

Le *triangle analytique* comme représentation et outil d'étude de l'équation générale d'une courbe algébrique chez Gabriel Cramer

Thierry JOFFREDO

Archives Henri-Poincaré, UMR 7117, Nancy
IMJ-PRG, équipe Histoire des sciences mathématiques, UMR 7586, Paris

*Courbes et généralités à l'âge classique, séminaire Histoire et
philosophie des mathématiques de l'Antiquité à l'âge classique,
SPHERE, 19 janvier 2024*

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

- ... représenter l'équation générale d'une courbe

- ... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

- ... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

- ... étudier les branches infinies

- ... classer les courbes

Conclusion

Plan

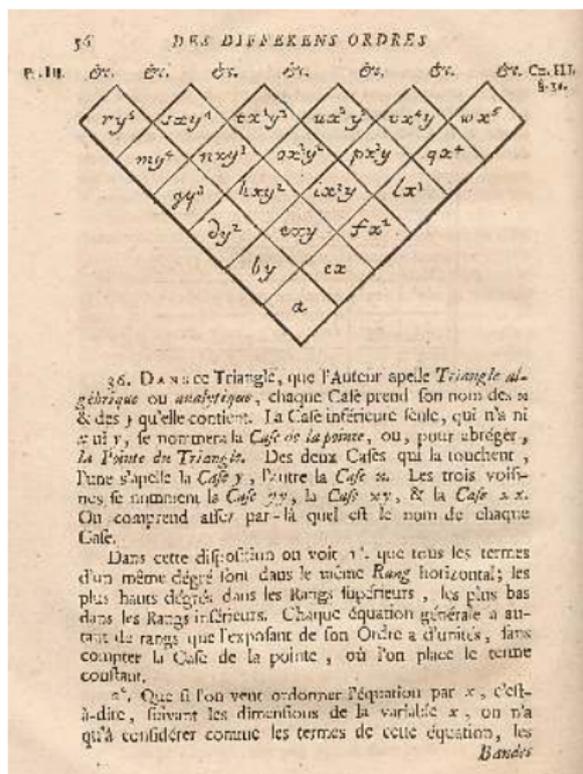
Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

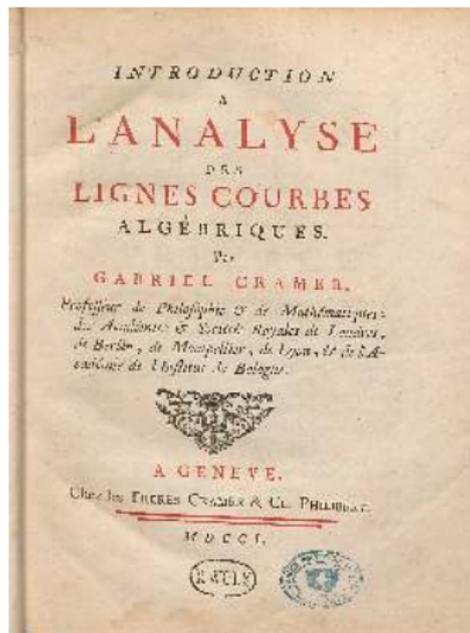
- ... représenter l'équation générale d'une courbe
- ... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné
- ... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes
- ... étudier les branches infinies
- ... classer les courbes

Conclusion



Comment Gabriel Cramer prend-il appui sur le dispositif du *triangle analytique* dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (publié à Genève en 1750) pour imposer de l'ordre, de l'universalité et de la généralité dans ce paysage des courbes algébriques, à peine exploré au début du XVIII^e siècle, dont « les variétés perpétuelles, rappelées constamment à l'unité, offrent à l'Esprit un spectacle dont il ne se lasse jamais » (préface, p. v)

L'Introduction de G. Cramer



Gabriel Cramer (1704-1752)

- ▶ Professeur de mathématiques (1724–1750), puis de philosophie (1750–1752), à l'Académie de Genève ;
- ▶ Membre de la Société royale des sciences de Montpellier, de l'Académie des sciences de l'Institut de Bologne (1743), l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1746), le Royal Society de Londres (1749), la Société royale des beaux-arts de Lyon (1750) ; deux candidatures à l'Académie royale des sciences de Paris (1748, 1750) ;
- ▶ En correspondance avec de nombreux savants européens : D'Alembert, Dortous de Mairan, Buffon, Clairaut, les Bernoulli, Euler ...

I N D I C E

DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES.

- ▶ I De la Nature des Lignes courbes en général, & de leurs Equations
- ▶ II Des transformations que subit l'Equation d'une Courbe, quand on la raporte à d'autres coordonnées
- ▶ III Des différens Ordres des Lignes algébriques
- ▶ IV Quelques Remarques sur la construction géométrique des Egalités
- ▶ V Valeur du produit de toutes les Ordonnées d'une même Abscisse
- ▶ VI Des Diamètres, Contre-Diamètres, & Centres des Lignes Courbes
- ▶ VII Détermination des plus grands termes d'une Equation. Principes de la Méthode des séries, ou Suites infinies
- ▶ VIII Des Branches infinies des Courbes
- ▶ IX Divisions générales des Lignes des cinq premiers Ordres
- ▶ X Des Points singuliers; Points multiples, Points d'Inflexion & de Serpement
- ▶ XI De la Méthode des Tangentes, Des Points d'Inflexion, &c. Des plus grandes & des plus petites abscisses & ordonnées, &c.
- ▶ XII De la Courbure des Lignes Courbes en leurs différens Points
- ▶ XIII Des différentes espèces de Points multiples dont peuvent être susceptibles les Courbes des six premiers Ordres

I N D I C E
DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES.

- ▶ I De la Nature des Lignes courbes en général, & de leurs Equations
- ▶ II Des transformations que subit l'Equation d'une Courbe, quand on la raporte à d'autres coordonnées
- ▶ III Des différens Ordres des Lignes algébriques
- ▶ IV Quelques Remarques sur la construction géométrique des Egalités
- ▶ V Valeur du produit de toutes les Ordonnées d'une même Abscisse
- ▶ VI Des Diamètres, Contre-Diamètres, & Centres des Lignes Courbes
- ▶ VII Détermination des plus grands termes d'une Equation. Principes de la Méthode des séries, ou Suites infinies
- ▶ VIII Des Branches infinies des Courbes
- ▶ IX Divisions générales des Lignes des cinq premiers Ordres
- ▶ X Des Points singuliers; Points multiples, Points d'Inflexion & de Serpement
- ▶ XI De la Méthode des Tangentes, Des Points d'Inflexion, &c. Des plus grandes & des plus petites abscisses & ordonnées, &c.
- ▶ XII De la Courbure des Lignes Courbes en leurs différens Points
- ▶ XIII Des différentes espèces de Points multiples dont peuvent être susceptibles les Courbes des six premiers Ordres

