



HAL
open science

Commande des Systèmes

Frédéric Jean

► **To cite this version:**

Frédéric Jean. Commande des Systèmes. Master. AUT201 - Commande des Systèmes, France. 2024.
hal-04417310

HAL Id: hal-04417310

<https://hal.science/hal-04417310v1>

Submitted on 25 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AUT201

Commande des Systèmes

Frédéric JEAN
ENSTA Paris

Notes de cours

Version du 1^{er} décembre 2023

Table des matières

Avant-propos	iii
1 Systèmes commandés	1
1.1 Introduction	1
1.2 Linéarisation des systèmes	3
1.3 Les systèmes linéaires autonomes	6
2 Conception de lois de commande	7
2.1 Commandabilité	7
2.2 Systèmes conjugués, forme de Brunovsky	10
2.3 Planification de trajectoires	12
2.4 Stabilisation	14
2.4.1 Rappels : équilibres et stabilité	14
2.4.2 Stabilisation par retour d'état	18
2.5 Suivi de trajectoires	19
2.6 *Compléments	20
2.6.1 Planification exacte	20
2.6.2 Cas des systèmes linéaires non autonomes	22
2.6.3 Commandabilité locale des systèmes non-linéaires	24
2.6.4 Stabilisation locale de systèmes non linéaires	25
3 Observabilité et observateurs	27
3.1 Observabilité	27
3.2 Observateur asymptotique	29
3.3 Observateur-contrôleur	30
4 Commande optimale : la théorie linéaire-quadratique	31
4.1 Existence de trajectoires optimales	32
4.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité	33
4.3 Fonction valeur et équation de Riccati	35
4.3.1 Définition de la fonction valeur	35
4.3.2 Équation de Riccati	36
4.4 Planification de trajectoires optimales	40

4.5	Problème en horizon infini	41
5	Estimation et filtre de Kalman	45
5.1	Systèmes linéaires perturbés	45
5.2	Filtre de Kalman–Bucy	46
5.3	Filtre de Kalman stationnaire	49
5.4	Lien avec la commande optimale LQ	51
A	Forme normale des systèmes commandables	55
A.1	Équations différentielles scalaires d'ordre n	55
A.2	Forme normale : cas $m = 1$	58
A.3	Forme normale : cas général	60
A.4	Démonstration du théorème 2.23	62
B	La théorie linéaire-quadratique générale (cas non autonome)	65
B.1	Existence de trajectoires optimales	66
B.2	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : principe du maximum dans le cas LQ	67
B.3	Fonction valeur et équation de Riccati	70
	B.3.1 Définition de la fonction valeur	70
	B.3.2 Equation de Riccati	70
	B.3.3 Représentation linéaire de l'équation de Riccati	74
B.4	Planification de trajectoires optimales	75
B.5	Application aux problème de régulation	76

Avertissement

Ces notes de cours ne sont que des notes de cours, pas un ouvrage exhaustif, et évoluent d'une année sur l'autre. Elles sont donc forcément incomplètes, peut-être parfois incohérentes dans les notations, probablement erronées par endroit... Aussi les commentaires, corrections et suggestions d'amélioration sont bienvenus.

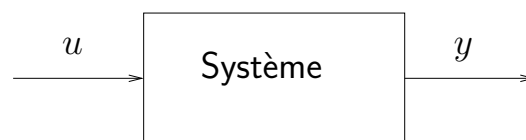
Par ailleurs j'ai emprunté de larges extraits à l'excellent livre d'Emmanuel Trélat [1] (avec son autorisation!), un grand merci à lui. J'ai aussi fait quelques emprunts à mon propre livre [2]. Enfin ce cours doit beaucoup à celui qu'a fait Nicolas Petit [3] pendant de longues années à l'ENSTA, sous divers sigles : AO202, MAP-AUT1 et 2, AUT201 et 202, et auquel j'ai collaboré en tant que chargé de TD. Je me suis en particulier beaucoup inspiré de ses feuilles d'exercices. Je lui suis très reconnaissant pour les deux (la collaboration et les exercices!).

Chapitre 1

Systemes commandés

1.1 Introduction

L'objet de l'automatique est l'étude des systèmes sur lesquels on peut agir par le biais d'une commande, le système pouvant être un système mécanique (moteur, robot, drone, satellite), un processus chimique (réacteur, colonne de distillation), un circuit électrique ou électronique, un phénomène physique, etc. D'un tel système résulte une *relation entrée/sortie* où l'*entrée* u représente la commande, c'est-à-dire le moyen d'action



sur le système, et la *sortie* y représente ce que l'on observe du système, généralement sous la forme de mesures.

Le but de l'automaticien est double :

- analyser le comportement du système, que l'on connaît via la sortie y , en fonction de l'entrée u qu'on lui impose ;
- synthétiser les lois de commande à imposer en entrée afin d'obtenir des comportements répondant à certaines spécifications.

Pour ce faire, la méthode la plus générale est d'utiliser une description interne du système, c'est-à-dire une modélisation mathématique du phénomène qu'il représente. Il s'agit de l'approche par *représentation d'état*.

Nous considérons donc que le système au temps t est décrit par son *état* $x(t)$ (*i.e.*, $x(t)$ regroupe les paramètres caractérisant le système à l'instant t), dont la sortie $y(t)$ est une fonction. Et on modélise l'évolution du vecteur $x(t)$ au cours du temps ainsi que la

dépendance de y par rapport à x par un *système commandé*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)). \end{cases}$$

Remarquons que nous avons fait ici un certain nombre d'hypothèses sur le système considéré, par exemple qu'il est *déterministe* (par opposition aux systèmes aléatoires, représentés par des équations différentielles stochastiques, abordés brièvement au chapitre 5) et en temps continu (par opposition au temps discret). D'autre part, nous nous limiterons ici au cas où les grandeurs que nous considérons, l'état, l'entrée et la sortie, sont de dimension finie. Typiquement, pour chaque instant t , $x(t)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , $u(t)$ un vecteur de \mathbb{R}^m et $y(t)$ un vecteur de \mathbb{R}^p .

