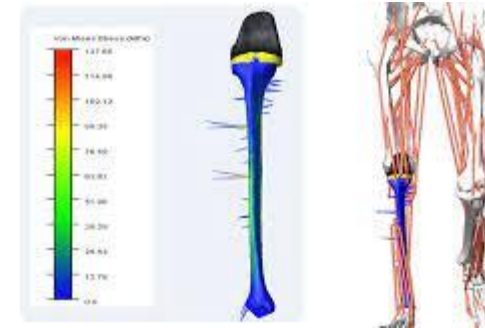
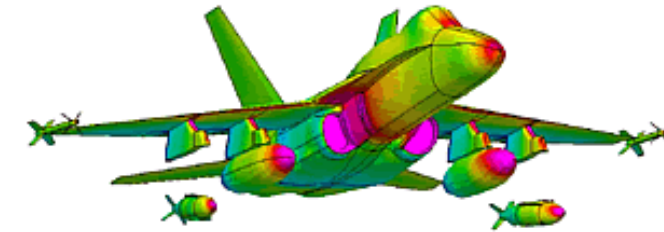
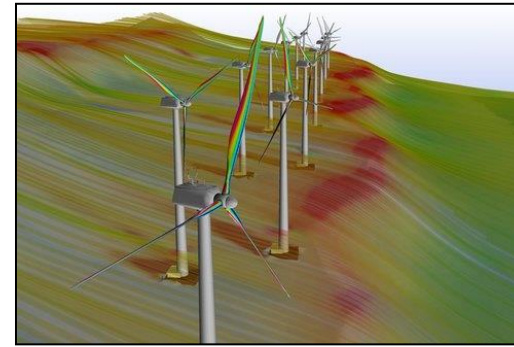
- Avantages de l'utilisation la CFD par rapport l'expérimental:
 - CFD fournit une base de données haute fidélité pour diagnostiquer le champ d'écoulement.
 - Simulation de phénomènes physiques difficiles à expérimenter (simulations grandeur nature: e.g., navires et avions; Effets environnementaux: e.g., éoliennes, météo,... ; phénomènes dangereux: e.g., combustion, explosion, etc.;).

Mesure expérimentale	Simulation CFD
Coûteuse	Moins chère
Lente	Rapide
Séquentielle	Parallèle
Mono usage	Multi-usages

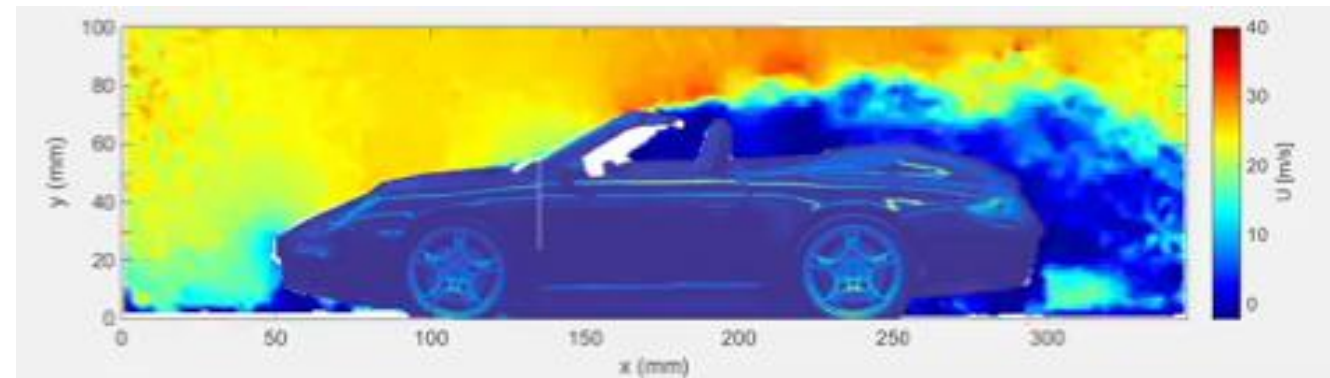
- La CFD, en pratique, est utilisée pour:
 - Études de conception et optimisation de (nouveaux) produits;
 - Études des performances de systèmes/installations;
 - Fournir des données complémentaires aux données théoriques et expérimentales.

Applications de la CFD

- Quelques exemples d'applications:
 - Aérodynamique;
 - Hydrodynamique;
 - Energies renouvelables;
 - Turbomachines;
 - Électroniques;
 - Génie des procédés chimiques;
 - Génie maritime;
 - Combustion;
 - Génie de l'environnement;
 - Sports;
 - Génie biomédical, etc.

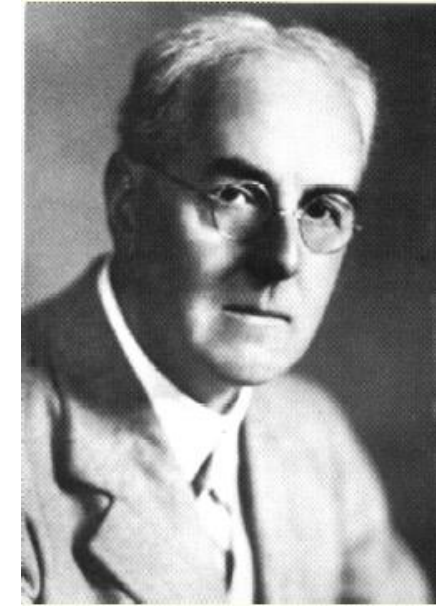
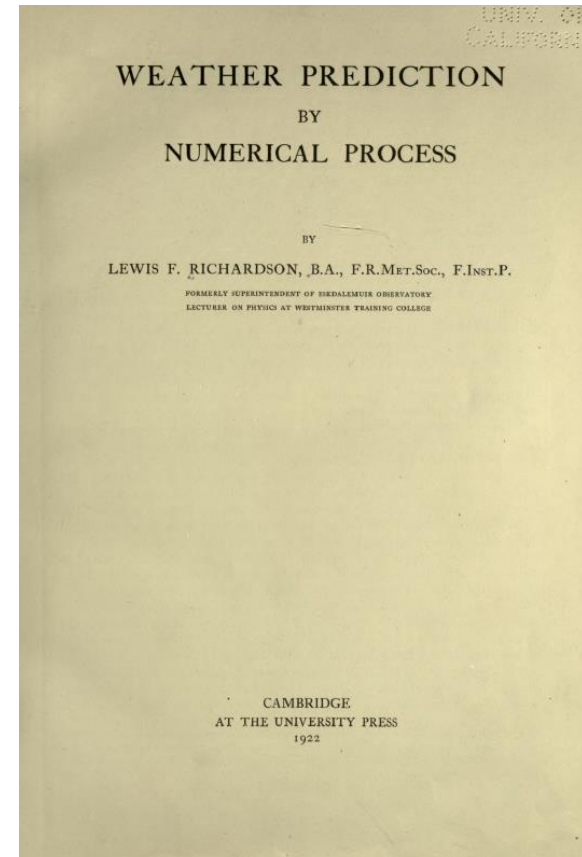


Champ de vitesse autour d'une maquette de voiture.



Bref historique

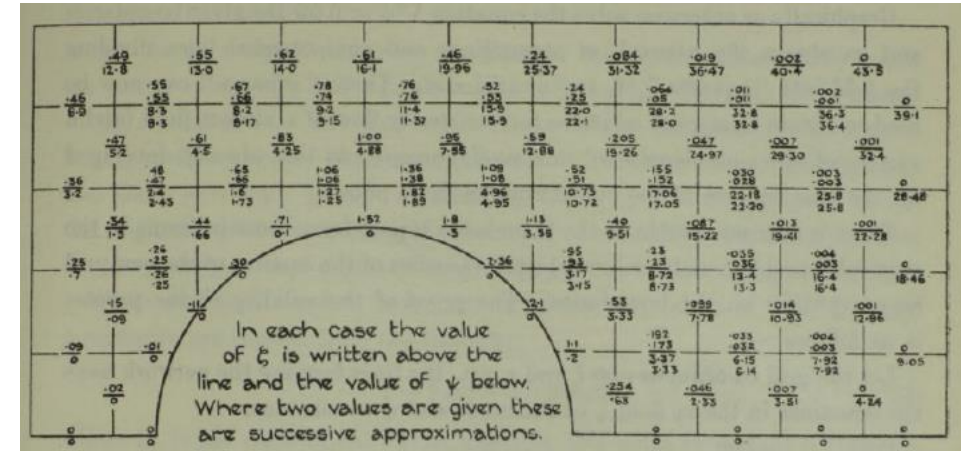
- Premiers travaux CFD en 1922.
- Richardson a résolu manuellement les équations de Laplace en utilisant la méthode des différences finies: Application prévision météorologique.
- Il a introduit le principe de calcul parallèle: Richardson à proposer une solution qu'il a appelée "*l'usine de prévisions*".
 - L'« usine » aurait rempli un vaste stade de 64 000 personnes.
 - Chacun, armé d'une calculatrice mécanique, effectuerait une partie du calcul.



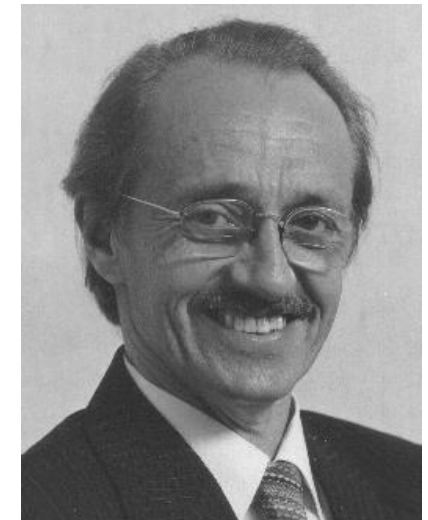
Lewis Fry Richardson
(1881 - 1953)

- A.Thom (1933): Première solution numérique pour un écoulement autour un cylindre.

A.Thom (*The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds*), Proc. Royal Society, A141, pp. 651-666, London, 1933.



- Au cours des années 1970, un groupe travaillant sous la direction de Pr. Brian Spalding, (London), développe:
 - Codes d'écoulements paraboliques (GENMIX).
 - Codes basés sur la Vorticité-fonction de courant.
 - Le principe de la méthode des volumes finis.
 - L'algorithme SIMPLE (couplage vitesse-pression).
 - La forme des équations $k - \epsilon$ (utilisées aujourd'hui).
- En 1980, Suhas V. Patankar (encadré par Spalding) a publié *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, probablement le livre le plus influent sur la CFD à ce jour. (La base de la méthode des volumes finis).



Brian Spalding
(1923 - 2016)

- Au cours des années 1980-2000, la CFD était utilisée principalement pour la recherche à partir de codes "maison": quand on voulait effectuer un calcul CFD, il fallait écrire un programme.
- Il s'agit de la période au cours de laquelle les codes ou les logiciels CFD commerciaux se sont développés dont la plupart sont disponibles aujourd'hui:
 - Fluent (UK and US).
 - CFX (UK and Canada).
 - Polyflow (Belgium).
 - Phoenix (UK).
 - Star CCM+ (UK).
 - Flow 3d (US).
 - ESI/CFDRC (US).
 - SCRYU (Japan).

Voir le site: www.cfdreview.com

Logiciels CFD aujourd'hui

Commercial codes:

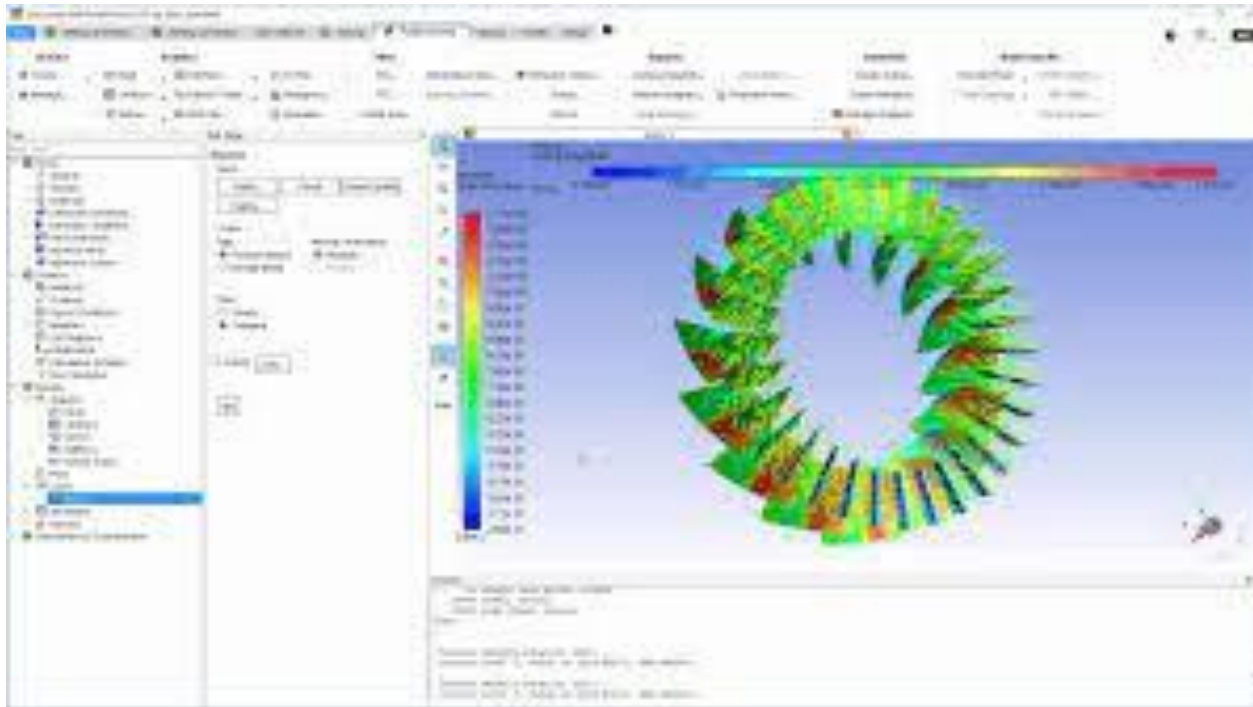
- Ansys-Fluent (<https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent>);
- Ansys-CFX (<https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-cfx>);
- COMSOL Multiphysics (<https://www.comsol.com/>);
- EasyCFD (<http://www.easycfd.net/>);
- SimFlow (<https://sim-flow.com/>);
- CONVERGE (<https://convergecfd.com/>).

Open source:

- OpenFlower (<http://openflower.sourceforge.net/>);
- OpenFoam (<https://www.openfoam.com/>);
- Code_Saturne (<https://www.code-saturne.org/cms/web/>);
- OpenLB (<https://www.openlb.net/>);
- SLFCFD (<http://slfcfd.sourceforge.net/>).

ANSYS INC:

- Création en 1970 à Canonsburg (États unis)
- 2006: acquisition de Fluent Inc.
- Fluent est un logiciel CFD avec interface graphique.
- Le plus célèbre au monde.



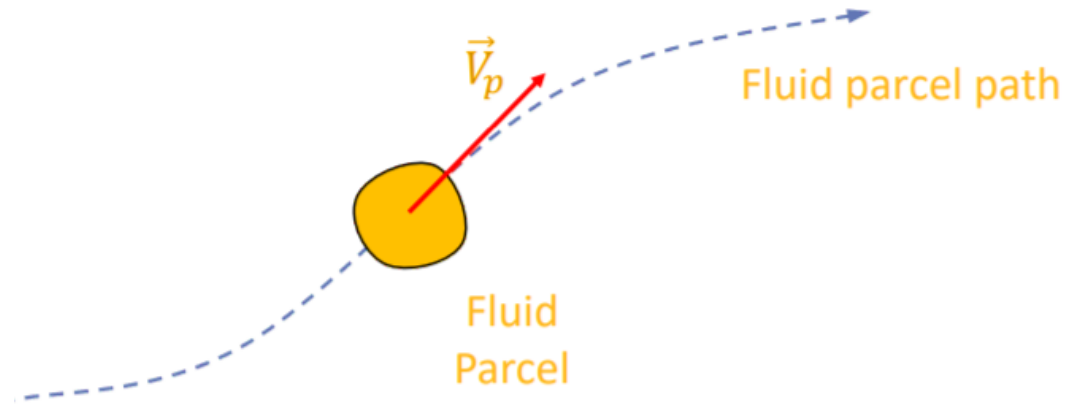
Equations gouvernantes

- Les équations gouvernantes le mouvement des fluides sont:
 - L'**équation de continuité** qui traduit le principe de **conservation de masse**;
 - Les **équations de quantité de mouvement**: la variation de quantité de mouvement est égale à la somme des forces agissant sur le fluide (deuxième loi de Newton);
 - L'**équation d'énergie**: l'énergie est conservée d'après le premier principe de la thermodynamique.
- Pour les problèmes impliquant du **transfert de chaleur**, l'équation d'énergie nous permettra d'obtenir la **température** du fluide.
- Si l'écoulement est, en plus, **compressible**, nous aurons également besoin d'une équation reliant la masse volumique à la température (et à la pression). Cela se présente sous la forme d'une **équation d'état** thermodynamique (e.g. équation des gaz parfaits).
- Dans certains cas, nous pouvons supposer que le fluide est **isotherme** (sa température est constante), et donc l'équation de conservation de l'**énergie** ne sera **pas nécessaire**.
- Pour dériver les équations gouvernantes le mouvement de fluide (et le transfert de chaleur), il est nécessaire de considérer le fluide comme un **milieu continu** (approche macroscopique: les mouvements moléculaires sont ignorés).
- Une particule fluide est le plus petit élément possible de fluide dont les propriétés macroscopiques ne sont pas influencées par des molécules individuelles (longueur macroscopique de 1 μm et plus).

Comment peut-on décrire le mouvement des fluides ?

Description Lagrangienne

Suivre chaque particule individuellement: repère fixé à la particule fluide.



Trajectoire d'une particule:

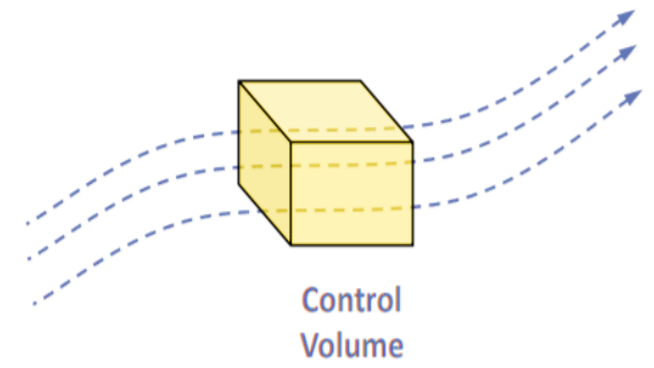
$$\vec{V} = \vec{V}_p(t)$$

Variation = dérivée temporelle:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_p(t)}{dt}$$

Description Eulérienne

Suivre le mouvement des particules dans une région fixe: repère fixé à la région d'intérêt.



Champ de vitesse dans la région d'étude (volume de contrôle):

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Variation = dérivée totale (particulaire):

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla)}_{\text{dérivée convective}} \cdot \vec{V}$$

dérivée locale dérivée convective

Comment pouvons-nous dériver les équations régissant l'écoulement du fluide ?

- 1 Technique du Bilan sur Volume de Contrôle: Appliquer le bilan (de masse, de quantité de mouvement, d'énergie) sur un volume de control infinitésimal (description Eulérienne).
- 2 Technique de Théorème de Transport de Reynolds (TTR): Appliquer des lois de conservation à une parcelle de fluide lagrangien. Ensuite, appliquer le TTR pour transformer ces lois en une formulation eulérienne.

Equations gouvernantes

Théorie du Transport de Reynolds (TTR)

- Soit F une propriété extensive associée à la parcelle fluide:

$$F = \iiint_{\Omega} \rho f \, d\Omega$$

⚡ f peut être une fonction scalaire ou vectorielle

- Le **théorème de transport de Reynolds** relie la dérivée lagrangienne d'une propriété avec les changements de cette propriété dans le volume de contrôle eulérien fixe comme suit:

Variation de F dans le VC Débit net de F au travers les SC

$$\frac{dF}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} \, d\Omega + \oiint_A f(\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA$$

Lagrangian

Eulerian

Equation de continuité: La **masse** est **conservée** dans un système fluide en mouvement.

- Le bilan de masse implique que le taux d'augmentation de la masse dans un élément fluide (variation de masse pendant le temps) est égal la somme des masses qui entre et sort.

- On considère un élément de volume fluide dans un repère cartésien: $d\vartheta = dx dy dz$

- Pendant le temps dt , la variation de sa masse s'écrit: $dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vartheta dt$

- Cette variation de masse est égale à la somme des masses qui entre et sort.

- Suivant l'axe x , le fluide entre avec la vitesse u_x et sort avec la vitesse u_{x+dx} .

- o La masse entrant pendant dt est: $[\rho u dy dz dt]_x$

- o La masse sortant pendant dt est: $[\rho u dy dz dt]_{x+dx}$

⇒ Le bilan de masse sur x donne: $([\rho u]_x - [\rho u]_{x+dx}) dy dz dt$

- Faisons un développement du 1^{er} ordre: $[\rho u]_{x+dx} \approx [\rho u]_x + [\partial(\rho u)/\partial x] dx$

- Il reste alors sur l'axe x : $-[\partial(\rho u)/\partial x] d\vartheta dt$

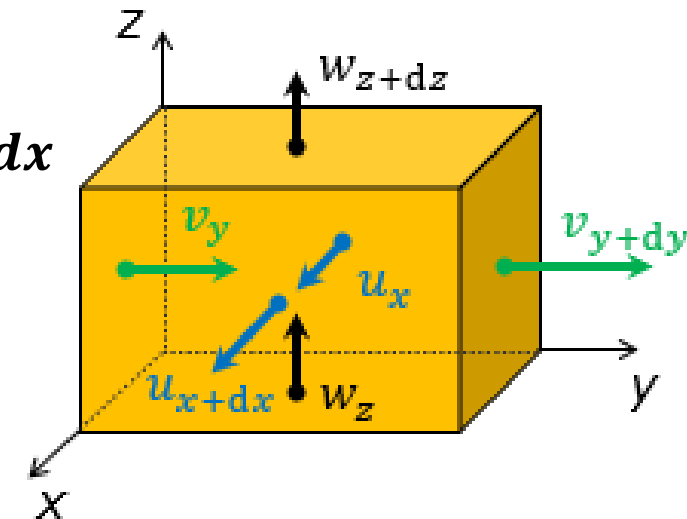
- Par analogie, sur y : $-[\partial(\rho v)/\partial y] d\vartheta dt$, et sur z : $-[\partial(\rho w)/\partial z] d\vartheta dt$

- Au final: $dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vartheta dt = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] d\vartheta dt$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Ou: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0$

Equation de continuité



Equation de Continuité: Dérivation à l'aide du théorème de transport de Reynolds

- D'après le TTR, la forme intégrale de l'équation de conservation de la masse s'écrit:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

- En appliquant le théorème de divergence:

$$\int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \int_{VC} \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) d\mathcal{V}$$

$$\Rightarrow \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{VC} \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) d\mathcal{V} = 0 \Leftrightarrow \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) \right] d\mathcal{V} = 0$$

- L'intégrale est satisfaite pour un volume arbitraire; elle doit être nulle:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0$$

On retrouve l'équation de continuité

Equation de quantité de mouvement: On applique le principe fondamental de la dynamique à un élément de volume fluide:

$$\sum d\vec{F} = d\vec{F}_s + d\vec{F}_b = \rho d\vartheta \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

- Les forces appliquées sont les forces de surface $d\vec{F}_s$ et les forces de volume $d\vec{F}_b$.

