



HAL
open science

Ce que le neuroconstructivisme a apporté au débat philosophique sur les fondements des mathématiques

Stéphane Ange Gondo

► **To cite this version:**

Stéphane Ange Gondo. Ce que le neuroconstructivisme a apporté au débat philosophique sur les fondements des mathématiques. Séminaire des doctorants 2022-2023 Archives Henri-Poincaré (Nancy), Nov 2023, Nancy, France. hal-04425305v2

HAL Id: hal-04425305

<https://hal.science/hal-04425305v2>

Submitted on 31 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ce que le neuroconstructivisme a apporté au débat philosophique sur les fondements des mathématiques

Stéphane Ange GONDO¹

.....

CONTEXTE INDRODUCTIF

Le neuroconstructivisme est l'approche des neurosciences cognitives visant à expliquer le processus de construction de la connaissance à partir d'une description des mécanismes neuronaux et des différents niveaux cognitifs. Appliqué au domaine des mathématiques, le neuroconstructivisme (mathématique) soutient clairement que la connaissance ou la pensée mathématique résulte des mécanismes neurobiologiques. Il faut pour cela déterminer les corrélats neuronaux ou fondements cognitifs des mathématiques et expliquer comment la cognition mathématique, plus précisément la cognition numérique et spatiale, émerge à partir des mécanismes neuronaux qui se déroulent dans le cerveau. Afin de parvenir à ces deux buts (prétentieux), les spécialistes de la cognition vont se servir des nouvelles méthodes permettant de détecter les mécanismes de la pensée ou des états psychiques. Ce sont entre autres les méthodes d'imagerie cérébrale, telles que l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), l'électro-encéphalographie (EEG) etc., qui sont, en fait, des méthodes de visualisation du cerveau.

Du point de vue contextuel et méthodologique, la vision du neuroconstructivisme mathématique, axée sur une explication mécaniste causale² des fondements des mathématiques, s'oppose à la vision du constructivisme mathématique de Poincaré, axée sur une explication théorique de la genèse et des fondements des mathématiques. Cependant le neuroconstructivisme mathématique et le constructivisme mathématique de Poincaré s'accordent sur une conception naturaliste des mathématiques, c'est-à-dire qu'ils s'accordent sur le fait que les objets mathématiques résultent d'une construction humaine et qu'ils ne sont pas des entités abstraites existant dans un monde platonicien. Par conséquent, il devient nécessaire de rapprocher ces deux approches en vue d'en dégager les conséquences épistémologiques pour les fondements des mathématiques.

Pour des besoins actuels, je me bornerai à présenter et à examiner les conséquences épistémologiques des théories neurocognitives de Dehaene et de Berthoz visant à expliquer le

¹ Doctorant de philosophie au Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie-Archives Henri Poincaré (UMR 7117- LHSP).

² L'explication mécaniste causale est la méthode propre aux neurosciences fondamentales. Opposée à une explication théorique des phénomènes scientifiques, cette méthode cherche à donner une explication mécanique des causes immédiates des phénomènes neurobiologiques. Cf. REVONSUO, Antti. Sur la nature des explications dans les neurosciences. In *Des neurosciences à la philosophie : neurophilosophie et philosophie des neurosciences*, Éditions Syllepse, Paris, 2008, p. 43.

processus de construction et d'acquisition du nombre et de l'espace. Avant cela, je voudrais présenter brièvement quelques remarques de Poincaré en revenant sur le débat historique qui a opposé, au cours du siècle dernier, les visions logicistes, formalistes et intuitionnistes des mathématiques.

I-POINCARÉ FACE AU LOGICISME ET AU FORMALISME

1. Poincaré face au logicisme

La question des fondements de l'arithmétique, en particulier du nombre, fut le point central de la polémique entre Poincaré et les logicistes. Le logicisme considère, de façon générale, que l'arithmétique proviendrait de la logique. C'est une doctrine qui, d'une part, nie l'intervention de l'intuition dans le processus de construction des nombres et de raisonnement arithmétique et qui d'autre part, adhère à la thèse du réalisme mathématique qui considère les objets mathématiques comme des entités abstraites qui existeraient à l'extérieur de l'esprit humain. Il est important de préciser que tous les logicistes ne sont pas des réalistes, cependant Russell et Couturat, en raison de leur croyance au logicisme et de leur adhésion au réalisme mathématique, considéraient que les propositions de l'arithmétique, dans la mesure où elles ne proviennent pas de l'intuition, peuvent être déduites des principes fondamentaux de la logique. Fort de cela, ils se sont publiquement opposés à Poincaré au sujet de la construction du nombre. Bien que les conceptions de ces deux logicistes diffèrent sur certains points³, Russell et Couturat s'accordent à tenir le nombre comme étant dérivé des principes fondamentaux de la logique.

Se plaçant à un tel point de vue, ces deux logicistes envisageaient de logiciser le nombre. Une telle démarche impliquait la logicisation de la preuve mathématique. Par preuve mathématique, il faut entendre les inférences authentiquement mathématiques qui sont à la base de la productivité épistémique du raisonnement mathématique. La question de savoir si la logicisation de la preuve mathématique est suffisante pour expliquer la productivité et la compréhension des mathématiques a été, selon Detlefsen, le point central du désaccord entre Poincaré et les logicistes⁴. En effet, la thèse logiciste selon laquelle le nombre peut être logicisé et la conception selon laquelle le raisonnement mathématique est un raisonnement déductif, basé sur les principes logiques, présupposent que la preuve logique est suffisante pour expliquer la compréhension et la productivité des mathématiques. Poincaré qui était radicalement opposé

³ La grande différence entre Russell et Couturat tient à ce que le premier établit une distinction entre la logique et la théorie de la connaissance. Alors que chez Couturat, la logique remplace en quelque sorte la théorie de la connaissance. Dans une des lettres adressées à Couturat en 1904, Russell lui fait part de son désaccord en ces termes : « *je ne me sens pas très à l'aise dans cette question, qui appartient à la théorie de la connaissance, pas à la logique* » in RUSSELL, Bertrand. *Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis COUTURAT (1897-1913)*, 2001, *op. cit.*, p. 392.

⁴ DETLEFSEN, Michael. Poincaré against the logicians. *Synthese* 90. 1992, traduction française faite par Gerhard Heinzmann, p. 8.

à ces deux thèses et qui considérait le raisonnement mathématique comme étant un raisonnement inductif, dans lequel il existe une connexion intrinsèque entre l'intuition et la logique, soutenait que la preuve logique est insuffisante.