Précisons enfin la signification de l'équation $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$. Une fonction $u(t)$, définie sur un intervalle $[0, T]$, avec $T > 0$, est appelée une *loi de commande*. À une loi de commande $u(\cdot)$ est associée une équation différentielle ordinaire

$$x'(t) = f_u(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

où on a noté $f_u(t, x) = f(t, x, u(t))$. Ainsi, une fonction $x(\cdot)$ est solution de l'équation différentielle commandée $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$ s'il existe une loi de commande $u(\cdot)$ telle que $x(\cdot)$ est solution de l'équation différentielle $x'(t) = f_u(t, x(t))$. Nous y revenons dans la section 1.2.

Les premières questions que l'on est amené à se poser en automatique sont les suivantes :

Commandabilité Existe-t-il une commande $u(\cdot)$ qui amène le système, initialement dans l'état $x(0)$, dans un état \bar{x} quelconque au temps $t = T$?

Planification de trajectoires Si la réponse à la question précédente est positive, comment trouver une commande $u(\cdot)$ qui amène le système d'un état initial x^0 à un état final x^1 en temps T ?

Stabilisation Comment construire une commande $u(\cdot)$ (et est-ce possible ?) qui *stabilise asymptotiquement* le système (Σ) autour d'un équilibre x_0 , c'est-à-dire telle que, pour toutes conditions initiales $x(0)$, on ait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 ?$$

Commande optimale Comment trouver la trajectoire (et la commande associée) qui minimise un certain critère (un *coût*) parmi toutes les trajectoires issues d'un état $x(0)$ (avec ou sans contrainte sur le point final) ?

Observabilité La connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ permet-elle de déterminer l'état $x(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ (ou, ce qui est équivalent, l'état initial $x(0)$) ?

Synthèse d'observateurs En cas de réponse positive à la question précédente, comment déterminer l'état $x(\cdot)$ à partir de la connaissance de $y(\cdot)$ et de $u(\cdot)$?

Estimation En présence de perturbations aléatoires dans la dynamique et les mesures, comment estimer l'état $x(\cdot)$ à partir de la connaissance de $y(\cdot)$ et de $u(\cdot)$ en minimisant l'erreur ?

Ces différentes questions n'ont pas toujours de réponses dans un cadre général. Mais nous allons voir dans la section suivante qu'il est raisonnable, au moins localement, de se restreindre à des systèmes de commande linéaires. C'est donc dans ce cadre, celui de l'*automatique linéaire*, que nous traiterons ensuite les problèmes d'analyse et de synthèse de lois de commande.

1.2 Linéarisation des systèmes

Commençons par préciser ce qu'est une solution d'un système de commande. On considère donc une équation différentielle commandée

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1.2)$$

où l'état $x(\cdot)$ est à valeurs dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , la commande $u(\cdot)$ à valeurs dans un ouvert U de \mathbb{R}^m et f est une application continue de $\Omega \times U$ dans \mathbb{R}^n . Nous nous restreignons ici aux systèmes autonomes pour simplifier la présentation, la généralisation aux équations commandées dépendant du temps étant assez aisée.

Il est important de préciser à quelle classe de fonctions appartiennent les lois de commande $u(\cdot)$. En pratique, celles-ci peuvent en effet être extrêmement irrégulières, en particulier discontinues (par exemple, si l'action sur le système est binaire, de type "tout ou rien"). La classe choisie doit donc être suffisamment large pour représenter ces comportements, et en même temps permettre d'assurer l'existence de solutions de l'équation (1.1). Nous supposons donc qu'une loi de commande $u(\cdot)$ est une fonction définie sur un intervalle $[\sigma, T]$ (pouvant dépendre de $u(\cdot)$) et à valeurs dans U , qui est *mesurable et essentiellement bornée*, c'est-à-dire dans l'espace $L^\infty([\sigma, T], U)$.

Remarque 1.1. L'introduction des espaces L^∞ , un peu abrupte, est nécessaire pour énoncer correctement les deux résultats à venir. Son utilisation se limite cependant à la présente section. De plus, le lecteur peu familier avec la théorie de la mesure peut suivre sans problème le reste de cette section en remplaçant l'espace $L^\infty([\sigma, T], U)$ par celui des fonctions de $[\sigma, T] \rightarrow U$ continues par morceaux.

Avec une telle classe de lois de commande, l'équation (1.1) ne rentre plus dans le cadre classique de l'étude des équations différentielles, en particulier, $t \mapsto f(x, u(t))$ n'est a priori pas continue. Il nous faut donc redéfinir ce qu'est une solution d'une telle équation et donner un résultat qui généralise le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Fixons une loi de commande $u(\cdot) \in L^\infty([\sigma, T], U)$. On appelle solution de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t), u(t))$ sur un sous-intervalle I de $[\sigma, T]$, une fonction lipschitzienne $x(\cdot) : I \rightarrow \Omega$ telle que

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), u(s)) ds, \quad \text{pour tous } t, t_0 \in I.$$

En particulier, la solution $x(\cdot)$ satisfait $x'(t) = f(x(t), u(t))$ pour presque tout $t \in I$. D'autre part, on dit qu'une solution est maximale si elle n'admet pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand.

Avec ces définitions, on a la généralisation suivante du théorème de Cauchy–Lipschitz, dont on pourra trouver une preuve dans [1] ou [4, Lem. 2.6.2].