□ **Forces de volume ($d\vec{F}_b$):**

Forces gravitationnelles, électriques, magnétiques, flottaisons. La force de volume la plus courante est la force due à l'accélération gravitationnelle (\vec{g}): $d\vec{F}_b = \rho d\vartheta \vec{g}$

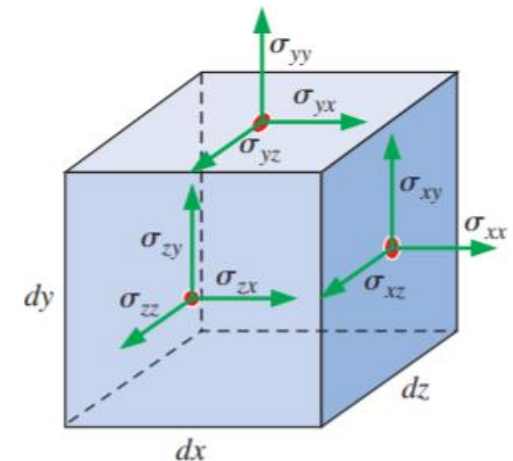
□ **Forces de surface ($d\vec{F}_s$):**

Forces de pression (normales à la surface) et forces de viscosité (frottements). La force totale de surface (due à la pression et à la viscosité) est exprimée comme: $d\vec{F}_s = \vec{\sigma} \vec{n} dA = \vec{V} \vec{\sigma} d\vartheta$

Où: $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ est le tenseur des contraintes.

$$\Rightarrow \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \vec{V} \vec{\sigma} + \rho \vec{g}$$

Equation de Cauchy



Dérivation à l'aide du théorème de transport de Reynolds

- D'après le TTR, la **forme intégrale** de l'équation de **quantité de mouvement** s'écrit:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\vartheta + \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \vec{F}_s + \vec{F}_b$$

$$\square \vec{F}_s : \text{forces de surface: } \vec{F}_s = \int_{SC} \bar{\sigma} \vec{n} dA \quad \square \vec{F}_b : \text{forces de volume: } \vec{F}_b = \int_{VC} \rho \vec{g} d\vartheta$$

- On applique le théorème de divergence:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \int_{VC} \vec{\nabla}(\rho \vec{V} \vec{V}) d\vartheta \quad \vec{F}_s = \int_{SC} \bar{\sigma} \vec{n} dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \bar{\sigma} d\vartheta$$

$$\Rightarrow \int_{VC} \left[\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V} \vec{V}) \right] d\vartheta = \int_{VC} [\vec{\nabla} \bar{\sigma} + \rho \vec{g}] d\vartheta \quad \text{Le volume de contrôle est arbitraire.}$$

$$\text{Donc: } \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V} \vec{V}) = \vec{\nabla} \bar{\sigma} + \rho \vec{g} \quad \text{Equation de Cauchy (Forme alternative)}$$

Dérivation à l'aide du théorème de transport de Reynolds

- En développant, on obtient:

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{\nabla}\vec{\sigma} + \rho\vec{g}$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} = \rho \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \text{Et} \quad \vec{\nabla}(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{\nabla}(\vec{V}\vec{V}) + \vec{\nabla}\vec{\nabla}(\rho\vec{V})$$

$$\text{Avec: } \rho\vec{\nabla}(\vec{V}\vec{V}) = \rho(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{V} \Rightarrow \vec{\nabla}(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{\nabla}(\rho\vec{V})$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{\nabla}(\rho\vec{V}) = \vec{\nabla}\vec{\sigma} + \rho\vec{g}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) \right] + \rho(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{\sigma} + \rho\vec{g}$$

Donc:
$$\rho \left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = \vec{\nabla}\vec{\sigma} + \rho\vec{g}$$

On retrouve l'équation de Cauchy

- Contrairement à l'équation de continuité, l'équation de **Cauchy** est une équation **vectorielle**.
- L'équation de Cauchy représente ainsi **trois équations scalaires**, une pour chaque axe de coordonnées dans les problèmes 3D.
- Pour un repère Cartésien, les équations de Cauchy s'écrivent:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = \vec{\nabla}\bar{\sigma} + \rho\vec{g}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

On ne peut pas résoudre aucun problème de mécanique des fluides en utilisant **l'équation de Cauchy !**

- Le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ représente les contraintes dues à la **pression** et les contraintes dues à la **viscosité**.
- La pression agit toujours vers l'intérieur, et normale à la surface, et les contraintes visqueuses agissent vers l'extérieur normales et tangentielles à la surface.
- On peut, donc, séparer la pression des contraintes dues à la viscosité:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Tenseur de contraintes visqueuses

- Les forces de surface peuvent être exprimées par: $d\vec{F}_s = \vec{V} \bar{\bar{\sigma}} d\vartheta = \vec{V} (-p\vec{I} + \bar{\bar{\tau}}) d\vartheta = (-\vec{V}p + \vec{V}\bar{\bar{\tau}}) d\vartheta$
- L'équation générale du mouvement peut être reformuler comme:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{V}p + \vec{V}\bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{g}$$

- Cas particuliers:**
- (i) Fluide au repos, $\vec{V} = 0$: $\vec{V}p = \rho \vec{g}$ (**Equation Fondamentale de la Statique**)
 - (ii) Fluide non-visqueux (parfait), $\bar{\bar{\tau}} = 0$: $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{V}p + \rho \vec{g}$ (**Equation d'Euler**)

Fluides Newtoniens et les équations de Navier-Stokes

- Des observations expérimentales ont montré que pour les fluides **Newtoniens**, il existe une relation linéaire entre les contraintes visqueuses et le taux de déformations pures.
- Navier et Stokes ont proposé un modèle de tenseur des contraintes visqueuses pour les fluides Newtoniens.
- Les hypothèses fondamentales proposées par Navier et Stokes lors de la dérivation des composantes du tenseur des contraintes ($\bar{\tau}$) sont:
 - La rotation pure d'un élément fluide n'engendre aucune contrainte visqueuse.
 - L'écoulement du fluide est isotrope, ce qui signifie que ses propriétés sont les mêmes lorsqu'elles sont mesurées dans différentes directions.
 - Le tenseur des **contraintes visqueuses** ($\bar{\tau}$) et le tenseur des **taux de déformations pures** ($\bar{\epsilon}$) sont liés par l'expression suivante (relation de Navier et Stokes):

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{\epsilon} + \lambda(\nabla\vec{V}\vec{I})$$

Où $\lambda = (-2/3)\mu$ (hypothèse de Stokes).

Fluides Newtoniens et les équations de Navier-Stokes

Rappel: La **déformation totale** du fluide en mouvement est caractérisé par le tenseur des **taux de déformations** ($\bar{\bar{D}}$). Ce tenseur se décompose en deux tenseurs:

$$\bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Tenseur} \\ \text{symétrique} \\ \bar{\bar{\epsilon}} \end{matrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Tenseur} \\ \text{antisymétrique} \\ \bar{\bar{\omega}} \end{matrix}$$

$\bar{\bar{\epsilon}}$: Tenseur des taux de **déformations pures** (déformation angulaire et volumétrique).
 $\bar{\bar{\omega}}$: Tenseur des taux de **rotations pures**.

Fluides Newtoniens et les équations de Navier-Stokes

- En introduisant le modèle de Navier-Stokes dans l'équation de qté de mvt, on obtient:

$$\text{qté de mvt: } \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\bar{\tau} + \rho\vec{g} \quad \text{Modèle de Navier-Stokes:}$$

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{\epsilon} - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla}\vec{V}\vec{I})$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \left(2\mu\bar{\epsilon} - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla}\vec{V}\vec{I}) \right) + \rho\vec{g}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + 2\mu\vec{\nabla}\bar{\epsilon} - \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V}) + \rho\vec{g}$$

- Explicitons le terme $2\mu\vec{\nabla}\bar{\epsilon}$ (on considère la projection suivant l'axe x):

$$\begin{aligned} (2\mu\vec{\nabla}\bar{\epsilon})_x &= 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \mu \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) \right] \\ &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \right] = \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ &= \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \mu\Delta u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla}\vec{V}) \quad \Rightarrow \quad 2\mu\vec{\nabla}\bar{\epsilon} = \mu\Delta\vec{V} + \mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V}) \end{aligned}$$

Fluides Newtoniens et les équations de Navier-Stokes

L'équation de quantité de mouvement devient donc:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + 2\mu\vec{\nabla}\vec{\epsilon} - \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V}) + \rho\vec{g} \quad \text{Avec: } 2\mu\vec{\nabla}\vec{\epsilon} = \mu\Delta\vec{V} + \mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V})$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{V} + \mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V}) - \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V}) + \rho\vec{g}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{V} + \frac{1}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V}) + \rho\vec{g}$$

Equation de Navier-Stokes
(cas compressible)

Cas particulier: écoulement incompressible:

Pour un écoulement incompressible ($\vec{\nabla}\vec{V} = 0$), l'équation de Navier-Stokes devient:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{V} + \rho\vec{g}$$

Equation de Navier-Stokes
(cas incompressible)

Equation d'énergie:

1^{er} principe de la thermodynamique:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}$$

heat transfer work

Le changement total d'énergie dans le système est égal à la différence entre la chaleur transférée au système et le travail effectué par le système sur son environnement. (si \dot{W} est effectué sur le système $\Rightarrow (dE/dt = \dot{Q} + \dot{W})$)

L'énergie par unité de masse contenue dans un système se compose:

$$e_t \equiv e(\text{total}) = e(\text{internal}) + e(\text{kinetic}) + e(\text{potential})$$

Avec: $e(\text{internal}) = e(T)$ $e(\text{kinetic}) = \frac{1}{2}V^2$ $e(\text{potential}) = gz$

$$\Rightarrow E = \iiint_{\Omega} \rho e_t d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho \left[e(T) + \frac{1}{2}V^2 + gz \right] d\Omega$$

■ Pour fermer l'équation de l'énergie, nous avons besoin:

(i) d'une équation d'état: $\rho = \rho(p, T)$ (e.g. gaz parfaits: $\rho = \frac{p}{RT}$)

(ii) des relations thermodynamiques reliant les variables énergétiques aux propriétés de base telles que la température et la pression.

Gaz parfaits: $e = C_v T$ $h = e + \frac{p}{\rho} = C_p T$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ $e_t = e + \frac{V^2}{2}$ $h_t(T) = h + \frac{V^2}{2}$ $p = (\gamma - 1)\rho e$ $T = \frac{(\gamma - 1)e}{R}$

- Le principal mécanisme de transfert de chaleur \dot{Q} vers le système fluide est la conduction thermique. Puisque la chaleur est transférée vers/depuis le système à travers la surface limite, nous pouvons la représenter comme une intégrale de surface du flux de chaleur (W/m2):

$$\dot{Q} = - \iint_A \dot{q}'' dA$$

$$\dot{q}'' = -k \nabla T \quad \text{Loi de Fourier}$$

- En thermodynamique, il existe deux principaux mécanismes de travail effectués par un système sur son environnement: le travail de pression et le travail de cisaillement visqueux.

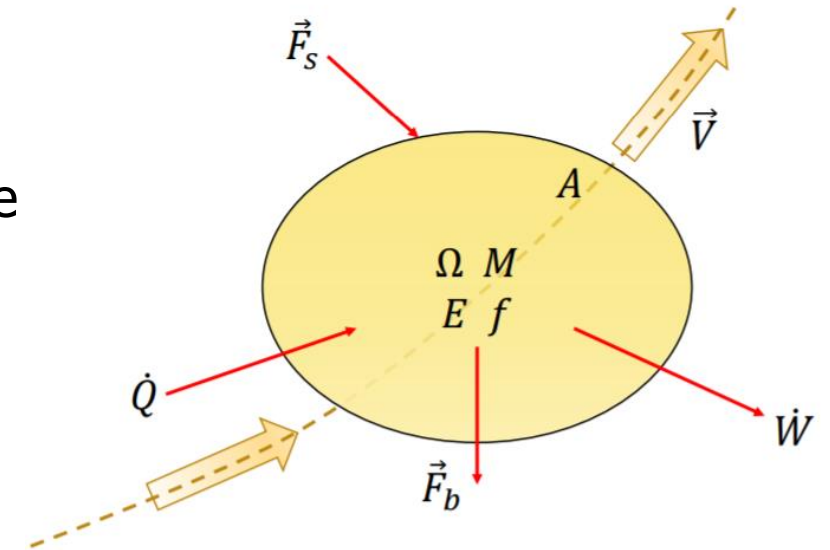
Travail de pression:

$$\dot{W}(\text{pressure}) = \iint_A p(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

Travail des contraintes visqueuses
(ou dissipations visqueuses) :

$$\dot{W}(\text{viscous}) = \iint_A (\vec{\tau} \cdot \vec{V}) \cdot \hat{n} dA$$

TTR:
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho e_t d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} d\Omega + \iint_A e_t(\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}$$



$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho e_t d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} d\Omega + \iint_A e_t (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} d\Omega + \iint_A e_t (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) dA = - \iint_A \dot{q}'' dA - \iint_A p (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA + \iint_A (\vec{\tau} \cdot \vec{V}) \cdot \hat{n} dA$$

- On peut placer le terme de travail de pression à l'intérieur du terme de convection et introduire la loi de Fourier et simplifier le membre de droite pour obtenir:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} d\Omega + \iint_A \left(e_t + \frac{p}{\rho} \right) (\rho \vec{V} \cdot \hat{n}) dA = \iint_A [k \nabla T + (\vec{\tau} \cdot \vec{V})] \cdot \hat{n} dA$$

- On applique le théorème de divergence aux intégrales de surface, on obtient:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \left[\rho \vec{V} \left(e_t + \frac{p}{\rho} \right) \right] d\Omega = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot [k \nabla T + (\vec{\tau} \cdot \vec{V})] d\Omega$$

Enfin, on obtient la forme différentielle de l'équation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{V}(\rho e_t + p)] = \nabla \cdot [k \nabla T + (\vec{\tau} \cdot \vec{V})]$$

- En utilisant le modèle de Navier-Stokes des contraintes visqueuses, l'équation de l'énergie devient:

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e_t + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e_t + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho w \left(e_t + \frac{p}{\rho} \right) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{\tau}_x \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{\tau}_y \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} + \vec{\tau}_z \cdot \vec{V} \right) + S_g$$

$$\vec{\tau}_x = \left[\mu \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \nabla u \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \hat{i} \right]$$

$$\vec{\tau}_y = \left[\mu \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \nabla v \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \hat{j} \right]$$

$$\vec{\tau}_z = \left[\mu \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \nabla w \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \hat{k} \right]$$

- L'équation d'énergie, après le réarrangement, s'écrit:

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) E \right] = \vec{V} \cdot (\mathbf{k} \nabla T) - p \nabla \cdot \vec{V} + \Phi$$

Avec:
$$\Phi = \mu \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V})^2$$

Résumé

Equations gouvernantes – équations CFD

- Equation de continuité (Conservation de masse): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0$

- Equations de quantité du mouvement: $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{V} + \frac{1}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{V}) + \rho\vec{f}$

- Equation d'énergie: $\rho \frac{DE}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})E \right] = \vec{\nabla}(\mathbf{k}\vec{\nabla}T) - p\vec{\nabla}\vec{V} + \Phi$

Avec: $\Phi = \mu \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla}\vec{V})^2$

Energie interne:

$$E = C_v T$$

Enthalpie:

$$H = C_p T$$

- Equation d'état:

$$F(\rho, T, p) = 0$$

Gaz parfait:

$$\frac{p}{\rho} = rT$$

- **Résumé: équations de Navier-Stokes incompressible (dans un repère cartésien):**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$
$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$
$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$
$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi$$

Equation générale de transport (Equations CFD)

- En utilisant une variable générale ϕ , la forme conservatrice de toutes les équations CFD peut utilement être écrite sous la forme suivante:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\rho\vec{V}\phi) = \vec{V} \cdot (\Gamma \vec{V}\phi) + S_\phi$$

Taux d'augmentation
de ϕ dans l'élément
fluide

Taux net de ϕ
en sortie de
l'élément fluide
(convection)

Taux
d'augmentation
de ϕ du à la
diffusion

Taux d'augmentation
de ϕ du à la source

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

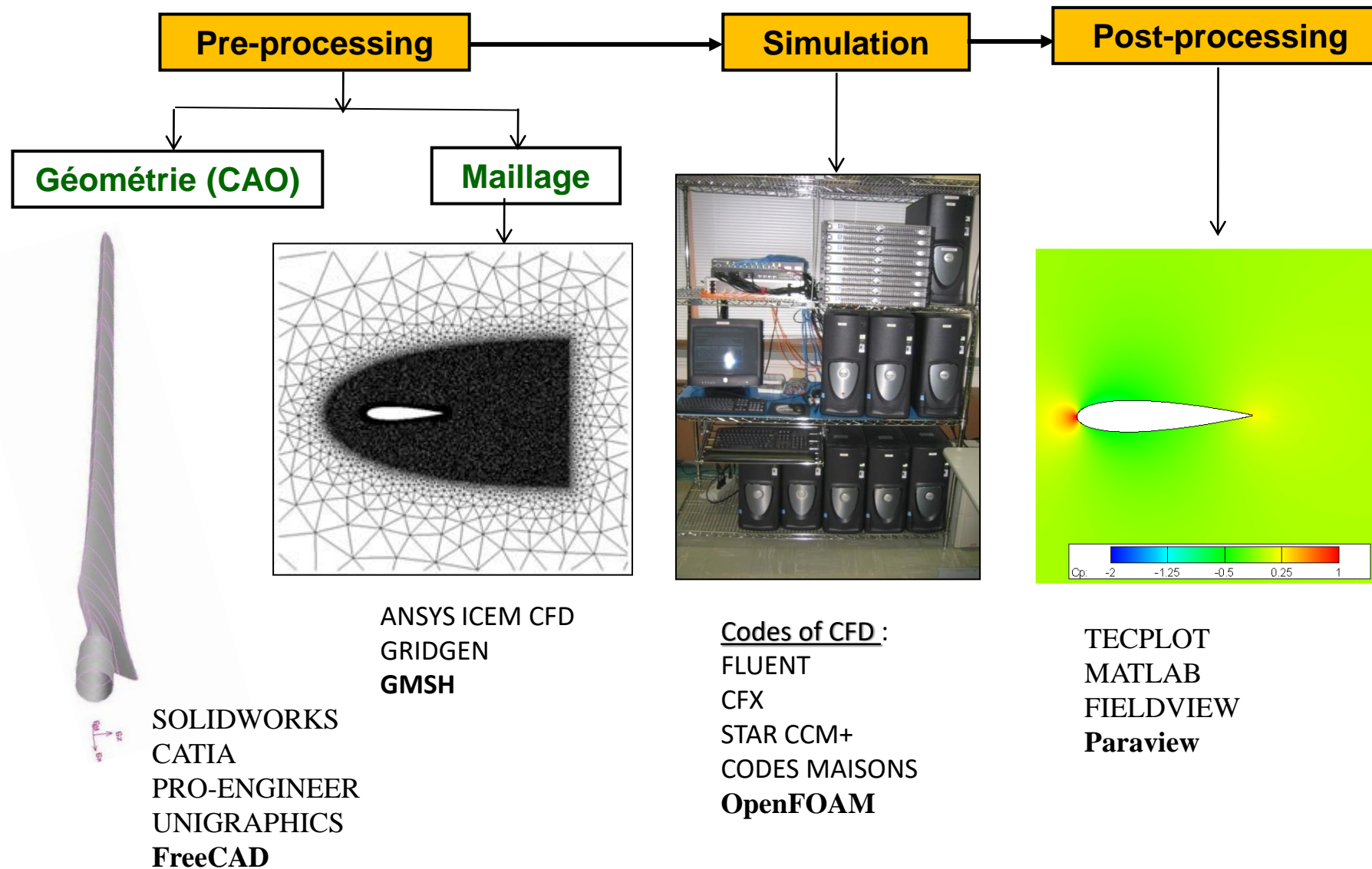
Equation générale de transport (Equations CFD)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla}\phi) + S_\phi$$

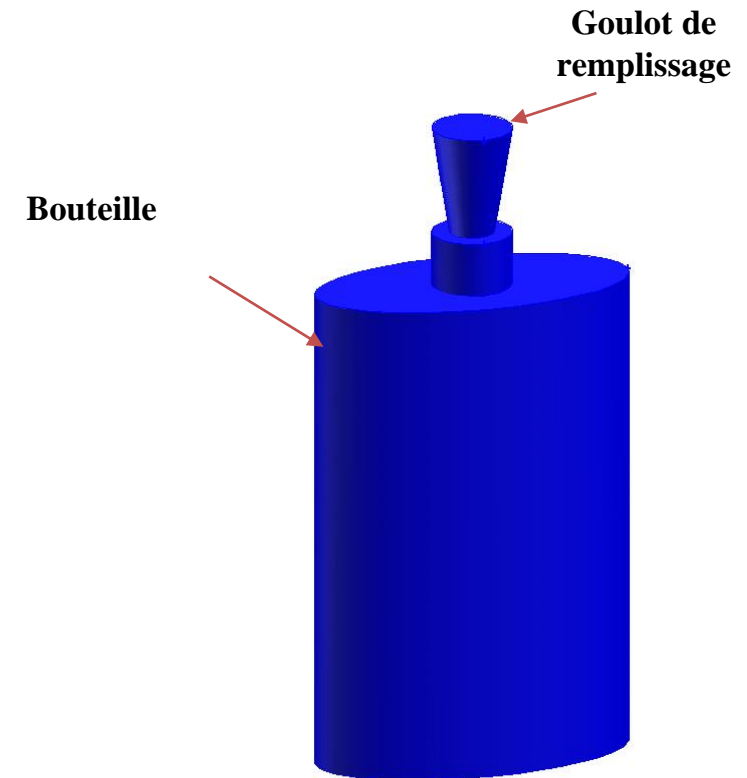
Flow Eqts	{	Continuity	$\phi = 1$	$\Gamma = 0$	$S_\phi = 0$
		Momentum	$\phi = \vec{V}$	$\Gamma = \mu$	$S_\phi = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$
		Energy	$\phi = C_p T$	$\Gamma = k/C_p$	$S_\phi = \Phi + \dot{q}$
+		Turbulence	Concentration	Combustion	Other eqts

CFD – Comment cela fonctionne

Étapes de la CFD



- L'analyse commence par un modèle mathématique d'un problème physique.
- Lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie doivent être satisfaites dans toute la région d'intérêt.
- Propriétés des fluides sont modélisées empiriquement.
- Hypothèses simplificatrices sont posées pour que le problème posé soit facile à résoudre (e.g., état stationnaire, incompressible, non visqueux, 2D...)
- Définir des conditions initiales et aux limites appropriées pour le problème.