Dans *La science et l'hypothèse*, par exemple, il montra que le raisonnement déductif mis en avant par les logicistes restent incapables de produire de nouvelles connaissances mathématiques⁵. Malgré les développements de Russell visant à montrer que la déduction logique, issue de la logique nouvelle, pouvait produire de nouvelles connaissances mathématiques, Poincaré objectait à ce dernier que la connaissance que la déduction logique est susceptible de produire est une connaissance générique qui doit être distinguée de la connaissance authentiquement mathématique, car ce qui explique l'extension de la connaissance mathématique, c'est la capacité de l'esprit à établir les relations entre les prémisses et les conclusions de sorte à créer de nouvelles propositions non incluses préalablement dans les prémisses. Ainsi pour Poincaré, écrit Detlefsen,

l'inférence mathématique ne relève pas d'abord d'une analyse des conditions de vérité des prémisses ayant pour but d'extraire une proposition différente, dont les conditions de vérités sont enveloppées dans celles des prémisses, mais consiste bien plutôt en une synthèse de certaines facultés de l'esprit avec les prémisses dans le but de parvenir à une proposition qui n'est pas contenue dans les prémisses elles-mêmes ; et c'est l'opération de ces facultés toujours actives de l'esprit sur les prémisses qui est la raison ultime de la productivité épistémique de l'inférence mathématique⁶.

Puisque pour Poincaré la productivité des mathématiques ne provient pas de la logique, il en déduit, de ce fait, que le raisonnement déductif est un raisonnement improductif, infécond et incapable de produire une extension de la pensée mathématique. Afin de mettre en évidence le caractère distinctif du raisonnement mathématique, Poincaré établit une distinction entre l'inférence mathématique (axée sur le raisonnement par récurrence ou l'induction complète) et l'inférence logique (axée sur le raisonnement déductif). Cette distinction faite par Poincaré est consécutive de son désaccord avec les logicistes sur la rigueur du raisonnement mathématique. Pour les logicistes, la rigueur mathématique est assurée par la déduction logique. Pour Poincaré, en revanche, la rigueur mathématique est assurée par l'induction complète qui nécessite une opération de l'intuition. Il se pose alors la question de savoir laquelle de ces conceptions de rigueur mathématique est plus avantageuse pour la compréhension des mathématiques. Pour comprendre les mathématiques, conserver leur productivité épistémique et leur rigueur, il faut, selon Poincaré, recourir à l'inférence mathématique qui est un raisonnement hétérogène et non homogène⁷.

⁵ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*, Paris, éd. Champs Flammarion, 2000, p. 31-32.

⁶ DETLEFSEN, Michael. "Poincaré versus Russell sur le rôle de la logique dans les mathématiques" : *Les Études philosophiques*, v. n° 97, n. 2 (2011), p. 159.

⁷ *Idem*, p. 164.

Dans la suite de mon intervention, je m'éloignerai de cette interprétation de Detlefsen qui est pourtant correcte, en montrant que le rejet du logicisme, du réalisme mathématique et des théories logico-formelles par Poincaré avait pour but de situer la construction mathématique dans un cadre cognitif. Pour justifier ce point de vue, je montrerai que les réflexions philosophiques de Poincaré, dans la mesure où elles s'intéressent particulièrement aux origines logiques des nombres et de la géométrie, comportent des « aspects cognitifs » et peuvent, en ce sens, être rapprochées aux conceptions cognitives présentées aujourd'hui par des neuroscientifiques cognitivistes, en l'occurrence, par Dehaene et Berthoz.

Dans le jargon des neurosciences cognitives, le terme « cognitif » a un double sens. Il renvoie, premièrement, à la capacité du cerveau et ses neurones à interagir avec le monde sensible. Pour Changeux, l'auteur de *L'homme de vérité*, un processus est dit cognitif lorsqu'il lie l'intellect et les données empiriques du monde sensible⁸. En d'autres termes, on parle d'aspects ou de processus cognitifs lorsqu'il y a une interactivité entre l'esprit humain et le monde extérieur. Comme second sens, le terme « cognitif » renvoie à la capacité d'appréhension ou d'acquisition par le biais d'expériences ou d'apprentissages appelés « jeux cognitifs »⁹. Dans ce second sens, on dira que l'acquisition ou l'appréhension intellectuelle d'un individu requiert une confrontation avec son environnement socio-culturel. Pour rapprocher le constructivisme mathématique de Poincaré et le neuroconstructivisme mathématique (de Dehaene et de Berthoz), j'emploierai le terme « aspects cognitifs » pour insister sur l'interaction entre l'esprit humain et l'expérience sensible, qu'on trouve en filigrane de la philosophie des mathématiques de Poincaré.

S'agissant de la construction des nombres, Poincaré, qui était fermement opposé à la vision logiciste qui réduit le nombre à une construction purement logique, cherchait à déterminer les aspects cognitifs à l'origine de la création du nombre, via l'adoption d'une conception « intuitionniste »¹⁰. Comme on le sait, Poincaré a hérité de Kant la conception selon laquelle les propositions de l'arithmétique sont des jugements synthétiques *a priori*, mais contrairement au philosophe de Königsberg qui considère que ce sont les formes de la sensibilité qui décident du caractère synthétique *a priori* de l'arithmétique, Poincaré, lui, attribue le caractère synthétique des propositions de l'arithmétique à l'« intuition pure », qui

⁸ CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*, Paris, Odile Jacob, 2002, p. 351.

⁹ Dans le vocabulaire de Changeux, les « jeux cognitifs » désignent l'ensemble des différents apprentissages ou essais empiriques auxquels s'adonne l'enfant dans son milieu environnemental. Ce sont par exemple les séances d'apprentissages, le babillage par imitation et les séances de jeu qui se font par l'entremise des membres de la société, et qui permettent à l'enfant de se construire intellectuellement. Cf. CHANGEUX, Jean-Pierre. *L'homme de vérité*, 2002, op. cit., p. 90-96.

¹⁰ J'entends par conception intuitionniste la conception qui fait reposer la construction des nombres sur l'intuition.

n'est pas réceptive mais, en tant qu'activité de l'esprit actif, appartient donc à l'entendement au sens de Kant¹¹.

Dans la conception intuitionniste de Poincaré, l'« intuition pure» qui veut dire aussi, l'«*intuition intellectuelle*»¹² a la faculté de créer indéfiniment les nombres entiers pourvu qu'elle interagisse avec l'«intuition sensible» (l'expérience). Mais cela ne doit pas être interprété comme une entière dépendance de la première instance (l'intuition) à la seconde (l'expérience). La différence essentielle entre Kant et Poincaré tient à ce que le premier considère que l'esprit est passif et qu'il est dans l'incapacité de mener une activité de manière spontanée, alors que pour le second, l'esprit est doté d'un pouvoir de création (sans limite), il est donc actif et capable de créer de manière formelle et *a priori* les objets sans recourir à l'expérience. Son interaction avec l'expérience intervient cependant pour éviter d'éventuelles contradictions lors de la création des nombres. On voit que l'intuition poincaréenne est indépendante de la sensibilité, mais elle se révèle seulement à travers elle.