Théorème 1.2 (d'existence et unicité des solutions maximales). *Supposons f de classe C^1 sur $\Omega \times U$ et fixons des données initiales $v \in \Omega$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors, pour toute commande $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, T], U)$, il existe une unique solution maximale $x(\cdot)$ de $x'(t) = f(x(t), u(t))$, définie sur un intervalle I inclus dans $[t_0, T]$ et contenant t_0 , telle que*

$$x(t_0) = v.$$

Pour simplifier, on considérera toujours des intervalles de temps de la forme $[0, T]$. Pour un point $v \in \Omega$ et une loi de commande $u(\cdot) \in L^\infty([0, T], U)$, on notera alors $x_{v, u(\cdot)}(\cdot)$ la solution maximale de

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), u(t)), \\ x(0) &= v. \end{cases}$$

On peut aussi définir une application généralisant la notion de flot : pour $t \in [0, T]$, on pose

$$\Phi_t(v, u(\cdot)) = x_{v, u(\cdot)}(t),$$

quand c'est possible, c'est-à-dire quand t appartient à l'intervalle de définition de $x_{v, u(\cdot)}(\cdot)$ (cet intervalle étant soit $[0, T]$ soit de la forme $[0, T']$, $0 < T' \leq T$).

Une fois établi le résultat d'existence et d'unicité, on peut s'intéresser à la dépendance d'une solution par rapport d'une part aux conditions initiales et d'autre part à la loi de commande. Comme pour les équations différentielles ordinaires, cette dépendance s'obtient grâce au système linéarisé.

Théorème 1.3. *Supposons f de classe C^1 sur $\Omega \times U$ et considérons une solution $\bar{x}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ de (1.2) associée à la commande $\bar{u}(\cdot) \in L^\infty([0, T], U)$. On note $\bar{v} = \bar{x}(0)$.*

Alors il existe un voisinage de $(\bar{v}, \bar{u}(\cdot))$ dans $\Omega \times L^\infty([0, T], U)$ sur lequel, pour tout temps $t \in [0, T]$, l'application Φ_t est définie. De plus Φ_t est de classe C^1 sur ce voisinage et sa différentielle est :

$$\forall (\delta v, \delta u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m), \quad D\Phi_t(\bar{v}, \bar{u}(\cdot)) \cdot (\delta v, \delta u(\cdot)) = \delta x(t),$$

où $\delta x(\cdot)$ est la solution de

$$\begin{cases} \delta x'(s) = D_x f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta x(s) + D_u f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta u(s), & s \in [0, T], \\ \delta x(0) = \delta v. \end{cases}$$

Pour une preuve, voir par exemple [4, Th. 1]. Rappelons que $D_x f(x, u)$ désigne la différentielle partielle de f par rapport à x , c'est-à-dire la différentielle de l'application partielle $x \mapsto f(x, u)$. De même $D_u f(x, u)$ désigne la différentielle partielle de f par rapport à u .

Ce théorème montre que, autour d'une solution donnée, l'étude d'une équation commandée générale se ramène à l'étude d'une équation commandée linéaire. Introduisons alors la notion de système linéarisé.

Définition 1.4. Soit $\bar{x}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega$ une solution de (1.2) associée à la commande $\bar{u}(\cdot) \in L^\infty([0, T], U)$. Le système linéaire

$$\delta x'(t) = D_x f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \delta x(t) + D_u f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \delta u(t), \quad t \in [0, T],$$

où $\delta x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état et $\delta u(t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande, est appelé *système linéarisé de (1.2) autour de $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$* .

Le théorème 1.3 s'utilise de la façon suivante : toute solution $x(t)$, $t \in [0, T]$, associée à une commande $u(\cdot)$ et proche de $\bar{x}(\cdot)$ s'écrit

$$x(t) = \bar{x}(t) + \delta x(t) + o(\|x(0) - \bar{x}(0)\|, \|u(\cdot) - \bar{u}(\cdot)\|), \quad t \in [0, T],$$

où $\delta x(\cdot)$ est la solution du système linéarisé autour de $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ associée à la condition initiale $\delta v = x(0) - \bar{x}(0)$ et à la loi de commande $\delta u(\cdot) = u(\cdot) - \bar{u}(\cdot)$.

Un cas particulier très intéressant est celui où le système est linéarisé autour d'un couple d'équilibre, c'est-à-dire d'un couple (x_0, u_0) dans $\Omega \times U$ tel que $f(x_0, u_0) = 0$. L'état x_0 est alors une solution stationnaire de (1.2) associée à la commande constante u_0 . Dans ce cas le système linéarisé de (1.2) autour de (x_0, u_0) est linéaire et autonome, *i.e.* de la forme :

$$\delta x'(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t), \quad \text{avec } A = D_x f(x_0, u_0), \quad B = D_u f(x_0, u_0).$$

Si de plus le système a une sortie $y(t) = g(x(t), u(t))$ avec g de classe C^1 , le comportement de celle-ci au voisinage de $y_0 = g(x_0, u_0)$ dépend du terme du premier ordre $\delta y(t)$, où

$$\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t), \quad \text{avec } C = D_x g(x_0, u_0), \quad D = D_u g(x_0, u_0).$$

Ainsi, quitte à linéariser autour d'un couple d'équilibre, **nous nous limiterons en général dans la suite à l'étude des systèmes commandés linéaires et autonomes.**

1.3 Les systèmes linéaires autonomes

Un système commandé linéaire autonome s'écrit sous la forme

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m,$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ sont des matrices non nécessairement carrées. L'état $x(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^n et la commande $u(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^m (*i.e.* $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $U = \mathbb{R}^m$ avec les notations de la section précédente).

Le point de départ de l'étude des systèmes linéaires autonomes est la formule *de variation de la constante*.

