

# Singular Points of Algebraic Curves: Rediscoveries of Newton's Parallelogram Method in the 2nd Half of the 19th C.

Thierry JOFFREDO

Archives Henri-Poincaré - Philosophie et Recherches sur les Sciences et les  
Technologies, UMR 7117, Nancy  
IMJ-PRG, équipe Histoire des sciences mathématiques, UMR 7586, Paris

*Algébrisation des courbes*, séminaire Histoire et philosophie  
des mathématiques, SPHERE, 18 décembre 2023

# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas

# Plan

## Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

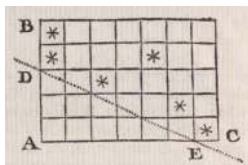
In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas



De Morgan, *On the Singular Points of Curves, and on Newton's Method of Coordinated Exponents*, May 1855.

« How completely it has dropped out of sight will appear from the uses which can be made of it, and which, it seems to me, must have been most obvious to any writer on curves, or on the theory of equations, who had really obtained possession of it. The theorem determines the initial and terminal branches of a curve, and the character of its singular points, with much more ease and power than any method given by elementary writers. [...] But there is something still more remarkable about its history : it was suggested to Lagrange by a method of Newton which is now totally lost sight of, though, as will presently appear, it is difficult to see how any reader of Taylor, Stirling, or Cramer, could have passed it over. »



De Morgan, *On the Singular Points of Curves, and on Newton's Method of Coordinated Exponents*, May 1855.  
 (Fig : Newton, *Method Of Fluxions and Infinite Series*, 1736)

« But, remarkable as this may be, it is still more remarkable that Newton's parallelogram, or method of co-ordinated exponents, as I shall call it, has still more completely fallen into oblivion. This method has not dropped because it was contained in a part of Newton's writings little known or seldom cited ; for it occupies a prominent place in the second epistle to Oldenburgh. Any one who has turned over the pages of that memorable letter, while passing from one of the anagrams to the other, must have been struck by a couple of diagrams, side by side, the one containing terms of the form  $x^m.y^n$  arranged in squares placed in rank and file, the other exhibiting stars which, had there been but one more, might have passed for a representation of the Great Bear, very badly figured. »

How, where and by whom was Newton's analytical parallelogram used to study curves between 1750 and 1900 ?



# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas

# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas



From Newton...



Newton, *Method of Fluxions And Infinite Series With Its Application To The Geometry Of Curve-Lines*, ed. Colson 1736.

20. Let this Equation  $y^3 - 2y - 5 = 0$  be proposed to be resolved, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make  $2 + p = y$ , and substitute  $2 + p$  for  $y$  in the given Equation, by which is produced a new Equation  $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ , whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting  $p^3 + 6p^2$  because of its smallness, the remaining Equation  $10p - 1 = 0$ , or  $p = 0,1$ , will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose  $0,1 + q = p$ , and substitute this fictitious Value of  $p$  as before, which produces  $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$ . And since  $11,23q + 0,061 = 0$  is near the truth, or  $q = -0,0054$  nearly, (that is, dividing  $0,061$  by  $11,23$ , till so many Figures arise as there are places between the first Figures of this, and of the principal Quote exclusively, as here there are two places between 2 and  $0,005$ ) I write  $-0,0054$  in the lower part of the Quote, as being negative; and supposing  $-0,0054 + r = q$ , I substitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I please, in the manner of the following Diagram :

$y^3 - 2y - 5 = 0$		+ 2,10000000 - 0,0054372 + 2,09455148, &c. = y
$2 + p = y.$	+ y <sup>3</sup> - 2y - 5	+ 8 + 12p + 6p <sup>2</sup> + 2 <sup>3</sup> - 4 - 2p - 5
The Sum		- 1 + 10p + 6p <sup>2</sup> + p <sup>3</sup>
$0,1 + q = p.$	+ q <sup>3</sup> + 6p <sup>2</sup> + 10p - 1	+ 0,001 + 0,032 + 0,32q + q <sup>3</sup> + 0,06 + 1,2 + 6, + 1,1 + 10, - 1,
The Sum		0,061 + 11,23 q + 6,3q <sup>2</sup> + q <sup>3</sup>
$-0,0054 + r = q.$	+ r <sup>3</sup> + 6,3q <sup>2</sup> + 11,23q + 0,061	- 0,0000001728r + 0,00000728r <sup>3</sup> - 0,0000000000 + 11, + 0,000183708 - 0,0000000000 + 6,3 - 0,0000000000 + 11,23 + 0,061
The Sum		+ 0,0004416 + 11,162r
$-0,000012 + r = r.$		





# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas

...to Cramer



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 55.

DES LIGNES ALGÈBRIQUES. 55

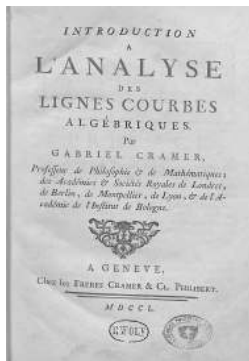
Pl. III.  
 CH. III. verticale les termes où l'indéterminée  $x$  a le même expo-  
 s. 35. fant, & ces exposants croissent d'une unité en passant d'une  
 colonne à l'autre de gauche à droite. Ainsi chaque  
 terme a sa Case déterminée par les exposants d' $x$  & d' $y$   
 dans ce terme.

$\text{C}r.$	$\text{C}r.$	$\text{C}r.$	$\text{C}r.$	$\text{C}r.$	$\text{C}r.$
$ly^4$	$rx^4y$	$ax^2y^2$	$\delta x^3y^2$	$\zeta x^4y^2$	$\text{C}r.$
$\xi y^3$	$mxy^3$	$ix^2y^3$	$\beta x^3y^3$	$\epsilon x^4y^3$	$\text{C}r.$
$dy^2$	$bcxy^2$	$nx^2y^2$	$ix^3y^2$	$\gamma x^4y^2$	$\text{C}r.$
$by$	$exy$	$ix^2y$	$px^3y$	$vx^4y$	$\text{C}r.$
$a$	$cx$	$fx^2$	$kx^3$	$qx^4$	$\text{C}r.$

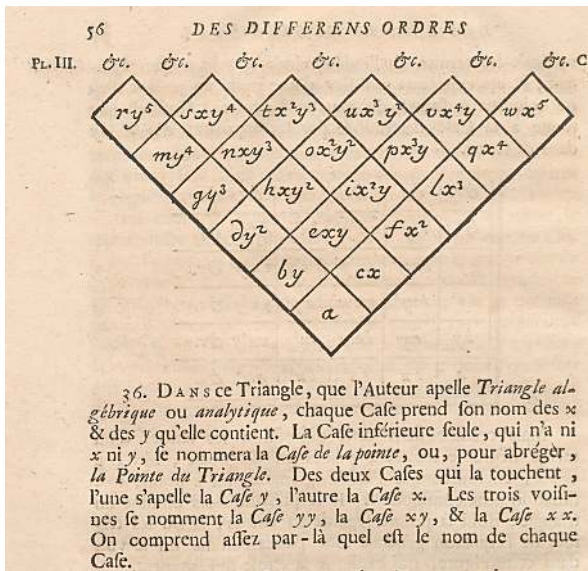
Mais comme dans cette disposition les termes d'un même degré se trouvent placés en diagonale, Mr. DE GUÀ, en tournant le Parallélogramme, lui a donné une situation plus commode \*. Il se présente alors comme un triangle, dont la pointe regardé en embas, & où les termes de l'équation générale sont placés comme on le voit dans cette Figure, qui explique la chose suffisamment.