Afin de rejeter la construction logico-formelle proposée par les logicistes, Poincaré proposa un modèle de construction des nombres dans lequel il insista sur le rôle de l'intuition. Selon lui, les nombres entiers et réels sont construits de l'itération, qui est une méthode inductive fondée sur l'intuition. La particularité de cette méthode est d'offrir à l'esprit la possibilité d'effectuer des opérations de manière continue ou indéfinie par le biais de l'expérience. Du point de vue de Poincaré, la construction des nombres (entiers et réels) se fait selon un processus architectural nécessitant l'opération de l'intuition. Il avance deux raisons principales pour justifier ce point de vue. En premier lieu, Poincaré montre que l'intuition est l'instrument de l'invention, dans la mesure où elle est utile à la formulation et à la sélection des idées prometteuses conduisant à l'invention mathématique¹³. En second lieu, il montre que l'intuition est nécessaire à la compréhension des mathématiques, car « *sans elle les jeunes esprits ne sauraient s'initier à l'intelligence des mathématiques, ils n'apprendraient pas à les aimer et n'y verraient qu'une simple logomachie* »¹⁴. Ce que soutient Poincaré donc, c'est que, dans la mesure où l'intuition est utile à la créativité ou l'invention mathématique et à la compréhension des mathématiques, elle est, par conséquent, impliquée dans la construction des nombres.

La thèse suivant que le constructivisme mathématique de Poincaré comporte les aspects cognitifs se comprend mieux si l'on cherche à savoir comment ce dernier explique la genèse ou

¹¹ Cf. POINCARÉ, Henri. *La valeur de la science*, Paris, éd. Champs Flammarion, 1990, p. 33. 1990. Voir aussi *La science et l'hypothèse*. 2000, p. 41.

¹² Cf. MOOIJ, Jan Johann. *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*, Paris, Gauthier-Villars, 1966, p. 124.

¹³ POINCARÉ, Henri. *Science et méthode*, Paris, éd. Kimé, 1999., p. 47.

¹⁴ POINCARÉ, Henri. *La valeur de la science*. 1999, *op. cit.*, p. 35.

l'origine du continu mathématique (ou les grandeurs continues) dans le chapitre II de *La science et l'hypothèse*. À ce sujet, les adeptes du courant d'arithmétisation de l'analyse¹⁵ (Dedekind et Kronecker) et les empiristes étaient engagés dans un débat doctrinal. Pour les premiers, en l'occurrence pour Dedekind, le continu mathématique, en tant qu'il est obtenu par un acte d'abstraction, est une pure création de l'esprit¹⁶, alors que pour les seconds, le continu mathématique, provient des faits empiriques. Poincaré qui n'adhère ni au courant d'arithmétisation de l'analyse ni à l'empirisme, proposa une conception intermédiaire dans laquelle il chercha à déterminer le rôle qui revient à l'esprit humain et celui qui revient à l'expérience dans le processus de construction des grandeurs continues. C'est dans cette perspective qu'il montra que la création des grandeurs continues mobilise de manière combinatoire l'esprit humain et l'expérience : l'esprit a pour rôle de créer les symboles et l'expérience a pour rôle de fournir à l'esprit les conditions nécessaires à la création des symboles. L'esprit a certes une puissance créatrice, mais c'est l'expérience qui lui donne l'occasion de manifester sa puissance créatrice. Poincaré résume alors la construction des grandeurs continues en ces termes :

En résumé, l'esprit à la faculté de créer les symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison¹⁷.

Nous verrons plus loin, par le biais des résultats des études en neurosciences cognitives, si l'explication de la genèse des nombres par une combinaison de ce genre est justifiée. Dans ce qui suit, je tenterai de présenter les aspects cognitifs qui sont présupposés dans la théorie psycho-physiologique de l'espace de Poincaré. Cette présentation se fera après l'esquisse des points centraux de la polémique entre Poincaré et Hilbert au sujet des fondements de la géométrie.

2. Poincaré face au formalisme de Hilbert

La polémique entre Poincaré et Hilbert a porté essentiellement sur le rôle de l'intuition dans la justification des axiomes mathématiques (arithmétique et géométrie). Je me bornerai ici à présenter la polémique concernant la justification des axiomes de la géométrie. Dans *Die Grundlagen der Geometrie*, Hilbert a présenté une conception logico-formelle de la géométrie

¹⁵ L'arithmétisation de l'analyse est un courant philosophico-mathématique admettant que la construction des nombres réels se fait à partir de l'analyse des nombres entiers.

¹⁶ Bien que considérant les nombres réels comme des créations de l'esprit humain, Dedekind revendique une conception logiciste des nombres qui le conduit à considérer les nombres entiers, réels et complexes comme une émanation des lois pures de la pensée. Cf. BELNA, Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Paris, Vrin, 1996, p. 52.

¹⁷ POINCARÉ, Henri. *La science et l'hypothèse*. 2000, *op. cit.*, p. 55.

qui a été perçue, dans l'histoire des mathématiques, comme une rupture d'avec la compréhension des axiomes de la géométrie euclidienne. L'objectif de Hilbert, tel qu'indiqué dans l'introduction de cet ouvrage, était de proposer dans un premier temps une construction logique de la géométrie basée sur un petit nombre de principes fondamentaux simples et, dans un second temps, déduire, à partir des principes fondamentaux, les principaux théorèmes géométriques¹⁸. Par cette démarche, Hilbert montrait que l'axiomatique logique pouvait constituer exclusivement le fondement de la géométrie, et qu'en conséquence, la progression des axiomes aux théorèmes géométriques ne nécessite pas l'opération de l'intuition.

Bien que Poincaré ait approuvé l'abstraction qu'incarne la méthode axiomatique, il a néanmoins développé une aversion pour l'axiomatique logique de Hilbert qu'il tient pour un moule (logique) favorisant la transposition des mathématiques dans un système logico-formel. En effet, l'axiomatique logique promulguée par Hilbert fait croire qu'elle s'est affranchie de l'intuition et que les enchaînements et les généralisations qui ont lieu au cours du raisonnement géométrique sont dus à la logique. Poincaré qui conçoit l'axiomatique comme un mode architectural dans lequel les opérations de généralisations et de synthèses reposent sur l'intuition et non sur la logique, considère que l'intuition est indispensable à la compréhension et à la justification des axiomes de la géométrie.

Dans son *Rapport sur les travaux de M. Hilbert*, Poincaré exprima, en quelque sorte, son désaccord avec Hilbert, lorsqu'il dit regretter que ce dernier présente l'axiomatique logique comme étant le fondement de la géométrie¹⁹. Cherchant à déterminer la véritable origine de cette science, il insista sur l'intégration de l'expérience sensori-motrice et de l'esprit dans la genèse de l'espace et de la géométrie. Cette position relative à l'origine psycho-physiologique de la géométrie, Poincaré la développa en détail dans *Fondements de la géométrie* (1898). Je résume en cinq (5) points les idées de Poincaré concernant la genèse de la géométrie et de l'espace géométrique en me référant à la genèse logique (1898).