Proposition 1.5. *Soient $u(\cdot)$ une commande et $x^0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ valant x^0 à l'instant $t = 0$ est*

$$x(t) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

PREUVE. Poser $y(t) = e^{-tA}x(t)$ et dériver la relation $x(t) = e^{tA}y(t)$. □

Chapitre 2

Conception de lois de commande

Considérons un système commandé (Σ). Seule nous intéresse ici la relation entre l'entrée et l'état, nous n'aurons donc besoin que de l'équation différentielle commandée

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \Omega, \quad u(t) \in U. \quad (2.1)$$

La fonction $u(\cdot)$, la commande, représente le moyen d'action sur le système, elle peut être choisie librement de façon à ce que la trajectoire correspondante $x(\cdot)$ ait certaines propriétés. Comment faire ce choix ? C'est le problème de la conception des lois de commande.

Nous considérerons trois types de questions, selon le comportement désiré du système, qui se formulent comme suit. Comment construire une loi de commande $u(\cdot)$ pour que la trajectoire correspondante $x(\cdot)$ vérifie :

- $x(T) = x^1$, pour un état x^1 fixé, sachant que $x(0) = x^0$? (**planification de trajectoires**).
- $x(t) \rightarrow x^1$ fixé quand $t \rightarrow \infty$ indépendamment de $x(0)$? (**stabilisation**).
- $x(\cdot)$ reste proche d'une trajectoire de référence $x^r(\cdot)$ indépendamment de $x(0)$? (**suivi de trajectoire**).

Au préalable nous devons d'abord déterminer à quelle condition il existe des solutions à ces problèmes, c'est-à-dire des lois de commande pouvant amener le système d'un état quelconque à un autre (**commandabilité**).

Pour pouvoir traiter ces questions, **nous nous restreindrons au cas des systèmes linéaires et autonomes** mais les concepts seront introduits de façon plus générale quand ce sera possible et les cas linéaires non autonomes et non linéaires seront abordés en complément dans la section 2.6.

2.1 Commandabilité

Considérons l'équation différentielle commandée (2.1). Étant donné $x^0 \in \Omega$, on dit qu'un état $x^1 \in \Omega$ est *atteignable en temps T* à partir de x^0 si il existe une loi de commande

$u : [0, T] \rightarrow U$ telle que $x_u(T) = x^1$, $x_u(\cdot)$ étant la solution de (2.1) satisfaisant $x_u(0) = x^0$. On note $\mathcal{A}(T, x^0)$ l'ensemble des états atteignables à partir de x^0 en temps T , c'est-à-dire

$$\mathcal{A}(T, x^0) = \left\{ x(T) : \begin{array}{l} x(\cdot) \text{ solution de } (\Sigma) \\ \text{t.q. } x(0) = x^0 \end{array} \right\}.$$

Définition 2.1. On dit que le système (Σ) est *commandable en temps T* si, pour tout $x^0 \in \Omega$, on a $\mathcal{A}(T, x^0) = \Omega$, ou, de façon équivalente, si tout état de Ω est atteignable en temps T à partir de n'importe quel autre.

Restreignons nous maintenant au cas linéaire et autonome, c'est-à-dire à l'équation différentielle commandée

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m,$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ($\Omega = \mathbb{R}^n$ et $U = \mathbb{R}^m$). Nous avons vu dans la Proposition 1.5 que la solution d'un tel système s'écrit

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Notons en particulier que, si $x(0) = 0$,

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, \quad (2.2)$$

et que cette expression dépend linéairement de la loi de commande $u(\cdot)$. Ainsi l'ensemble $\mathcal{A}(T, 0)$ est un espace vectoriel, et l'ensemble $\mathcal{A}(T, x^0)$ est l'espace affine $e^{TA}x^0 + \mathcal{A}(T, 0)$. L'ensemble des points atteignables à partir de x^0 en temps T est donc complètement caractérisé par l'ensemble $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}(T, 0)$: le système est commandable en temps T si et seulement si $\mathcal{A}_T = \mathbb{R}^n$. Et il s'avère que cet ensemble \mathcal{A}_T admet une description algébrique.

Théorème 2.2. *L'espace \mathcal{A}_T est égal à l'image de la matrice $(n \times nm)$*

$$\mathcal{C} := (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B),$$

dite matrice de commandabilité.

Remarque 2.3. L'image de \mathcal{C} est l'espace vectoriel $\mathcal{R}(A, B) \subset \mathbb{R}^n$ engendré par les A^iBz , $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $z \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{R}(A, B) = \text{Vect}\{A^iBz : i = 0, \dots, n-1, z \in \mathbb{R}^m\}.$$

La première conséquence de ce résultat est que \mathcal{A}_T est indépendant du temps T . Notons que ce ne serait évidemment pas le cas si nous avions choisi des commandes bornées. La deuxième conséquence est que la dimension de \mathcal{A}_T est égale au rang de la matrice de commandabilité. On obtient ainsi un critère de commandabilité algébrique, et donc en général facile à vérifier.

Corollaire 2.4 (Critère de commandabilité de Kalman). *Le système (Σ) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est de rang n .*

Remarque 2.5. La commandabilité du système est donc caractérisée par une condition algébrique sur les matrices A et B . On dira par abus de langage que la paire (A, B) est *commandable* (ou *satisfait le critère de Kalman*) quand $\text{rang } \mathcal{C} = n$.