\* Usage de l'Analyse, &c. pag. 24. &c.

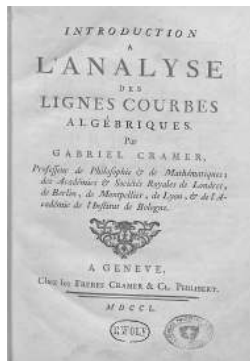
...to Cramer



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
des lignes courbes  
algébriques*, p. 56.



...to Cramer



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 148.

Voici le Principe qui nous guidera dans ces Recherches. Si dans une équation indéterminée, on suppose une des variables  $x$  ou  $y$  infinie ou infiniment petite, cette supposition rend certains termes de l'équation infiniment plus grands que les autres. On peut donc retrancher ceux-ci sans scrupule, parce qu'ils ne font rien en comparaison des plus grands, qui forment seuls toute l'équation. Par ce retranchement elle devient plus simple & plus traitable. Il ne s'agit que d'avoir une Règle pour discerner dans une équation proposée, quels sont les termes que la supposition d' $x$  ou d' $y$  infiniment grande ou infiniment petite, rend infiniment plus grands que tous les autres.

# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

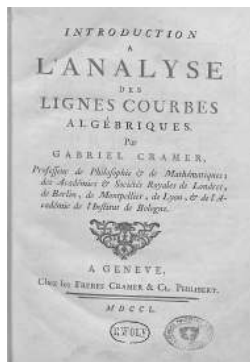
In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas



## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
des lignes courbes  
algébriques*, p. 262.

## Asymptotes and infinite branches

Pl. XII. *Exemple I.* On propose l'éq:  $xyx - ayx - 3ax$  C.VIII.  
 $\mp 2a^2x = 0$ . Quand on l'a placée sur le Triang: anal: S. 112.

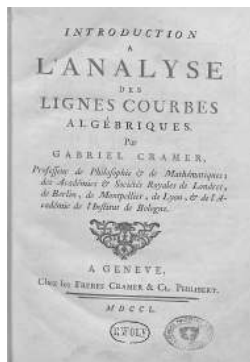


on voit qu'elle n'a que deux déterminatrices supérieures,  
toutes deux parallèles aux Bandes du Triangle.

L'une  $AB$ , parallèle à la Bande sans  $y$ , indique une  
Asymptote-ordonnée. Son équation  $xyx - ayx = 0$ , di-  
visée par  $yy$ , se réduit à  $x - a = 0$ : ce qui montre que  
cette Asymptote est l'ordonnée de l'abscisse  $x = a$ . On  
prendra donc une abscisse  $AB = a$ , & par son extrémité  
B on mènera l'ordonnée indéfinie  $BC$ , qui est l'Asymptote  
indiquée par la déterminatrice  $AB$ .

L'autre  $AC$ , qui est parallèle à la Bande sans  $x$ , dé-  
signe des Asymptotes-abscisses. Leur position se détermine  
par l'éq:  $xyx - 3axy \mp 2a^2x = 0$ , que fournit cette dé-  
terminatrice. Cette équation a chacun de ses termes di-  
visible par  $x$ , & cette division la réduit à  $yy - 3ay \mp 2a^2$   
 $= 0$ , qui a deux racines réelles,  $y - a = 0$ , &  $y - 2a$   
 $= 0$ . Elles marquent chacune une Asymptote, qui sont  
les abscisses  $DE, FG$ , des ordonnées  $AD = a$  &  $AF$   
 $= 2a$ .

## The analytical triangle in action

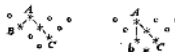


Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
des lignes courbes  
algébriques*, p. 264-265.

## Asymptotes and infinite branches

*Exemple 1.* Ou a vu dans l'Ex. 1 du §. *préc.* que  
Fig. 10. la Courbe représentée par l'éq:  $xy - ay - 3ax + 2a^2 = 0$   
avoit trois Asymptotes, sc. BC ordonnée de l'abscisse  
AB =  $a$ , & DE, FG abscisses des ordonnées AD =  $a$   
& AF =  $2a$ . Transposons successivement l'Origine sur  
chacune de ces Asymptotes.

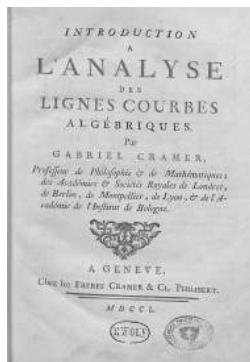
1. Pour la porter d'A en B sur l'Asymptote ordonnée  
BC, on substituera  $a + x$  à  $x$  dans l'équation de la Courbe:  
ce qui la transformera en  $xy - 3axy - 2ax + 2a^2 + 2a^2 = 0$ .  
Cette transformée mise sur le Triangle analytique à deux déterminatrices  $Ab$ ,  $AC$ .



En les comparant avec les déterminatrices  $AB$ ,  $AC$   
de

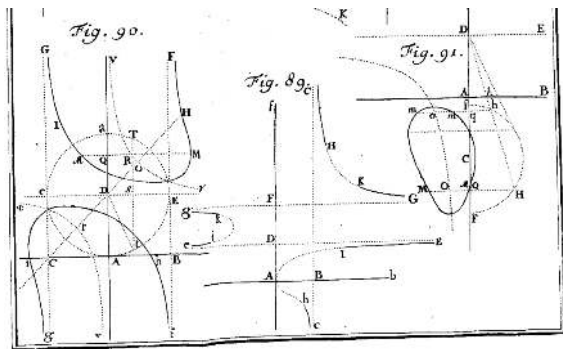
de l'équation proposée, on voit que dans l'une & dans l'autre  
l'autre,  $AC$  a la même position, parce que les abscisses-  
asymptotes DE, FG qu'elle désigne, ont la même situation  
par rapport à l'Origine, soit qu'on la laisse en A, soit  
qu'on la porte en B. Mais la déterminatrice  $AB$  de la  
proposée a tourné sur le centre A, & a passé en  $Ab$   
dans la transformée, où elle n'est plus parallèle à la Bande  
sans  $y$ , parce que l'Asymptote BC, qu'elle désigne,  
est devenue l'axe des ordonnées, auquel elle étoit d'abord  
parallèle. Cette déterminatrice  $Ab$  donne pour l'équation  
de l'Hyperbole-asymptote, qui est aussi l'Asymptote-  
courbe,  $xy - 3axy = 0$ , ou  $xy = 3ax$ , à l'Hyperbole  
ordinaire positive. Donc, les Branches infinies  
HC, hc de la Courbe, desquelles Cbc est l'Asymptote,  
s'étendent à l'infini dans les angles bBC, ABC des coordonnées  
de même signe.

## The analytical triangle in action

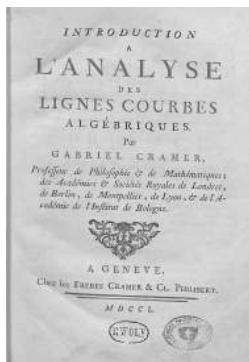


Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
des lignes courbes  
algébriques*, fig 89.

## Asymptotes and infinite branches



## The analytical triangle in action



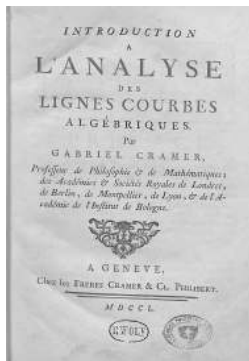
Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
des lignes courbes  
algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

Fig. 100.  
num. 4.