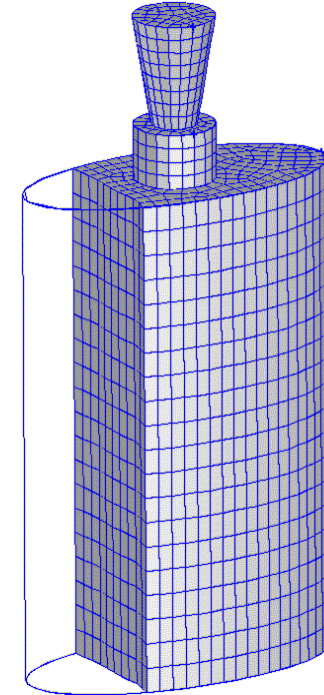


Exemple: Domaine pour le remplissage de la bouteille

Discrétisation: La CFD applique des méthodes numériques pour développer des approximations des équations dans la région de fluide d'intérêt.

Les équations différentielles sont transformées en un système d'équations algébriques.

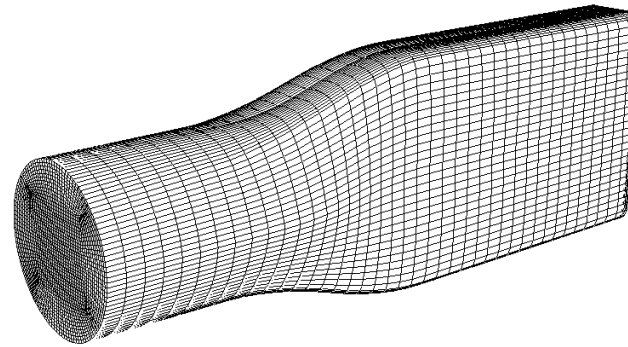
- On définit un quadrillage formé de cellules: Le **maillage**.
- Le système d'équations algébriques est résolu numériquement (sur un ordinateur) pour les toutes variables (V , P , T ...) à chaque nœud ou cellule.
- Système d'équations sont résolues simultanément afin de fournir la solution.



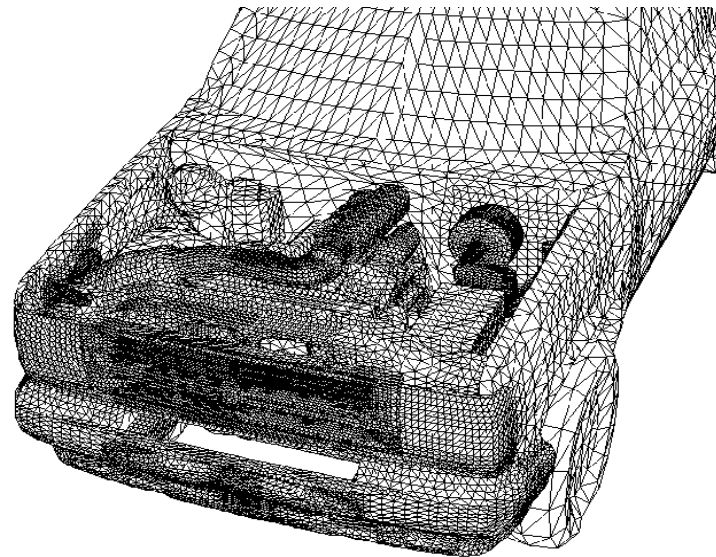
Maillage pour le remplissage de la bouteille

Maillage

Pour les géométries **simples**, les maillages quad/hexa peuvent fournir des solutions de haute qualité avec moins de cellules qu'un maillage tri/tetra.



Pour les géométries **complexes**, les maillages quad/hexa sont difficiles, on utilise un maillage tri/tetra ou un maillage par blocks.



On doit raffiner la zone proche paroi !

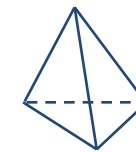
Types de maillage



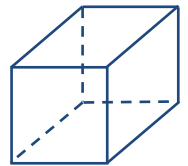
triangle



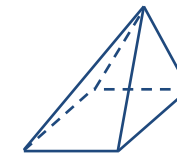
quadrilateral



tetrahedron



hexahedron

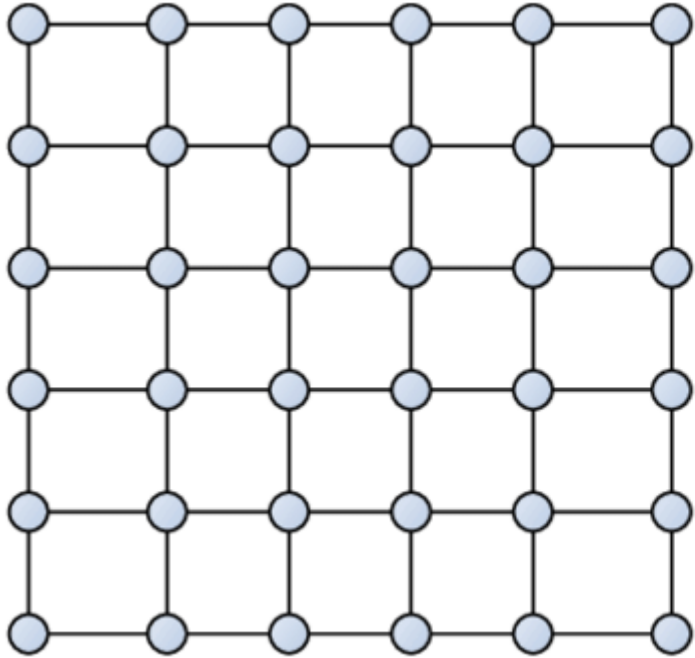


pyramid

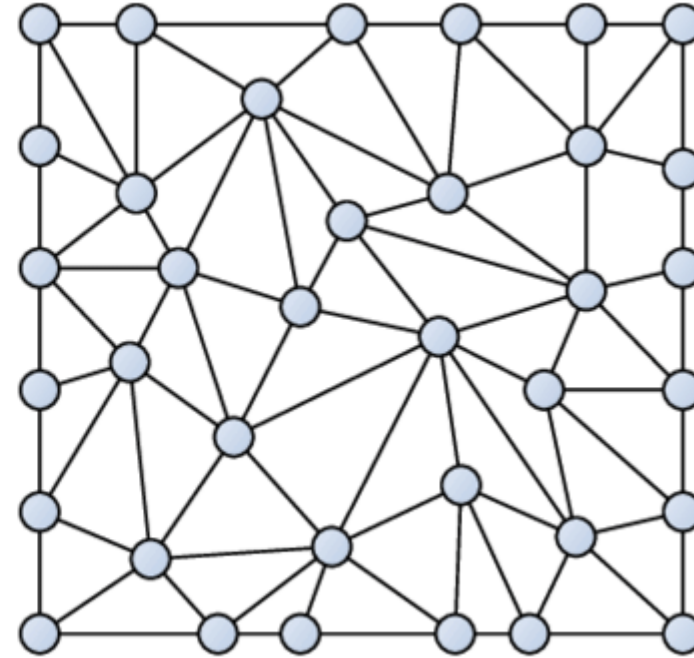


prism/wedge

Maillage



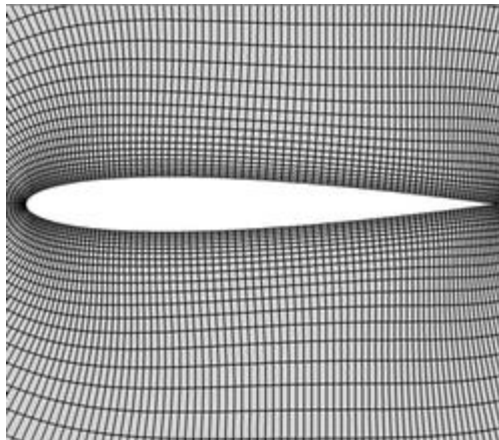
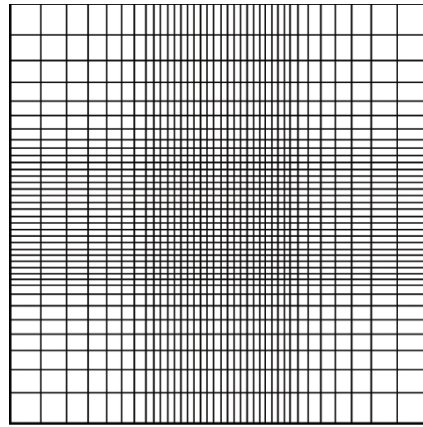
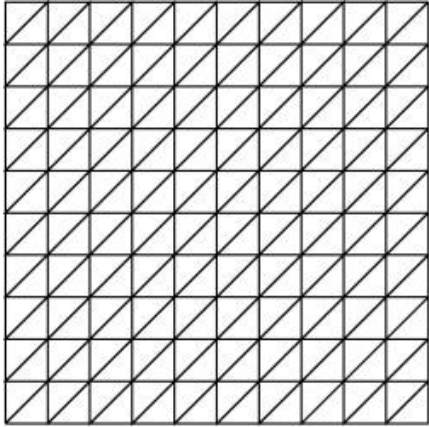
Maillage structuré:
Formé par des lignes continues.
Maillage idéal.



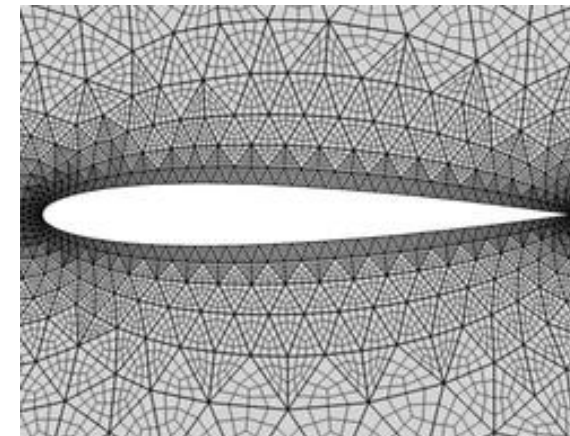
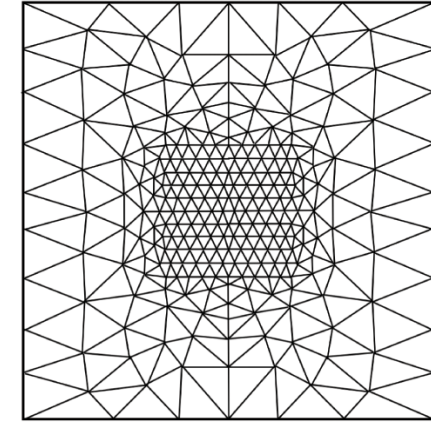
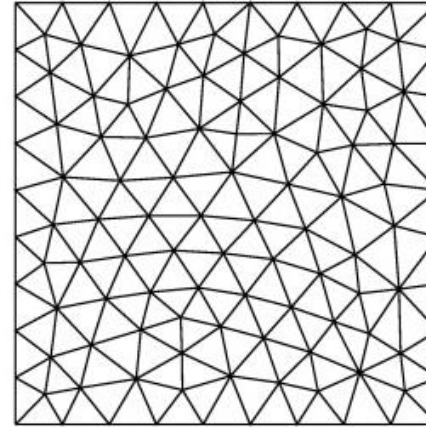
Maillage non structuré:
Formé par des lignes discontinues.

Maillage

Exemples des maillages structurés:



Exemples des maillages non structurés:



Méthodes numériques utilisées en logiciels CFD

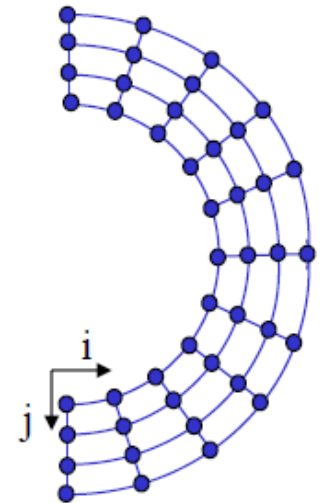
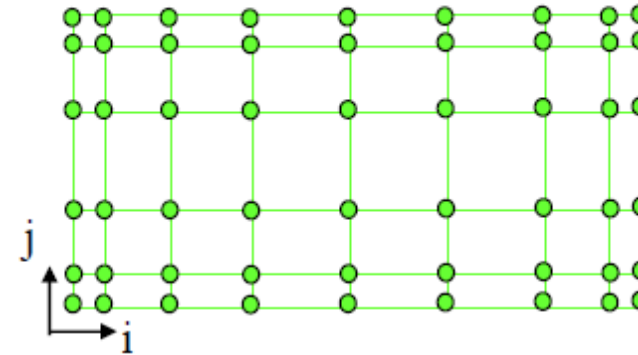
- La méthode des volumes finis ($\sim 80\%$).
- La méthode des éléments finis ($\sim 15\%$).
- La méthode des différences finies ($\sim 5\%$).

■ Méthode des différences finies

- Historiquement, la plus ancienne des trois. (a été utilisée par Richardson en 1910).

Avantage: facile à mettre en œuvre.

Inconvénients: limité aux maillages simples, et ne conserve pas la quantité de mouvement, l'énergie et la masse sur des maillages grossiers.



Principe: **Basée sur l'approximation des dérivées:** Les dérivées première et seconde sont approchées par des développements en série de Taylor. Le système algébrique résultant est résolu numériquement.

Méthodes numériques utilisées en logiciels CFD

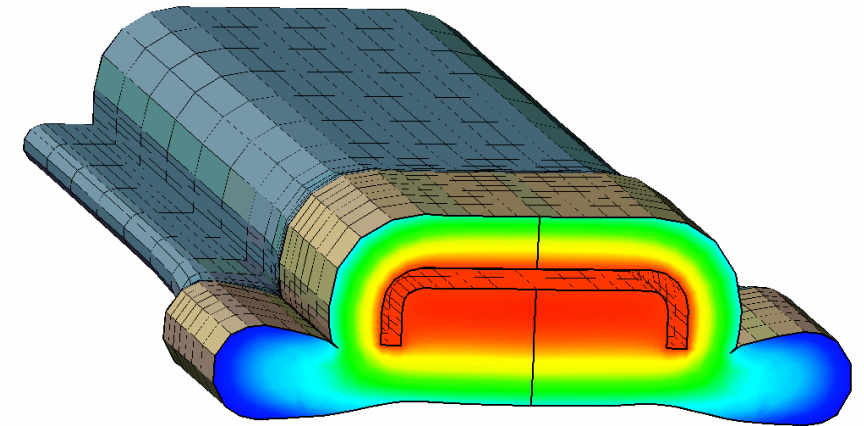
- La méthode des volumes finis ($\sim 80\%$).
- La méthode des éléments finis ($\sim 15\%$).
- La méthode des différences finies ($\sim 5\%$).

■ Méthode des éléments finis

- La première utilisation: Courant (1943) pour résoudre un problème de torsion.
- Clough (1960): a donné à la méthode son nom.

Avantage: précision maximale sur les maillages grossiers. Excellente pour les problèmes dominés par la diffusion: e.g., écoulements visqueux à surface libre.

Inconvénients: lent pour les problèmes de grandes dimensions et peu adapté aux écoulements turbulents.



Principe: **Basée sur l'approximation des solutions**: Chercher des solutions approchées sur des domaines décrets.

Méthodes numériques utilisées en logiciels CFD

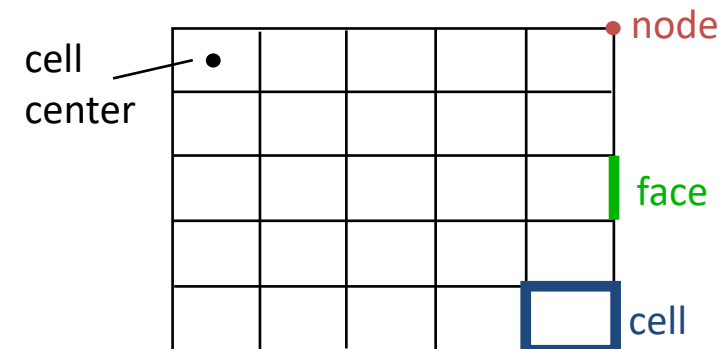
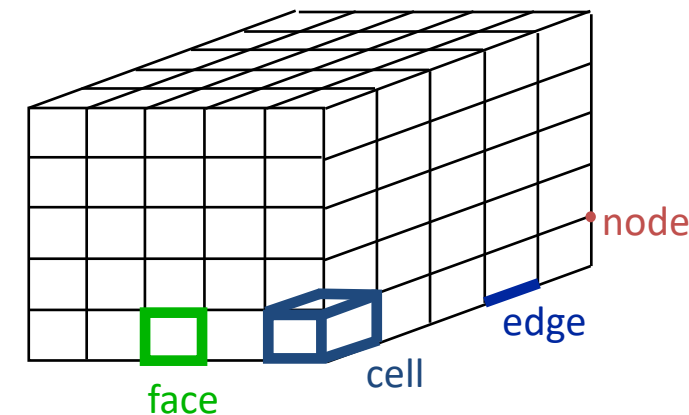
- La méthode des volumes finis (~80%).
- La méthode des éléments finis (~15%).
- La méthode des différences finies (~5%).

■ Méthode des volumes finis

- La première utilisation bien documentée a été faite par Evans et Harlow (1957)
- Patankar et Spalding (1972-1980): applications pour les problèmes des écoulements.

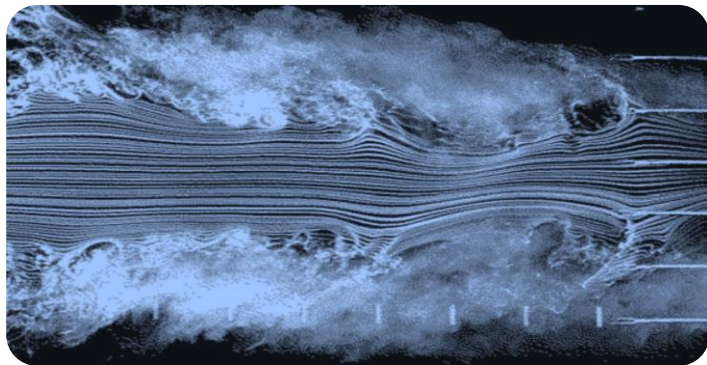
Avantage: masse, quantité de mouvement, énergie conservée même sur des maillages grossiers. Utilisation pratique pour des maillages non structurés;

Inconvénients: mal-estimation de la diffusion lorsque des schémas simples sont utilisés.

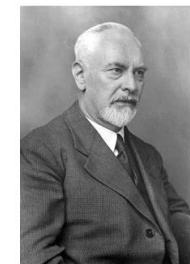


Principe: **Intégration des équations sur des VCs**. Intégration la forme conservative des équations sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques.

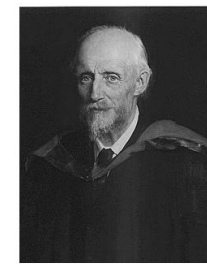
Introduction à la modélisation de la turbulence



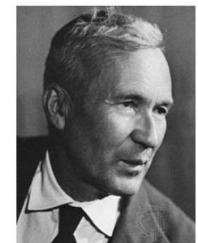
Joseph Boussinesq
(1842-1929)



Ludwig Prandtl
(1875-1953)

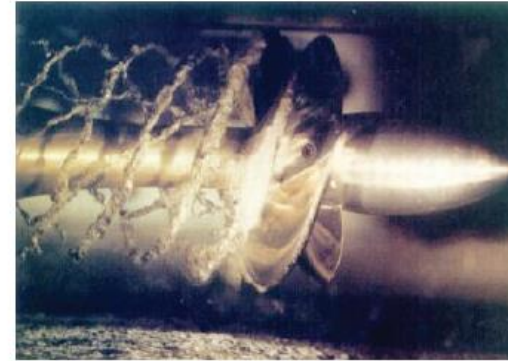
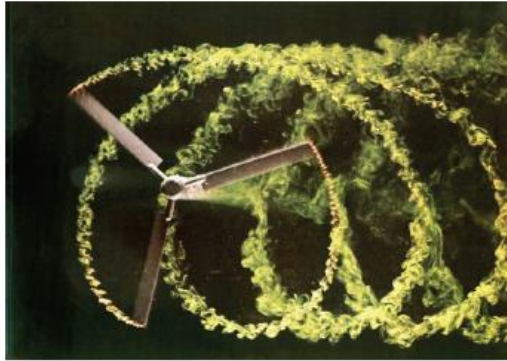


Osborne Reynolds
(1842-1912)

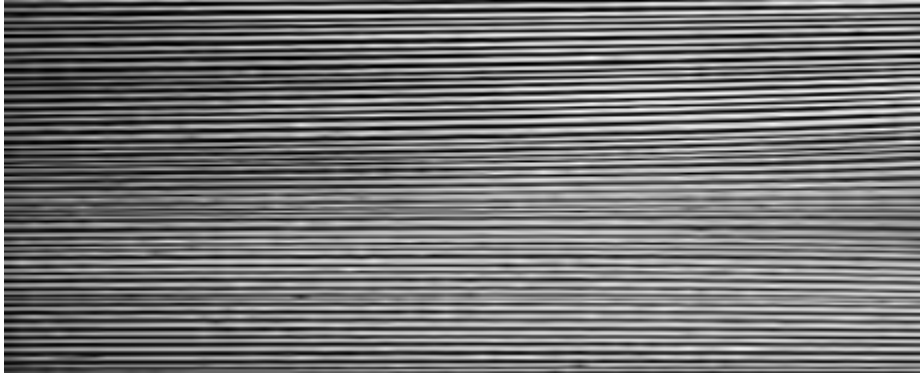


Andrey Kolmogorov
(1903-1987)

La plupart des écoulements industriels et naturels sont turbulents !



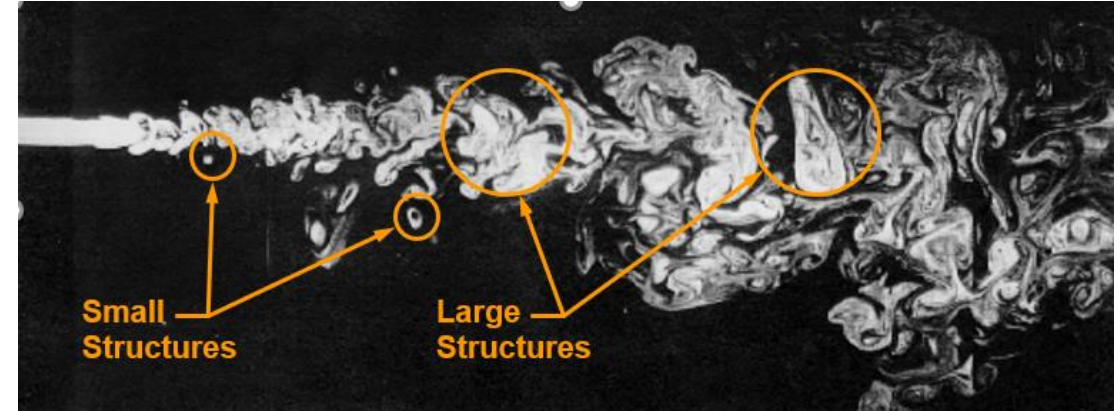
Écoulements laminaires vs écoulements turbulents



Écoulement laminaire

- Mouvement ordonné et régulier.
- Stable: absence de fluctuations.
- Une seule échelle de longueur.
- Faibles nombres de Reynolds.