PREUVE DU THÉORÈME 2.2. Montrons déjà que $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{R}(A, B)$. Pour cela observons que, par définition, si v appartient à \mathcal{A}_T il existe une loi de commande $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$v = \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds.$$

Or d'après le théorème de Cayley–Hamilton, la matrice A annule son polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Comme ce polynôme est un polynôme normalisé de degré n , *i.e.* $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$, ceci implique que A^n est combinaison linéaire de I, \dots, A^{n-1} . Par conséquent, pour tout entier $i \geq 0$, A^i est combinaison linéaire de I, \dots, A^{n-1} et laisse donc invariant l'espace vectoriel

$$\mathcal{R}(A, B) = \text{Vect}\{A^i B z : i = 0, \dots, n-1, z \in \mathbb{R}^m\}.$$

D'autre part, pour tout $s \in [0, T]$, l'exponentielle $e^{(T-s)A}$ admet le développement

$$e^{(T-s)A} = I + (T-s)A + \dots + \frac{(T-s)^k A^k}{k!} + \dots$$

L'exponentielle $e^{(T-s)A}$ laisse donc également invariant l'espace $\mathcal{R}(A, B)$. Nous avons ainsi montré que $e^{(T-s)A} B u(s) \in \mathcal{R}(A, B)$ pour tout $s \in [0, T]$ et par conséquent

$$\int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds \in \mathcal{R}(A, B).$$

Ainsi $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{R}(A, B)$.

▷ Montrons l'inclusion réciproque. Il suffit pour cela de démontrer $\mathcal{A}_T^\perp \subset \mathcal{R}(A, B)^\perp$. Soit donc $w \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à \mathcal{A}_T ; le vecteur w est ainsi orthogonal à l'état \tilde{w} que l'on peut atteindre au temps T par la commande

$$u(t) = B^\top (e^{(T-t)A})^\top w.$$

La formule (2.2) montre que

$$\tilde{w} = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^\top (e^{(T-s)A})^\top w ds,$$

et, puisque $\langle \tilde{w}, w \rangle = 0$, on obtient

$$0 = \langle w, \int_0^T e^{(T-s)A} B B^\top (e^{(T-s)A})^\top w ds \rangle = \int_0^T \left((e^{(T-s)A} B)^\top w \right)^\top \left((e^{(T-s)A} B)^\top w \right) ds,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall s \in [0, T], \quad (e^{(T-s)A} B)^\top w = 0.$$

Dérivons cette égalité par rapport à s une fois, puis deux fois, ... Il vient successivement

$$(e^{(T-s)A} A B)^\top w = 0, \quad (e^{(T-s)A} A^2 B)^\top w = 0, \quad \dots \quad (e^{(T-s)A} A^{n-1} B)^\top w = 0,$$

soit, pour $s = T$,

$$B^\top w = 0, \quad \dots \quad (A^{n-1} B)^\top w = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $z \in \mathbb{R}^m$,

$$0 = \langle z, (A^j B)^\top w \rangle = \langle A^j B z, w \rangle,$$

c'est-à-dire $w \in \mathcal{R}(A, B)^\perp$. L'inclusion $\mathcal{R}(A, B) \subset \mathcal{A}_T$ est donc démontrée. \square

2.2 Systèmes conjugués, forme de Brunovsky

Pour aborder les problèmes de conception de lois de commande, il sera crucial de faire des changements de coordonnées afin de mettre le système étudié sous une forme plus simple. Étudions donc l'effet de changements de coordonnées linéaires sur les systèmes linéaires.

Définition 2.6. Les systèmes $\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$ et $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$ sont dits *conjugués* s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in GL_m(\mathbb{R})$ telles que $A_2 = P A_1 P^{-1}$ et $B_2 = P B_1 N^{-1}$. On dit aussi que (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont des *paires conjuguées*.

Autrement dit le changement linéaire de coordonnées $x_2 = P x_1$ transforme un système en l'autre : si $x_1(\cdot)$ est une trajectoire de $\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$ associée à la loi de commande $u_1(\cdot)$, alors $x_2(\cdot) = P x_1(\cdot)$ est une trajectoire de $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$ associée à la loi de commande $u_2(\cdot) = N u_1(\cdot)$.

Proposition 2.7. *Le rang de la matrice de Kalman est invariant par conjugaison, i.e.*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B_2 & A_2 B_2 & \cdots & A_2^{n-1} B_2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{pmatrix},$$

donc (A_1, B_1) est commandable si et seulement si (A_2, B_2) l'est.

PREUVE. Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} B_2 & A_2 B_2 & \cdots & A_2^{n-1} B_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^{-1} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & N^{-1} \end{pmatrix}.$$

\square

La première utilité de la conjugaison est de séparer les parties commandable et non commandable d'un système quelconque. Considérons une paire (A, B) où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.8 (Décomposition de Kalman). *La paire (A, B) est conjuguée à une paire (A', B') de la forme*

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ 0 & A'_3 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $A'_1 \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$, $B'_1 \in \mathbb{M}_{r,m}(\mathbb{R})$, r étant le rang de la matrice de Kalman de la paire (A, B) . De plus, la paire (A'_1, B'_1) est commandable.

PREUVE. Supposons que le rang r de la matrice de Kalman \mathcal{C} de la paire (A, B) est strictement plus petit que n (sinon il n'y a rien à montrer). Le sous-espace

$$F = \text{Im } \mathcal{C} = \text{Im } B + \text{Im } AB + \cdots + \text{Im } A^{n-1}B$$

est de dimension r , et d'après le théorème de Cayley–Hamilton il est clairement invariant par A . Soit G un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^n , et soient (f_1, \dots, f_r) une base de F et (f_{r+1}, \dots, f_n) une base de G . Notons P la matrice de passage de la base (f_1, \dots, f_n) à la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors, puisque F est invariant par A , on a :

$$A' = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ 0 & A'_3 \end{pmatrix},$$

et d'autre part, puisque $\text{Im } B \subset F$, on a :

$$B' = PB = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on voit facilement que le rang de la matrice de Kalman de la paire (A'_1, B'_1) est égal à celui de la paire (A, B) . \square

Un autre type de changements de coordonnées très utile est celui qui est associé aux matrices compagnes et aux formes de Brunovsky (voir Annexe A pour les détails et les preuves).