*Exemple III.* On a vu dans l'Ex. préc. n°. 5, que quand  $bb = \frac{1}{2}aa$ , l'équation, qui se réduit à  $x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{1}{2}aayy = 0$ , désigne une Courbe composée de deux Branches infinies AC, A c, & d'une Ovale AB embrassée aussi étroitement qu'il est possible par ces Branches, puisque la Parabole osculatrice de l'Ovale au point A est la même que la Parabole osculatrice des Branches. Mais si, dans cette équation, on change le terme  $ay^3$  en  $axy^2$ , on aura une toute autre Courbe, & dont l'Origine est un Rebroussement en Bec. Dont la raison est, que dans la Série ascendante  $y = \frac{2xx}{a} \pm \frac{4x^2\sqrt{2}}{aa} - \frac{24x^4}{a^3}$  &c. que fournit l'éq :  $x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{1}{2}aayy = 0$ , il n'y a aucun terme imaginaire, ou demi-imaginaire ; ainsi les Branches qui s'embrassent d'un côté de l'axe des ordonnées s'embrassent aussi de l'autre côté, & font un Embrassement complet. Au lieu que la Série  $y = \frac{\frac{1}{2}xx}{a} \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa} + \frac{8x^3}{a^2}$  &c. que donne l'éq :  $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{2}aayy = 0$ , a ses termes alternatifs demi-imaginaires : ce qui montre que les Branches qui s'embrassent d'un côté

## The analytical triangle in action

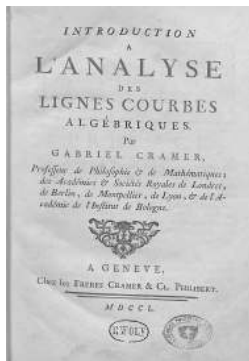


Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$$

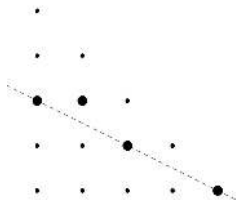
## The analytical triangle in action



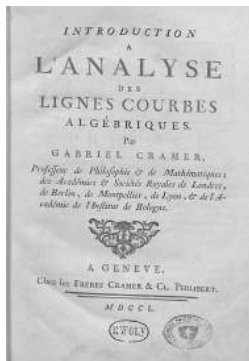
Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$$



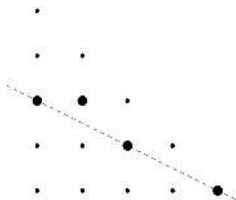
## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

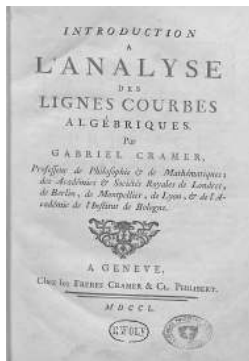
## A singular point at the origin

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$$



Lower ruler ("déterminatrice inférieure") :  
 $x^4 - ax^2y + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$   
 which gives  $(x^2 - \frac{1}{2}ay)^2 = 0$  so  $y = \frac{2x^2}{a}$

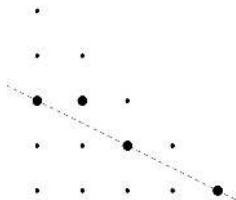
## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0$$



Lower ruler ("déterminatrice inférieure") :

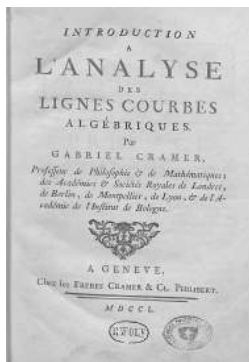
$$x^4 - ax^2y + \frac{1}{4}aayy = 0$$

which gives  $(x^2 - \frac{1}{2}ay)^2 = 0$  so  $y = \frac{2xx}{a}$

$$\text{Let } y = \frac{2xx}{a} + u$$



## The analytical triangle in action

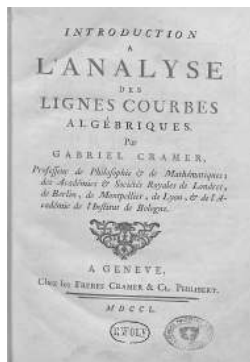


Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$

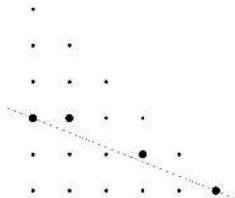
## The analytical triangle in action



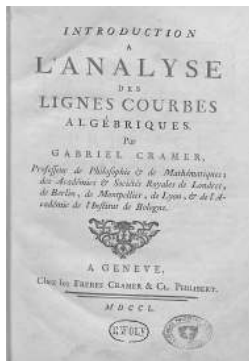
Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$



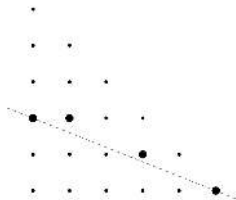
## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$

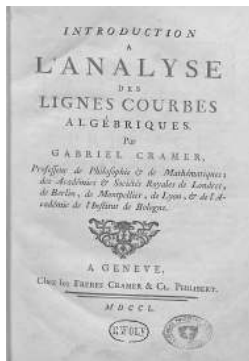


Lower ruler :  $-4\frac{x^5}{a} + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$

which gives, in the case where  $x$  is positive :

$$u = \pm \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa}$$

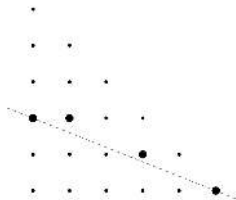
## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$



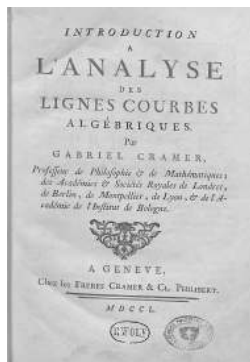
Lower ruler :  $-4\frac{x^5}{a} + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$

which gives, in the case where  $x$  is positive :

$$u = \pm \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa}$$

Let  $u = \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa} + t$  etc.

## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
 des lignes courbes  
 algébriques*, p. 590.

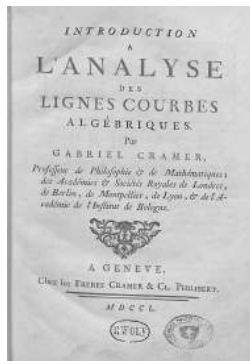
## A singular point at the origin

Beginning of the development in series :

$$y = \frac{2xx}{a} \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa} + \frac{8x^3}{a^3} + \dots$$

The series splits into two after the second term ; these two series are semi-imaginary (real only for positive values of  $x$ )., « *ce qui montre que les Branches qui s'embrassent d'un côté de l'axe des ordonnées manquent de l'autre côté, ne font qu'un demi-Embrassement, c'est-à-dire un Bec.* »

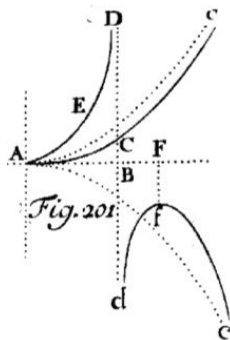
## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer,  
*Introduction à l'analyse  
des lignes courbes  
algébriques*, p. 590.