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

... représenter l'équation générale d'une courbe

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

... étudier les branches infinies

... classer les courbes

Conclusion

« Dans ce qui nous en reste, on voit que si les Anciens ont eu autant d'esprit & de génie que les Modernes, ils leur cèdent par la Méthode, par cet art infiniment utile de déduire d'un seul Principe universel un grand nombre de Vérités, de les soumettre à des Règles générales, de les développer par des conséquences uniformes, & de les lier les unes aux autres de la manière la plus propre à faire naître de nouvelles découvertes. Ce que les Anciens avoient démontré sur les Courbes, quelque important, quelque subtil qu'il fut, n'étoit pourtant qu'un amas de Propositions particulières, qui ne pouvoient guères servir à en trouver d'autres, qu'autant que ces Recherches donnoient des exemples & des modèles, qu'un Esprit né Géomètre s'efforçoit d'imiter. Une grande application & l'étude opiniâtre d'une Courbe pouvoit y faire voir des propriétés singulières : L'Inventeur en étoit redevable à son génie, & souvent à la Fortune. »

Préface, p. vi

« C'est sur-tout dans la Théorie des Courbes qu'on éprouve bien sensiblement l'utilité d'une Méthode aussi générale que l'est celle de l'Algèbre. Des Cartes, dont l'esprit inventeur ne brille pas moins dans la Géométrie que dans la Philosophie, n'eut pas plutôt introduit la manière d'exprimer la nature des Courbes par des équations algébriques, que cette Théorie changea de face. Les découvertes se multiplièrent avec une extraordinaire facilité : chaque ligne de Calcul enfonçoit de nouveaux Théorèmes. [...]. Car ce qu'il y a d'admirable ici, c'est qu'on ne sauroit découvrir par le moyen de l'Algèbre quelque propriété d'une Courbe particulière, qu'elle ne fasse aussi-tôt connoître des propriétés semblables, ou analogues, dans une infinité d'autres Courbes. Ajoutez que l'Algèbre seule fournit le moyen de distribuer les Courbes en Ordres, Classes, Genres et Espèces : ce qui, comme dans un Arsenal où les armes sont bien rangées, met en état de choisir, sans hésiter, celles qui peuvent servir dans la Résolution d'un Problème proposé. »

Références explicites

- ▶ Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, Londres, 1704
- ▶ Stirling, *Lineæ tertii ordinis Neutonianæ*, Oxford, 1717
- ▶ 'sGravesande, *Matheseos universalis elementa*, Leyde, 1727
- ▶ Nicole, *Traité des Lignes du troisième ordre, ou des Courbes du second genre*, HARS 1727, Paris, 1729
- ▶ Bragelongne, *Examen des Lignes du quatrième ordre ou Courbes du troisième genre*, HARS 1730, Paris, 1732
- ▶ De Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Propriétés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, Paris, 1740

Préface, p. vii-xi

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

... représenter l'équation générale d'une courbe

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

... étudier les branches infinies

... classer les courbes

Conclusion

... représenter l'équation générale d'une courbe

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

... représenter l'équation générale d'une courbe

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

... étudier les branches infinies

... classer les courbes

Conclusion

... représenter l'équation générale d'une courbe

« L'abscisse, qui est zéro à l'Origine, va en croissant par tous les degrés imaginables jusqu'à l'infini, tant négatif que positif. La lettre x , qui désigne l'abscisse, prend donc successivement une infinité de valeurs différentes, positives & négatives. Ces valeurs, substituées l'une après l'autre dans l'équation indéterminée de la Courbe, la transformeroient en autant d'égalités déterminées, où l'on ne verroit plus d'inconnuës que y , dont les valeurs sont les racines de ces égalités. Ces valeurs, ou ces racines, expriment les ordonnées qui répondent à chaque abscisse. Ainsi chaque abscisse porte à son extrémité une ou plusieurs ordonnées, suivant qu'il y a une ou plusieurs racines de l'égalité. [...] La Ligne, passant par les extrémités de toutes ces ordonnées, aura autant de branches qu'y a de valeurs différentes dans l'équation. Et quand l'Algèbre peut donner ces valeurs, leur examen fait connoitre si les branches auxquelles elles se rapportent sont finies ou infinies, quel est leur cours, & leur position; en un mot, tout ce qu'elles ont de remarquable. »

Quelques premières généralités simples :

- ▶ lorsque l'équation n'a pas de terme constant, alors la courbe passe par l'origine ;
- ▶ on peut calculer les points d'intersection d'une courbe avec l'axe des ordonnées (resp. abscisses) en remplaçant simplement x (resp. y) par zéro dans l'équation de la courbe, et en résolvant l'équation en y (resp. en x) qui en résulte ;
- ▶ « toute branche de Courbe ou a un cours infini, ou vient se rejoindre à une autre branche de Courbe ».

Chapitre I, p. 16-17 et 27

« On peut donc former, pour chaque Ordre de Lignes, une Equation générale, qui représente toutes les Lignes possibles de cet Ordre-là : lesquelles ensuite se divisent & subdivisent en Genres & Espèces, selon la variété des coefficients qui multiplient les termes de ces Equations.

L'éq : $a + by + cx = 0$, exprime la nature des Lignes du premier Ordre parce qu'elle n'a aucun terme qui passe le premier degré.

L'éq : $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ représente une Ligne quelconque du second Ordre, parce qu'il ne s'y trouve que des termes du second degré ou des degrés inférieurs.

L'éq : $a + by + cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ix^2y + lx^3 = 0$, exprime en général une Ligne du troisième Ordre parce que les termes les plus élevés ne sont que du troisième Ordre, &c. »

Chapitre III, p. 52-53

... représenter l'équation générale d'une courbe

Chapitre III, p. 54-56

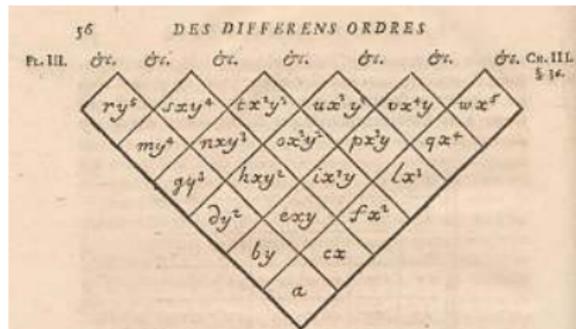
35. MR. NEWTON arrange les termes de l'équation d'une Ligne algébrique dans un Parallélogramme divisé en plusieurs Cases, ou petits carrés. Il place dans chaque ligne horizontale les termes où la variable x a le même exposant, & ces exposants augmentent d'une unité en montant de ligne: Il place dans chaque colonne verticale

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 55

verticale les termes où l'indéterminée x a le même exposant, & ces exposants croissent d'une unité en passant d'une colonne à l'autre de gauche à droite. Ainsi chaque terme a la Case déterminée par les exposants d' x & d' y dans ce terme.

Or.	Or.	Or.	Or.	Or.	Or.
ly^6	xy^5	ax^2y^4	dx^3y^3	ex^4y^2	Or.
dy^5	my^4	ix^2y^3	βx^3y^2	ix^4y	Or.
d^2y^4	$bscy^3$	nx^2y^2	ix^3y	γx^4y	Or.
by^3	exy^2	ix^2y	px^3y	vx^4y	Or.
a	cx	fx^2	tx^3	gx^4	Or.