Théorème 2.9 (Forme compagne, voir lemme A.5). *Si $m = 1$ et si la paire (A, B) est commandable, alors elle est conjuguée à la paire (\tilde{A}, \tilde{B}) , où*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n.$$

La matrice \tilde{A} , aussi notée A_a où $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, est appelée forme compagne de la matrice A .

Ce théorème admet la généralisation suivante, lorsque $m > 1$ (voir le théorème A.7). Si la paire (A, B) est commandable, alors on peut la conjuguer à une paire (\tilde{A}, \tilde{B}) telle que :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{A}_s \end{pmatrix} + \tilde{B}\tilde{K}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_s \end{pmatrix},$$

où les matrices \tilde{A}_i sont des matrices sous forme compagne, $\tilde{K} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et les coefficients de chaque matrice \tilde{B}_i sont tous nuls, excepté celui de la dernière ligne, en i -ème colonne, qui est égal à 1. Nous utiliserons surtout un corollaire de ce résultat, démontré dans l'annexe A.

Théorème 2.10 (Voir Corollaire A.8). *Si le système $x' = Ax + Bu$, avec une commande u de dimension m , est commandable et si $\text{rang}(B) = m$, alors il existe un changement de coordonnées et de commande*

$$\begin{cases} z = Px, \\ v = Nu + Kx, \end{cases} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad N \in GL_m(\mathbb{R}), \quad K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

et des entiers non nuls n_1, \dots, n_m de somme $n_1 + \cdots + n_m = n$, tels que, en notant $z = (z^1, \dots, z^m)$ où $z^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, le système commandé s'écrit :

$$\dot{z}^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} z^i + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Autrement dit le changement de coordonnées et de commande met le système sous forme de Brunovsky,

$$y_1^{(n_1)} = v_1, \dots, y_m^{(n_m)} = v_m,$$

où on a noté $y_1 = z_1^1, y_2 = z_1^2, \dots, y_m = z_1^m$.

2.3 Planification de trajectoires

Le premier problème de conception de loi de commande à considérer est celui de la planification des trajectoires : étant donnés deux états $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$, trouver une loi de commande $u(t)$, $t \in [0, T]$, qui amène de l'état x^0 à l'instant 0 à l'état x^1 à l'instant T , c'est-à-dire telle que la solution de

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0,$$

vérifie $x(T) = x^1$.

Si on suppose que le critère de Kalman est satisfait, on sait qu'il existe au moins une solution à ce problème, la difficulté est d'en exhiber une.

Exemples.

(i) Soit le système commandé de dimension un, $\dot{x} = u$. Étant donnés deux réels arbitraires, x^0, x^1 , on cherche une commande u définie sur $[0, T]$ qui amène l'état de x^0 en $t = 0$ à x^1 en $t = T$. Pour cela, choisissons une fonction $y(\cdot)$ de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $y(0) = x^0$ et $y(1) = x^1$. Par exemple $y(t) = x^0 + \frac{t}{T}(x^1 - x^0)$. Il suffit alors de poser $u(\cdot) = \dot{y}(\cdot)$. La trajectoire associée issue de x^0 est bien sûr $x(\cdot) = y(\cdot)$.

(ii) Considérons maintenant le système commandé $x^{(n)} = u$, avec x, u réels. L'état du système est donc $X = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$. On se donne aussi des conditions initiales $X^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ en $t = 0$ et finales $X^1 = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_{n-1}^1)$ en $t = T$. Il suffit alors de choisir une fonction $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n telle que

$$(y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)) = X^0 \quad \text{et} \quad (y(T), \dot{y}(T), \dots, y^{(n-1)}(T)) = X^1,$$

(facile par exemple en prenant $y(t)$ polynomiale de degré $2n$) et de poser $u(\cdot) = y^{(n)}(\cdot)$ pour avoir une solution au problème de planification.

(iii) Prenons enfin un système de la forme

$$x' = A_a x + e_n u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

où A_a est une matrice compagne et e_n le n -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n , et fixons les données x^0 en $t = 0$ et x^1 en $t = T$. Remarquons que ce système peut s'écrire aussi

$$x_1^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i x_1^{(i-1)} = u \quad \text{avec} \quad x_i = x_1^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

On peut donc procéder exactement comme dans l'exemple précédent, qui correspond à $a = 0$: on choisit une fonction $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n telle que

$$(y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)) = x^0 \quad \text{et} \quad (y(T), \dot{y}(T), \dots, y^{(n-1)}(T)) = x^1,$$

et on pose $u(t) = y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(i-1)}(t)$ pour $t \in [0, T]$. Cette loi de commande $u(\cdot)$ amène bien le système de x^0 à x^1 et la trajectoire correspondante est $x(t) = (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$.

Dans le cas d'un système $\dot{x} = Ax + Bu$ commandable général, la stratégie pour résoudre le problème de planification de trajectoires est de transformer linéairement le système en un des exemples précédents.

Cas $m = 1$. Commençons par le cas où la commande u est scalaire ($m = 1$). On a vu au Théorème 2.9 qu'alors le système $\dot{x} = Ax + Bu$ est conjugué à un système de la forme (2.3). Autrement dit il existe des matrices $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in GL_m(\mathbb{R})$ telles que, si $x(\cdot)$ est une trajectoire de $\dot{x} = Ax + Bu$ associée à la loi de commande $u(\cdot)$,

alors $\tilde{x}(\cdot) = Px(\cdot)$ est une trajectoire de $\dot{\tilde{x}} = A_a\tilde{x} + e_n\tilde{u}$ associée à la loi de commande $\tilde{u}(\cdot) = Nu(\cdot)$.