## A singular point at the origin

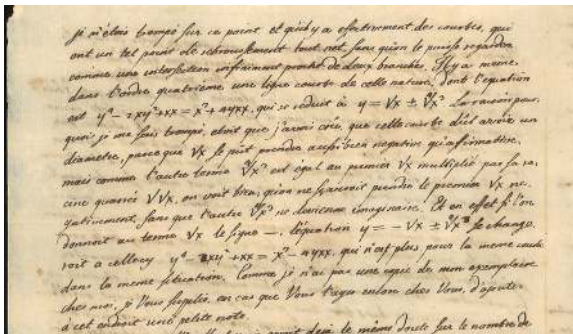
Cusp of the second kind ("rebroussement en bec",  
ou "rebroussement de la seconde espèce")



## The analytical triangle in action



Leonhard Euler, letter to  
Gabriel Cramer, October  
20<sup>th</sup>, 1744

First acknowledgment of a cusp of the 2<sup>nd</sup> kind

$$y^4 - 2xy^2 + xx = x^3 + 4yxx$$

## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer to  
Leonhard Euler,  
November 11<sup>th</sup>, 1744

## Examination by Cramer

*« Le point de rebroussement de la seconde espèce est un véritable Paradoxe. Il est bien vrai que les raisons de M<sup>r</sup> de Gua ne m'avoient pas paru tout à fait démonstratives : c'est pourquoi je n'en avois rien dit, me contentant de passer cette espèce de point sous silence dans l'énumération des diverses sortes de points doubles. Mais je vous avouerai pourtant que, comme vous, j'étois fort prévenu contre l'existence de ces points-là, n'en aiant jamais trouvé avant celui que Vous m'indiquez. J'ai fait tout mon possible pour chicaner votre Courbe. Mais il n'y a point moien de resister à l'evidence. D'abord j'ai voulu croire qu'elle se terminoit en une sorte de petit sac fort allongé, en cette forme : »*





## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer to  
Leonhard Euler,  
November 11<sup>th</sup>, 1744

## Examination by Cramer

« Ensuite j'ai examiné, si ce point du sommet ne seroit pas un point de rebroussement ordinaire, dont une branche par une inflexion fort proche du sommet retourne sa concavité vers l'autre branche, comme cela arrive à des courbes que je connois, et dont le sommet à cette figure. Ce qui donnoit quelque apparence à ce soupçon, c'est qu'on peut concevoir ce point, comme formé par l'évanouissement d'une feuille. Car si au lieu de l'éq[uation]  $y = 4\sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax^3}$ , on prend  $y = \sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax(x-b)^2}$ , la Courbe aura cette forme à peu près et  $b$  diminuant à l'infini, la feuille s'évanouit.



Or il est ordinaire qu'un foliolum evanescens produise un point de rebroussement de le prem[ière] espèce. Mais il a falu encore renoncer à cette conjecture. »

## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer to  
Leonhard Euler,  
November 11<sup>th</sup>, 1744

## Examination by Cramer

*« En un mot, quelque Construction qu'on imagine, il est constant que la Courbe  $y^4 - 2xy^2 - 4x^2y - x^3 + x^2 = 0$  a au sommet un point de rebroussement de la 2<sup>e</sup> espèce, desquels par conseq[uent] l'existence est mainten[ant] incontestable. »*

## The analytical triangle in action



Gabriel Cramer to  
Leonhard Euler,  
November 11<sup>th</sup>, 1744

## Examination by Cramer

*« En un mot, quelque Construction qu'on imagine, il est constant que la Courbe  $y^4 - 2xy^2 - 4x^2y - x^3 + x^2 = 0$  a au sommet un point de rebroussement de la 2<sup>e</sup> espèce, desquels par conseq[uent] l'existence est mainten[ant] incontestable. »*

But why didn't Cramer use his analytical triangle to evaluate the shape of the curve at the origin and show algebraically that it has a cusp of the second kind ?

# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas

# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas

## In french-speaking areas : 1750-1850 continuities



D'Alembert, *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, article COURBE, vol. IV, 1754.

Revenons aux *courbes* algébriques ou géométriques, qui font celles dont il fera principalement mention dans cet article, parce que le caractère de leurs équations qui consiste à être exprimées en termes finis, nous met à portée d'établir sur ces *courbes* des propositions générales, qui n'ont pas lieu dans les *courbes* mécaniques. C'est principalement la Géométrie des *courbes* mécaniques, qu'on appelle *Géométrie transcendante*, parce qu'elle employe nécessairement le calcul infinitésimal; au lieu que la Géométrie des *courbes* algébriques n'emploie point, du moins nécessairement, ce calcul pour la découverte des propriétés de ces *courbes*, si on en excepte leurs rectifications & leurs quadratures; car on peut déterminer, par exemple, leurs tangentes, leurs asymptotes, leurs branches, &c. & toutes les autres propriétés de cette espèce par le secours du seul calcul algébrique ordinaire. Voyez les ouvrages de MM. Euler & de Gua, déjà cités, & l'ouvrage de M. Cramer, qui a pour titre *introduction à l'analyse des lignes courbes*, Genev. 1750. in-4°.

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

D'Alembert, *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, article PARALLELOGRAMME, vol. XI, 1765.

*Regle du parallélogramme.* On appelle ainsi une regle imaginée par M. Newton, & dont voici l'usage : supposons qu'on ait une équation algébrique ordonnée en  $x$  & en  $y$ , on demande la valeur de  $y$  en  $x$  lorsque  $x = 0$ , & lorsque  $x = \infty$ . Pour cela on dispose en cette sorte dans un *parallélogramme* tous les termes de l'équation, &c. on remplit par des \* les

$hx^4$					
$gx^3$					
$fx^2$					
$ex^2$	*	*			
$bx$	$nxy$	*			
$a$	$cy$	$ly^2$	$my^3$	$\&c.$	

$y$ , en faisant  $a + cy + ly^2 + \&c. = 0$ . Si le terme  $a$  manquoit, on auroit à la fois  $bx + cy = 0$ , &  $cy + ly^2 + my^3 = 0$ . Si  $x = \infty$ , les termes supérieurs  $hx^4 + mx^3 = 0$ , couverts par la regle, & au-dessous desquels tombent tous les autres, donnent  $y^3 = \frac{bx}{m}$ . On peut voir dans les *usages de l'analyse de Descartes* de M. l'abbé de Gua, & dans l'*introduction à l'analyse des lignes courbes* de M. Crammer, la démonstration, les différens usages, & les applications de cette regle, suivant les cas qui peuvent se présenter; il suffit ici d'en donner l'esprit. Il est bon d'observer que MM. de Gua & Crammer transforment le *parallélogramme* en un triangle qu'ils appellent *analytique*, ce qui ne change rien au fond.

En général, la regle appliquée dans les parties supérieures donne les valeurs de  $y$  qui répondent à  $x$  infinie; & la regle appliquée aux parties inférieures donne les valeurs de  $y$  qui répondent à  $x = 0$ . Cela est fondé 1°. sur ce que tous les termes inférieurs à la regle sont en général d'un ordre moins élevé que ceux par où la regle passe; & qu'au contraire tous les termes supérieurs à la regle sont en général d'un ordre moins élevé. 2°. Sur ce que dans tous les termes par où passe la regle, les exposans de  $x$  & ceux de  $y$  sont en progression arithmétique.

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

## ENCYCLOPÉDIE,

O U  
DICTIONNAIRE  
UNIVERSEL RAISONNÉ

CONNOISSANCES HUMAINES.

MIS AU ORDRE PAR M. DE FELICE.

Z'embrasse avec deux autres livres  
sur le même sujet.