Mais comme dans cette disposition les termes d'un même degré se trouvent placés en diagonale, Mr. DE GUÉ, en tournant le Parallélogramme, lui a donné une situation plus commode *. Il se présente alors comme un triangle, dont la pointe regarde en embas, & où les termes de l'équation générale sont placés comme on le voit dans cette Figure, qui explique la chose suffisamment.



36. DANS ce Triangle, que l'Auteur appelle *Triangle algébrique* ou *analytique*, chaque Case prend son nom des x & des y qu'elle contient. La Case inférieure seule, qui n'a ni x ni y , se nommera la *Case de la pointe*, ou, pour abrégé, la *Pointe du Triangle*. Des deux Cases qui la touchent, l'une s'appelle la *Case yy*, l'autre la *Case x*. Les trois voisines se nomment la *Case yy*, la *Case xy*, & la *Case xx*. On comprend assez par-là quel est le nom de chaque Case.

Dans cette disposition on voit 1°. que tous les termes d'un même degré sont dans le même Rang horizontal; les plus hauts degrés dans les Rangs supérieurs, les plus bas dans les Rangs inférieurs. Chaque équation générale a autant de rangs que l'exposant de son Ordre a d'unités, sans compter la Case de la pointe, où l'on place le terme constant.

2°. Que si l'on veut ordonner l'équation par x , c'est-à-dire, suivant les dimensions de la variable x , on n'a qu'à considérer comme les termes de cette équation, les

Banquet

« Dans cette disposition on voit 1°. que tous les termes d'un même degré sont dans le même Rang horizontal ; les plus hauts degrés dans les Rangs supérieurs, les plus bas dans les Rangs inférieurs. Chaque équation générale a autant de rangs que son Ordre a d'unités, sans compter la Case de la pointe, où l'on place le terme constant.

2°. Que si l'on veut ordonner l'équation par x , c'est-à-dire, suivant les dimensions de la variable x , on n'a qu'à considérer comme les termes de cette équation, les Bandes qui montent de droite à gauche.

De même, si on veut ordonner l'équation par y , on prendra pour ses termes consécutifs les Bandes qui montent de gauche à droite. »

Chapitre III, p. 56-57

... représenter l'équation générale d'une courbe

Nous voilà donc avec trois écritures possibles pour l'équation générale d'une courbe algébrique d'un ordre donné :

- ▶ selon les puissances de x (bandes montant de droite à gauche) ;
 $wx^5 + (q + vy)x^4 + (l + py + uy^2)x^3 + (f + iy + oy^2 + ty^3)x^2 + (c + ey + hy^2 + ny^3 + sy^4)x + (a + by + gy^2 + dy^3 + my^4 + ry^5) = 0$
- ▶ selon les puissances de y (bandes montant de gauche à droite) ;
 $ry^5 + (m + sx)y^4 + (g + nx + tx^2)y^3 + (d + hx + ox^2 + ux^3)y^2 + (b + ex + ix^2 + px^3 + vx^4)y + (a + cx + fxx + lx^3 + qx^4 + wx^5) = 0$
- ▶ selon les ordres des termes (bandes horizontales) :
 $(ry^5 + sxy^4 + tx^2y^3 + ux^3y^2 + vx^4y + wx^5) + (my^4 + nxy^3 + ox^2y^2 + px^3y + qx^4) + (gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3) + (dy^2 + exy + fx^2) + (by + cx) + a = 0 .$

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

... représenter l'équation générale d'une courbe

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

... étudier les branches infinies

... classer les courbes

Conclusion

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

« On voit par cet arrangement que l'équation générale des Lignes du premier Ordre a $[1 + 2 =]3$ termes; que celle du second Ordre a $[1 + 2 + 3 =]6$ termes; celle du troisième $[1 + 2 + 3 + 4 =]10$ termes, & ainsi de suite, selon la suite des nombres triangulaires. Le nombre des coefficients $a, b, c, d, e,$ &c. de chaque équation générale est le même que le nombre de ses termes. Mais ce nombre des coefficients peut être diminué d'une unité, parce que le second membre de ces équations étant zéro, on peut diviser tout le premier membre par un coefficient quelconque, comme celui de la plus haute puissance d'y ou d'x, laquelle, après cette division, n'a pour coefficient que l'unité. [...] Si donc v est l'exposant d'un Ordre quelconque, le nombre des coefficients de l'équation générale de cet Ordre sera $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ somme de la progression arithmétique $2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ &c., dont la différence est 1, le premier terme 2, & le nombre de termes v . »

Chapitre III, p. 57-58

$$\text{NB : } \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)-2}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

« Il suit de là , qu'on peut régulièrement faire passer une Ligne de l'Ordre v , par le nombre $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ de points donnés, ou qu'une Ligne de l'ordre v est déterminée, & son équation donnée, quand on a fixé $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ points par lesquels elle doit passer. Ainsi une Ligne du premier Ordre est déterminée par deux points donnés ; une du second par 5 ; une du troisième par 9 ; une du quatrième par 14 ; une du cinquième par 20 ; &c : La Démonstration n'a besoin que d'un Exemple. »

Chapitre III, p. 58

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

DES LIGNES ALGÈBRIQUES. 59

Ca. III. La Démonstration n'a besoin que d'un Exemple. *. Pl. III.
 9. 10. fig. 22.

Soyent A, B, C, D, E cinq points donnés par lesquels il faut faire passer une Ligne du second Ordre. On mènera à volonté deux droites FG, FH, par un point F, qu'on prendra pour l'Origine, & ces droites pour les Axes; après quoi menant par les points donnés les ordonnées Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; elles seront données, aussi bien que les abscisses Fa, Fb, Fc, Fd, Fe. Qu'on nomme donc A_x, a; B_x, b; C_x, c; D_x, d; E_x, e; & Fa, a; Fb, β; Fc, γ; Fd, δ; Fe, ε; & qu'on prenne l'éq: $A + Bx + Cx + Dxy + Exy + xx = 0$ pour celle de la Ligne du second Ordre, qui doit passer par les points donnés A, B, C, D, E. Il s'agit de déterminer les cinq coefficients inconnus A, B, C, D, E. Or pour cela nous avons cinq équations. Car, puisque la Courbe passe par le point A, il faut qu'à l'abscisse Fa [a] réponde l'ordonnée a A [a]. Donc x étant a, y est a. Mettant donc dans l'éq: $A + Bx + Cx + Dxy + Exy + xx = 0$, a pour x & a pour y, la condition de passer par A la réduit à

$$A + Ba + Ca + Daa + Eaa + aa = 0$$

La condition de passer par B, donne de même $A + Bb + Cb + Dbb + Ebb + bb = 0$
 Celle de passer par C, donne $A + Bc + Cc + Dcc + Ecc + cc = 0$
 Celle de passer par D, donne $A + Bd + Cd + Ddd + Edd + dd = 0$
 Et celle de passer par E, donne enfin $A + Be + Ce + Dee + Eee + ee = 0$

On peut par le moyen de ces cinq équations trouver les valeurs des cinq coefficients A, B, C, D, E, ce qui détermine l'éq: $A + Bx + Cx + Dxy + Exy + xx = 0$ de la Courbe cherchée.