- 1- Poincaré commence par considérer l'espace représentatif ou sensible comme la catégorie où sont rangées les sensations visuelles, tactiles, musculaires, olfactives, etc. Bien que ces sensations ne soient pas en soi spatiales, Poincaré estime qu'elles jouent un rôle significatif dans la genèse de la géométrie.

¹⁸ HILBERT, David. *Les principes fondamentaux de la géométrie*, traduction de L. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1900, p. 6.

¹⁹ Le désaccord de Poincaré à l'égard de l'axiomatique logique hilbertienne est illustré par cette citation : « *Je regretterai ainsi que, dans cet exposé des axiomes métriques, il ne reste plus aucune trace d'une notion dont Helmholtz avait, le premier compris l'importance : je veux parler du déplacement d'une figure invariable. On pourrait conserver à cette notion son rôle naturel, sans sacrifier le caractère logique des axiomes. On pourrait éviter ainsi l'introduction artificielle de cet axiome III, 6, et les postulats auraient été rattachés à leur véritable origine psychologique* ». POINCARÉ, Henri. *Rapport sur les travaux de M. Hilbert. Bulletin de la société physico-mathématique de Kasan*, tome 14, 1904, p. 19.

- 2- Poincaré fait une distinction entre deux types de changements qui ont lieu au sein de l'espace représentatif : il s'agit des changements d'état et des changements de position. Les premiers sont les changements externes, involontaires et non accompagnés de sensations musculaires. Les seconds sont les changements internes, volontaires et accompagnés de sensations musculaires.
- 3- Les changements de position sont, selon Poincaré, plus importants par rapport à la classe des changements d'état, parce que les déplacements kinesthésiques, proprioceptifs et oculaires qu'ils impliquent constituent les prémices de la géométrie et de la perception spatiale. Aussi, les changements de position sont essentiels parce qu'ils permettent des déplacements qui supposent les compensations, les commutativités, les transformations, les rotations.
- 4- À partir des propriétés mathématiques, Poincaré étudie la structure des groupes de déplacements qu'il considère comme préexistant dans l'esprit. Son objectif est de justifier pourquoi l'espace géométrique a trois dimensions.
- 5- Après de longs développements, Poincaré montre qu'il est possible d'avoir des espaces à plus de 3 dimensions. De fait, attribuer 3 dimensions à l'espace géométrique relève de la convention.

Remarquons ici que pour Poincaré, ce sont les mouvements kinesthésiques, proprioceptifs, musculaires et oculaires qui accompagnent nos déplacements qui constituent le point de départ de la géométrie. Nous remarquons aussi que c'est l'esprit qui, dirigé par l'expérience, choisit commodément d'attribuer 3 dimensions à l'espace géométrique. Dans les modifications qu'il apporta à sa théorie spatiale plus tard (1903), Poincaré montra que l'attribution de 3 dimensions à l'espace géométrique est un choix conventionnel qui se justifie, en partie, par une tradition et des habitudes ancestrales dont il est difficile de s'en passer brusquement²⁰. De la théorie spatiale de Poincaré, on retiendra que l'esprit interagit avec les données sensorielles et motrices du monde sensible pour engendrer la géométrie et l'espace géométrique.

Étant donné que je viens de présenter quelques remarques de Poincaré, je passerai maintenant en revue les théories cognitives élaborées par Dehaene et Berthoz dans le cadre de la recherche des fondements cognitifs des mathématiques.

²⁰ POINCARÉ, Henri. *Science et méthode*, Paris, éd. Kimé, 1999., p. 101.

II-GENÈSE ET FONDEMENT DES MATHÉMATIQUES SELON LES NEUROSCIENCES COGNITIVES

1. L'intuition du nombre de Dehaene

Partant de l'idée que les fondements cognitifs des mathématiques sont à rechercher dans les structures neuronales du cerveau, Dehaene cherche à déterminer les bases biologiques de l'arithmétique élémentaire. La démarche adoptée par ce psychologue cognitiviste et ses collaborateurs consiste à réaliser des expériences neurobiologiques, neuropsychologiques et psychophysiques dans le but de déterminer les substrats cognitifs à la base de l'acquisition de la connaissance arithmétique. Les multiples expériences menées par les psychologues cognitivistes, notamment par Dehaene et son équipe de recherche, auraient révélé l'existence de deux systèmes neuronaux de numérosités : l'un serait la subitisation ou « le système de petits ensembles », présenté comme étant le substrat cognitif des petites numérosités (\geq à 3 *objets*). L'autre serait l'estimation ou « le système approximatif du nombre », qui serait le substrat cognitif des grandes numérosités ($<$ à 3 *objets*).

Plusieurs expériences ont été menées par les psychologues cognitivistes, afin de se rassurer de l'intégration de ces deux substrats cognitifs dans les opérations de l'arithmétique élémentaire. Ainsi les expériences réalisées en 2004 par Landerl, Bevan et Butterworth²¹ et celles réalisées par Feigenson et Dehaene²² ont montré similairement que les nourrissons étaient capables d'appréhender subitement et directement les petites numérosités (1, 2 ou 3) via la subitisation²³, et cela sans un acte réflexif. D'autres expériences réalisées à partir des méthodes d'imagerie cérébrale (IRMf), indiquent que les nouveau-nés seraient capables de différencier les ensembles allant de 8 à 16 points ou objets. Compte tenu de son imprécision, la

²¹ LANDERL, Karine, BEVAN, Anna et BUTTERWORTH, Brian. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students. *Cognition*. 2004, 93 (2), p. 99-125.

²² FEIGENSON, Lisa, DEHAENE, Stanislas et SPELKE, Elisabeth. Core systems of number *Trends. Cognitive Sciences*. 2004, 8 (7), p. 307- 314.

²³ Subitiser, c'est le fait d'appréhender une quantité d'objets sans les compter. Ainsi, certains psychologues (Mazzocco, Halberda, Feigenson) ont montré que les nouveau-nés sont capables de faire les additions et les soustractions de nombres non-symboliques visuellement (à partir d'une collection d'objets ou de points) et auditivement (à partir des séquences de sons). Par exemple, on place le nouveau-né en face de deux écrans comportant un ensemble de 1 à 3 points. Sur l'écran 1, on fait varier la disposition des points et de leur taille sans changer le nombre des points, alors que sur l'écran 2, on présente deux numérosités différentes alternativement. Si on constate que le nouveau-né regarde plus longtemps l'écran 1, c'est-à-dire l'écran où la numérosité identique varie que l'écran 2 où la numérosité reste toujours identique, cela est interprété comme la preuve qu'il détecte la différence entre deux petites numérosités. Ce même exemple est utilisé pour montrer que les nouveau-nés sont capables de différencier les ensembles allant de 8 à 16 points ou objets. Dans ce cas, ce serait le « système approximatif du nombre » qui serait en jeu.

représentation des grandes numérosités obéit à la loi de Weber-Fechner. L'interprétation que les psychologues cognitivistes donnent de ces faits consiste à dire que les nouveau-nés possèdent l'intuition du nombre dès les premiers jours de leur naissance. Dire qu'un nouveau-né possède l'intuition du nombre revient à dire qu'il dispose des capacités numériques précoces qui lui permettent de discriminer un ensemble d'objets. Les nouveau-nés ne sont pas, bien sûr, capables de faire un comptage numérique précis à la naissance, cependant ils seraient en capacité d'additionner, de soustraire 1 à 3 objets, voire plus, par le biais de la subitisation ou de l'estimation. Il faut donc distinguer la numérosité, en tant que perception non-symbolique et non-verbale, et le nombre symbolique, en tant que produit de l'éducation et des séances d'apprentissages.