T O M E X I I



Y V E R D O N ,

M D C C L X X I I

Goudin, *Encyclopedie ou dictionnaire universel raisonne des connoissances humaines mis en ordre par M. De Felice, 1772.*

185

C O U

C O U

ture qu'elles croissent, & 2°. à mesure qu'elles décroissent. C'est un calcul analogue & parallèle au calcul différentiel : il donne toutes les propriétés des courbes algébriques, mais il n'a point de prise sur les courbes transcendentes : le calcul différentiel, au contraire, s'étend à toutes les courbes, mais il n'a point de prise sur la théorie des branches infinies, sur la méthode générale des asymptotes, sur les déterminatrices, &c. Nous allons exposer les propriétés principales des courbes algébriques qui sont données par le triangle analytique exclusivement au calcul différentiel.

2. Étant donnée l'équation d'une courbe algébrique, il faut la poser sur le triangle analytique, & en déduire toutes les déterminatrices, tant supérieures qu'inférieures. Alors si une déterminatrice n'est supérieure que relativement à la bande fans  $y$  sans pourtant lui être parallèle, elle indique & dirige des branches qui ont pour asymptote la ligne des  $y$ . Ainsi la courbe  $xy^2 - a^2y - b^2 = 0$  mise sur le triangle analytique, présente  $xy^2 - a^2y = 0$  ou  $xy - a^2 = 0$  pour déterminatrice supérieure relativement à la bande fans  $y$ , donc la courbe a des branches infinies hyperboliques qui ont pour asymptote la ligne des  $y$  & pour déterminatrice de leur cours l'hyperbole conique  $xy^2 - a^2y = 0$ . De même la bande fans  $x$  a pour déterminatrice supérieure  $xy^2 - a^2y = 0$ , donc la courbe a des branches infinies hyperboliques qui ont pour asymptote la ligne des  $x$  & pour déterminatrice de leur cours l'hyperbole cubique  $xy^2 - a^2y = 0$ .

3. Si une déterminatrice est parallèle à la bande fans  $y$ , elle indique des asymptotes parallèles à la ligne des  $y$ . Ainsi la courbe  $xy^2 - a^2y - 2ax + 2a^2x = 0$  a pour déterminatrice supérieure parallèle à la bande fans  $y$  l'équation  $xy^2 - a^2y = 0$  ou  $x - a = 0$ , donc la courbe a une asymptote parallèle à la ligne des  $y$  & éloignée d'une distance  $a$ . La bande fans  $x$  a aussi une déterminatrice parallèle  $xy^2 - 2ax + 2a^2x = 0$  qui don-

ne  $y^2 - 2ay + 2a^2 = 0$  ou  $y - a = 0$  &  $y - 2a = 0$ , donc la courbe a deux asymptotes parallèles à la ligne des  $x$  à des distances  $a$  &  $2a$ . Pour discuter les branches qui rampent autour de ces asymptotes, c'est-à-dire, assigner leur déterminatrice, il faut transporter l'origine des coordonnées sur un point de l'asymptote, ce qui fait retomber dans le cas précédent. En effet, après cette transformation, l'asymptote devient ligne des  $x$  ou des  $y$ , donc la nouvelle équation a une déterminatrice supérieure qui dirige les branches hyperboliques correspondantes. Ainsi dans la courbe précédente, si je prends pour ligne des  $y$  l'asymptote qui en est éloignée d'une distance  $a$ , l'équation devient  $xy^2 - 2ax + 2a^2y + 2a^2x - 2a^2y + 2a^2x + 2a^2 = 0$  qui relativement à la bande dans  $y$  a pour déterminatrice supérieure  $xy^2 - 2ax + 2a^2y = 0$  ou  $xy - a^2 = 0$ , c'est cette hyperbole qui dirige le cours.

4. Si une déterminatrice est supérieure par rapport à chacune des bandes, & qu'elle fasse avec la bande fans  $y$  un angle  $< 45^\circ$ , elle indique & dirige des branches paraboliques dans la direction de la ligne des  $y$ . Ainsi pour la courbe  $xy^2 - a^2y^2 - b^2x^2 = 0$  l'équation  $x^2 - a^2y^2 = 0$  ou  $x^2 - ay = 0$  est une déterminatrice supérieure par rapport à chacune des deux bandes, faisant un angle  $< 45^\circ$  avec la ligne fans  $y$ , donc elle indique & dirige des branches paraboliques dans la direction de la ligne des  $y$ .

5. Si une déterminatrice supérieure fait avec chacune des bandes un angle  $> 45^\circ$ , elle indique dans quelles directions une courbe a des branches infinies. Ainsi pour la courbe  $x^2 - x^2y^2 + a^2y = 0$ , l'équation  $x^2 - x^2y^2 = 0$  est une déterminatrice supérieure qui fait avec chacune des bandes un angle de  $45^\circ$ , donc les racines  $x^2 = 0$ ,  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$  indiquent que la courbe a des branches infinies dans la direction de la ligne des  $y$ , & dans les deux directions qui de part & d'autre lui sont inclinées de  $45^\circ$ . Pour discuter les branches qui



ENCYCLOPÉDIE  
MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par M. L'ABBAYE, J. B. ROBERT, DE LA FAYETTE,  
Et M. DE COMBES, etc.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez P. NEAUME, Libraire, Palais National, au Salon de Peinture.

A L'ÉTOILE,

Chez P. NEAUME, Libraire, au Salon.

M D C C LXXXIV

chez NEAUME, Libraire, Palais National, au Salon de Peinture.



Bossut, *Encyclopédie  
méthodique* :  
*Mathématiques*, 1784.

« Les équations qui contiennent plus de trois lettres, peuvent se traiter, à peu-près, de la même manière. Toute la difficulté qu'on éprouve à former les suites qui doivent exprimer les valeurs de l'inconnue, consiste à choisir, parmi les termes de l'équation, ceux qui sont plus grands que les autres, & qui déterminent en conséquence la loi suivant laquelle la série doit descendre. Neuton a donné, pour cela, une règle fort commode, qu'on appelle ordinairement le parallélogramme de Neuton. Elle est expliquée de la manière la plus claire & la plus détaillée dans un excellent Ouvrage de M. Cramer, qui a pour titre : Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Gen. 1750. ; [ . . . ] »

## In french-speaking areas : 1750-1850 continuities



Lagrange, *Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral*,  
Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1776.

« Tout se réduit donc à déterminer la quantité  $\alpha$  par cette condition, que la plus petite puissance de  $x$  se trouve dans au moins deux termes de l'équation. Mrs. Taylor & Stirling ont donné pour cela des méthodes qu'on peut voir dans le *Methodus Inventionum* (Prop. 9), & dans les *Lineæ tertii ordinis* (Prob. 2); mais comme la méthode du premier demande une espèce de construction géométrique, & que celle du second dépend du parallélogramme de Newton, & par conséquent ne peut être regardée que comme une méthode mécanique, je crois que les Géomètres seront bien aises de voir comment on peut résoudre cette question par une méthode purement analytique. »

## In french-speaking areas : 1750-1850 continuities



S.-F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et intégral*, 2<sup>e</sup> ed. 1810.

« Il ne paraît pas facile de discerner les plus grands termes dans une expression qui renferme à la fois deux variables données implicitement l'une par l'autre ; [...]  $x$  et  $y$  sont liées entre elles d'une manière qui, quoique déterminée, ne permet pas de juger, à la simple inspection, comment les changements de l'une influent sur l'autre [...]. Les Géomètres ont imaginé différens moyens pour distinguer parmi les termes d'une équation, ceux qui sont les plus grands. Newton inventa le parallélogramme analytique que de Gua réduisit ensuite à un triangle ; Taylor a employé une construction géométrique ; mais M. Lagrange a donné un procédé analytique très-simple et très-commode, que nous allons faire connaître. »



S.-F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et intégral*, 2<sup>e</sup> ed. 1810.