Le Calcul véritablement en seroit assez long †; mais il n'est

H 2

* *Linea tertii Ordinis*, &c. pag. 69.
 NEYROS, *Arithmetica universalis*, Probl. LXI, pag. milt 277.
 † C'est à l'Algèbre à donner les moyens d'abréger ce Calcul.

Je crois avoir trouvé pour cela une Règle assez commode & générale, lorsqu'on a un nombre quelconque d'équations & d'inconnues dont aucune ne passe le premier degré. On la trouvera dans l'Appendice, N°. 1.

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

APPENDICE.

657

No. I.

Voyez pag. 59 & 60.

Soient plusieurs inconnues $z, y, x, v, \&c.$ & autant d'équations

$$A^1 = Z^1 z + T^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c.$$

$$A^2 = Z^2 z + T^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c.$$

$$A^3 = Z^3 z + T^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c.$$

$$A^4 = Z^4 z + T^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c.$$

où les lettres $A^1, A^2, A^3, A^4, \&c.$ ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d' A , mais le premier membre, supposé connu, de la première, seconde, troisième, quatrième &c. équation. De même $Z^1, Z^2, Z^3, \&c.$ sont les coefficients de z ; $T^1, T^2, \&c.$ ceux de y ; $X^1, X^2, \&c.$ ceux de x ; $V^1, V^2, \&c.$ ceux de v ; &c. dans la première, seconde, &c. équation.

Cette Notation supposée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z ; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y ; on trouvera $z = \frac{A^1 T^2 - A^2 T^1}{Z^1 T^2 - Z^2 T^1}$, & $y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 T^2 - Z^2 T^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues $z, y, \& x$; on trouvera

$$z = \frac{A^1 Y^2 X^3 - A^1 Y^3 X^2 - A^2 Y^1 X^3 + A^2 Y^2 X^2 + A^3 Y^1 X^2 - A^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^2 X^2 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}$$

$$y = \frac{Z^1 A^1 X^3 - Z^1 A^2 X^2 - Z^2 A^1 X^3 + Z^2 A^2 X^2 + Z^3 A^1 X^2 - Z^3 A^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^2 X^2 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}$$

$$x = \frac{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^2 X^2 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^2 X^2 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}$$

Introd. à l'Analyse des Lignes Courbes. Oooo Ué-

Cramer à Euler, 30 sept. 1744 :

« A cette occasion, je vous prierai de m'expliquer une chose que je ne comprends pas. Un certain Mr Braikenridge, dans le *Transac. Philosoph.* N°436, pag. 32, avance ceci : "De numero punctorum quae lineam cujuscunque ordinis determinant compertum habeo, si n sit numerus dimensionum Lineae, erit $n^2 + 1$ numerus punctorum per quae linea describi potest, v.g. linea 2i ordinis per 5 puncta, 3i per 10, 4i per 17, 5i per 26, etc." J'avoue que cela me surprend, rien ne me paroissant plus evident que le nombre des points qui déterminent une Courbe est egal au nombre des coefficients de ses termes moins un, et par consequent egal à $\frac{nn+3n}{2}$, qui differe de $nn+1$, en tout autre cas que $n = 1$ ou $n = 2$. »

Réponse d'Euler à Cramer, 20 oct. 1744 :

« J'ai vû, que Mr Maclaurin avoit deja le meme doute sur le nombre de points, qui determinent les courbes de chaque ordre donné; il dit que pour determiner une ligne du troisieme ordre le nombre de neuf points puisse être trop petit, mais pourtant le nombre de 10 trop grand, ce qui est à mon avis une contradiction ouverte. Le nommé Braikenridge s'est aussi absolument trompé en soutenant, qu'une ligne de l'ordre n se puisse decrire par $nn + 1$ points, et c'est une Vérité [in]contestée, comme Vous remarqués fort bien, que ce nombre n'est que $\frac{nn+3n}{2}$. On ne sçauroit douter non plus, que deux lignes courbes, dont l'une est de l'ordre m et l'autre de l'ordre n ne se pussent croiser en mn points, quoique Vous soyes le premier, qui ait donné de cette vérité une demonstration parfaite, car je conviens aisement que ma demonstration n'est rien moins qu'achevée. »

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

... représenter l'équation générale d'une courbe

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

... étudier les branches infinies

... classer les courbes

Conclusion

« Deux Lignes algébriques décrites sur un même plan, ne peuvent se rencontrer qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans le produit des nombres qui sont les exposants de leurs Ordres. Une Ligne, par ex. du 3e Ordre ne peut rencontrer une Ligne du 4e Ordre, qu'en 12 points, au plus ; & une Ligne du 5e Ordre ne sauroit rencontrer une Ligne du 12e Ordre qu'en 60 points, au plus. »

Chapitre III, p. 76

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes



Appendice II, p. 660

Cramer à Euler, 30 sept. 1744 :

« Cependant, voici qui favorise la pensée de cet Anglois. Deux lignes du 3e ordre se peuvent couper en 9 points. Ainsi une ligne du 3e ordre n'est pas suffisamment déterminée en la faisant passer par 9 points, et de même pour les ordres supérieurs. Auriez vous, Monsieur, vous qui savez si bien approfondir les matières, quelque bonne explication de cette Difficulté ? »

C'est le paradoxe dit d'Euler-Cramer.

« Cette contradiction se lève par la Remarque qui termine le §38. C'est qu'encore qu'on ait autant d'équations qu'il en faut, généralement parlant, pour déterminer tous les coefficients de l'équation prise pour représenter la Courbe qui doit passer par un certain nombre de points donnés, il peut pourtant arriver que ces coefficients restent indéterminés. Alors l'équation prise reste indéterminée & représente une infinité de Courbes du même Ordre. D'où il suit, Que si les 9 points, par lesquels on veut décrire une Ligne du troisième Ordre, ont une position telle qu'on puisse faire passer par ces 9 points deux lignes de cet Ordre, il pourra passer par ces mêmes 9 points une infinité de Lignes du troisième Ordre. »

Chapitre III, p. 79

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

... représenter l'équation générale d'une courbe

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

... étudier les branches infinies

... classer les courbes

Conclusion

... étudier les branches infinies

Exemple 2. On propose l'éq: $xy + axy^2 + bx^2y + cx^3 + dxy + exx + f^2y = 0$. Après l'avoir mise sur le Triang: analyt: c'est-à-dire, après avoir formé le Triang: avec des points, & changé en étoiles ceux qui répondent aux termes de l'équation, on verra que toutes les étoiles peuvent être renfermées dans le Pentagone *ABCDE*. Il y a donc cinq déterminatrices, qui fournissent les cinq équations suivantes.

AB



AB donne $f^2y + axy^2 = 0$, ou, divisant par xy , $xy + \frac{f^2}{a} = 0$.

BC donne $axy^2 + x^2y^2 = 0$, ou, divisant par xy^2 , $x + a = 0$.

CD donne $x^2y^2 + cx^3 = 0$, ou, divisant par x^2 , $yy + cx = 0$.

DE donne $cx^3 + exx^2 = 0$, ou, divisant par cx^2 , $x + \frac{ee}{c} = 0$.

& *EA* donne $exx^2 + f^2y = 0$, ou, divisant par ex , $xx + \frac{f^2}{ee}y = 0$.