Les psychologues cognitivistes s'accordent sur l'existence de ces deux systèmes neuronaux de numérosités, cependant ils sont en total désaccord sur la question de savoir lequel de ces systèmes neuronaux est prédominant dans le processus d'appréhension et d'acquisition des nombres symboliques. Contrairement aux psychologues cognitivistes comme Carey et Pylyshyn pour qui la subitisation est le mécanisme neuronal permettant la construction et l'acquisition des nombres, Dehaene, Gallistel et Wynn, estiment, au contraire, que l'estimation (ou le système approximatif de numérosité) est le mécanisme neuronal prédominant. Ce qui conforte la position adoptée par le groupe de Dehaene c'est le fait que l'intégration de la subitisation dans la représentation des petites numérosités est moins démontrée chez les enfants. Compte tenu de ce fait, l'intégration de la subitisation dans les petites numérosités continue de faire l'objet de débat entre les psychologues cognitivistes²⁴. En revanche, des études neurophysiologiques indiquent de manière précise que le sillon intrapariétal est la zone la plus importante pour la représentation approximative des nombres. La déclaration suivante de Dehaene sur les zones cérébrales activées lors des manipulations numériques est remarquable :

toutes les tâches qui évoquent un sens de la quantité- addition, soustraction, comparaison, mais aussi simple vision d'un chiffre ou dénombrement d'un nuage de point- activent un réseau reproductible de région, au premier rang desquelles figure le fond du sillon interpariétal²⁵.

Si l'existence des circuits neuronaux d'intuition numérique est prouvée par plusieurs études expérimentales, il reste la question de savoir comment ces systèmes neuronaux de numérosités rendent compte du processus d'appréhension et d'acquisition des nombres. Plus

²⁴ DEHAENE, Stanislas, « Psychologie cognitive expérimentale », L'annuaire du Collège de France [en ligne], 108/2008, consulté le 22 octobre 2022.

²⁵ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, p. 13. Pour aller plus loin, voir aussi IZARD, Veronique et DAHEANE, Stanislas. Calibrating the mental number line. *Cognition*. 2008, 106, p. 1221-1247; Dehaene, STANISLAS. et al. Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*. 2004, vol. 14, p. 218-224.

précisément, comment passe-t-on de la représentation de la numérosité qui intervient à l'âge de l'enfance à l'acquisition des nombres symboliques qui intervient à l'âge adulte ?

Pour expliquer le processus d'acquisition des nombres symboliques chez l'adulte, Dehaene développe un modèle phylogénétique et ontogénétique de l'acquisition des nombres et de la connaissance arithmétique. Du point de vue phylogénétique, Dehaene soutient que les mathématiques sont le résultat d'une longue évolution génétique. Étant donné que les humains seraient dotés d'une intuition numérique issue de l'héritage évolutif, la considération de Dehaene est que ces capacités mathématiques précoces se développent et se précisent grâce à l'apprentissage et à l'éducation. C'est bien cette idée qu'il traduit en ces termes : « *l'intuition arithmétique que nous héritons de l'évolution est continue et approximative, l'apprentissage des mots et des chiffres la rend digitale et précise* »²⁶. Du point de vue ontogénétique, Dehaene soutient l'existence d'une connexion précoce entre l'intuition du nombre (qui est un système de numérosité inné) et les nombres symboliques. Ce qui expliquerait la capacité de l'enfant et de l'adulte à acquérir le système de comptage ainsi que la signification des nombres entiers.

Afin de jeter un pont entre ces deux phénomènes biologiques, Dehaene suggère l'existence d'une continuité phylogénétique et ontogénétique dans le processus d'appréhension et de construction des nombres entiers. Dehaene suggère, en d'autres termes, que la capacité de dénombrement à l'âge adulte résulte de l'entrée en correspondance de l'intuition numérique et de la signification des symboles numériques (1, 2, 3, 4, etc.), produit de l'éducation culturelle et de l'apprentissage. Par exemple, un adulte éduqué acquiert le système de comptage numérique en établissant une association entre la signification symbolique acquise par l'éducation culturelle et l'intuition du nombre qui existe préalablement dans son cerveau. Tentant d'expliquer le passage de la numérosité (à l'âge de l'enfance) à l'acquisition des nombres symboliques (à l'âge adulte), Dehaene déclare ceci :

*dès qu'un adulte éduqué perçoit un nom de nombre ou un nombre en notation arabe, cette entrée symbolique est rapidement et automatiquement traduite mentalement en une quantité approximative dont la manipulation interne obéit aux mêmes lois que celles de la manipulation des numérosités perçues sous forme d'ensembles d'objets*²⁷.

Ainsi pour Dehaene, le processus d'acquisition des nombres symboliques à l'âge adulte suit un processus similaire à la représentation approximative de la numérosité qui a lieu chez les nourrissons. Convaincu sans preuve que le processus d'acquisition de la connaissance arithmétique suit un tel processus, Dehaene établit une homologie entre la capacité des adultes à représenter les symboles numériques et la capacité des nourrissons à représenter les quantités numériques.

²⁶ DEHAENE, Stanislas. Vers une science de la vie mentale : Leçon inaugurale prononcée le jeudi 6 avril 2006, op.cit., p. 21.

²⁷ DEHAENE, Stanislas. Psychologie cognitive expérimentale. 2008, op. cit., p. 281.

Finalement, la considération de Dehaene est que la capacité des adultes à construire les nombres symboliques suit les mêmes effets que lorsque les quantités numériques sont présentées chez l'enfant sous forme de numérosités à l'aide de stimuli tels des ensembles de points ou des séquences de sons²⁸. Bien vrai que l'interprétation ontogénétique proposée par Dehaene pour expliquer l'acquisition des nombres symboliques à l'âge adulte a été invalidée par les études expérimentales réalisées en 2007 par Susan Carey et Le Core²⁹ et celles réalisées en 2016 par Leibovich³⁰, les psychologues cognitivistes sont pratiquement unanimes sur le fait que le processus de construction et/ou d'acquisition des nombres symboliques intègre l'intuition du nombre, héritée au cours de l'évolution (phylogénèse), le développement individuel qui intervient au cours de l'évolution post-natale (ontogénèse) et le processus d'apprentissage et d'éducation, impliquant l'acquisition de la langue culturelle, des nombres symboliques, la lecture, etc. (épigénèse).