« La méthode ci-dessus peut sembler incomplète, à quelques égards, puisqu'on n'y entre dans aucun détail sur le nombre des développemens qu'on doit tirer d'une équation, d'après son degré, et sur les cas où ces développemens peuvent acquérir des termes imaginaires ; mais ce détail aurait peu d'intérêt, puisqu'on emploie rarement la méthode dont il s'agit ; et d'ailleurs on peut consulter le chapitre VII de l'Introduction à l'Analyse des lignes courbes, par Cramer, qui mettra sur la voie de ces recherches. »



Fourier, *Analyse des équations déterminées*, 1831.

« Les découvertes capitales qui ont fondé l'analyse algébrique sont [. . .] [la règle] du parallélogramme analytique due à Newton et que Lagrange a démontrée; [. . .] » (p. 2)

« Newton a ramené la partie principale de cette question à une construction singulière, qui sera toujours regardée comme une des plus belles inventions analytiques que nous ayons reçues de ce grand géomètre. [. . .] La règle précédente qui sert à former les premiers termes des racines des équations littérales est nécessaire pour l'analyse des lignes courbes considérées dans leur cours infini. On en trouve des exemples remarquables dans les ouvrages de Newton, Stirling, Cramer et divers auteurs » (p. 48-49)

# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas





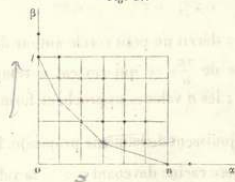
Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2<sup>e</sup> ed. 1875.

34. Considérons maintenant le cas où, dans l'équation (1), le premier terme indépendant de  $u'$  contient  $z'$  à une puissance  $l$  supérieure à la première. Nous établirons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Le groupe des  $n$  racines voisines de zéro se décompose en sous-groupes tels, que le rapport de chacune des racines d'un même sous-groupe à une même puissance commensurable de  $z'$  ait une limite déterminée, finie et différente de zéro.*

Pour démontrer ce théorème, nous suivrons la méthode ingénieuse qui a été employée par M. Puiseux dans son remarquable *Mémoire sur les fonctions algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XV; 1850). Traçons dans un plan deux axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$

Fig. 21.



(fig. 21), et marquons les points qui ont pour coordonnées les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  dans les différents termes de l'équation

$$(1) \quad \sum A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0.$$



In french-speaking areas : after 1850



Georges Henri Halphen, *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, Mémoires présentés par divers savans à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, 1874 (1879).

De cette remarque naît l'idée d'une recherche importante. Comment se groupent les diverses branches dont la coexistence est ainsi nécessaire? La réponse à cette question est fournie par un des résultats contenus dans l'important *Mémoire sur les fonctions algébriques*, de M. Puiseux (*Journal de mathém.* 1850). Pour le but que je me propose, ce résultat peut être obtenu très-brièvement, comme on va le voir, et recevoir de nouveaux développements.

Soit  $f(x, y) = 0$  l'équation d'une courbe algébrique passant à l'origine des coordonnées. Pour une valeur donnée, infiniment petite, de  $y$ , cette équation admet des racines  $x$  infiniment petites. Soit  $x$  l'une d'elles, et  $cy^n$  sa partie principale<sup>(1)</sup>. Posons  $x - cy^n = \xi_1$ , et soit  $c_1y^{n_1}$  la partie principale de  $\xi_1$ ; posons  $\xi_1 - c_1y^{n_1} = \xi_2$ , et soit  $c_2y^{n_2}$  la partie principale de  $\xi_2$ , et ainsi de suite. Nous mettons la racine  $x$  sous la forme

$$x = cy^n + c_1y^{n_1} + c_2y^{n_2} + \dots + c_iy^{n_i} + \xi_{i+1}.$$

Les quantités  $c, c_1, \dots, c_i$  sont des constantes; les nombres  $n, n_1, \dots, n_i$ , qui peuvent n'être pas entiers, croissent avec leurs indices, et l'ordre de  $\xi_{i+1}$  est supérieur à celui de  $y^{n_i}$ .

L'expression de  $(x - \xi_{i+1})$ , donnée par cette équation, consti-

<sup>(1)</sup> D'après le *parallélogramme de Newton*, l'exposant  $n$  est toujours commensurable.



Georges Henri Halphen, *Sur les singularités des courbes gauches algébriques*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 1877 (1878).

### § I. — POINTS SINGULIERS DES COURBES GAUCHES.

1. Quelques mots d'abord pour rappeler la représentation analytique des points singuliers des courbes planes.

THÉORÈME I. — *Aux environs d'un point O situé sur une courbe algébrique plane, et pris pour origine des coordonnées rectilignes, toutes les positions d'un point mobile sur cette courbe sont définies par un ou plusieurs systèmes d'équations, tels que*

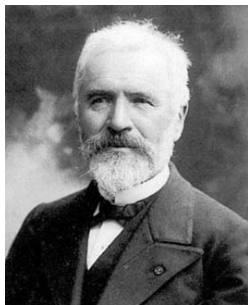
$$(1) \quad x = t^n, \quad y = f(t),$$

dans lequel  $n$  est un entier positif et  $f(t)$  un développement procédant suivant les puissances entières, positives et ascendantes de  $t$ . Ces équations sont valables dans les limites de convergence de  $f(t)$ .

Ce théorème, que je me contente de rappeler sans démonstration, peut être attribué à Newton. Il est, en effet, une conséquence immédiate du *parallélogramme*.

La portion de courbe représentée par les équations (1) a été désignée par M. Cayley sous le nom de *branche superlinéaire*. Des considérations algébriques, empruntées à M. Puiseux, m'ont

## In french-speaking areas : after 1850



Camille Jordan, *Cours  
d'analyse de l'Ecole  
Polytechnique*, vol. I,  
1882.

93. Newton a donné une construction géométrique élégante pour déterminer les valeurs de  $\mu$ .

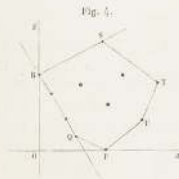
Représentons chaque terme de l'équation  $f(x, y) = 0$ , tel que  $Ax^m y^n$ , par un point ayant  $\beta$  pour abscisse et  $\alpha$  pour ordonnée. On obtiendra un système de points dont l'un au moins sera sur l'axe des  $x$ ; sinon l'équation  $f(x, y) = 0$  contiendrait en facteur une puissance de  $x$  que l'on pourrait supprimer avant de la traiter.

Cela posé, les relations (2) montrent que les points  $\beta, \alpha, \beta_1, \alpha_1, \dots, \beta_r, \alpha_r$  sont situés sur la droite

$$Y + \mu X = x + \mu\beta;$$

mais les autres points  $\beta_{i+1}, \alpha_{i+1}, \dots$  sont situés en dessus, en vertu des relations  $\alpha + \mu\beta < \alpha_{i+1} + \mu\beta_{i+1}, \dots$

Donc la droite en question sera l'un des côtés inférieurs du polygone convexe PQRSTU circonscrit au système de points.



On n'aura donc qu'à tracer ce polygone pour construire les diverses droites qui répondent à la question. Leurs coefficients angulaires, changés de signe, donneront les valeurs de  $\mu$ .

# Plan

Introduction : "fallen into oblivion"

What exactly are we talking about here?

From Newton...

...to Cramer

The analytical triangle in action

Circulations and rediscoveries 1750-1900

In french-speaking areas : 1750-1850 continuities

In french-speaking areas : after 1850

In english and german-speaking areas

## In english and german-speaking areas

Hutton, *A Mathematical and Philosophical Dictionary*, vol. II, 1795.