Si on suppose x infinie, on couchera le Triangle sur la bande sans x , & on examinera quelles déterminatrices deviennent supérieures. C'est la seule *CD*. Donc cette supposition réduit l'équation proposée à la seule eq: $yy + cx = 0$.

Et si on suppose x infiniment petite, en laissant le Triangle dans la même situation, on verra quelles déterminatrices sont inférieures. Ce sont *AB* & *AE* qui donnent les eq: $xy + \frac{f^2}{a} = 0$, & $xx + \frac{f^2}{ee}y = 0$. C'est donc à ces deux équations que se réduit la proposée par la supposition d' x infiniment petite.

Chapitre VII, p. 167-168

... étudier les branches infinies

Chapitre VII, p. 179-181

rog. Mais dans le cours de ces opérations on doit se garantir que la suite des Séries ascendantes exige que les exposans des exposans croissent, & que dans les Séries descendantes ces exposans doivent aller en décroissant. Donc, quoiqu'il la première opération, à celle qui se fait sur l'équation proposée, on donne prendre en considération toutes les déterminations supérieures, pour avoir toutes les Séries ascendantes, ou toutes les déterminations inférieures pour avoir toutes les Séries descendantes; dans les opérations suivantes, on ne doit faire aucune attention aux déterminations supérieures qui donneront le même ou un plus grand exposant que le précédent, ni aux déterminations inférieures qui donneront le même ou un plus petit exposant que celui qu'on a eu par l'opération précédente. Il n'y a point d'autres déterminations, le cours des opérations est fini & la Série est terminée.

Exemple I. L'éq: $xy^2 - x^2y - ax^2 = 0$ proposée ci-dessus (§ 98) étant placée sur le Triangle arithmétique, ce Triangle étant entrecroisé sur la Bande sans x , on voit qu'elle tra. qu'une seule déterminative inférieure, qui, passant par

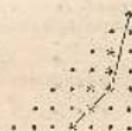


les Cases y^2 & xy , donne l'éq: $ay^2 - ax^2 = 0$, ou $y = x$. C'est le premier terme d'une Série ascendante. Pour avoir le second, on substitue x à y , & l'équation sera transformée en $ax^2 + 2axy + ay^2 - ax^2 - x^2y - ax^2 = 0$, ou $2axy + ay^2 - x^2y - ax^2 = 0$, laquelle étant placée, à son tour, sur le Triangle arithmétique, à tous déterminatives inférieures. L'une qui passe



par les Cases xy , & xy , sera celle à négliger, parce qu'elle donneroit $x = 1/y$, & que ce second exposant d' x n'est pas plus grand que celui qu'on a tiré par la première opération. Mais l'autre déterminative, qui passe par les Cases xy & xy donne l'éq: $2axy - x^2y = 0$, ou $a = \frac{x^2y}{2xy}$. C'est le second terme de la Série. On aura le troisième en substituant $\frac{x^2y}{2xy} + x$ au lieu d' x dans l'équation précédente, ce qui la transforme en $2axy + 2axy + ay^2 - x^2y - ax^2 = 0$.

$$\frac{ay^2}{3a} + 2axy + \frac{2x^2y}{27a} + \frac{x^2y}{3a} + 2axy - ax^2 = x^2 = \frac{ay^2}{3a} - ax^2 = 0, \text{ ou } 3axy + x^2 + 2axy + \frac{x^2y}{27a} + \frac{x^2y}{3a} - 15xy - ax^2 = 0. \text{ En la mettant sur le Triangle arithmétique, on voit que la déterminative, qui donne } x = 1/y, \text{ & qui est par}$$



comptes à rejeter. Mais il y a une autre déterminative inférieure, qui passe par xy & xy , & qui donne l'éq: $2axy + \frac{x^2y}{27a} = 0$, ou $x = \frac{x^2y}{81a}$. Et c'est le troisième terme de la Série. Car $y = x + a$, & $x = \frac{xy}{3a} + x$, & $x = \frac{x^2y}{81a}$. Donc $y = x + \frac{xy}{3a} - \frac{x^2y}{81a}$. On voit qu'il est aisé de continuer cette Série.

« On trouvera donc les Branches infinies d'une Courbe, en cherchant quelles ordonnées répondent aux abscisses infinies, & quelles abscisses répondent aux ordonnées infinies : Ou en examinant ce que devient l'équation de la Courbe par la supposition d' x ou d' y infinies : Ou encore, en cherchant le premier terme des Séries descendantes qui donnent la valeur d' y en x , ou d' x en y . Car tout cela n'est qu'une même Chose.

Mais le premier terme de la Série ne suffit pas toujours pour s'assurer de la nature, & de la position, ou même de l'existence, des Branches infinies : il faut souvent aller plus loin, & calculer un certain nombre des termes de ces Séries. »

Chapitre VIII, p. 215-216

« Toute Branche infinie, en s'éloignant de l'Origine, prend insensiblement la nature d'une Branche d'Hyperbole ou d'une Branche de Parabole. Elle en diffère peu à une grande distance ; & elle se confond exactement avec elle à l'infini. De-là, toutes les Branches infinies des Courbes se divisent en deux Genres, les Branches Hyperboliques, & les Branches Paraboliques. Les Hyperboles, & par conséquent les Branches hyperboliques ont une Asymptote, & les Paraboles & les Branches paraboliques n'en ont point : c'est là leur caractère distinctif.

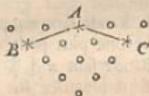
Quand on a la Série $Ax^h + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \&c.$ qui exprime l'ordonnée d'une Branche infinie, il est aisé de connoître si cette Branche est hyperbolique ou parabolique. Qu'on prenne tous les termes de cette Série, où l'exposant de x est positif ou zéro, & que leur somme soit notée v . Si la Ligne dont les coordonnées sont x et v est une Droite, la Branche de Courbe est hyperbolique & cette Droite est l'Asymptote. Au contraire, la Branche de Courbe est parabolique, si la ligne dont x est l'abscisse et v l'ordonnée n'est pas une Droite. »

... étudier les branches infinies

286

DES BRANCHES INFINIES

PL. XIII. rieures indiquent des Branches paraboliques. AB , qui Coe. VIII. prolongée retranche une plus grande partie de la Bande §. 141.