⚡ La plupart des écoulements en pratique sont turbulents !



Écoulement turbulent

- Mouvement irrégulier et aléatoire.
- Instable: présence de fluctuations.
- Rotationnels (tourbillons non nuls).
- Large gamme d'échelles de longueur.
- Dissipation d'énergie.
- Diffusivité: grande capacité de mélange.
- Très sensible aux conditions initiales.
- Nombres de Reynolds élevés.

Transition du régime laminaire au régime turbulent

Nombre de Reynolds

$$\underbrace{\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]}_{\text{Forces d'inertie}} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{Forces de viscosité}}$$

$$Re_{L^*} = \frac{\rho U L^*}{\mu}$$

$$L^* = x, d, d_h, \text{etc.}$$

$$Re_{L^*} = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}} = \frac{\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \sim \frac{\rho U^2 / L^*}{\mu U / L^{*2}} = \frac{\rho U L^*}{\mu}$$

Écoulements externes

$$Re_x \geq 5 \times 10^5 \quad \text{le long d'une surface}$$

$$Re_d \geq 2 \times 10^4 \quad \text{autour d'un obstacle}$$

Écoulements internes

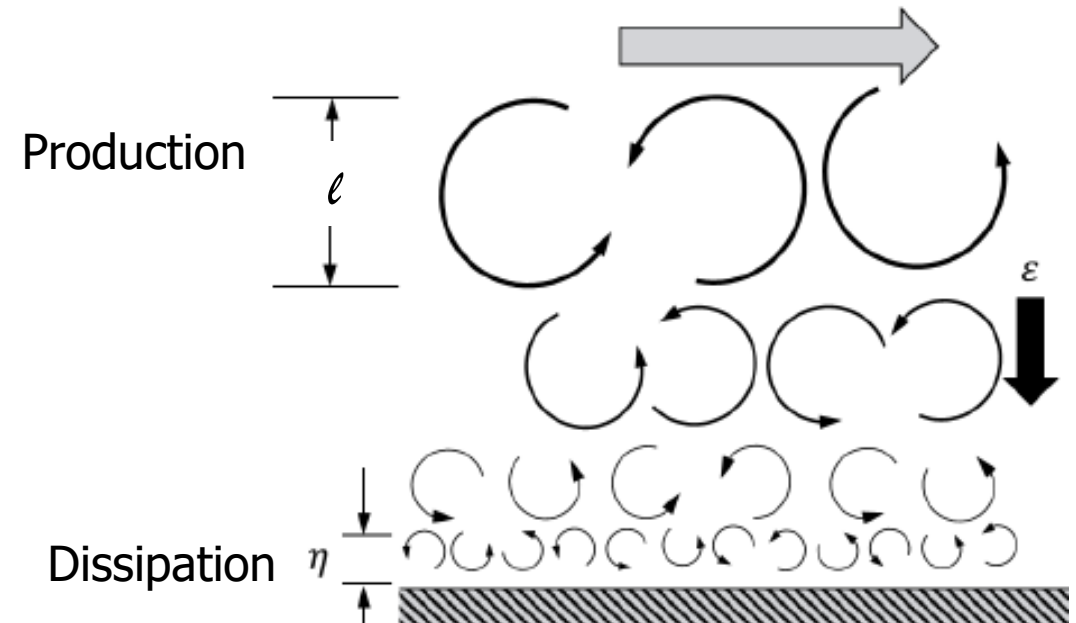
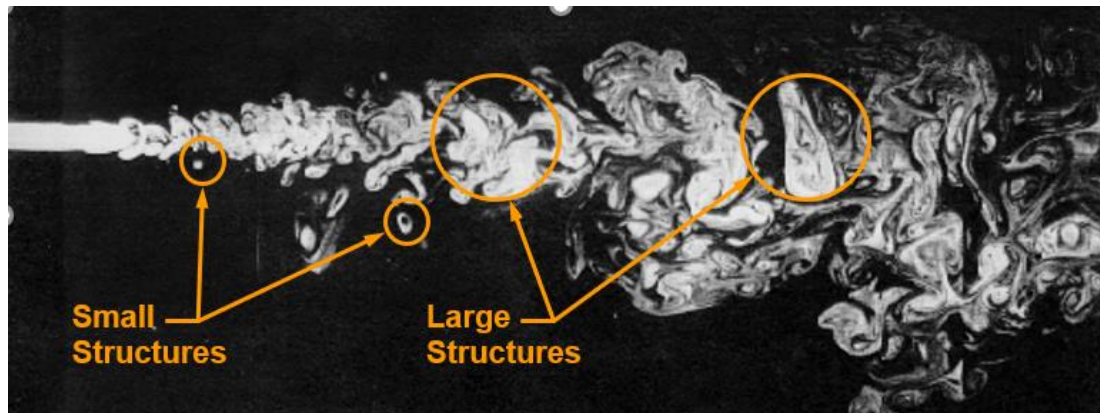
$$Re_{d_h} \geq 2300$$

D'autres facteurs tels que la rugosité de surface, le soufflage, l'aspiration et d'autres sources de perturbation peuvent provoquer une transition vers la turbulence à des nombres de Reynolds inférieurs.

Description physique de la turbulence

Cascade d'énergie – Théorème de Richardson (1922)

- L'écoulement turbulent est constitué de tourbillons de différentes tailles.
- Les grands tourbillons extraient l'énergie de l'écoulement moyen (production d'énergie).
- L'énergie est transférée des tourbillons plus grands aux tourbillons plus petits.
- Les tourbillons plus grands contiennent la majeure partie de l'énergie.
- Dans les plus petits tourbillons, l'énergie turbulente est convertie en énergie interne par dissipation visqueuse (dissipation d'énergie).



Echelles intégrales (grandes échelles de turbulence)

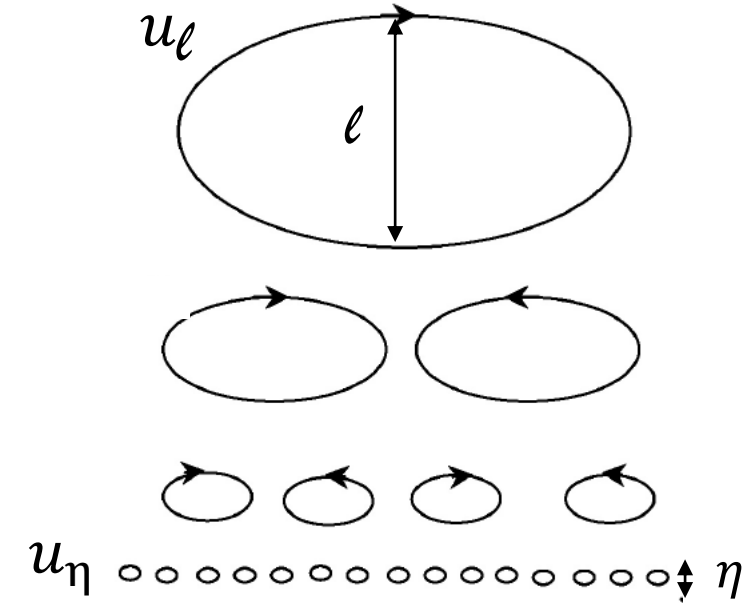
Considérons un tourbillon de la plus grande taille caractérisé par:

- ℓ : longueur caractéristique.
- u_ℓ : vitesse caractéristique.
- τ_ℓ : temps caractéristique (durée de vie).i.e. ($\tau_\ell \equiv \ell/u_\ell$).

Soit un tourbillon de la plus petite taille ayant:

- η : longueur caractéristique.
- u_η : vitesse caractéristique.
- τ_η : temps caractéristique (durée de vie).i.e. ($\tau_\eta \equiv \eta/u_\eta$).

Les plus grands tourbillons ont une énergie cinétique d'ordre $k \sim u_\ell^2$. Il s'en suit:



ℓ Longueur intégrale (de grands tourbillons).

$u_\ell = k^{1/2}$ Échelle intégrale de vitesse.

$\tau_\ell = \ell \cdot k^{-1/2}$ Échelle intégrale de temps.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}$$

Énergie cinétique
turbulente

⚡ Echelles intégrales
ne dépendent que
de k et de ℓ .

Petites échelles de turbulence – théorie de Kolmogorov (1941)

- Le taux de dissipation (dissipation par unité de masse et de temps) est: $\varepsilon \sim u_\eta^2 / \tau_\eta \sim u_\eta^3 / \eta$
- Nombre de Reynolds basé sur la longueur de petite échelle $Re_\eta = u_\eta \eta / \nu = 1.0$ (i.e., effets visqueux sont comparables aux effets inertiels).
- Donc $Re_\eta = u_\eta \eta / \nu = 1.0 \Rightarrow u_\eta = \nu / \eta$ et $\varepsilon \sim u_\eta^3 / \eta \Rightarrow \varepsilon \sim \nu^3 / \eta^4 \Rightarrow \eta \sim \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4}$
- Echelle de vitesse: $u_\eta = \nu / \eta$ avec $\eta \sim \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4} \Rightarrow u_\eta \sim \varepsilon^{1/4} \nu^{1/4}$
- Echelle du temps $\tau_\eta \sim \eta / u_\eta$ avec $u_\eta \sim \varepsilon^{1/4} \nu^{1/4}$ et $\eta \sim \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4} \Rightarrow \tau_\eta \sim \eta / u_\eta \sim \nu^{1/4} / \varepsilon^{1/2}$

Petites échelles (échelles de Kolmogorov): l'échelle à laquelle l'énergie est dissipée.

⚡ Echelles de Kolmogorov ne dépendent que de ε et de ν .

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$$

Echelle de longueur

$$u_\eta \sim (\varepsilon \nu)^{1/4}$$

Echelle de vitesse

$$\tau_\eta \sim \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}$$

Echelle de temps

Toutes les informations sur la géométrie sont perdues au niveau de petits tourbillons lorsque l'énergie passe dans la cascade (car $\eta \neq f(\ell)$). Donc, le Mvt de petites tourbillons est universel.

Rapport entre grandes et petites échelles

- Selon la théorie de Kolmogorov, les taux d'énergie mise en cascade sont égaux:
⇒ Le taux de production (u_ℓ^3/ℓ) égale le taux de dissipation ($\varepsilon \sim u_\eta^3/\eta$). Donc: $\varepsilon \sim u_\ell^3/\ell$
- Estimation du taux de dissipation: $k \sim u_\ell^2 \Rightarrow \varepsilon \sim (k^{1/2})^3/\ell \Rightarrow \varepsilon \sim k^{3/2}/\ell \Rightarrow \ell \sim k^{3/2}/\varepsilon$
- Rapports entre les échelles de Kolmogorov et les échelles intégrales:
- D'après $\eta \sim (v^3/\varepsilon)^{1/4}$ et $\varepsilon \sim u_\ell^3/\ell \Rightarrow \eta \sim (v^3\ell/u_\ell^3)^{1/4} \Rightarrow \eta^4/\ell^4 \sim v^3/u_\ell^3 \ell^3 \Rightarrow \eta/\ell \sim Re_\ell^{-3/4}$
- D'après $u_\eta \sim (v\varepsilon)^{1/4}$ et $\varepsilon \sim u_\ell^3/\ell \Rightarrow u_\eta \sim (vu_\ell^3/\ell)^{1/4} \Rightarrow (u_\eta/u_\ell)^4 \sim v/\ell u_\ell \Rightarrow u_\eta/u_\ell \sim Re_\ell^{-1/4}$
- D'après $\tau_\eta \sim (v/\varepsilon)^{1/2}$ et $\varepsilon \sim u_\ell^3/\ell \Rightarrow \tau_\eta \sim (v\ell/u_\ell^3)^{1/2} \Rightarrow \tau_\eta \sim (v\tau_\ell/u_\ell^2)^{1/2} \Rightarrow \tau_\eta^2/\tau_\ell \sim v/u_\ell^2$
 $\Rightarrow \tau_\eta^2/\tau_\ell \tau_\ell \sim v/\tau_\ell u_\ell^2 \Rightarrow \tau_\eta/\tau_\ell \sim (vu_\ell/\tau_\ell u_\ell^2)^{1/2} \Rightarrow \tau_\eta/\tau_\ell \sim (v/\tau_\ell u_\ell)^{1/2} \Rightarrow \tau_\eta/\tau_\ell \sim Re_\ell^{-1/2}$

$$\frac{\eta}{\ell} \sim Re_\ell^{-3/4}$$

$$\frac{u_\eta}{u_\ell} \sim Re_\ell^{-1/4}$$

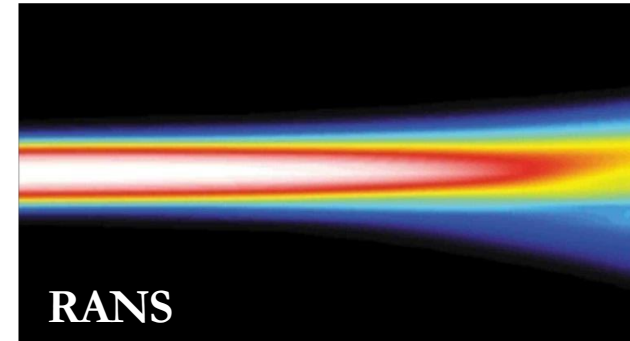
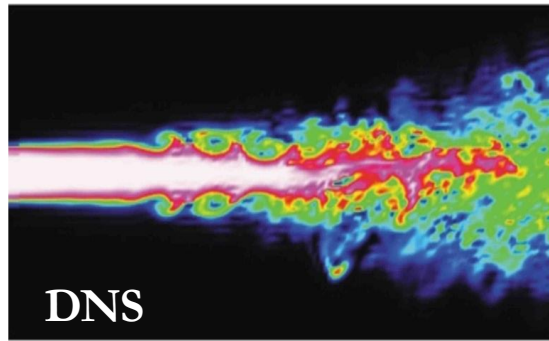
$$\frac{\tau_\eta}{\tau_\ell} \sim Re_\ell^{-1/2}$$

Rapport d'échelle de longueur

Rapport d'échelle de vitesse

Rapport d'échelle de temps

Simulation Numérique Directe (Direct Numerical Simulation -DNS)



Simulation numérique directe

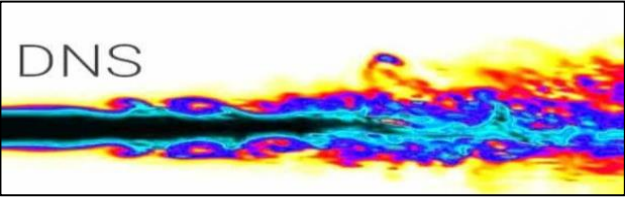
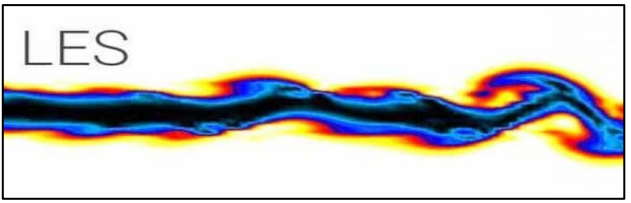
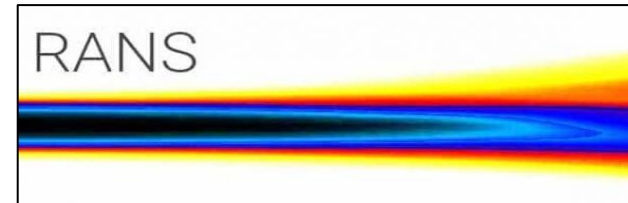
- La simulation numérique directe (DNS) est basée sur la résolution des équations instantanées de Navier-Stokes, en résolvant toutes les échelles, jusqu'aux échelles de dissipation de Kolmogorov, sans utiliser de modèles de turbulence.
- Pas spatial nécessaire: $\Delta x = \eta \sim Re_\ell^{-3/4}$
- Nombre des points nécessaire pour un volume L^3 : $\Delta x = L^3 / \eta \sim Re_\ell^{3/4} \Rightarrow N_{3D} = N^3 \sim Re_\ell^{9/4}$
- Pas de temps nécessaire: $\Delta t < \Delta x / u_\ell \Rightarrow \Delta t \sim Re_\ell^{-3/4}$
- Nombre de pas de temps nécessaire: $M = Temps_réel_simulation / \Delta t \Rightarrow M \sim Re_\ell^{3/4}$
- Nombre d'opérations en virgules flottantes nécessaire: $N^3 M \sim Re_\ell^{9/4} Re_\ell^{3/4} \Rightarrow N^3 M \sim Re_\ell^3$
- Temps nécessaire (en jours) pour effectuer une simulation DNS en supposant 1000 opérations par mod par étape pour un taux de calcul 1 gigaflop:

$$t_{DNS} = \frac{10^3 N^3 M}{10^9 \times 60 \times 60 \times 24} [Days]$$

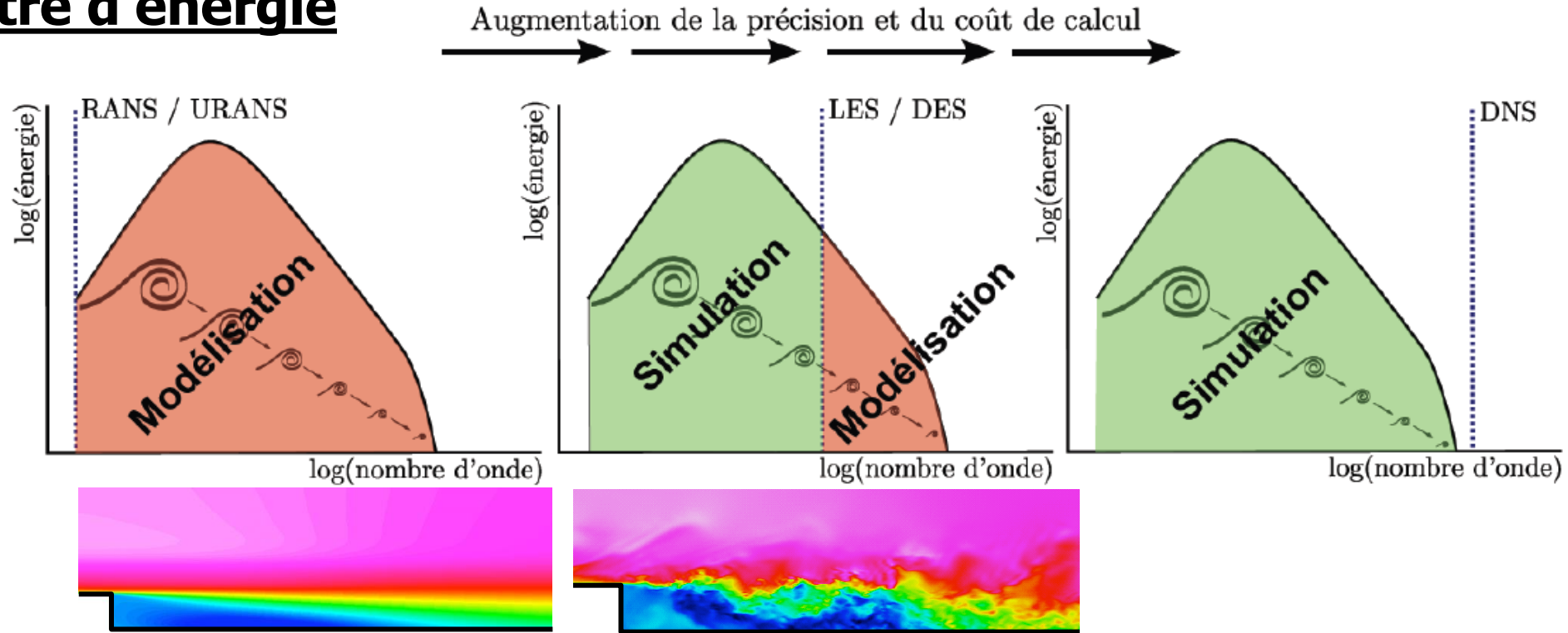
Exemple: pour $Re_\ell = 10^5$, le temps nécessaire de calcul est 32 ans !

On a besoin de modéliser la turbulence

Modélisation de la turbulence

DNS (Direct Numerical Simulation)	LES (Large Eddy Simulation)	RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation)
		
<ul style="list-style-type: none">▪ Résoudre les équations <u>instationnaires</u> de N-S.▪ Résoudre toutes les échelles de turbulence.▪ Aucune modélisation n'est requise.▪ Le coût est trop prohibitif !▪ Pas pratique pour les écoulements industriels !	<ul style="list-style-type: none">▪ Résoudre les équations instationnaires filtrées.▪ Les échelles de turbulence importantes sont directement résolues.▪ Les petits tourbillons sont modélisés.▪ Moins cher que la DNS▪ Les ressources nécessaires sont encore trop importantes.	<ul style="list-style-type: none">▪ Résoudre les équations de N-S moyennées dans le temps (champs moyen).▪ Moins cher que les autres approches.▪ L'approche la plus utilisée en pratique.▪ Manque d'information (champ fluctuant).▪ Modèles de turbulence sont requises pour fermer les équations RANS.

Spectre d'énergie



- Longueur d'ondes: $\lambda = 2\pi/\ell$
- $k = \int_0^\infty E(\lambda)d\lambda$; E : densité d'énergie cinétique turbulente.