A					D
	$x^5$	$x^4y$	$x^3y^2$	$x^2y^3$	$xy^4$
	$x^4$	$x^3y$	$x^2y^2$	$xy^3$	$y^4$
	$x^3$	$x^2y$	$xy^2$	$y^3$	
	$x^2$	$xy$	$y^2$		
	$x$	$y$			
B					C

Now when any literal equation is proposed, involving various powers of the two unknown quantities  $x$  and  $y$ , to find the value of one of these in an infinite series of the powers of the other; mark such of the cells as correspond to all its terms, or that contain the same powers and products of  $x$  and  $y$ ; then let a ruler be applied to two, or perhaps more, of the Parallelograms so marked, of which let one be the lowest in the left hand column at AB, the other touching the ruler towards the right hand; and let all the rest, not touching the ruler, be above it. Then let the terms of the equation which are represented by the cells that touch the ruler, and from them find the first term or quantity to be put in the quotient.

Of the application of this rule, Newton has given several examples in his *Method of Fluxions and Infinite Series*, p. 9 and 10, but without demonstration; which has been supplied by others. See Colson's *Comment on that treatise*, p. 192 & seq. Also Newton's *Letter to Oldenburg*, Oct. 22, 1676. Maclaurin's *Algebra*, p. 271. And especially Cramer's *Analyses des Lignes Courbes*, p. 148. — This author observes, that this invention, which is the true foundation of the method of series, was but imperfectly understood, and not valued as it deserved, for a long time. He thinks it however more convenient in practice to use the Analytical Triangle of the abbé de Gua, which takes in no more

Barlow, *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*, 1814.

**Newtonian PARALLELOGRAM**, is an invention of Sir Isaac Newton, for finding the first term of an infinite converging series. See Newton's "Method of Fluxions and Infinite Series," p. 9. Colson's *Comment on that treatise*, p. 192; Maclaurin's "Algebra," p. 251; and Cramer's "Analyses des Lignes Courbes," p. 148.

But nothing in the first editions of the *Britannica*, nor in the Rees's *Cyclopædia* in 1819 or the *Penny Cyclopædia* (1833-43)...



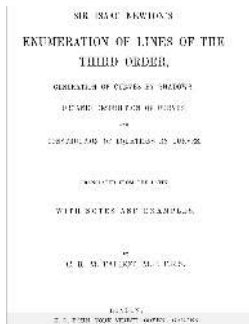
## In english and german-speaking areas



De Morgan, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1857.

« Stirling calls it the best possible method, and notes that many, who did not understand it, thought it was only mechanical. De Gua used it, and it was the staple of Cramer's celebrated work on Curves. But, many has have been the writers who referred to Cramer for examples or classifications, I cannot find one who has described this pervading process, which Cramer calls the analytical triangle. [. . .] Modern writers have passed over the whole method, and have made hard work, by differential coefficients, of examples taken from Cramer, which Cramer himself treats with great ease by Newton's parallelogram. This means that they have at most referred to old books, and have not read them. »

## In english and german-speaking areas



C. R. M. Talbot, *Sir Isaac Newton's Enumeration of Lines of the Third Order*, 1860.

« In ordinary practice it is usual to have recourse to the assistance of the differential calculus for this purpose, but another method founded on the properties of the 'analytical parallelogram,' invented by Newton, may frequently be used with advantage, especially if the nature and direction of the asymptotes and infinite branches are the object of inquiry. It is indeed on this method that Cramer has founded most of the reasoning of his great work on curve lines, modestly entitled "Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes," in which curves of great intricacy up to the sixth order are discussed, and in which not only the infinite parts of the curves, but their singular points and maximum and minimum co-ordinates are found, without any reference to principles beyond those of ordinary algebra. »



In english and german-speaking areas

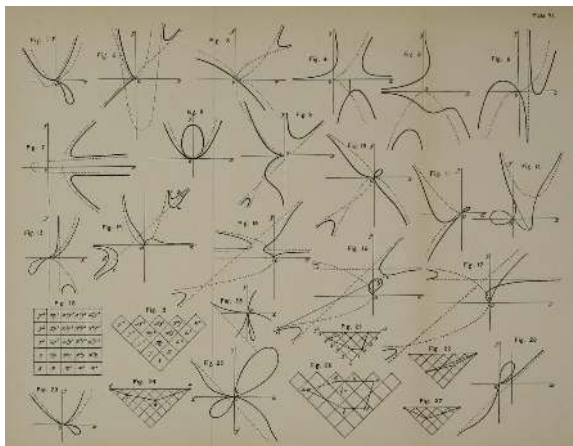
AN ELEMENTARY TREATISE  
 OF  
 CURVE TRACING.

BY  
 PERCIVAL FROST, M.A.,  
 PRINCIPAL TUTOR IN ST. JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE;  
 MATHEMATICAL LECTURER IN BRISTOL COLLEGE.

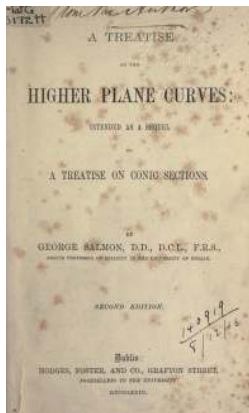


London:  
 MACMILLAN AND CO.  
 1872.

P. Frost, *Elementary  
 treatise on curve tracing*,  
 1872.



## In english and german-speaking areas



G. Salmon (with A. Cayley), *A treatise on the higher plane curves*,

2<sup>nd</sup> ed., 1873.

## Chapter I, section III Tracing of curves, taken from Cayley

56. Reverting now to the case of a singular point at the origin, it is for determining the nature of it, frequently convenient to develop  $y$  in a series of ascending powers of  $x$ ; for if we throw the equation into the form  $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + \&c.$ , where  $\beta$  and all the indices which follow are greater than  $\alpha$ , we know that in the neighbourhood of the origin the figure resembles that of the curve  $y = Ax^\alpha$ , which can easily be constructed. In order to effect such a development, we can employ the process given by Newton\*, which is most conveniently used in the following form. Write in the equation  $y = Ax^\alpha$ , and determine the positive quantity  $\alpha$  by the condition that the indices of two or more terms shall be equal, and less than the index of any other of the terms. This can always be done

\* See *Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum*, &c., under the heading *De reductione affectarum equationum* (*Opusc.* ed. Castillon, Vol. I., p. 37). See also a paper by Professor De Morgan, *Quarterly Journal*, Vol. I., p. 1, and *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. IX., p. 608. Newton gives the rule, by means of a diagram of squares, in a form different from that given above.

In english and german-speaking areas

# CURVE TRACING

## CARTESIAN COORDINATES

BY

WILLIAM WOOLSEY JOHNSON

PROFESSOR OF MATHEMATICS AT THE UNITED STATES NAVAL ACADEMY

NEW YORK  
JOHN WILEY & SONS  
15 ASTOR PLACE  
1884

W. W. Johnson, *Curve Tracing in Cartesian Coordinates*, 1884.

### § III] REPRESENTING MORE THAN ONE FORM 47

62. In general, whenever a side of the analytical polygon is divided into segments by points having integral coordinates, whether they be marked points or not, the number of these segments indicates the degree of the corresponding equation, and hence the number of approximate forms represented by the side.

63. The equation corresponding to a side consisting of two or more segments may have a pair of imaginary roots. For example, let the equation of the curve be

$$x^2y^4 + 2a^2xy^3 - a^2y + a^6 = 0, \quad (1)$$

for which the analytical polygon is drawn in Fig. 25. The side  $OC$  of the analytical polygon gives, for the approximate forms at the fundamental point  $A$ ,

$$x^2y^4 + a^6 = 0, \quad (2)$$

which is impossible, because it gives imaginary values to the product  $xy^2$ . There are, therefore, no infinite branches in the direction of the axis of  $x$ .