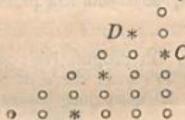


fans y que de la Bande fans x , marque une Parabole-afymptote dont la dernière direction est l'Axé des ordonnées : & l'éq. $x^2y^2 - ay^4 = 0$, ou $y = \frac{x^2}{a}$, qu'elle fournit,

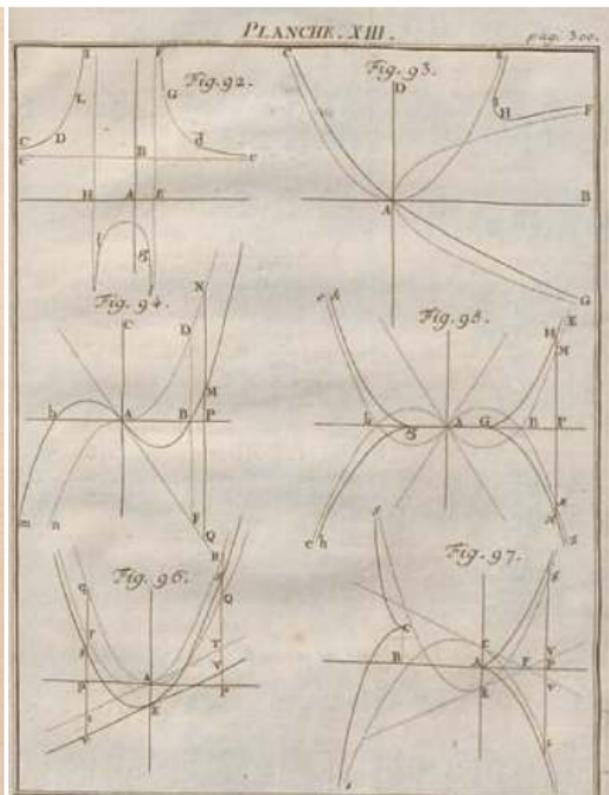
Fig. 93. est celle d'une Parabole ordinaire CAE , dont les Branches s'étendent dans les angles des ordonnées positives. La Courbe jettera aussi des Branches dans les mêmes angles, parce que $y - \frac{x^2}{a} = 0$ n'est pas racine multiple de l'éq. $x^2y^2 - ay^4 = 0$ qu'a fourni la déterminatrice.

Cette Parabole-afymptote CAE est aussi l'afymptote curviligne des Branches qui l'accompagnent. Car si on cherche le second terme de la Série en substituant $\frac{xx}{a} + u$

à y dans l'équation proposée, on la transformera en $-\frac{ux^4}{a} - 2uxx - au^3 - bx^3 = 0$, qui étant mise sur le Tr: anal: couché sur la Bande fans x n'a qu'une déterminatri-



ce



Méthode : positionner les différents termes de l'équation sur le triangle analytique, puis égaliser le terme de plus haut rang à zéro, les racines de cette équation ne peuvent être que de trois types :

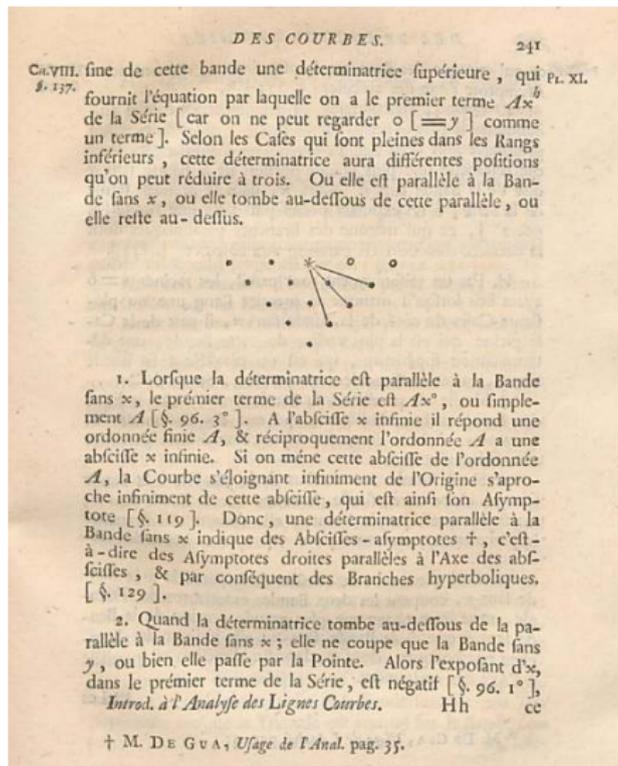
- ▶ une racine $x = 0$ donne des branches infinies dont la direction est celle de l'axe des ordonnées ;
- ▶ une racine $y = 0$ donne des branches infinies dont la direction est celle de l'axe des abscisses ;
- ▶ enfin une racine du type $y = Ax$ donnent des branches infinies dont la direction est donnée par la droite d'équation $y = Ax$.

Plus précisément, la racine $y = 0$ n'existe que s'il manque au terme de plus haut rang de l'équation une ou plusieurs cases du côté de la bande sans y dans le triangle analytique (et on peut alors au moins factoriser ce terme de plus haut rang par y ou une puissance de y)

... étudier les branches infinies

Considérons alors la case pleine la plus proche de la bande sans y : de cette case part une déterminatrice supérieure, et cette déterminatrice permet de calculer le premier terme de la série donnant y en fonction de x . Selon la position de cette déterminatrice dans le triangle analytique, il est facile de prévoir quel sera le premier terme de cette série, et par conséquent la nature de la branche infinie associée :

- ▶ Si cette déterminatrice est parallèle à la bande sans x , le premier terme de la série est une constante : on a donc une asymptote parallèle à l'axe des abscisses, et la branche infinie est donc du type hyperbolique (les seules à admettre des droites asymptotes) ;
- ▶ Si cette déterminatrice « tombe en dessous » de la parallèle à la bande sans x , alors le premier terme de la série a un exposant négatif ; la branche infinie est alors de type hyperbolique, et l'axe des abscisses en est l'asymptote ;
- ▶ Si cette déterminatrice « tombe au-dessus » de la parallèle à la bande sans x , alors le premier terme de la série a un exposant positif inférieur à l'unité ; la branche infinie est donc de type parabolique dirigée par l'axe des abscisses.



... étudier les branches infinies

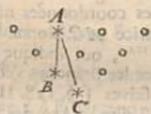
La nature des branches infinies est complètement déterminée par la position occupée par les différentes déterminatrices supérieures sur le triangle analytique ; Cramer distingue les quatre cas détaillés ci-dessous :

- ▶ Cas I : « *La déterminatrice part de la pointe, ou ne coupe qu'une des deux Bandes extérieures du Triangle analytique, sans être parallèle à l'autre.* ». Ce cas se divise en deux sous-cas : si cette déterminatrice laisse l'ensemble des cases pleines entre elle et la bande sans x , alors la courbe présente des branches hyperboliques admettant l'axe des abscisses comme asymptote. Par contre, si cette déterminatrice laisse l'ensemble des cases pleines entre elle et la bande sans y , alors la courbe présente des branches hyperboliques admettant l'axe des ordonnées comme asymptote ;
- ▶ Cas II : « *La déterminatrice est parallèle à une des deux Bandes extérieures du triangle* ». L'étude de ce cas nécessite également d'envisager deux sous-cas : si cette déterminatrice est parallèle à la bande sans y , alors la courbe présente des branches hyperboliques admettant des asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées (les ordonnées de ces asymptotes étant les racines réelles de l'équation fournie par la déterminatrice) ; de la même manière, si cette déterminatrice est parallèle à la bande sans x , alors la courbe présente des branches hyperboliques admettant des asymptotes parallèles à l'axe des abscisses (les abscisses de ces asymptotes étant les racines réelles de l'équation fournie par la déterminatrice) ;

... étudier les branches infinies

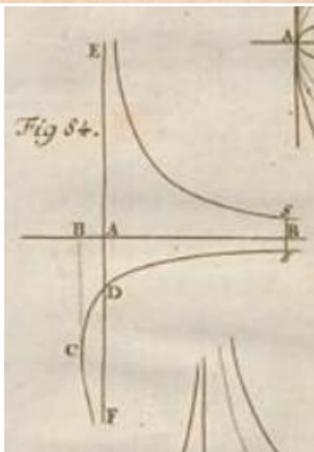
Exemple 1. On demande quelles sont les Branches infinies de la Courbe que représente l'éq: $xyy - ayy - 3axy - 2a^2x = 0$.