Description statistique de la turbulence & Approche RANS

Description statistique

- En raison de la nature aléatoire des fluctuations turbulentes, il est utile de les décrire à l'aide de description statistique.
- La moyenne temporelle pour une variable aléatoire u à travers d'une période d'échantillonnage T est définie par:

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

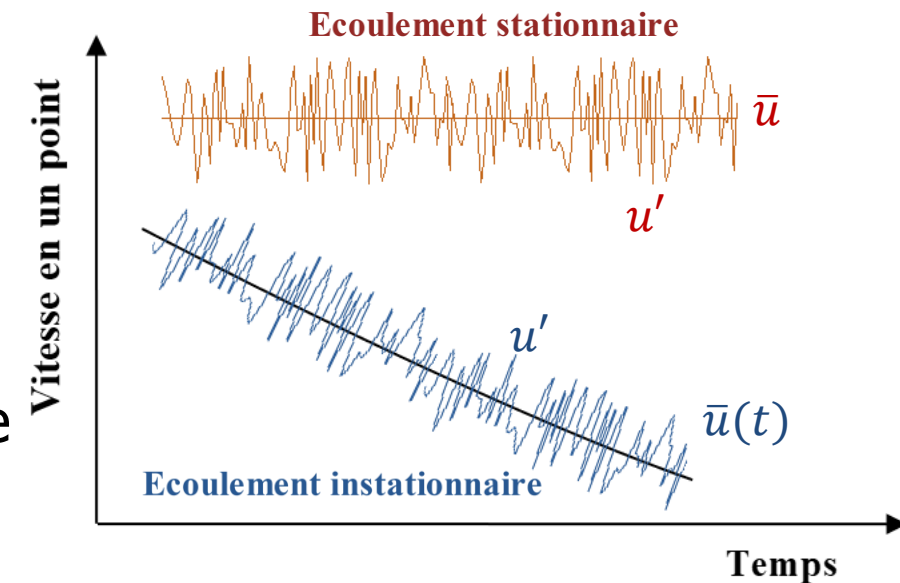
- Chaque variable (u, v, w, p, T , etc.) est décomposée en une partie moyenne et une partie fluctuante:

$$u = \bar{u} + u'$$

Moyenne Fluctuante

- La période d'échantillonnage T est supposée être suffisamment longue pour que les fluctuations aléatoires soient en moyenne nulles:

$$\bar{u}' = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u'(t) dt = 0$$



Règles de moyenne temporelle

- Pour deux variables ϕ_1 et ϕ_2 , on peut montrer que les règles suivantes s'appliquent:

$$\begin{aligned}\overline{\phi_1 \phi_2'} &= 0 \\ \overline{\phi_1 \phi_2} &= \overline{\phi_1} \overline{\phi_2} \\ \overline{\phi_1 + \phi_2} &= \overline{\phi_1} + \overline{\phi_2} \\ \overline{\phi_1 \phi_2} &= \overline{\phi_1} \overline{\phi_2} + \overline{\phi_1' \phi_2'}\end{aligned}$$

⚡ Notez que $\overline{\phi_1' \phi_2'} \neq 0$

- Les moyennes temporelles des dérivées spatiales sont les dérivées spatiales des variables moyennes temporelles:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} &= \frac{\partial (\overline{\phi + \phi'})}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\phi'}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 (\overline{\phi + \phi'})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{\phi'}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Equations RANS

- Equations de N-S pour un écoulement incompressible isotherme sans forces de volume:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{Continuité}$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{qté de Mvt}$$

- On introduisant la moyenne temporelle, l'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial (\bar{u}_j + u_j')}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

Eqt de continuité moyennée

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial (\bar{u}_j + u_j')}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = 0$$

⚡ Le champ moyen et le champ fluctuant vérifient séparément l'équation de continuité !

Equations RANS

- Equations de quantité de mouvement:

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \equiv \quad \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Car: $\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

continuité

- Equations de quantité de mouvement moyennées:

$$\overline{\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right]} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \Rightarrow \rho \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\overline{u_j u_j} + \overline{u_j' u_j'}}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\Rightarrow \rho \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'} \right) \quad \text{Eq de qté de Mvt moyennée}$$

Equations RANS

- Equations de Navier-Stokes moyennées RANS:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \rho \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right)$$

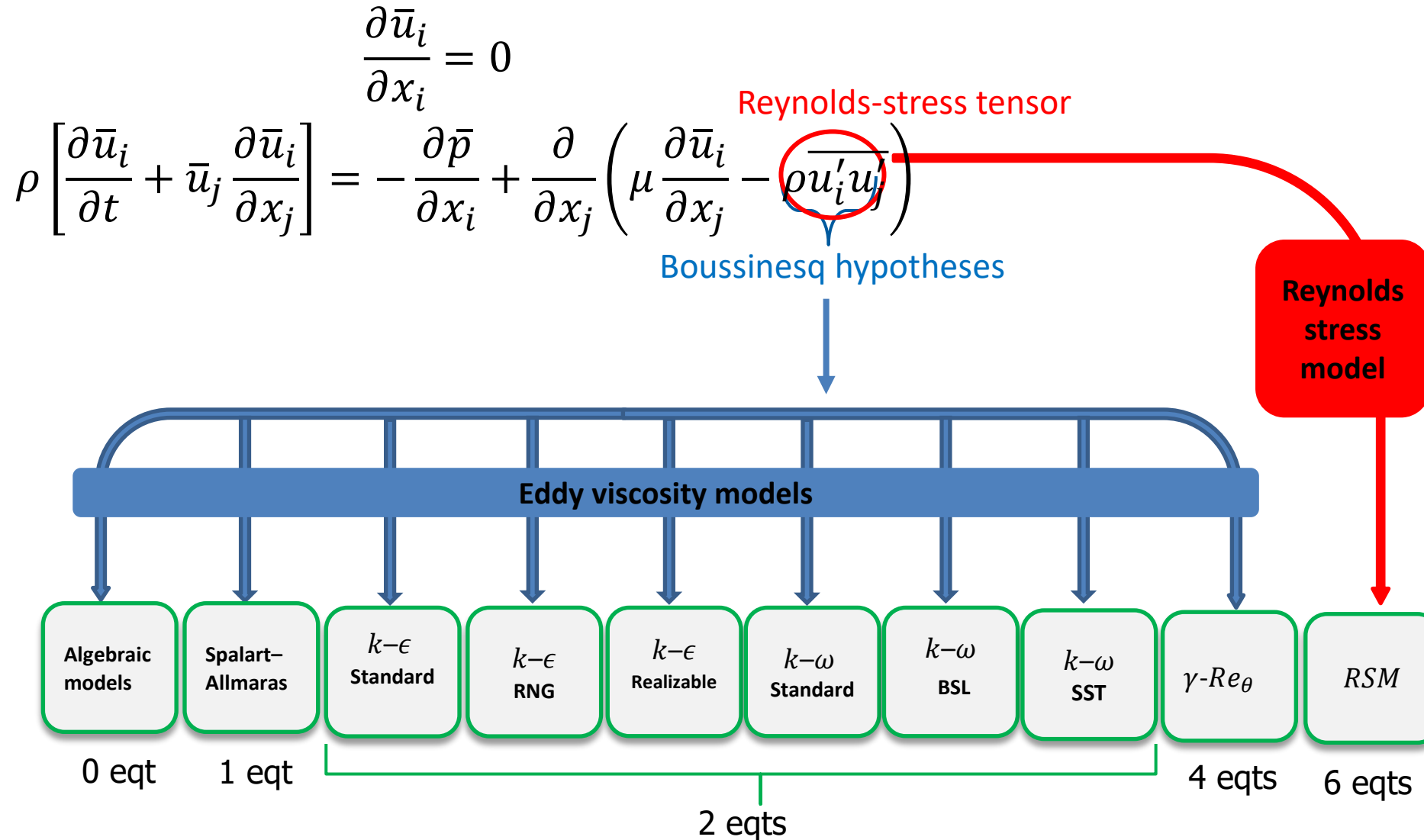
- Contraintes turbulentes (tenseur de Reynolds): $R_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$

R_{ij} est un tenseur symétrique: $-\overline{\rho u'_j u'_i} = -\overline{\rho u'_i u'_j}$

- Nombre des inconnues = 10 (\bar{u}_i, \bar{p} et les 6 composantes de $\overline{u'_i u'_j}$);
- Nombre d'équations = 4 (continuité et 3 éqts de qté de Mvt).
- Le nombre d'équations < nombre d'inconnues;
- Problème de fermeture.

 Modèles de turbulence

Modèles de turbulence – approche RANS



Hypothèse de Boussinesq

- On peut décomposer le tenseur de Reynolds comme suit:

$$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = R_{isotrope} + R_{anisotrope} = -\rho \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{3} + R_{anisotrope}$$

- Puisque: $k = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2} \Rightarrow \overline{u'_i u'_i} = 2k$

- Donc: $R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = -\rho \frac{2}{3} k \delta_{ij} + R_{anisotrope}$

Champ moyen + hypothèse de fluide Newtonien

Modèle de Boussinesq:

$$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

viscosité turbulente ou viscosité tourbillonnaire (eddy viscosity)

- La viscosité turbulente est fonction de l'espace et du temps. Ce n'est pas une propriété de fluide !
- Le nombre des inconnues est réduit de 6 à 2: (k et μ_t).
- Dans certains modèles k est négligée (hypothèse: contraintes de cisaillement dominant).

Modèle algébrique (zéro équation) – longueur de mélange (Prandtl 1925)

- Analyse dimensionnelle de la viscosité turbulence:

$$\frac{\mu_t}{\rho} = \nu_t \left(\frac{m^2}{s} \right) = \left(\frac{1}{s} \right) \times m^2 \equiv \frac{dU}{dy} \times longueur^2$$

- Prandtl (1925) a proposé le 1^{er} modèle de turbulence:

$$\mu_t = \rho \ell_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

Avec: $\ell_m = \kappa y$ la longueur de mélange. $\kappa = 0.41$: constante de Von Karman.

- Le modèle de Prandtl ne cause pas aucun problème de convergence !
- Il est valide pour des écoulements 2D attachés (sans séparation) et $\partial p / \partial x_i$ faibles.
- Différents modèles ont été proposés pour améliorer la précision de modèle de Prandtl: e.g. Van Driest (1956), Cebeci Smith (1967) et Baldwin Lomax (1978).

Modèle algébrique (zéro équation) – Loi de paroi (Prandtl 1925)

- Soit u_τ la vitesse de frottement local à la paroi: $\tau_w \sim \rho \overline{u'_i u'_j} \sim \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$
- Soit y_τ une distance proche à la paroi de taille η : $y_\tau \sim \eta$: $Re_{y_\tau} = y_\tau u_\tau / \nu = 1.0 \Rightarrow y_\tau = \nu / u_\tau$
- On définit une vitesse u^+ et une distance y^+ adimensionnelle, telles que:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad \text{et} \quad y^+ = y / y_\tau \Rightarrow y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

- Dans la zone très proche à la paroi, la viscosité moléculaire domine ($\tau_{turb} = \rho \overline{u'_i u'_j} = 0$):

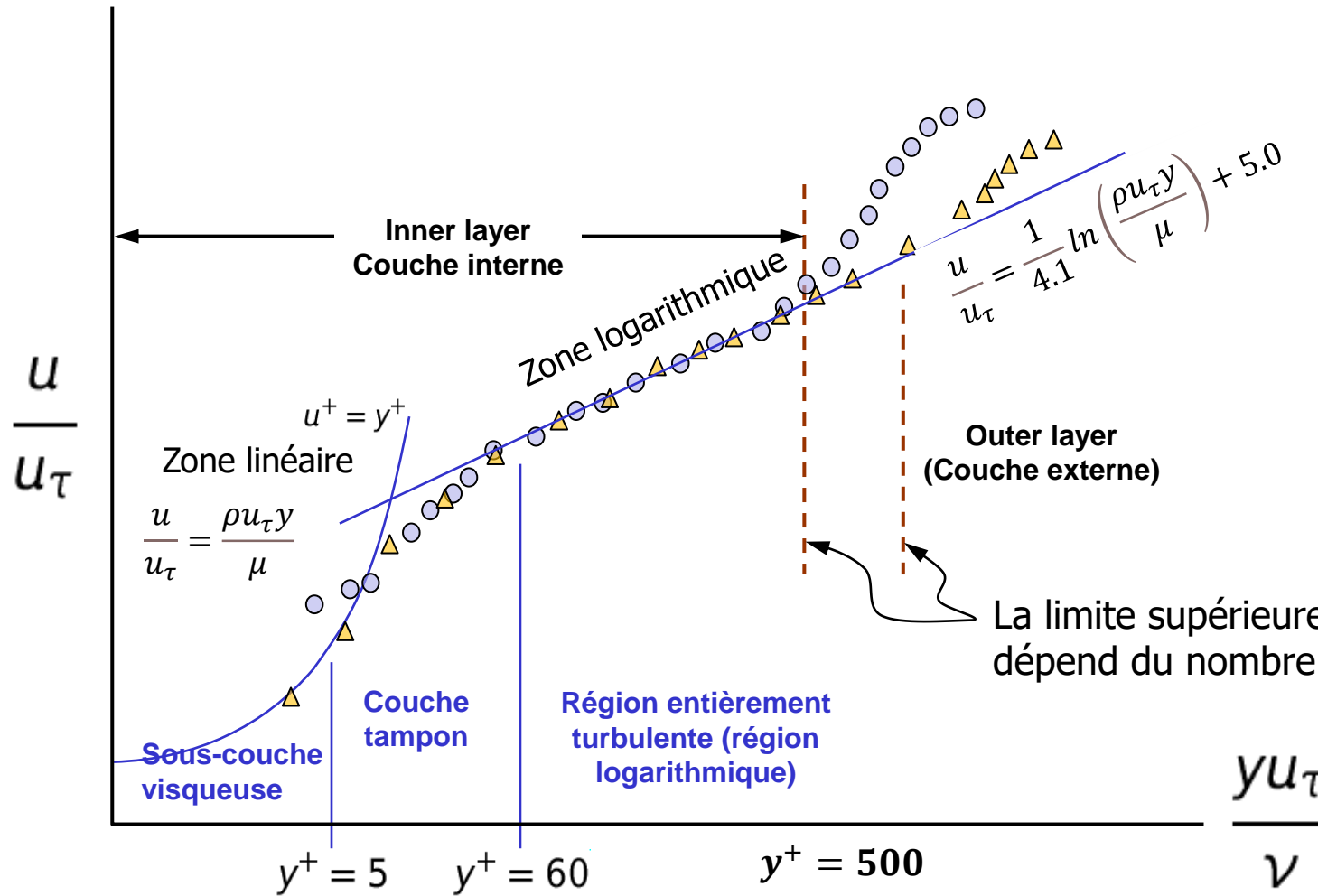
$$\tau_w = \tau_{lam} = \mu \frac{\bar{u}}{y} \Rightarrow \tau_w = \mu \frac{(u^+ u_\tau)}{(y^+ \nu / u_\tau)} \Rightarrow u^+ = y^+$$

- Dans la zone suffisamment loin à la paroi: ($\tau_{turb} \neq 0$), on utilisant le modèle de Prandtl:

$$\tau_w = \tau_{turb} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \rho \ell_m^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho (\kappa y)^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \Rightarrow \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2 = (\kappa y)^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

$$\Rightarrow u_\tau = \kappa y \frac{d\bar{u}}{dy} \Rightarrow u_\tau = \kappa \left(\frac{\nu y^+}{u_\tau} \right) \frac{d(u^+ u_\tau)}{d(y^+ \nu / u_\tau)} \Rightarrow 1 = \kappa y^+ \frac{du^+}{dy^+} \Rightarrow u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad C = 5.0 \text{ (Exp. parois lisses)}$$

Loi de paroi



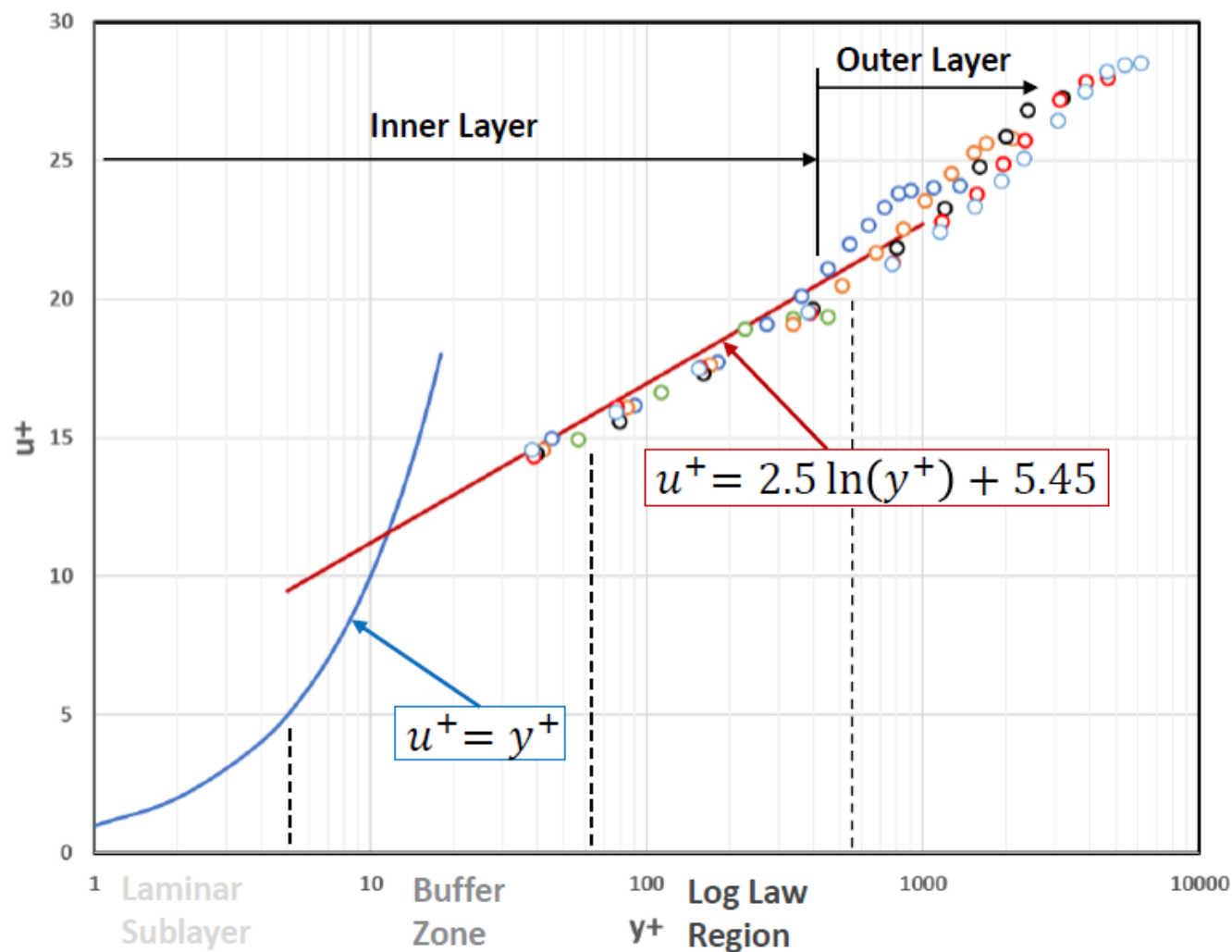
$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}}$$

y est la distance normale à la paroi.

La limite supérieure de la région logarithmique dépend du nombre de Reynolds.

Loi de paroi



Data [1]

- Station 1
- Station 5
- Station 10
- Station 14
- Station 18
- Station 22
- Laminar Sublayer
- Log Law

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

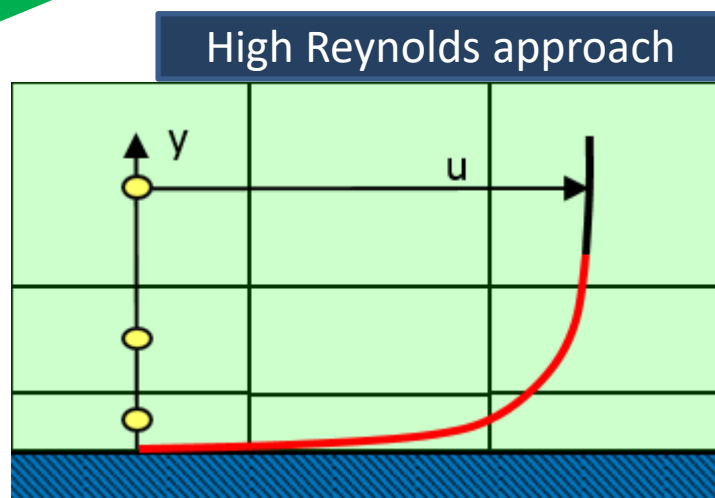
$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{\text{wall}}}{\rho}}$$

Traitement proche paroi

Moins de nœuds sont nécessaires normales à la paroi lorsque la loi logarithmique est utilisée (par rapport à la résolution de la sous-couche visqueuse)

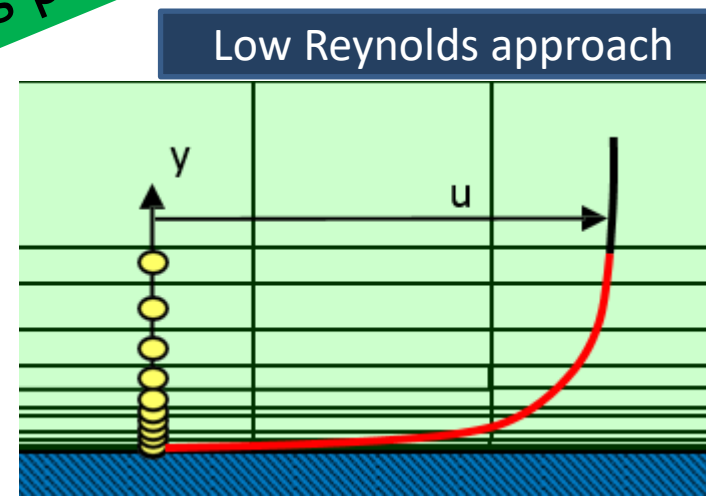
Moins chère

$$30 \leq y^+ \leq 400$$



Loi logarithmique de paroi est utilisée pour résoudre la couche limite

Plus précise



$$y^+ = 1$$

Approche de résolution de sous-couche visqueuse utilisée pour résoudre la couche limite

Traitement proche paroi

Estimation la hauteur du premier élément (ou nœud) près de la paroi y_p .

Estimer le coefficient de frottement:

Formule de Schlichting: $C_f = [2 \log_{10}(Re) - 0.65]^{-2.3}$ for $Re < 10^9$ (Ecoulements externes)

Formule de Colebrook (ou diagramme de Moody) (Ecoulements internes)

Calculer y_p en utilisant la relation inverse de y^+ :

$$\tau_w = \frac{1}{2} C_f \rho U_\infty^2 \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad Re = \frac{\rho U_\infty R}{\mu}$$

hauteur du 1^{er} nœud proche de paroi:

$$y_p = \frac{y^+ \mu}{u_\tau \rho}$$

Exercice:

Estimer la hauteur de la première maille proche paroi nécessaire pour simuler un écoulement autour d'un profil d'une éolienne pour les modèles de turbulence suivants:

- (i) Spalart-Allmaras (haut Reynolds), et
- (ii) $k - \omega$ SST (faible Reynolds).

Données: corde = 1m, $U_\infty = 10$ m/s, $\mu_{air} = 1.5 \times 10^{-5}$ Pa.s, $\rho_{air} = 1.19$ kg/m³.