Le problème de planification pour $\dot{x} = Ax + Bu$ se résoud alors très simplement, il suffit de prendre $u(\cdot) = N^{-1}\tilde{u}(\cdot)$, où $\tilde{u}(\cdot)$ est construite selon la méthode de l'exemple (iii) pour amener le système $\dot{\tilde{x}} = A_a\tilde{x} + e_n\tilde{u}$ de Px^0 à Px^1 en temps T .

Cas m quelconque. Le cas où m est quelconque se résoud de façon similaire à l'aide du théorème 2.10. En effet d'après ce théorème il existe un changement de coordonnées et commande $z = Px$, $v = Nu + Kx$ qui met le système sous forme de Brunovsky,

$$y_1^{(n_1)} = v_1, \dots, y_m^{(n_m)} = v_m.$$

Sous cette forme, le problème de planification se décompose en m problèmes à une seule commande que l'on peut résoudre comme dans l'exemple (ii). On obtient ainsi, pour chaque $i = 1, \dots, m$, une commande $v_i(\cdot)$ et une trajectoire $z^i(\cdot) = (y_i, \dots, y_i^{(n_i-1)}) (\cdot)$ dans \mathbb{R}^{n_i} , puis, en regroupant, une commande $v(\cdot) = (v_1, \dots, v_m)(\cdot)$ et une trajectoire $z(\cdot) = (z^1, \dots, z^m)(\cdot)$ qui résolvent le problème de planification entre Px^0 et Px^1 . En posant

$$u(t) = N^{-1}v(t) - N^{-1}KP^{-1}z(t), \quad t \in [0, T],$$

on obtient une solution du problème de planification pour $\dot{x} = Ax + Bu$ entre x^0 et x^1 , avec comme trajectoire $x(\cdot) = P^{-1}z(\cdot)$.

2.4 Stabilisation

Avant d'aborder la conception de lois de commande permettant de stabiliser un système, donnons quelques rappels sur les notions d'équilibre et de stabilité pour les équations différentielles (voir [2] pour une présentation complète).

2.4.1 Rappels : équilibres et stabilité

Considérons l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{2.4}$$

où le champ de vecteurs $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposé de classe C^1 .

Définition 2.11. On dit qu'un point $x_0 \in \Omega$ est un *équilibre* de (2.4) si la fonction constante $x(\cdot) \equiv x_0$ est solution de (2.4) ou, de façon équivalente, si $f(x_0) = 0$.

Quand l'équation (2.4) modélise l'évolution d'un phénomène physique (mécanique, biologique, écologique, ...), un équilibre correspond bien à la notion habituelle d'état d'équilibre : si le système est dans l'état x_0 , alors il y reste (et il y a toujours été). En pratique on sait cependant que seuls les états d'équilibre ayant certaines propriétés de stabilité sont significatifs.

Définition 2.12. Un équilibre x_0 est *stable* si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute solution $x(\cdot)$,

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \quad \text{et} \quad t > 0 \quad \implies \quad \|x(t) - x_0\| < \epsilon.$$

Ainsi, toute solution proche de x_0 en reste proche.

Définition 2.13. Un équilibre x_0 est *asymptotiquement stable* si il est stable et si il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour toute solution $x(\cdot)$ avec $x(0) \in V$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0.$$

Dans ce cas toute solution proche de l'équilibre en reste proche et en plus converge vers lui. Notons que le fait que toute solution issue d'un voisinage V converge vers x_0 n'implique pas la stabilité de cet équilibre : il existe des systèmes possédant un équilibre non stable x_0 mais dont toutes les trajectoires convergent vers x_0 .

Le cas linéaire

Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire,

$$x'(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de $\ker A$ est un équilibre). L'étude des systèmes linéaires permet de caractériser la stabilité de cet équilibre.

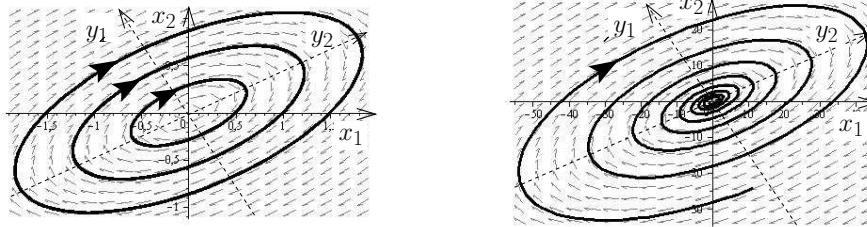
Proposition 2.14.

- *L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de $x' = Ax$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.*
- *Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de $x' = Ax$.*

Ces deux propriétés sont importantes car, comme nous allons le voir dans la section suivante, elles se généralisent au cas non linéaire. On introduit la définition suivante.

Définition 2.15. Une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *matrice de Hurwitz* si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle strictement négative.

Notons que l'origine peut être un équilibre stable mais non asymptotiquement stable. C'est une situation que l'on rencontre quand A a des valeurs propres de partie réelle nulle, par exemple quand A est antisymétrique. On a représenté figure 2.1 des portraits de phase dans \mathbb{R}^2 correspondant à une matrice antisymétrique (cas a) et une autre dont les valeurs propres ont une partie réelle < 0 (cas b).



Cas a. Équilibre stable mais non asymptotiquement stable

Cas b. Équilibre asymptotiquement stable

FIGURE 2.1 – Exemples de portraits de phase stables pour $f(x) = Ax$ avec $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Stabilité par linéarisation

Dans le cas général non linéaire, l'étude de l'équation linéarisée autour de l'équilibre permet en général de conclure sur la stabilité de cet équilibre. En effet, cette équation linéarisée s'écrit

$$\delta x'(t) = Df(x_0)\delta x(t),$$

et la stabilité de 0 pour cette équation est caractérisée par le signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice $Df(x_0)$.