Voyons maintenant comment les neurosciences cognitives expliquent le processus de construction et d'acquisition de l'espace.

2. L'approche neurophysiologique de l'espace de Berthoz

L'approche neurophysiologique de l'espace de Berthoz est intéressante parce qu'elle permet de comprendre les fondements cognitifs ou corrélats neuronaux de la géométrie et le processus d'acquisition de l'espace et de la géométrie. La thèse principale soutenue par Berthoz consiste à dire que l'espace ne précède pas le corps, mais qu'il est corrélat de la motricité de l'ensemble des parties de notre corps. Ainsi, ce sont les flux de sensations qui accompagnent les mouvements du corps qui constituent les fondements de l'espace et de la géométrie selon Berthoz³¹, dans la mesure où le cerveau construit l'espace et la géométrie à partir des données sensorielles issues du corps³². Donc pour comprendre le processus de construction de la géométrie dans l'approche spatiale de Berthoz, il faut, dans un premier temps, se référer au corps et à ses composantes, c'est-à-dire, les mains, les pieds, les bras, les yeux, la tête, le cou, les jambes, les doigts, les oreilles, les orteils, etc. Et dans un second temps, se référer à l'appareil cérébral.

²⁸ PELLAND, Jean-Charles. De Brouwer à Barsalou : l'intuitionnisme à l'ère des sciences cognitives, mémoire de master soutenu, Université du Québec à Montréal. 2008, p. 49.

²⁹ Mathieu LE CORRE & Susan CAREY. One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*. 2007, 105 (2), p. 395-438.

³⁰ LEIBOVICH, Tali et ANSARI, Daniel. The symbol-grounding problem in numerical cognition: A review of theory, evidence, and outstanding questions. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*. 2016, 70 (1), p. 12-23. En effet, ces études comportementales ont montré conjointement que les enfants acquièrent la signification des nombres entiers un peu plus tard après l'acquisition de la cardinalité. Ce qui veut dire que « le système approximatif du nombre » et les nombres symboliques ne sont pas précocement reliés chez les enfants comme le défendait Dehaene

³¹ Cf. par exemple BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l'espace : II- Fondements cognitifs de la géométrie et de l'espace*. Cours de 1997-1998.

³² BERTHOZ, Alain. *Le sens du mouvement*, Paris, Odile Jacob, 2013 p. 11.

Afin de justifier sa thèse selon laquelle l'espace ne précède pas le corps, Berthoz montre dans *Le sens du mouvement* et dans une série de cours et de conférences³³, l'importance des mouvements du corps et à travers eux l'importance des sensations visuelles, tactiles, proprioceptives (kinesthésiques) et vestibulaires dans le processus de perception spatiale³⁴ et de construction de la géométrie. Je me concentre à montrer l'importance des sensations visuelle, proprioceptive et vestibulaire, car elles constituent des ponts importants vers les réflexions de Poincaré sur le rôle des sensations dans le processus de construction de la géométrie et de l'espace.

Dans *Le sens du mouvement*, Berthoz commence la description des fondements cognitifs de la géométrie par l'œil. C'est en effet le principal organe sensoriel à partir duquel débute la perception spatiale, en raison d'une multitude d'objets, dont il est susceptible de percevoir. Selon Berthoz, les sensations visuelles générées par l'œil, lors des déplacements, des mouvements, sont particulièrement importantes pour « *la perception du mouvement* »³⁵, appelée aussi perception spatiale³⁶, car les mouvements oculaires générés par l'œil sont des potentiels d'interaction avec le monde sensible en affinité avec la géométrie. Les phénomènes physiologiques et cognitifs de la vision spatiale ont fait l'objet de plusieurs études depuis l'avènement des neurosciences. Celles menées récemment par Berthoz et son équipe de recherche montrent que le traitement de l'espace par le système visuel mobilise en majorité les neurones se situant au niveau sous-cortical et cortical de l'appareil cérébral.

Des études suivantes faites à partir de l'imagerie cérébrale ont permis d'élucider le rôle des neurones MT et MST dans la perception spatiale. L'aire MT a été confirmée pour être une zone principale où les traitements les « *plus élaborés pour la reconstruction de la géométrie des objets et de l'espace en mouvement sont exécutés* »³⁷. Quant aux neurones MST, ils interviennent dans l'exécution des mouvements visuels complexes. En effet, « *les neurones MST ont une capacité remarquable à continuer à signaler les composantes du mouvement visuel quelle que soit la localisation du stimulus dans le champ récepteur* »³⁸. Ces faits confirment donc la thèse que le traitement de l'espace par le cerveau mobilise les informations visuelles provenant de l'œil.

³³ L'ensemble des cours et conférences donnés par Berthoz sont répertoriés sur son site internet : https://www.college-de-france.fr/site/alain-berthoz/_course.htm.

³⁴ Précisons que chez les spécialistes de la cognition spatiale, la perception ou représentation spatiale renvoie à la représentation mentale de l'environnement, résultant d'une activité neuronale.

³⁵ BERTHOZ, Alain. *Le sens du mouvement*. 2013, op.cit., p. 60.

³⁶ Dans son approche physiologique de l'espace, Berthoz ne fait pas de distinction entre l'espace et le mouvement. Il montre l'interdépendance entre l'espace et le mouvement, car les mouvements ou les déplacements que nous effectuons ont toujours lieu dans un certain espace.

³⁷ BERTHOZ, Alain. *Le cerveau et l'espace : II- Fondements cognitifs de la géométrie et de l'espace*, 1997-1998, p. 433.

³⁸ *Idem*, p. 434.

Puisque le déplacement d'un individu dans un espace environnant n'est pas exclusivement guidé par la vision, Berthoz montre, par la suite, l'importance des systèmes proprioceptif et vestibulaire dans le processus de représentation spatiale. Au sujet du rôle joué par les sensibilités kinesthésiques dans la représentation spatiale, Berthoz s'accorde avec Husserl qui a montré, de manière remarquable, que les kinesthèses sont fondamentalement essentielles à la navigation spatiale, cependant il va plus loin que ce dernier en montrant que le processus de construction de la géométrie par le cerveau intègre aussi le système proprioceptif et vestibulaire. Ce point de vue adopté par Berthoz est appuyé par plusieurs expériences physiologiques qui auraient montré que les kinesthèses transmettent continuellement des informations au cerveau. C'est ce qui explique le fait que nous soyons constamment informés de la position de notre corps par rapport à un espace donné. Notre capacité à avoir continuellement conscience des mouvements de notre corps, de la position de notre corps et du lieu où se trouve notre corps, est due au flux d'informations proprioceptives qui sont transmises en permanence au cerveau. Les informations proprioceptives ont donc pour rôle de permettre à l'individu d'actualiser continuellement sa position géographique lors de ses déplacements et de connaître la distance parcourue. En conséquence, la proprioception est un facteur essentiel de la genèse et du développement de notre potentiel de perception spatiale.