Modèle à une équation – Spalart-Allmaras (1992)

Viscosité turbulente: $\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}$ $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}$; $\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$

 Conçu spécialement pour les applications aérospatiales

Equation de transport:
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{\nu} u_i) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + G_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu$$

Production: $G_\nu = C_{b1} \rho \tilde{\nu} \left(S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \right)$; $f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$; $S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$; $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Destruction: $Y_\nu = C_{w1} \rho [r + C_{w2}(r^6 - r)] \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{[r + C_{w2}(r^6 - r)]^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6} \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$; $r = \frac{\tilde{\nu}}{(S \kappa^2 d^2 + \tilde{\nu} f_{v2})}$

Constantes du modèle: $C_{b1} = 0.1335$, $C_{b2} = 0.622$, $\sigma_{\tilde{\nu}} = \frac{2}{3}$, $C_{v1} = 7.1$, $C_{w1} = 3.1945$

$C_{w2} = 0.3$, $C_{w3} = 2.0$, $\kappa = 0.4187$

Modèle à deux équations $k - \varepsilon$

- Une équation pour l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ peut être obtenue en prenant la trace de l'opération suivante sur les équations de Navier-Stokes:

$$\overline{u'_i N(u_j) + u'_j N(u_i)} = 0 \quad N(u_i) = \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0 \quad \text{Navier-Stokes}$$

- Équation pour k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \frac{\overline{p' u'_j}}{\rho} \right]$$

unsteady
production
molecular diffusion
pressure diffusion

advection
turbulent viscous dissipation
turbulent transport

Dissipation visqueuse de k :

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$



Les termes du côté droit sont complexes et nécessitent une modélisation.

Modèle à deux équations: $k - \epsilon$ (Standard) – Launder- Spalding (1974)

- Viscosité turbulente: $\ell \sim k^{3/2} / \epsilon$ et $\mu_T \sim \rho k^{1/2} \ell \Rightarrow \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$

- Eqt pour k :
$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \bar{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \epsilon$$

- Eqt pour ϵ :
$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \epsilon \bar{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} G_k - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k}$$

La production: $G_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ ⚡ Le modèle de $k - \epsilon$ Standard a été conçu pour les écoulements confinés

- Constantes du modèle: $C_{1\epsilon} = 1.44, C_{2\epsilon} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3$

Autres modèles à deux équations $k - \varepsilon$

- Modifications ont été introduites pour améliorer la précision du modèle $k - \varepsilon$ Standard:

- Modèle $k - \varepsilon$ RNG: $C_{2\varepsilon} = 1.68 + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/4.38)}{1 + \beta \eta^3}$ $\eta = k(2S_{ij}S_{ij})^{1/2} / \varepsilon$
(Yakhot et al 1992)

⚡ Développé pour tenir compte l'effet de rotation.

- Modèle $k - \varepsilon$ Realizable: $C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon}}$ $U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij}}$ $\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk}W_k$
(Shih et al 1995)

Constante de viscosité turbulente modifiée.

⚡ Le modèle Realizable est développé pour tenir compte la séparation de BL.

Constantes: $A_0 = 4.04, A_s = \sqrt{6} \cos(\phi), \phi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6}W), W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3}, \tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$

Modèles à deux équations $k - \omega$

- Autre classe des modèles à 2 éqts est basée sur deux équations de transport: k et ω .
 ω : le taux de dissipation spécifique, le rapport de ε à k : i.e. $\omega = \varepsilon/k$

- Viscosité turbulente: $\mu_t = \rho \alpha^* \frac{k}{\omega}$ ⚡ Développé pour les écoulements externes.

- $k - \omega$ Standard (Wilcox 1993): $\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + Re_t/R_k}{1 + Re_t/R_k}$ $Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}$

- Eqt pour k : $\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - Y_k$

- Eqt pour ω : $\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \omega u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + C_\omega - Y_\omega$

$$C_\omega = \frac{\alpha \omega}{k} G_k \quad \alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left(\frac{\alpha_0 + Re_t/R_w}{1 + Re_t/R_w} \right) \quad \alpha_\infty = 0.52, \alpha_0 = \frac{1}{9}, \sigma_k = \sigma_\omega = 2.0$$

Modèles à deux équations: $k - \omega$ SST (Menter 1994)

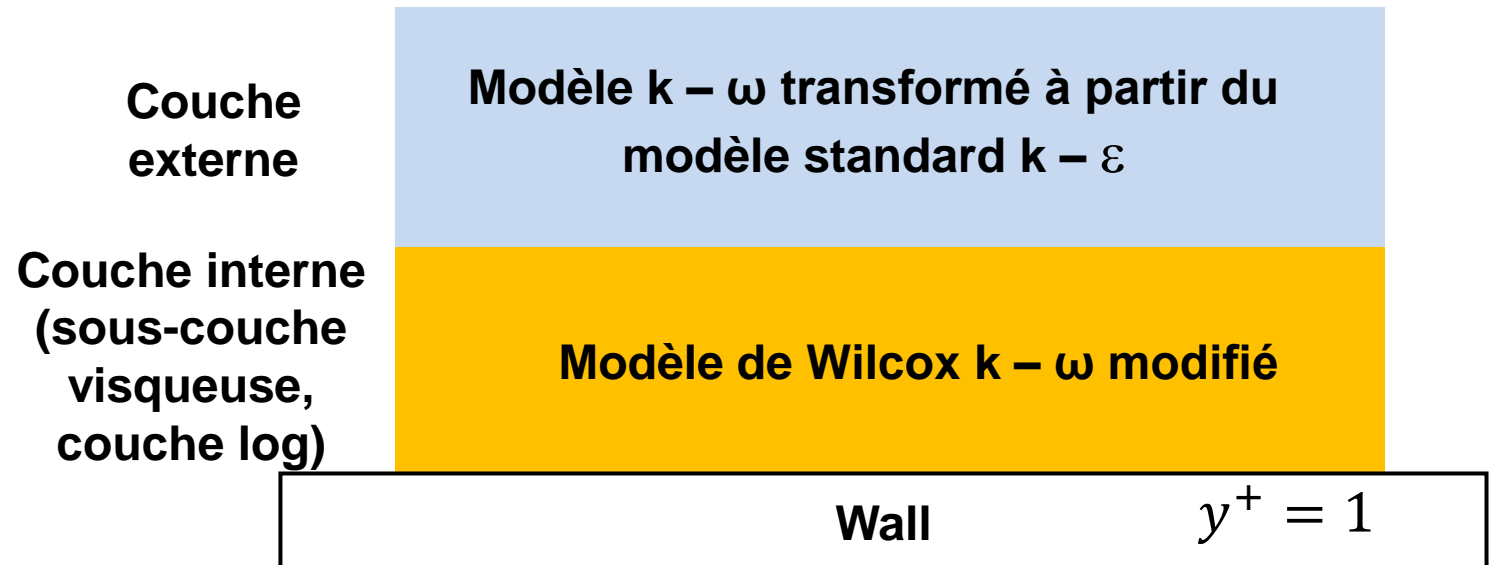
- Modifications ont été introduites pour améliorer la précision du modèle $k - \varepsilon$ de Wilcox:

$$\alpha^* = \frac{1}{\max\left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF}{0.31\omega}\right]}$$

$$F = \tanh(\phi_2^2) \quad \phi_2 = \max\left[2\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2\omega}\right]$$



Amélioration du transport de contraintes turbulentes de cisaillement (Shear Stress Transport)



Reynolds stresses models (RSM)- modèles du second ordre

- Une équation exacte pour le transport du tenseur de Reynolds $R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ peut être obtenue en effectuant l'opération suivante : $\overline{u'_i N(u_j) + u'_j N(u_i)} = 0$

Équations RSM:

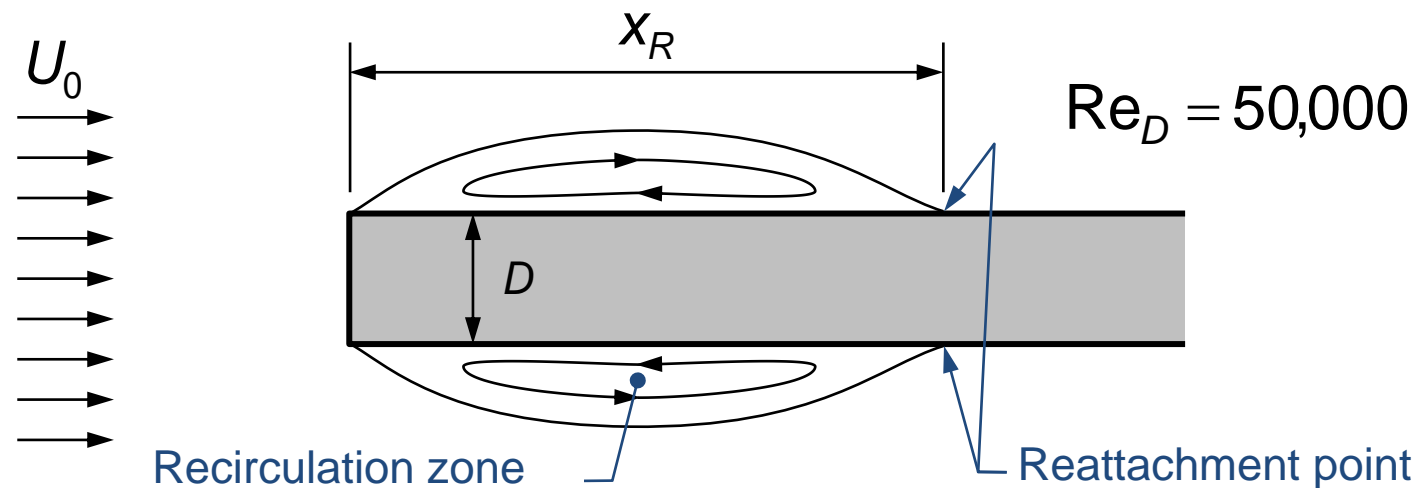
$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{u'_i u'_j})}_{\text{Local Time Derivative}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k \overline{u'_i u'_j})}_{C_{ij} \equiv \text{Convection}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho \overline{u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' (\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j)} \right]}_{D_{T,ij} \equiv \text{Turbulence Diffision}} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right]}_{D_{L,ij} \equiv \text{Molucular Diffision}} - \underbrace{\rho \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij} \equiv \text{Stress Production}} - \underbrace{\rho \beta (g_i \overline{u'_j \theta} + g_j \overline{u'_i \theta})}_{G_{ij} \equiv \text{Buoyancy Production}} \\
 & + \underbrace{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij} \equiv \text{Pressure Strain}} - \underbrace{2\mu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)}_{\epsilon_{ij} \equiv \text{Dissipation}} - \underbrace{2\rho \Omega_k (\overline{u'_j u'_m} \epsilon_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} \epsilon_{jkm})}_{F_{ij} \equiv \text{Production by System Rotation}}
 \end{aligned}$$



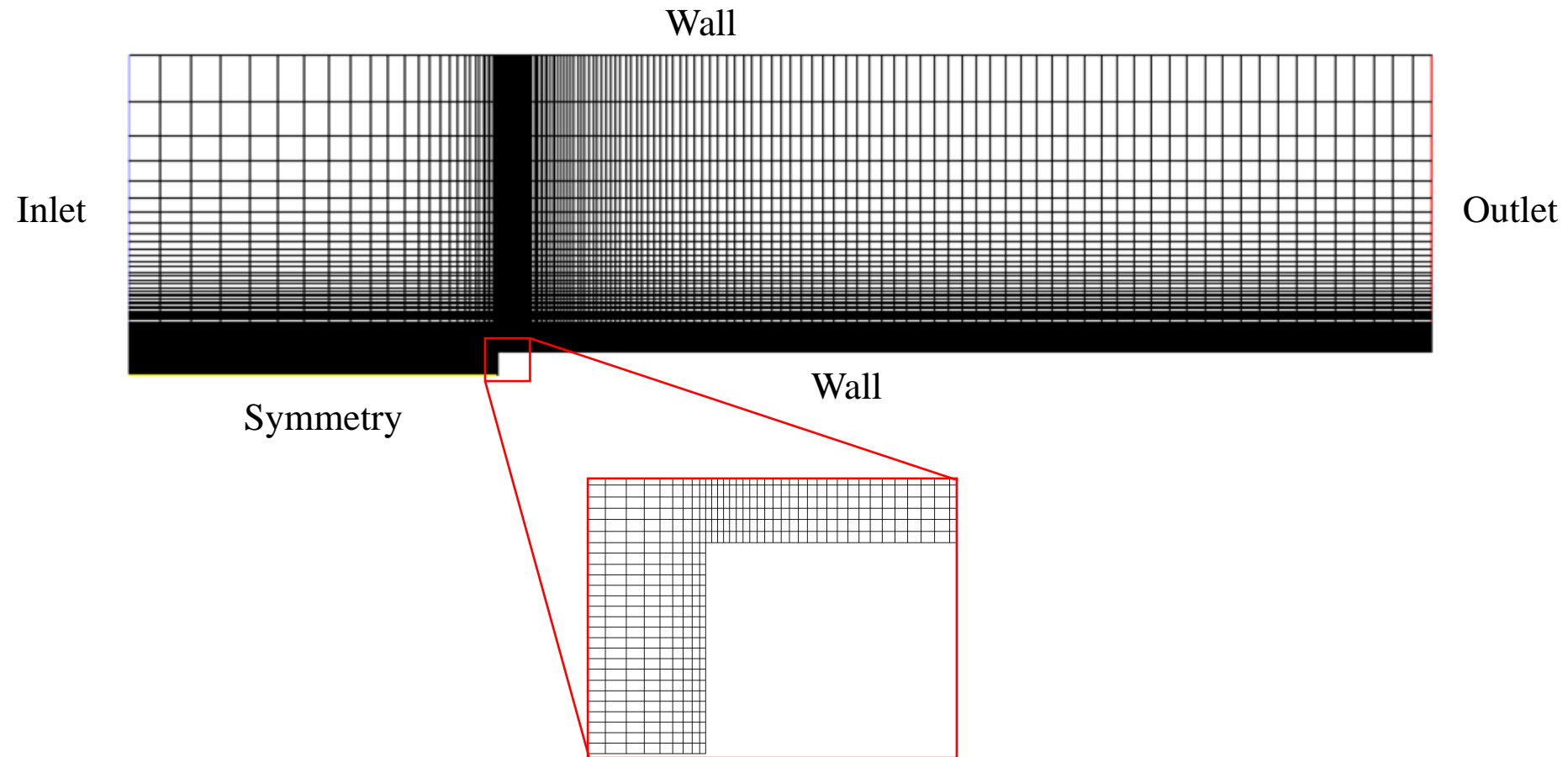
Les termes $D_{T,ij}$, G_{ij} , ϕ_{ij} et ϵ_{ij} doivent être modélisé. RSM évite l'hypothèse de Boussinesq.

Exemple #1 – Écoulement turbulent à travers un obstacle rectangulaire

- Prédiction de la séparation;
- Comparaison entre différents modèles de turbulence

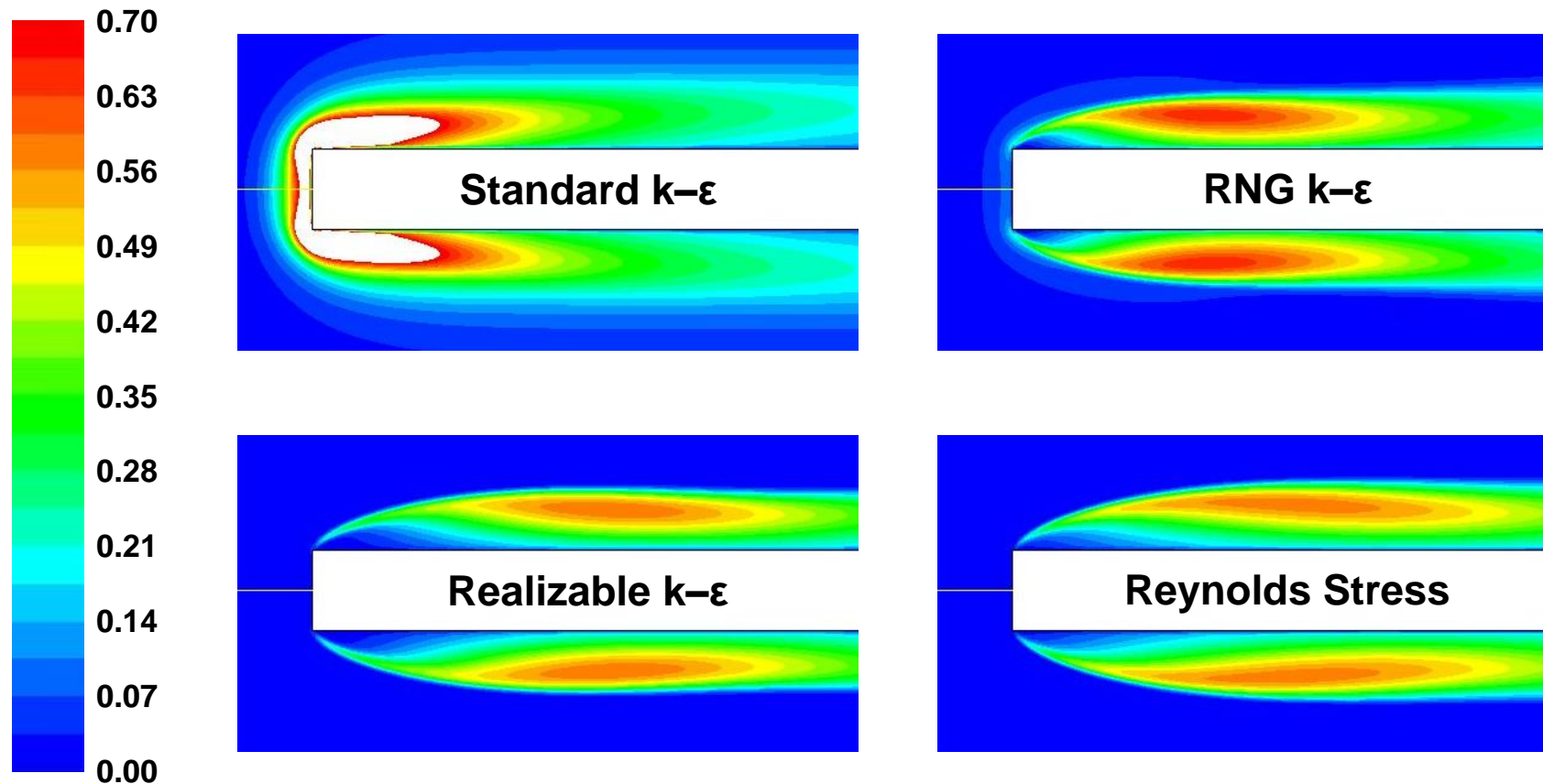


Exemple #1 – Écoulement turbulent à travers un obstacle rectangulaire



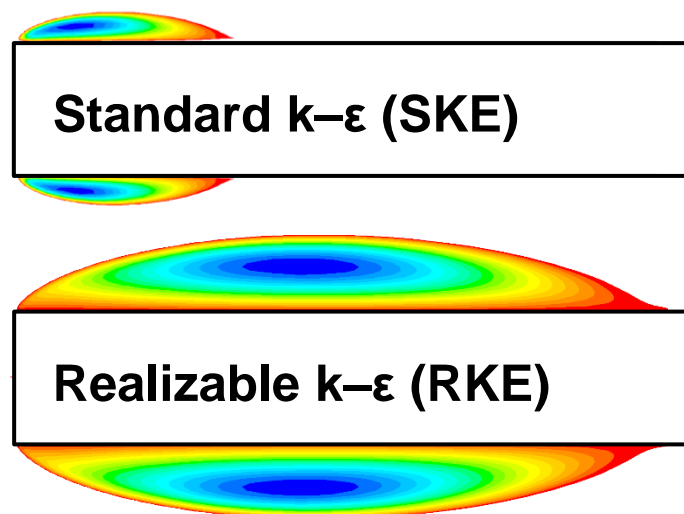
Exemple #1 – Écoulement turbulent à travers un obstacle rectangulaire

Contours of Turbulent Kinetic Energy (m^2/s^2)

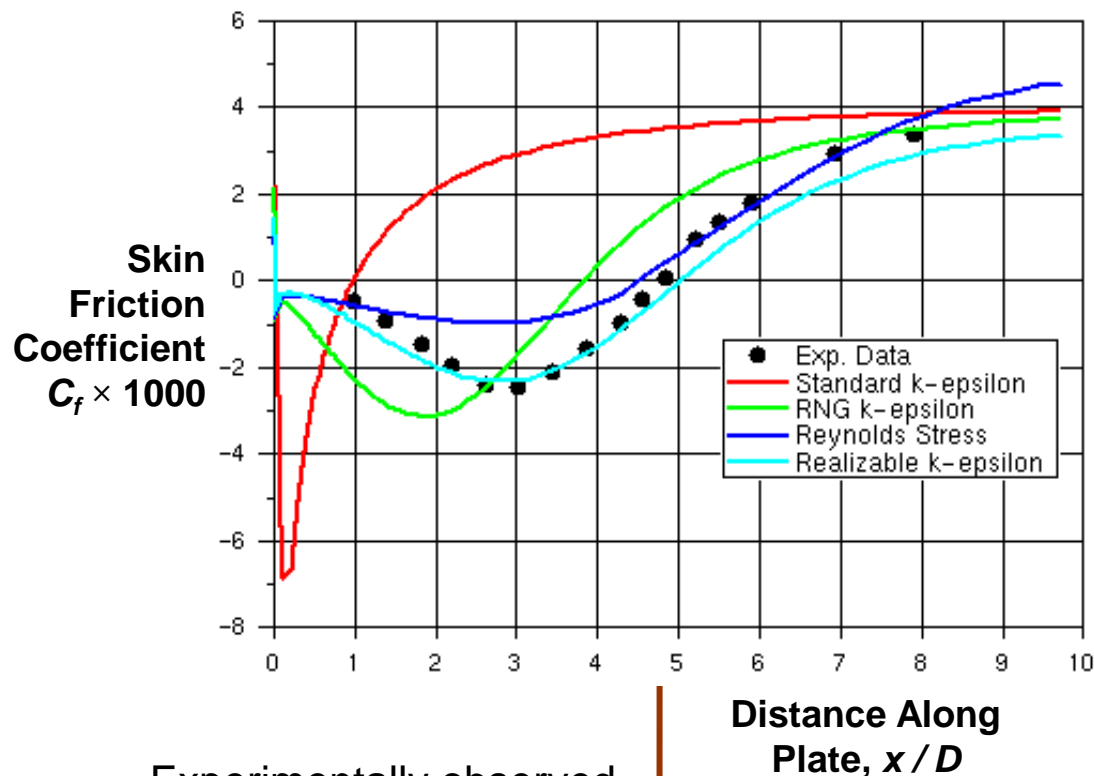


Exemple #1 – Écoulement turbulent à travers un obstacle rectangulaire

Predicted separation bubble:

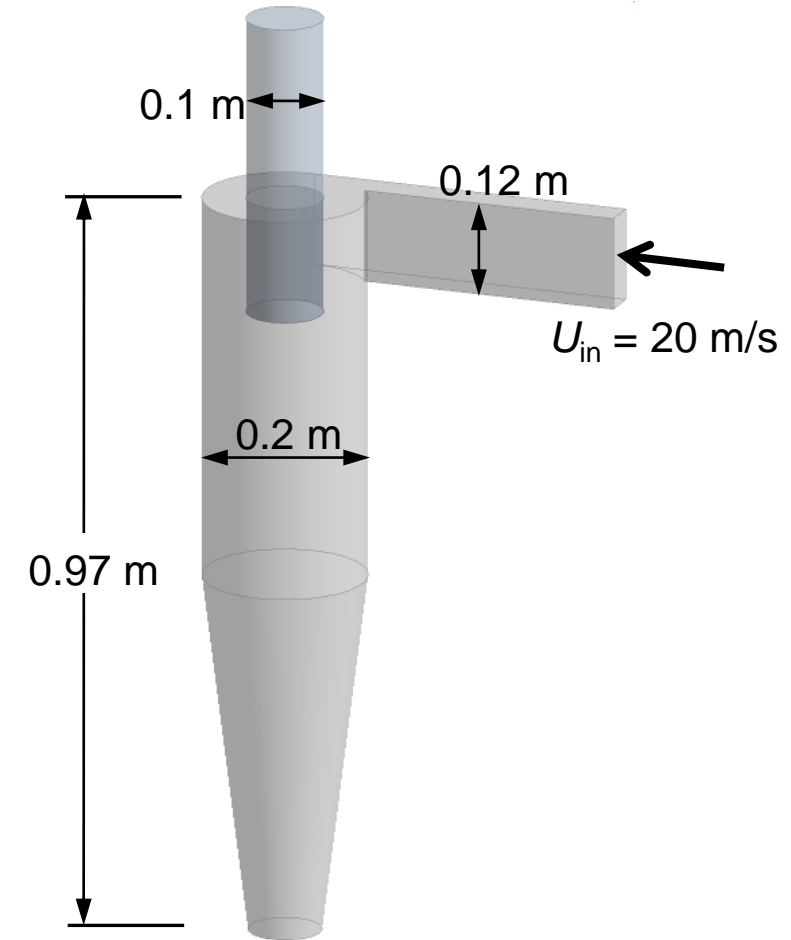
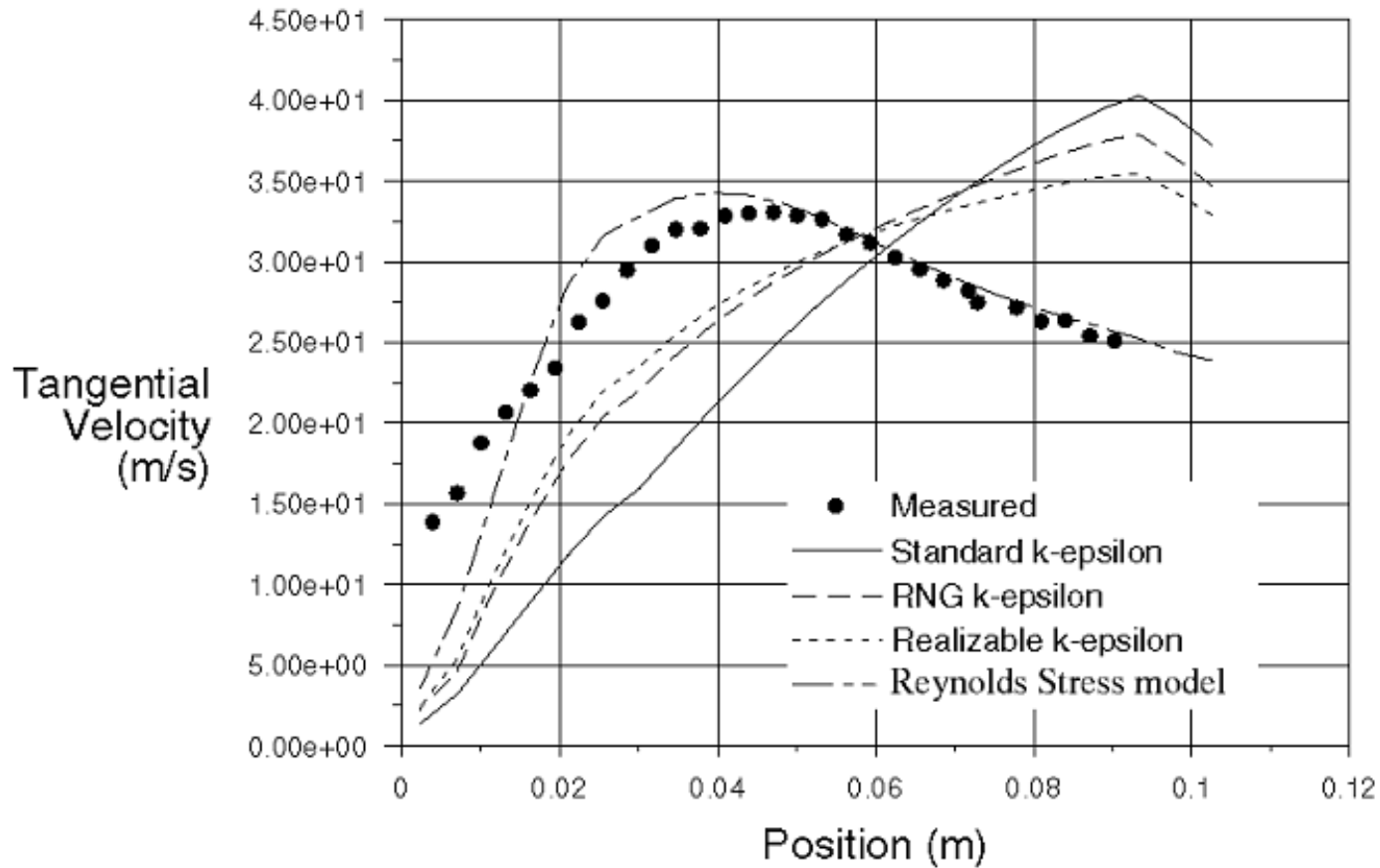


SKE severely underpredicts the size of the separation bubble, while RKE predicts the size exactly.



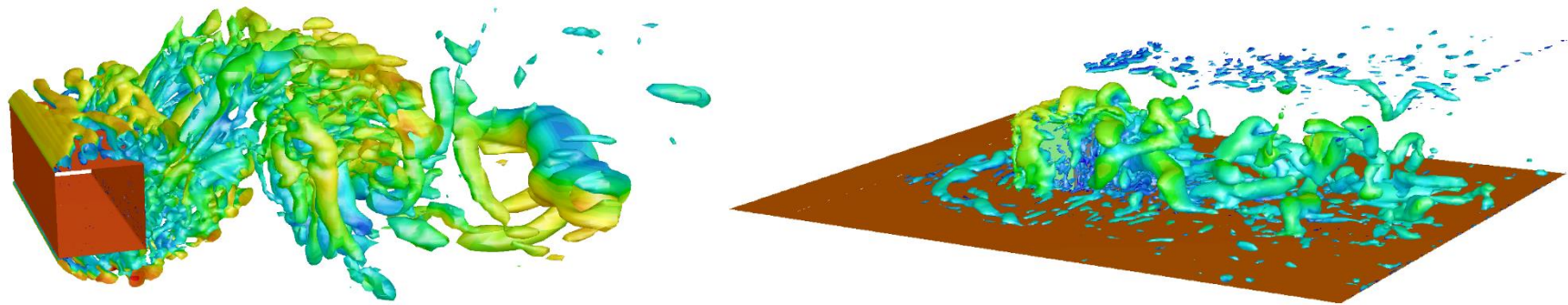
Experimentally observed reattachment point is at $x/D = 4.7$

Exemple #2 – Écoulement turbulent dans un mélangeur

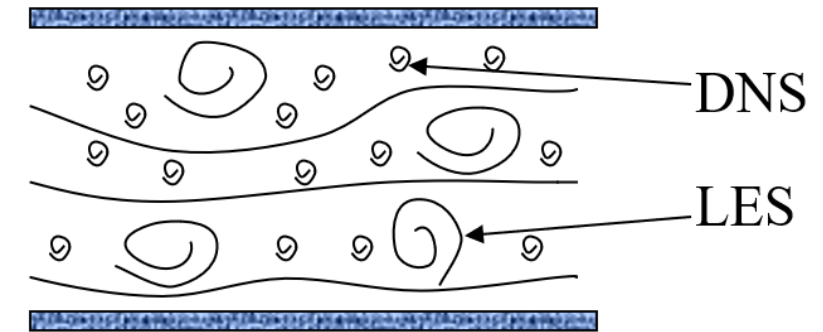
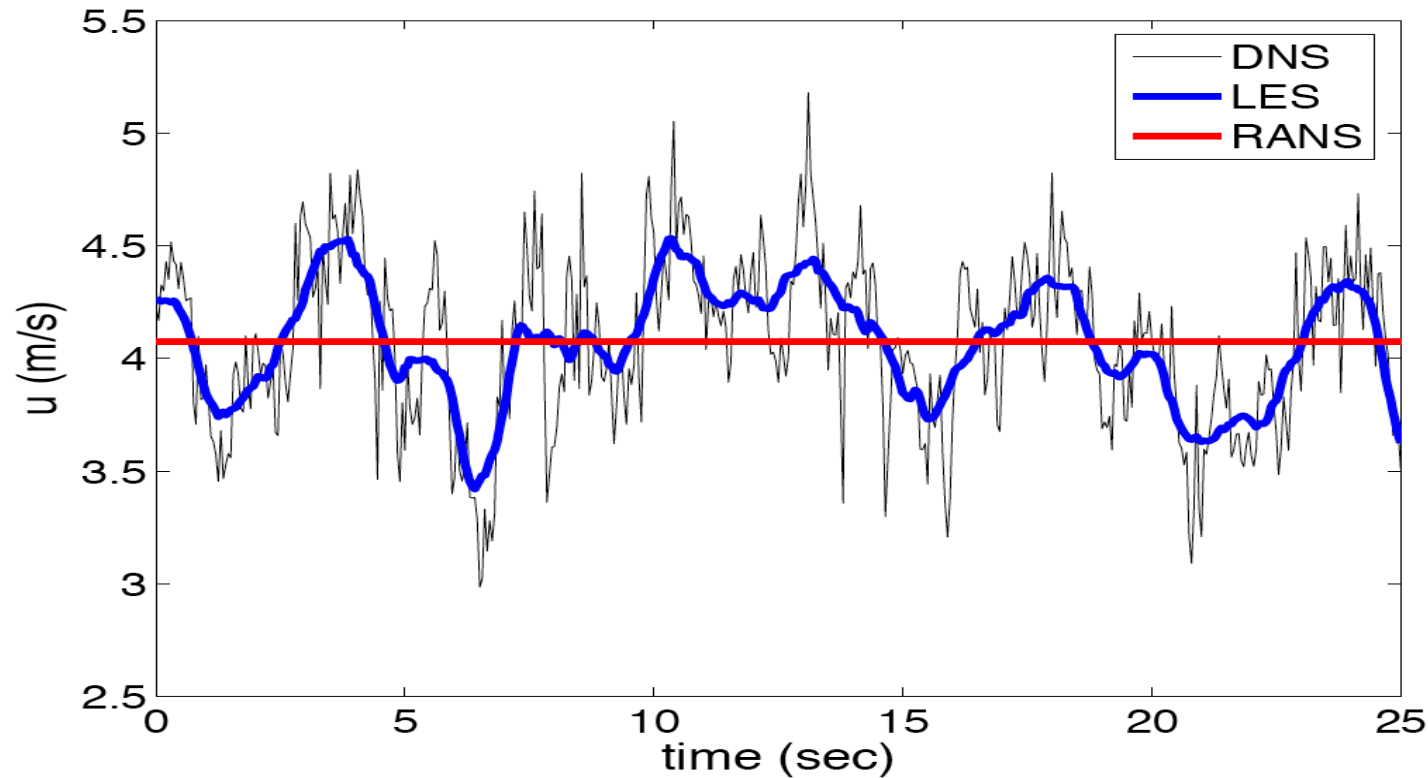


Modèle	Avantages / Inconvénients
Spalart – Allmaras	<p>Economique (1 eqt). Convenable pour les écoulements externes/internes légèrement complexes (quasi-2D) et aux écoulements de couche limite sous gradient de pression (par exemple, profils aérodynamiques, ailes, fuselages d'avions, missiles, coques de navires).</p> <p>Mauvaise prédiction pour les écoulements 3D complexes, les écoulements à cisaillement libre, les écoulements avec une forte séparation.</p>
Standard $k-\epsilon$	<p>Robuste. Largement utilisé pour les écoulements internes. Convenable pour calculer les itérations initiales et aux études paramétriques.</p> <p>Fonctionne mal pour les écoulements complexes impliquant un grand gradient de pression, une séparation, une forte courbure de ligne de courant.</p>
Standard $k-\omega$	<p>Performances supérieures pour la couche limite délimitée par une paroi, le cisaillement libre et les écoulements à faible nombre de Reynolds. Convient aux écoulements complexes de la couche limite sous gradient de pression défavorable et séparation (aérodynamique externe et turbomachines).</p> <p>Sousestimation la position de transition et surestimation de la separation.</p>
SST $k-\omega$	<p>Offre des avantages similaires à ceux de $k-\omega$ Standard. La dépendance à la distance du mur rend cela moins adapté aux écoulements de cisaillement libres.</p> <p>N'est pas convenable pour les écoulements de transition, compressibles, géométries complexes.</p>
Reynolds Stress	<p>Physiquement le modèle RANS le plus solide. Évite l'hypothèse de viscosité turbulente isotrope (Boussinesq). Convenable pour les écoulements 3D complexes avec une forte courbure aérodynamique, un fort tourbillon/rotation (par exemple, un conduit incurvé, des passages d'écoulement rotatifs, des chambres de combustion à tourbillon avec un très grand tourbillon d'entrée, des cyclones...).</p> <p>Plus de temps CPU et de mémoire requis. Plus difficile à converger en raison du couplage étroit des équations.</p>

Simulation à Grandes Échelles (Large Eddy Simulation - LES)



Large Eddy Simulation



- L'approche LES est basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes instantanées filtrées par un filtre spécial et modéliser les tourbillons de sous-maillages qui ne sont pas capturés par le maillage.

Large Eddy Simulation

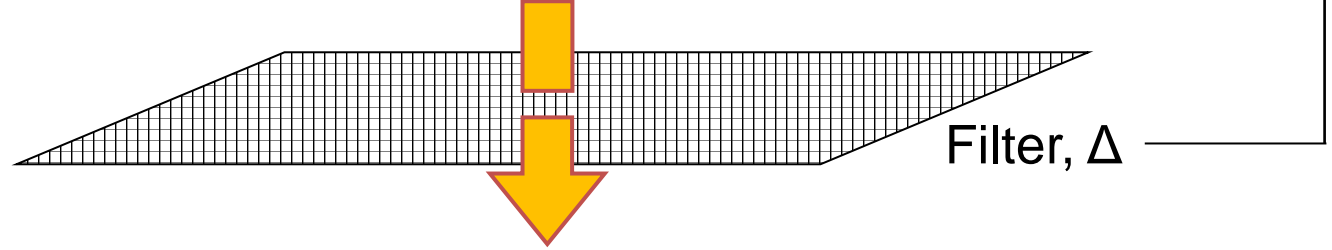
$$u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) + u'_i(\mathbf{x}, t)$$

↑ Instantaneous component
 ↑ Resolved Scale
 ↑ Subgrid Scale

$$\bar{f}(\vec{r}, t) = G * f(\vec{r}, t) = \iiint_V G(|\vec{r} - \vec{r}'|) f(\vec{r}', t) d\vec{r}'$$

Plusieurs modèles de filtrage sont disponible

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$



Filtered N-S equation

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\tau_{ij} = \rho (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j)$$

(Subgrid scale Turbulent stress)

Plusieurs modèles de sous-mailles existent:

- Smagorinsky sub-grid model
- WALE sub-grid model
- Dynamic SGS model
- Autres ...

Equations de Navier-Stokes filtrées

- Une variable filtrée (indiquée par une barre supérieure) est définie par:

$$\bar{\phi} = \int_D \phi(x') G(x, x') dx'$$

où D est le domaine fluide, et G la fonction de filtre qui détermine l'échelle des tourbillons résolus.

- La discrétisation en volumes finis elle-même fournit implicitement l'opération de filtrage:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{\nu} \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' \in \nu$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} 1/V, & \mathbf{x}' \in \nu \\ 0, & \mathbf{x}' \text{ otherwise} \end{cases}$$

où V est le volume d'une cellule de calcul.

Equations de Navier-Stokes filtrées

- N-S equation:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

- Filtered N-S equation:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

- Sub-grid scale (SGS) stress: $\tau_{ij} \equiv \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$

Needs modeling

Modèles de sous-maillles

- Subgrid stress: turbulent viscosity:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\rho v_t \bar{S}_{ij}$$

- Smagorinsky model (Smagorinsky, 1963):
Need ad-hoc near wall damping

$$v_t = (C_S \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|$$

- Dynamic model (Germano et al., 1991):
Local adaptation of the Smagorinsky constant

$$v_t = (C_D \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|$$

- Dynamic subgrid kinetic energy transport model (Kim & Menon 2001):

$$v_t = C_k k_{sgs}^{1/2} \bar{\Delta}$$

$$\frac{\partial k_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k_{sgs}}{\partial x_j} = -\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_\varepsilon \frac{k_{sgs}^{3/2}}{\bar{\Delta}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_{sgs}}{\sigma_k} \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j} \right)$$

Modèles hybrides RANS/LES

Detached Eddy Simulation (DES)

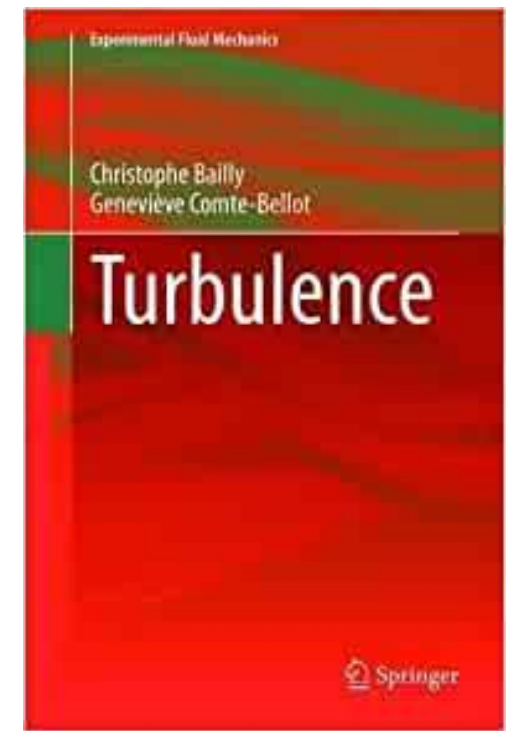
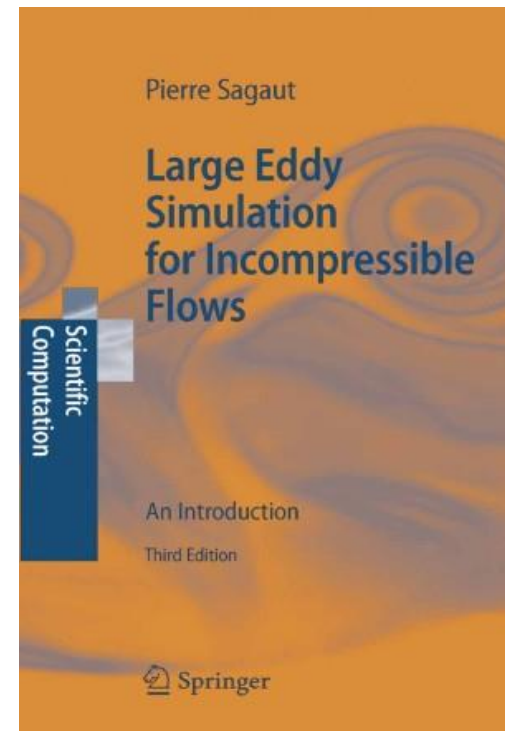
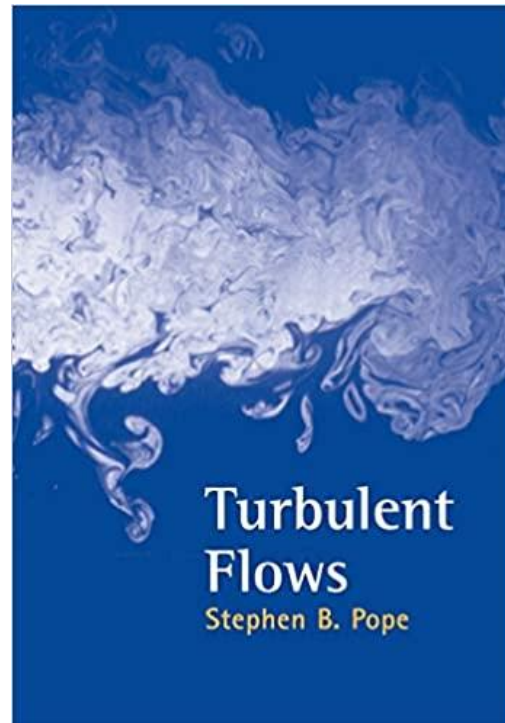
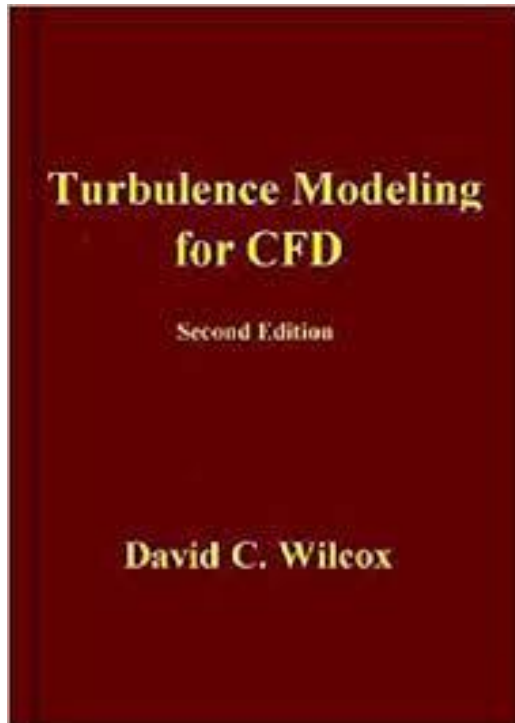
Detached Eddy Simulation (DES)

- Pour les écoulements délimités par une paroi à haut nombre de Reynolds, l'approche LES devient prohibitive pour résoudre la région proche paroi.
- L'utilisation de RANS dans les régions proches parois réduirait considérablement l'exigence de résolution de maillage.
- Exemple: modèle hybride RANS/LES basé sur le modèle de turbulence Spalart-Allmaras:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = C_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} - C_{w1}f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{\bar{d}}\right)^2 + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + \dots \right]$$

$$\bar{d} = \min(d_w, C_{DES}\Delta)$$

 L'approche DES est une alternative pratique à LES pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé dans les applications aérodynamiques externes.