Cette équation mise sur le Tr: anal: a deux déterminatrices AB & AC . Celle-ci passe par la Pointe: L'autre



coupe la Bande sans x & n'est pas parallèle à la Bande sans y . Ainsi elles marquent, l'une & l'autre, des Branches hyper-

Hh 3

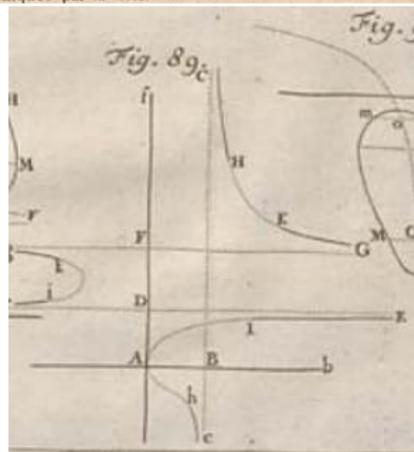


Exemple 1. On propose l'éq: $xyy - ayy - 3axy - 2a^2x = 0$. Quand on l'a placée sur le Triang: anal:

$$\begin{array}{cccc} & A & & \\ \circ & * & \circ & \circ \\ B * & * & & \\ & \circ & * & C \\ & & \circ & \end{array}$$

on voit qu'elle n'a que deux déterminatrices supérieures, toutes deux parallèles aux Bandes du Triangle.

L'une AB , parallèle à la Bande sans y , indique une Asymptote-ordonnée. Son équation $xyy - ayy = 0$, divisée par yy , se réduit à $x - a = 0$: ce qui montre que cette Asymptote est l'ordonnée de l'abscisse $x = a$. On prendra donc une abscisse $AB = a$, & par son extrémité B on mènera l'ordonnée indéfinie BC , qui est l'Asymptote indiquée par la déterminatrice AB .

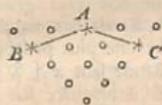


... étudier les branches infinies

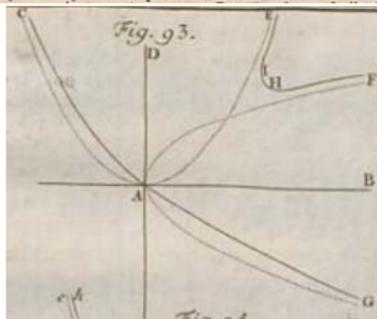
- ▶ Cas III : « *La déterminatrice coupe inégalement les deux Bandes extérieures* ». Cramer distingue à nouveau deux sous-cas : si la déterminatrice « *retranche une plus grande portion de la bande sans y que de la bande sans x* », alors la courbe admet des branches paraboliques dirigées par l'axe des ordonnées. En revanche, si elle « *retranche une plus petite portion de la bande sans y que de la bande sans x* », alors la courbe admet des branches paraboliques dirigées par l'axe des abscisses ;
- ▶ Cas IV : « *La déterminatrice coupe également les deux Bandes extérieures du Triangle analytique & fait avec elles un triangle isocèle* ». C'est le seul cas pour lequel se présenteront des courbes admettant éventuellement des branches infinies dirigées par des droites obliques, ayant pour équation $y = Ax$, $y = A'x$, . . . où $y - Ax$, $y - A'x$, etc. sont les racines de l'équation obtenue en égalant le terme de plus haut rang à 0. Pour s'assurer de l'existence et de la nature de ces branches infinies, il est nécessaire de faire un changement de coordonnées : l'axe des ordonnées conservant sa position, on fait en sorte que l'axe des abscisses soit parallèle à la droite d'équation $y = Ax$, et on se ramène ainsi à l'un des trois cas étudiés précédemment.

... étudier les branches infinies

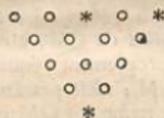
rières indiquent des Branches paraboliques. AB , qui prolongée retranche une plus grande partie de la Bande



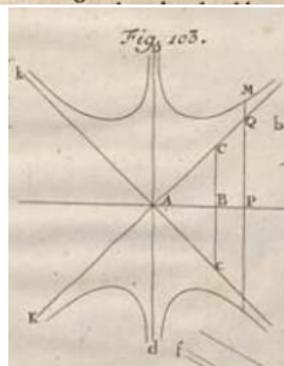
sans y que de la Bande sans x , marque une Parabole-afymptote dont la dernière direction est l'axe des ordonnées : & l'éq: $x^2y^2 - ay^2 = 0$, ou $y = \frac{x^2}{a}$, qu'elle fournit, est celle d'une Parabole ordinaire CAE, dont les Branches s'étendent dans les angles des ordonnées positives. La Courbe jettera aussi des Branches dans les memes angles, parce que $y - \frac{x^2}{a} = 0$ n'est pas racine multiple de l'éq: $x^2y^2 - ay^2 = 0$ qu'a fourni la déterminatrice.



le Tr: anal: , qui passant par la Pointe & par la Café x^2y^2 , donne l'éq: $-x^2y^2 + a^2 = 0$. Car, puisqu'elle le résout en ces deux $xy + aa = 0$, & $xy - aa = 0$,



on voit qu'elle indique pour l'Asymptote-courbe de ces Branches deux Hyperboles ordinaires, l'une positive, l'autre négative ; lesquelles par conséquent étendent leurs Branches dans les quatre angles des coordonnées. Et comme cette équation n'a point de racines multiples, on est assuré que la Courbe jette aussi une Branche dans chacun de ces quatre angles.



Pour conclure ce chapitre, Cramer énonce une dizaine de résultats généraux sur les branches infinies et asymptotes (pour la plupart déjà connues)

- ▶ Les branches infinies d'une courbe sont toujours en nombre pair ;
- ▶ Toute Ligne algébrique d'un Ordre impair a , au moins, deux Branches infinies ;
- ▶ Une Courbe algébrique ne peut avoir plus de Branches infinies qu'il n'y a d'unités dans le double de l'exposant de son Ordre ;
- ▶ Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Asymptotes droites qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son Ordre ;
- ▶ Le nombre des points, où une Courbe algébrique peut rencontrer son Asymptote droite, est inférieur, au moins, de deux unités à l'exposant de l'Ordre de cette Courbe ;
- ▶ etc.

Chapitre VIII, p. 342 et suivantes

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

... représenter l'équation générale d'une courbe

... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

... étudier les branches infinies

... classer les courbes

Conclusion

Pour les **courbes d'ordre 2** (sections coniques) après avoir discuté des solutions possibles de l'équation formée par les termes de plus haut degré de l'équation générale des courbes du second ordre $dy^2 + exy + fxx = 0$ Cramer distingue les trois cas : $e < 2\sqrt{df}$, $e > 2\sqrt{df}$ et $e = 2\sqrt{df}$ pour retrouver la classification habituelle en ellipses (pas de branche infinie), paraboles et hyperboles simples.