Le rôle joué par le système vestibulaire dans le processus de perception spatiale n'est pas aussi négligeable. Des recherches anatomiques et physiologiques ont en effet révélé que les canaux semi-circulaires ont une fonction de calibrage. Outre cette fonction, le système vestibulaire intervient dans la stabilisation de la posture du corps. En effet, lorsqu'un individu se déplace dans un espace environnant, les mouvements de sa tête et les mouvements proprioceptifs qu'il effectue ont tendance à se compenser pour lui assurer une posture stable. L'interaction entre le système vestibulaire et la proprioception musculaire est telle que lorsque cet individu trébuche, sa tête et l'ensemble de son corps se redressent aussitôt grâce aux réactions de réajustement que déclenchent les canaux vestibulaires. Enfin, des données physiologiques recueillies récemment ont permis de savoir que le système vestibulaire intervient également dans la stabilisation du regard. Selon ces données, les capteurs vestibulaires et les récepteurs visuels se compensent pour donner à l'individu une image stable sur la rétine.

En plus de ces études physiologiques, des expériences neurophysiologiques ont montré que le cortex vestibulaire pariéto-insulaire et le cortex pariéto-frontal sont les principales zones cérébrales sollicitées lors de la transmission des sensations proprioceptives et vestibulaires vers le cerveau.

Nous voyons que chez Berthoz la géométrie trouve son origine dans l'effort de perception de l'espace sensible. Cette perception spatiale, qui constitue un élément fondamental pour

appréhender la géométrie, mobilise prioritairement les composantes physiologiques, telles les sensations visuelles, proprioceptives et vestibulaires.

III- QUE NOUS ENSEIGNE L'APPROCHE NEUROCONSTRUCTIVISTE AU SUJET DES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES ?

J'aborderai cette dernière partie en résumant en deux points essentiels les principaux enseignements épistémologiques qui découlent des deux théories cognitives esquissées ci-dessus.

1- Non au réalisme mathématique

Plus haut, nous avons vu que Poincaré s'est opposé à la construction logico-formelle du nombre et à chercher à expliquer la genèse (logique) des nombres entiers et réels par l'itération où l'intuition reste intimement connectée à l'expérience. Les neurosciences cognitives qui cherchent à expliquer le développement du nombre du point de vue biologique ont tendance à condamner de plus en plus le réalisme mathématique et les théories logico-formelles des mathématiques élaborées au cours du siècle dernier pour expliquer le fondement des mathématiques.

Du point de vue de Dehaene (et de certains neuroscientifiques cognitivistes qui accordent le primat au système approximatif), notre « *intuition immédiate des nombres provient du système approximatif du nombre* »³⁹. Cela revient à dire que notre capacité cognitive à appréhender les nombres n'est pas liée en premier ressort à la logique, mais plutôt à l'intuition du nombre dont nous sommes dotés dès la naissance. Suivant l'interprétation biologique de Dehaene, les individus parviennent à appréhender les nombres (entiers et réels) au cours de leur évolution, parce qu'ils possèdent, dès la naissance, l'intuition du nombre. Même si la théorie neurocognitive de Dehaene reste pour l'instant formelle et moins convaincante, elle apporte néanmoins des éclaircissements sur l'origine du concept de nombre et sur la façon dont les nombres se développent du point de vue biologique. Ces éclaircissements devraient permettre de comprendre que la construction des nombres (entiers et réels) ne se fait pas exclusivement dans un cadre logico-formel conformément aux considérations des logicistes, que les objets mathématiques n'existent pas dans un monde platonicien comme l'ont cru certains mathématiciens réalistes, mais qu'ils ont leur origine dans l'intuition du nombre, héritée au cours de notre évolution phylogénétique.

La position de Dehaene consistant à voir dans l'intuition l'origine des nombres est proche de celle de Poincaré pour qui l'intuition constitue l'origine et même le fondement des nombres.

³⁹ DEHAENE, Stanislas. *La bosse des maths : Quinze ans après*, Paris, Odile Jacob, 2010, p. 13.

Cependant, l'intuition dont parle Dehaene est à nuancer de celle de Poincaré⁴⁰. Comme l'a si bien souligné Longo, l'erreur des théories logico-formelles et je préciserai l'erreur du logicisme, a été d'établir un fossé entre l'origine épistémologique et l'origine génétique⁴¹. Loin d'être une construction purement logique, le processus de construction du nombre et par conséquent de la connaissance arithmétique, intègre la phylogénèse, l'ontogénèse et l'épigénèse.

2- Non à l'apriorisme géométrique

Si l'on a bien compris la théorie spatiale de Berthoz, l'enseignement que l'on pourrait en tirer est bien l'idée que la géométrie n'est pas une science a priori. Souvenons-nous que pour les tenants de l'apriorisme géométrique, notamment Kant, Hilbert et Russell (pour qui la géométrie projective est apriori), la géométrie pouvait être fondée sur des principes *a priori*, c'est-à-dire, des principes qui ne relèvent pas de l'expérience. C'est dans cette perspective que Hilbert et Russell, voulant justifier l'apriorisme géométrique, ont présenté l'axiomatique logique comme étant le fondement de la géométrie. Aujourd'hui cette idée est vivement critiquée et rejetée par les neuroscientifiques cognitives, comme en témoigne ce passage de Berthoz :

pour le scientifique adoptant une perspective évolutionniste, ces a priori sont le résultat d'interactions réussies avec le monde. L'illusion formaliste consiste à imaginer que ce sont les règles formelles, déconnectées de l'expérience, qui nous apparaissent a priori aujourd'hui, alors qu'elles sont le résultat de trois millions d'années d'interactions avec le monde⁴².

Il y a deux raisons principales pour lesquelles les neuroscientifiques cognitivistes rejettent l'apriorisme géométrique. La première raison provient des études physiologistes qui montrent l'intégration des mouvements ou de l'expérience sensible dans la genèse de la géométrie. Le raisonnement que tiennent les spécialistes de la cognition spatiale consiste à dire que si la géométrie était effectivement une science *a priori*, elle ne trouverait pas son origine dans l'expérience multisensorielle.