Fin

Merci pour votre attention

Annexe:

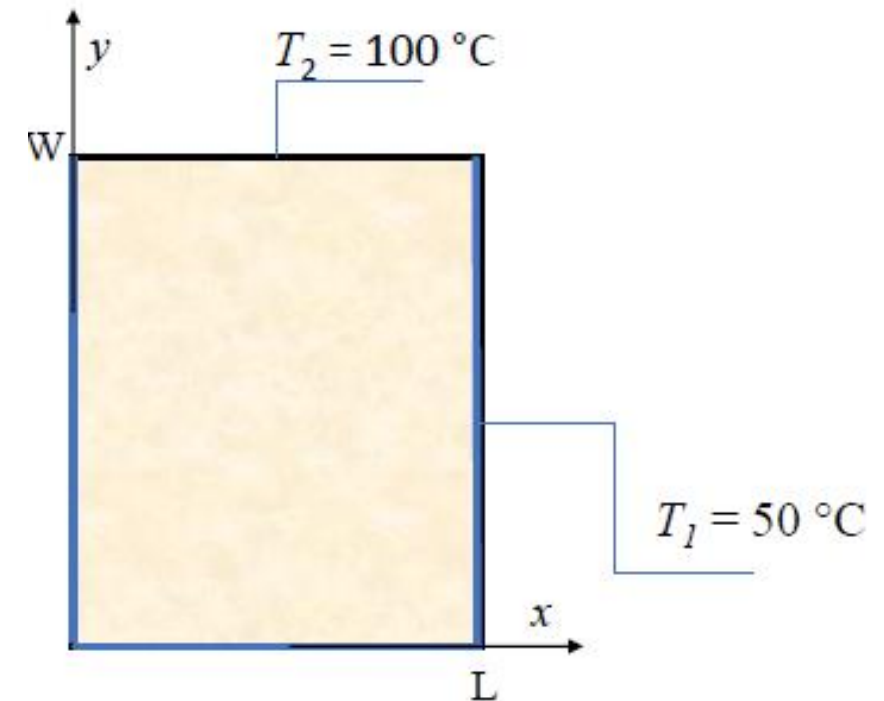
Exemples d'application sur

ANSYS Fluent

Ex#1: 2D Steady-State Heat Conduction

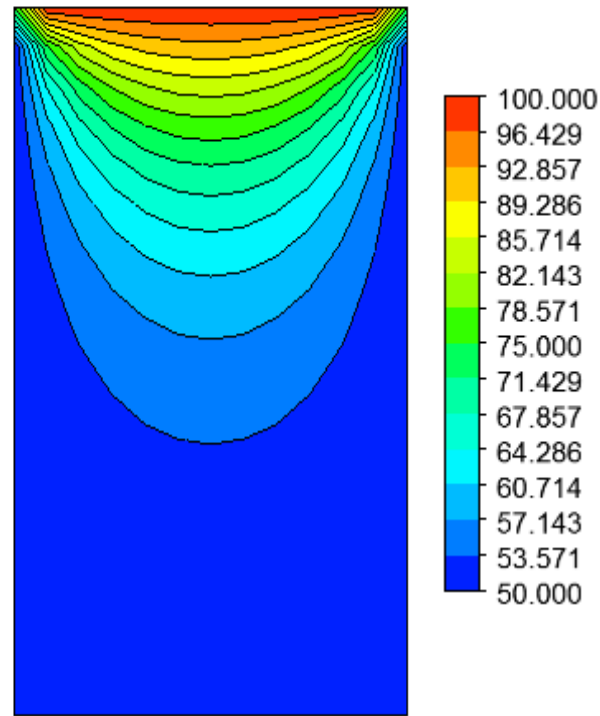
Consider a 2D solid material of aluminum with constant properties ($k = 202.4 \text{ W/m.K}$, $C_p = 871 \text{ J/kg.K}$, and $\rho = 2719 \text{ kg/m}^3$) of dimensions $L \times W = 0.06 \text{ m} \times 0.09 \text{ m}$, subjected to isothermal boundary conditions as presented in the opposite figure.

- Simulate the heat transfer in the solid material using the ANSYS Fluent software and compare the temperature contours with the results of the finite difference method and the analytical solutions.

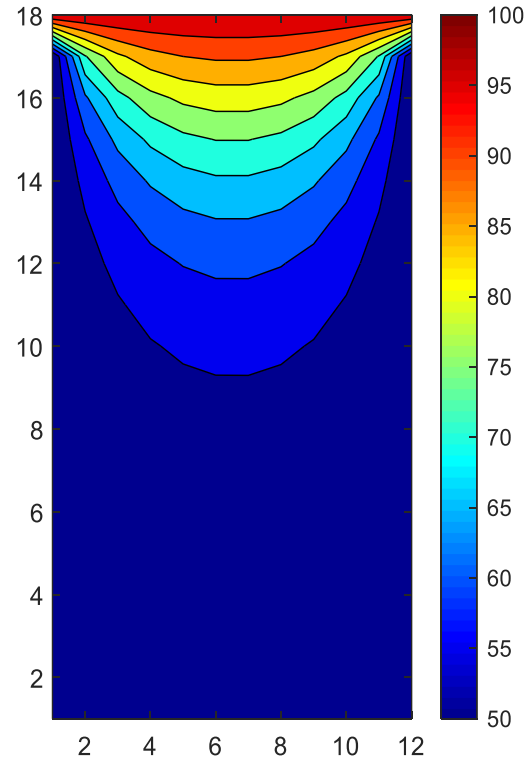


The tutorial is available at this link: <https://sites.google.com/g.enp.edu.dz/dr-abdelhamid-bouhelal>

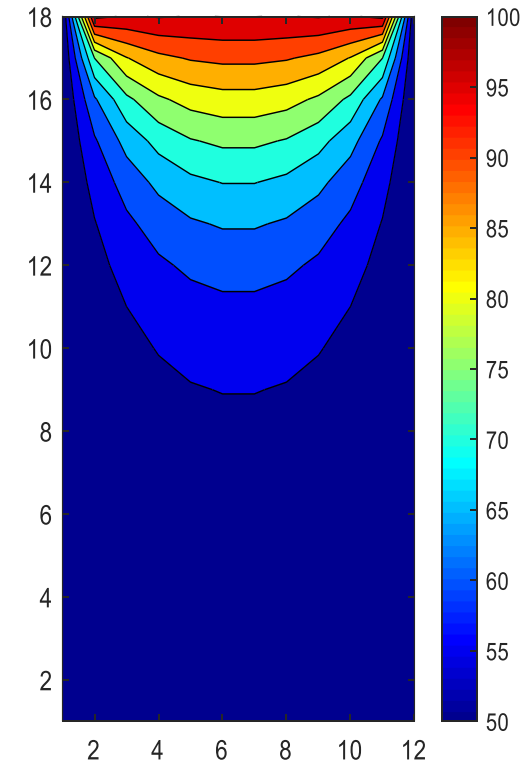
Ex#1: 2D Steady-State Heat Conduction



Fluent (Mesh 18x12)

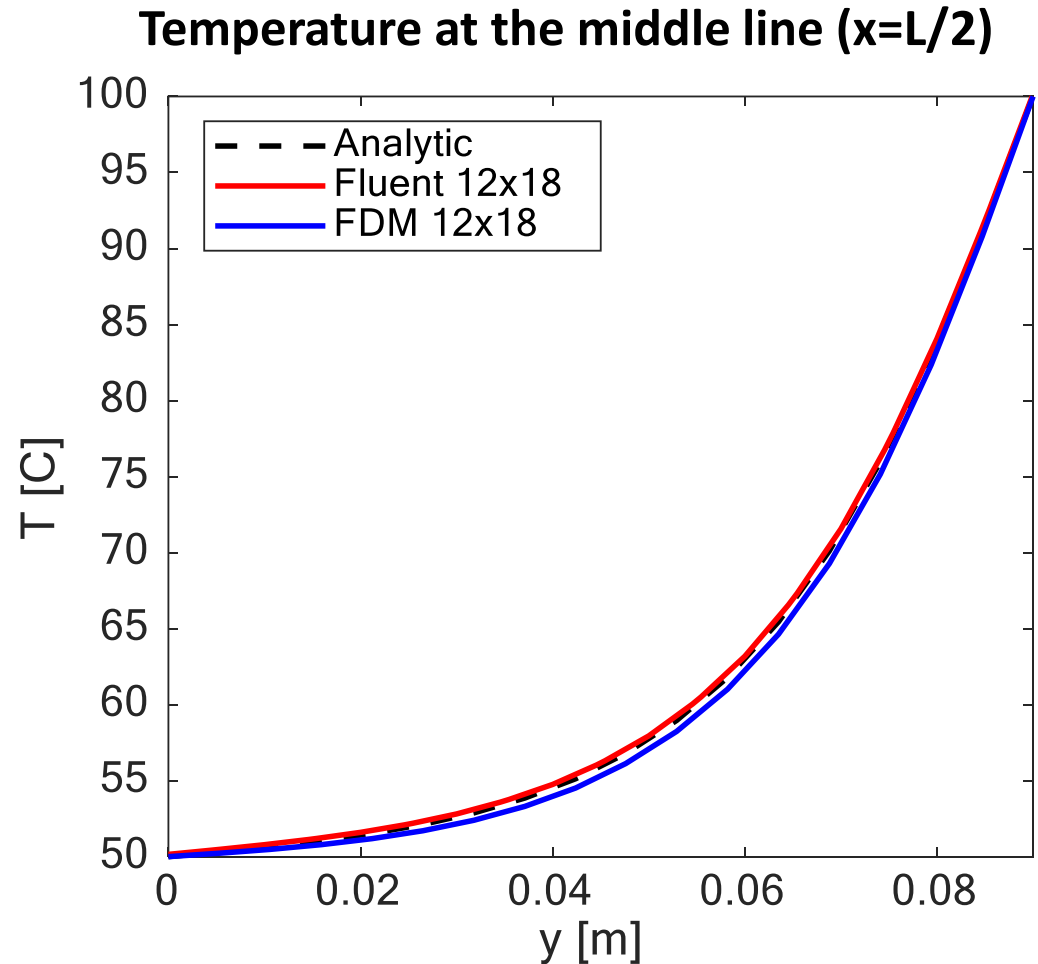


FDM (Mesh 18x12)



Analytical

Ex#1: 2D Steady-State Heat Conduction

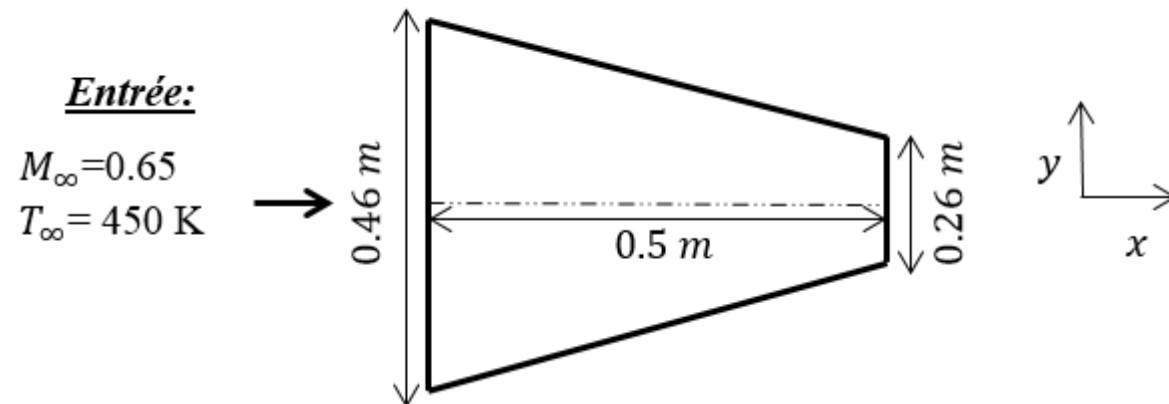


Method	Max absolute error (%)
Fluent	0.3555
FDM	0.8405

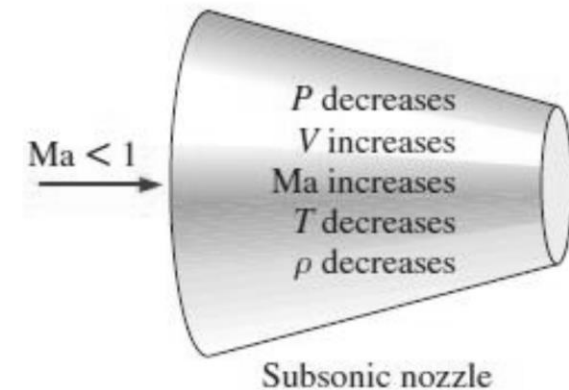
$$T(x, y) = 50 + \frac{100}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{60}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi ny}{60}\right)}{\sinh\left(\frac{90\pi n}{60}\right)}$$

Ex#2: Compressible subsonic flow through a converging nozzle

Consider an inviscid flow through a convergent nozzle of geometric configuration as shown below:

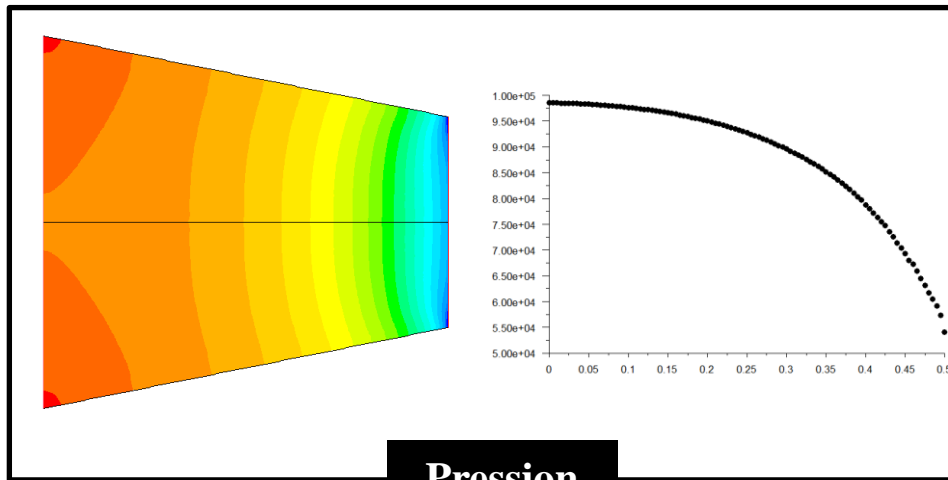


Using Ansys Fluent, simulate this flow and quantitatively confirm the theoretical variation laws shown in the opposite figure:

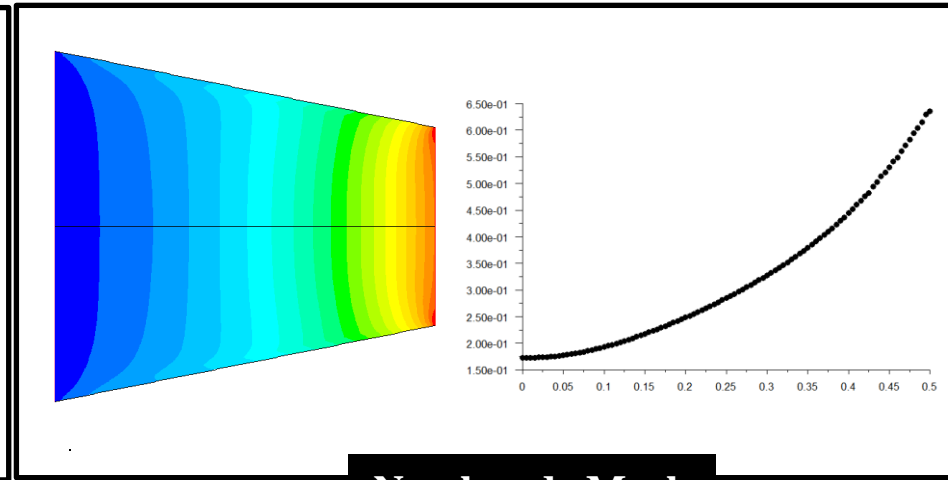


The tutorial is available at this link: <https://sites.google.com/g.enp.edu.dz/dr-abdelhamid-bouhelal>

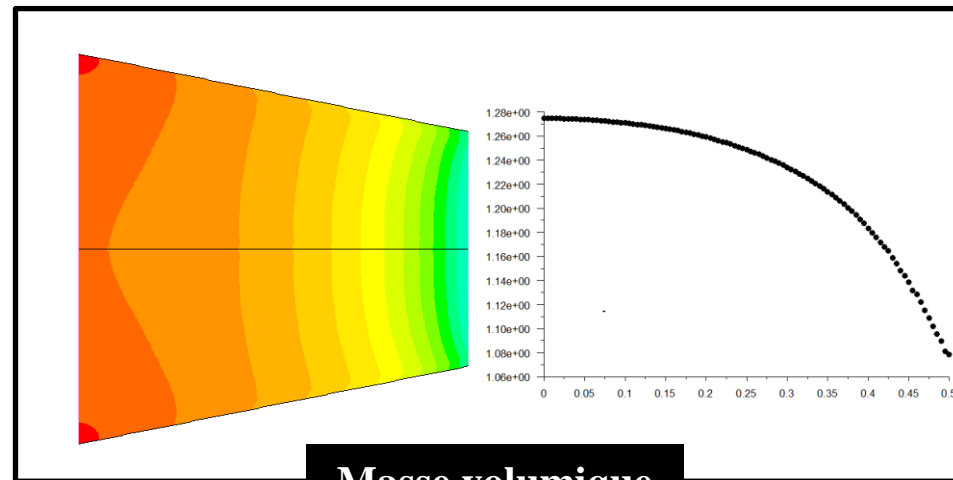
Ex#2: Compressible subsonic flow through a converging nozzle



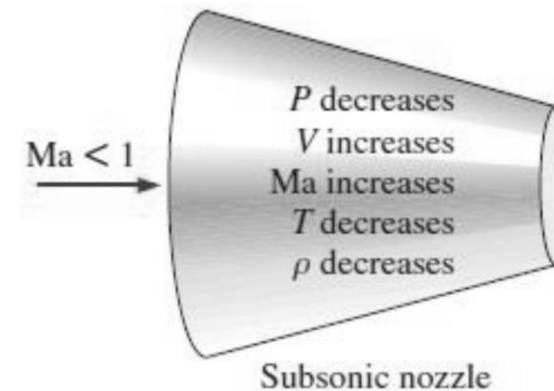
Pression



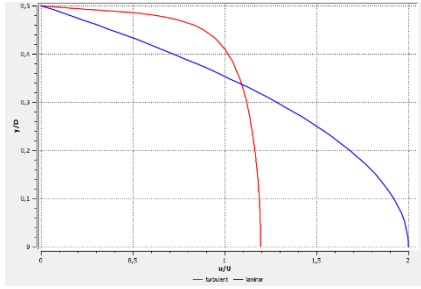
Nombre de Mach



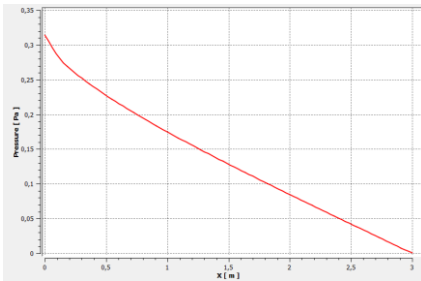
Masse volumique



Ex#3: 2D Turbulent Pipe Flow with Heat Transfer

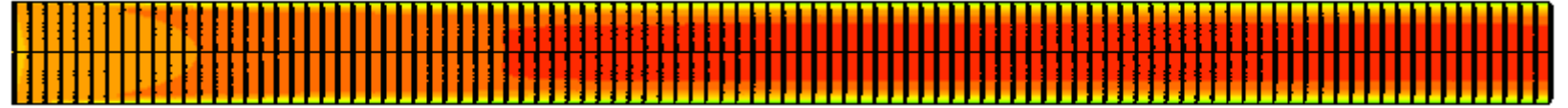


Non dimensional outlet velocity

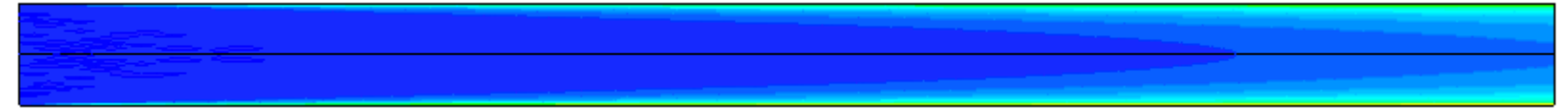


Pressure at the centerline

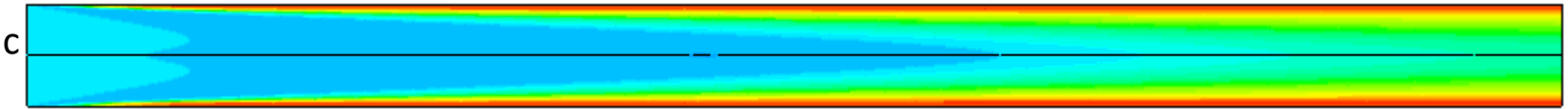
Velocity



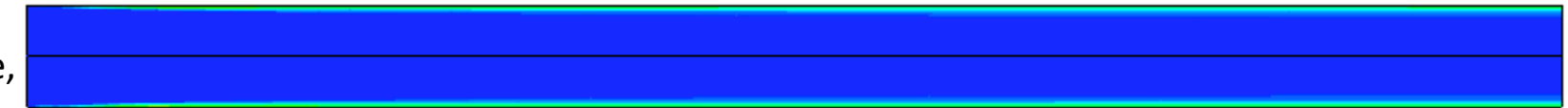
Temperature



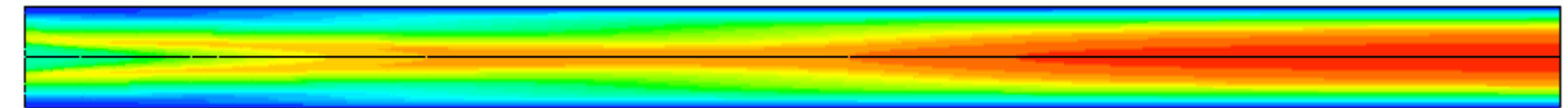
Turbulent Kinetic energy, k



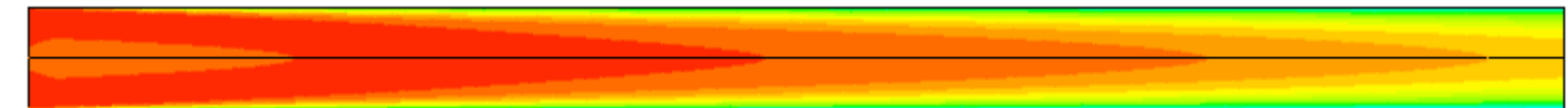
Turbulent dissipation rate, epsilon



Eddy viscosity



Relative total pressure



This tutorial and more applications are available at this link: <https://sites.google.com/g.enp.edu.dz/dr-abdelhamid-bouhela>