The side  $CD$  gives, for the fundamental point  $B$ , the approximate form

$$xy = -2a^2, \quad (3)$$

indicating branches in the second and fourth quadrants having the axis of  $y$  for an asymptote. The side  $DE$  gives, for the same fundamental point,

$$2xy^2 = a^2, \quad (4)$$

indicating branches in the first and fourth



Fig. 25

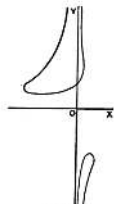


Fig. 26

## In english and german-speaking areas



Abraham Kästner,  
*Anfangsgründe der*  
*Analysis*, Vol. III,  
1759-1761.

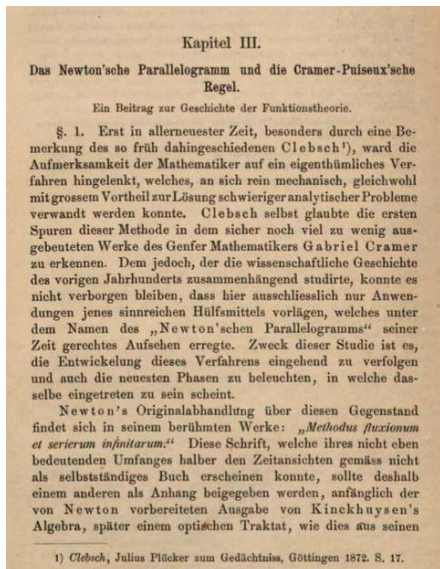
632. Anm. Die ganze Schwierigkeit kommt also nur darauf an; die Gestalt der Reihe zu finden. Dieses zu bewerkstelligen, hat Newton durch eine Erfindung angewiesen, die parallelogrammum Newtonianum genannt wird: Man findet sie in verschiedenen Schriften erklärt; unter andern in Newtons Method of Fluxions and infinite series, welche Joh. Colson aus Newtons lateinischen Manuscripte englisch übersetzt zu London 1736; 4<sup>o</sup> herausgegeben hat: Colson

119. Anm. Aber das newtonische Parallelogramm lehret auch sowohl diese Asymptoten, als auch krumme Linien, denen sich eine gegebene krumme Linie ohne Ende nähert, (asymptotos curvilineas) unmittelbar finden, wovon mich aber hier die Abhandlung zu weit führen würde, zumahl da ich überhaupt von den krummen Linien nicht umständlich handeln kann. S. Cramer anal. des lignes courbes ch. VIII.

## In english and german-speaking areas



S. Gunther, *Vermischte  
 Untersuchungen zur  
 Geschichte der  
 Mathematischen  
 Wissenschaften*, 1876.



## In english and german-speaking areas



Alfred Clebsch, *Leçons sur la géométrie*, vol. II, 1880.

premiers entre eux. Pour notre but, les seules valeurs qui puissent être employées sont naturellement celles pour lesquelles  $p + q$  est plus petit que  $n$ ,  $n$  désignant l'ordre de la courbe étudiée. Nous avons maintenant à choisir  $\mu$  aussi petit que possible, car il s'agit pour nous de trouver les termes vis-à-vis desquels tous les autres sont d'un ordre plus élevé d'infiniment petits. Nous pouvons nous faire une idée claire de la question en employant un moyen géométrique auxiliaire <sup>(1)</sup>. Si nous considérons, en effet, les nombres entiers  $p, q$  respectivement comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan, nous pouvons admettre que chaque terme est figuré par un point ayant  $p, q$  pour coordonnées. L'équation (11) représente alors une ligne droite, et nous pouvons considérer le nombre  $\mu$  comme la mesure de la distance de cette droite à l'origine, car la distance dont il s'agit est, comme on sait, égale à

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Donc, dans cette représentation géométrique, tous les points,

<sup>(1)</sup> Ce procédé a été donné par Newton, d'abord pour représenter approximativement  $y$  en fonction de  $x$ , une équation  $f(x, y) = 0$  étant donnée (voir *Methodus functionum et serierum infinitarum*; London, 1736. (*Opuscula*, ed. Castillon, t. I, p. 37 et suiv.) Il en a été fait usage pour la théorie des courbes par CHAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*; 1750. Voir aussi, pour ce qui suit, PISSEUX, *Recherches sur les fonctions algébriques* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XV, 1850 (traduit en allemand par FISCHER, Halle, 1861, p. 24 et suiv.)].

## In english and german-speaking areas



A. von Brill & M.

Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit*, section I, 1894.

24. Cramer's „Méthode des séries.“

135

F. Gabriel Cramer [1750].

Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750, 4<sup>e</sup>. 680 SS.

24. Dieses Werk ist für die Geschichte unserer Theorie bemerkenswert besonders wegen der in Chap. VII enthaltenen Méthode des séries. Cramer führt das Newton'sche Verfahren der Entwicklung einer implicit gegebenen algebraischen Function in eine Reihe für seine Zwecke — zunächst die Discussion der Gestalt der unendlichen Zweige — in folgender Weise aus:

„Méthode des séries.“

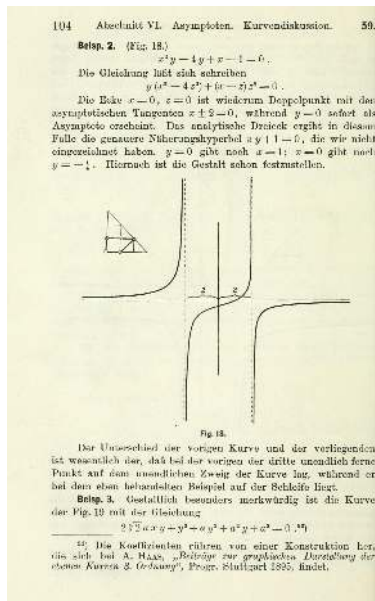
Gegeben sei eine algebraische Gleichung zwischen zwei Veränderlichen  $x, y$ . Sie stellt eine „courbe algébrique, géométrique ou rationnelle“ dar (im Gegensatz zu den „courbes transcendantes, mécaniques ou irrationnelles“). Es handelt sich um die Entwicklung von  $y$  nach auf- oder absteigenden Potenzen von  $x$ . Ob zu einem unendlich grossen, oder zu einem unendlich kleinen Werte von  $x$  solche von  $y$  existiren, und in welchem Grössenverhältnis sie zu  $x$  stehen, darüber entscheidet das Newton'sche Parallelogramm, oder besser das „analytische Dreieck“, zu welchem De Gua das Parallelogramm ausgestaltet hat.

Wenn man alle Punkte, die in dem analytischen Dreieck den in der vorgelegten Gleichung wirklich auftretenden Termen entsprechen, durch ein Polygon einschliesst, dessen Seiten durch mindestens zwei dieser Punkte gehen, so entspricht einer jeden dieser Seiten (déterminatrice) (§ 91) ein Wertverhältnis von  $x$  und  $y$ , das den Exponenten des ersten Gliedes einer der Entwicklungen von  $y$  nach auf- oder absteigenden Potenzen von  $x$  ergibt (§ 96, § 102). Indessen werden bei Cramer von den Dreiecksseiten zwei bevorzugt, und auch von diesen wieder eine vor der anderen. Die Analogie, welche, an das Dreieck anschliessend, De Gua

## In english and german-speaking areas



H. Wieleitner, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung*, 1905.





Thanks for your attention. Do you have any questions ?