La seconde raison, conséquence directe de la première, est à rechercher dans le fait que les spécialistes de la cognition envisagent le processus de construction et d'acquisition de la géométrie comme un processus intimement lié à l'évolution biologique. Par exemple, en

⁴⁰ L'intuition de Dehaene diffère de celle de Poincaré sur certains points. D'abord, Dehaene emploie le terme « intuition » pour faire référence à la capacité des sujets humains ou non humains à reconnaître la quantité d'un ensemble d'objets sans recourir à une introspection (c'est-à-dire à la conscience). Ainsi, la première différence entre l'intuition de Dehaene et de Poincaré est d'ordre conceptuel. La seconde différence se situe au niveau du rôle que chaque auteur assigne à l'intuition : l'intuition, à la base de la théorie phylogénétique de Dehaene, sert à la reconnaissance spontanée ou automatique de la numérosité et non à la construction symbolique dans l'intuition comme cela est le cas dans la théorie intuitionniste de Poincaré. Chez Poincaré, l'intuition est associée à « *des jugements synthétiques a priori* ».

⁴¹ LONGO, Giuseppe. Géométrie, mouvement, espace : cognition et mathématiques, *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche de la Cognition*. 1997, 215.

⁴² BERTHOZ, Alain et PETIT, Jean-Luc. *Phénoménologie de l'action*, Paris, Odile Jacob, 2006, p. 104.

matière d'acquisition de l'espace, Berthoz et son équipe de recherche ont montré que les individus possèdent un potentiel de représentation spatiale d'affinité géométrique à la naissance⁴³. Au cours du développement ontogénétique qui se fait en parallèle au développement phylogénétique, ce potentiel de représentation spatiale va connaître une progression très rapide, de telle sorte que l'individu, combinant représentation égocentrée et représentation allocentrée⁴⁴, parvient à avoir une représentation exacte de son environnement social. Dans cette perspective, la géométrie ne peut pas être considérée comme une science *a priori*, puisque ce sont les mouvements, les déplacements, les parades, etc. effectués tout au long de notre évolution, qui nous font appréhender l'espace et la géométrie. On voit ici un élément de convergence entre la théorie spatiale de Berthoz et la théorie psycho-physiologique de l'espace de Poincaré esquissé plus haut.

Evidemment, on peut suivre le raisonnement des tenants de l'apriorisme géométrique (Hilbert, Russell) en considérant que la genèse et le fondement sont différents, et tenter de justifier le fondement de la géométrie par l'axiomatique logique, mais une telle justification serait insuffisante, parce qu'elle ne prend pas en considération notre rapport à l'espace, c'est-à-dire, notre capacité cognitive de représentation de l'environnement socio-culturel. Longo a donc raison de dire que l'axiomatique ne fonde pas la géométrie, mais qu'elle « s'ajoute à la construction géométrique ».⁴⁵, elle est donc *a posteriori* et non *a priori*.

REMARQUES FINALES

Le neuroconstructivisme mathématique, présenté ci-dessus par l'intermédiaire des théories cognitives de Dehaene et de Berthoz, apporte des éclaircissements sur le processus de construction de la pensée mathématique, tout en apportant un soutien à quelques idées de la philosophie des mathématiques de Poincaré. Puisque la première théorie, celle de Dehaene, illustre bien que les nombres ne sont pas à l'extérieur de l'homme, ils ne sont pas non plus des constructions purement logiques, mais qu'ils ont leur origine dans l'intuition. Quant à la seconde théorie, celle de Berthoz, elle illustre que la géométrie n'est pas une science *a priori*. Précisons toutefois que le contexte philosophique dans lequel intervient les remarques de Poincaré est complètement différent du contexte scientifique dans lequel les neurosciences cognitives interviennent. En effet, Poincaré faisait recours à la théorie d'évolution (Darwin)

⁴³ BERTHOZ, Alain. *Le regard (I) : évolution, développement et mécanismes de l'orientation du regard*. Cours de 1993-1994.

⁴⁴ Une représentation spatiale est dite égocentrée lorsque l'individu utilise son corps propre comme centre référentiel de la représentation de l'espace sensible. Dans un tel cadre référentiel, l'individu a tendance à ramener tout à son corps, notamment la mémorisation du trajet parcouru, la localisation de la position d'un objet dans un espace donné. Par contre, dans la représentation spatiale allocentrée, l'individu se représente l'espace, non plus par rapport à un objet extérieur à son corps. Cf. BERTHOZ, Alain. *Le sens du mouvement*, Paris, Odile Jacob, 2013 pp.109-110.

⁴⁵ Idem, p. 208.

lorsqu'il ne savait plus comment justifier son approche de reconstruction logique des nombres et de la géométrie. Il y a donc de fines différences entre l'approche épistémologique adoptée par Poincaré et l'approche scientiste adoptée par les neurosciences cognitives, qui consiste à expliquer de façon empirique les fondements des mathématiques.

Le fait que les neuroscientifiques cognitivistes parviennent à élucider de façon empirique les fondements cognitifs de l'arithmétique et de la géométrie constitue sans doute un pas important dans le débat philosophique sur les fondements des mathématiques. Néanmoins, la stratégie réductionniste consistant à prendre la pensée mathématique comme résultant d'une construction cérébro-neuronale suscite des problèmes philosophiques. Je présente ici trois problèmes parmi tant d'autres⁴⁶.

1/ Si les nombres de l'arithmétique élémentaire (les nombres entiers) ont leur origine dans les circuits neuronaux de numérosités disponibles dès la naissance et que leur acquisition repose sur un processus d'individualisation ancré dans la phylogénie, l'ontogénèse et l'épigénèse (Dehaene), comment se font alors la construction et l'acquisition des nombres d'un niveau supérieur, c'est-à-dire, les nombres réels, rationnels, décimaux, ou du moins, comment se fait la construction des concepts mathématiques abstraits non assimilables à des objets empiriques ?

2/ Si les objets mathématiques résultent d'une activité cérébro-neuronale, où se trouvent-ils en dehors d'une activité neuronale ? En clair, où se trouvent les objets mathématiques en cas d'arrêt des fonctions cérébrales ?

3/S'il est vrai que l'espace naît avec les sensations ou mouvements oculaires (Berthoz), cet espace visuel embryonnaire n'est pas encore l'espace géométrique évoqué par Poincaré. Dès lors, comment passe-t-on de l'espace sensible à l'espace géométrique dans la théorie spatiale de Berthoz ?

Si la stratégie d'explication mécaniste doit être priorisée dans la recherche des fondements des mathématiques, les neurosciences cognitives doivent expliquer, au moyen des mécanismes neurobiologiques, le processus de construction et d'acquisition des nombres de niveau supérieur et la construction de l'espace géométrique. Pour cela, les neurosciences cognitives doivent faire coopérer les approches logicistes, formalistes et intuitionnistes.

⁴⁶ Pour connaître les autres problèmes suscités par le neuroconstructivisme mathématique, voir Hourya BENIS-SINACEUR. Philosophie de la neuropsychologie du nombre. *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive*, n°62, 2014/2, p. 103-144; doi <https://doi.org/10.3406/intel.2014.1035> https://www.persee.fr/doc/intel_0769-4113_2014_num_62_2_1035. Consulté le 01/08/2021.