Chapitre IX, p. 352-359

La discussion sur les **courbes d'ordre 3**, de la même manière, s'opérera en discutant des solutions de l'équation formée par les termes de plus haut degré $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 = 0$, amenant Cramer à distinguer 4 classes et 14 genres selon le nombre et la nature de leurs branches infinies.

- ▶ Si cette équation admet une racine réelle de la forme $y = Ax$ et deux racines imaginaires, alors la courbe n'admet qu'une seule direction pour ses branches infinies, parallèle à celle de la droite d'équation $y = Ax$. Une étude des branches infinies mène à deux sous-cas : soit le développement en série de y en fonction de x est de la forme $y = Ax + B + Cx^{-1} + \dots$ et la courbe présente des branches hyperboliques qui « *se jettent dans les angles asymptotiques opposés* » (que Newton appelait *hyperboles défectives sans diamètres*) ; soit ce développement est de la forme $y = Ax + B + Cx^{-2} + \dots$ et la courbe présente des branches hyperboliques qui « *s'étendent d'un même côté de l'asymptote, mais de part & d'autre de l'axe des ordonnées* » (que Newton désignait comme des *hyperboles défectives avec diamètres*).

Chapitre IX, p. 359-369

... classer les courbes

- ▶ Si l'équation admet trois racines réelles distinctes $y = Ax$, $y = A'x$ et $y = A''x$, ce qui laisse la possibilité de trois directions distinctes pour les branches infinies, la courbe admet alors trois asymptotes droites (éventuellement concourantes) et, selon la position des branches hyperboliques autour de ces asymptotes, Cramer dégage quatre genres de courbes (toujours en suivant la terminologie de Newton) : les *hyperboles redondantes sans diamètre*, les *hyperboles redondantes avec un diamètre*, les *hyperboles redondantes avec trois diamètres* et les *hyperboles redondantes dont les trois asymptotes se croisent en un point*.
- ▶ Si l'équation admet une racine réelle double $y = Ax$ et une racine réelle simple $y = A'x$, la courbe peut alors admettre deux directions distinctes pour ses branches infinies. L'étude qui suit sur la nature et l'existence de ces branches infinies permet à Cramer de produire cinq nouveaux genres de courbe : les *hyperboles paraboliques sans diamètre*, les *hyperboles paraboliques avec diamètre*, les *hyperbolismes de l'ellipse*, les *hyperbolismes de l'hyperbole* et enfin les *hyperbolismes de la parabole*.
- ▶ Enfin, si cette équation admet une racine réelle triple $y = Ax$, on ne peut envisager qu'une seule direction pour les branches infinies de cette courbe, parallèle à la droite d'équation $y = Ax$, et l'étude qui suit permet de dégager trois nouveaux genres de courbes du troisième ordre : les *paraboles divergentes* (au nombre de cinq), le *trident* et la *parabole cubique* (les deux derniers genres ne comportant qu'une seule espèce de courbe).

Chapitre IX, p. 359-369

... classer les courbes

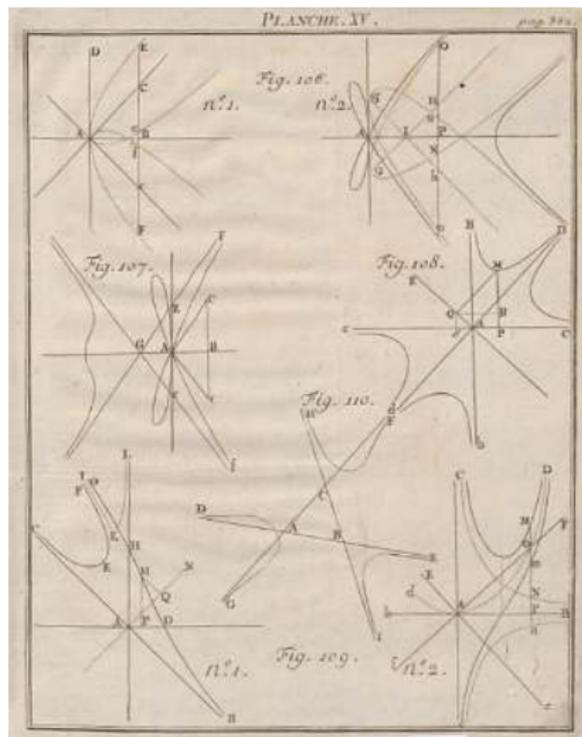
○
* *
● ● ●
● ● ● ●

Dans cette transformée, ou le terme x subsiste, ou il manque. S'il subsiste, la déterminatrice passe par les Casés ix^2 & x , & donne $z = Cx^{-1}$. S'il manque, la déterminatrice passe par la Casé ix^2 & par la Pointe, & donne $z = Dx^{-2}$. Dans l'un & l'autre Cas, la Série est régulière. L'un & l'autre indique une Asymptote droite dont l'équation est $v = Ax + B$. Mais les Branches hyperboliques de la Courbe qui donne la Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. se jettent dans les Angles asymptotiques opposés ⁽¹⁾. Et celles de la Courbe qui fournit la Série $y = Ax + B + Dx^{-2}$ &c. s'étendent d'un même côté de l'Asymptote, mais de part & d'autre de l'axe des ordonnées ⁽²⁾.

On ne peut pas supposer un troisième Cas, où la Pointe

⁽¹⁾ Dans l'Enumération qu'a donnée Mr. NEWTON des Lignes du 3^e Ordre, il désigne celles-ci par le nom d'Hyperboles defectives sans diamètre. Il les détaille au N^o. 5, & en compte six espèces. La distinction de ces espèces est fondée sur d'autres propriétés que celles des Branches infinies.

⁽²⁾ Ce sont les Hyperboles defectives avec diamètre, dont Mr. NEWTON compte sept espèces au N^o. 6.



Cramer n'écrit pas l'équation générale complète des **courbes d'ordre 4**, se contentant d'écrire, en continuité de ce qui précède, l'équation formée par les termes de plus haut degré $my^4 + nxy^3 + ox^2y^2 + px^3y + qx^4 = 0$ (qu'il note Æ). Il discute des huit cas auxquels conduit l'étude des quatre racines de cette équation, toujours selon leurs nombres et leurs natures (réelles ou imaginaires), ce qui l'amène à regrouper les courbes du quatrième ordre en 9 classes, sans proposer de subdivision en genres, car l'« *énumération en est comme impossible* » (p. xix). Enfin, devant la complexité (et, sans doute, le peu d'intérêt des calculs), il n'écrit plus aucune équation ou calcul pour le cinquième ordre, se contentant d'énoncer une classification en 11 classes.

Chapitre IX, p. 369-396

Plan

Introduction

Ambitions et filiations

Le triangle analytique pour...

- ... représenter l'équation générale d'une courbe

- ... calculer le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre donné

- ... discuter du nombre de points d'intersection de deux courbes

- ... étudier les branches infinies

- ... classer les courbes

Conclusion

Et alors ?