Théorème 2.16. *Si la matrice $Df(x_0)$ est de Hurwitz, alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable pour (2.4).*

Remarque 2.17. Contrairement au cas des équations linéaires, la condition donnée dans ce théorème est suffisante mais pas nécessaire. Prenons par exemple l'équation $y'(t) = -y^3(t)$ dans \mathbb{R} . L'équilibre 0 ne satisfait pas la condition du théorème puisque $Df(0) = 0$. En revanche c'est un équilibre asymptotiquement stable puisque la solution valant $y_0 \neq 0$ en $t = 0$ est

$$y(t) = \frac{\text{signe}(y_0)}{\sqrt{2t + \frac{1}{y_0^2}}}, \quad t \geq 0,$$

qui est décroissante et converge vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

En complément de cette condition suffisante de stabilité asymptotique, on dispose d'une condition suffisante de non stabilité, dont on trouvera la preuve dans [5] ou [6].

Théorème 2.18. *Si $Df(x_0)$ a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'équilibre x_0 n'est pas stable.*

Remarque 2.19. Dans le cas où $n = 2$, il est très pratique d'utiliser le déterminant et la trace de $Df(x_0)$ pour caractériser le signe des parties réelles de ses valeurs propres puisque la trace est la somme et le déterminant le produit des valeurs propres. Conjugué aux deux théorèmes précédents, cela donne les critères suivant, très simples à utiliser :

- si $\det Df(x_0) < 0$, ou $\det Df(x_0) > 0$ et $\operatorname{tr} Df(x_0) > 0$, alors l'équilibre x_0 n'est pas stable ;
- si $\det Df(x_0) > 0$ et $\operatorname{tr} Df(x_0) < 0$, alors l'équilibre x_0 est asymptotiquement stable.

Il est important de noter que les réciproques des théorèmes 2.16 et 2.18 sont fausses, comme le montre l'exemple ci-dessous. La stabilité d'un équilibre n'est donc pas forcément déterminée par le linéarisé.

Exemple. Considérons deux équations différentielles dans \mathbb{R}^2 ,

$$x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \text{ et } x' = g(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix},$$

où $x = (x_1, x_2)$. Ces deux équations ont pour unique équilibre 0. Leurs linéarisés en 0 sont égaux,

$$Df(0) = Dg(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et ont pour valeurs propres $\pm i$, dont la partie réelle est évidemment nulle ! Cependant l'équilibre 0 est asymptotiquement stable dans le premier cas alors qu'il n'est pas stable dans le deuxième.

En effet, posons $\rho(x) = x_1^2 + x_2^2$. Si $x(\cdot)$ est une solution de l'équation $x' = f(x)$, alors

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t)) = 2(x_1x_1' + x_2x_2') = -2\rho^2(x(t)).$$

Ainsi $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2$ est décroissant et tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui implique que 0 est asymptotiquement stable pour l'équation $x' = f(x)$.

De même, si $x(\cdot)$ est une solution de l'équation $x' = g(x)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t)) = 2\rho^2(x(t)).$$

Dans ce cas, $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2$ tend vers l'infini (et le fait même en temps fini, phénomène d'explosion), ce qui implique que l'équilibre 0 n'est pas stable pour l'équation $x' = g(x)$.

Fonctions de Lyapunov

Il existe une autre approche que la linéarisation pour obtenir des résultats de stabilité.

Définition 2.20. Soient x_0 un équilibre de (2.4), $U \subset \Omega$ un voisinage de x_0 et $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que L est une *fonction de Lyapunov* pour (2.4) en x_0 si :

- (a) $L(x) > L(x_0)$ pour $x \in U$, $x \neq x_0$ (x_0 est un minimum strict de L sur U);
 (b) pour toute solution $x(\cdot)$ telle que $x(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$, la fonction $t \mapsto L(x(t))$ est décroissante.

Si de plus L satisfait

- (c) pour toute solution $x(\cdot) \neq x_0$ telle que $x(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$, la fonction $t \mapsto L(x(t))$ est strictement décroissante,

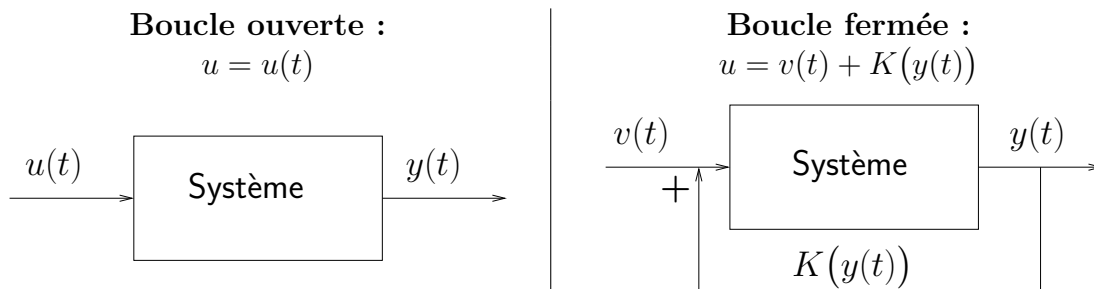
on dit que L est une fonction de Lyapunov *stricte* pour (2.4) en x_0 .

Théorème 2.21. *Si l'équation différentielle (2.4) admet un fonction de Lyapunov en un équilibre x_0 , alors x_0 est un équilibre stable. Si de plus la fonction de Lyapunov est stricte, alors x_0 est asymptotiquement stable.*

2.4.2 Stabilisation par retour d'état

Nous avons utilisé jusqu'à maintenant des lois de commande $u(t)$ dépendant uniquement du temps. C'est ce que l'on appelle de la *commande en boucle ouverte* : la loi de commande est fixée au départ, à $t = 0$, et est appliquée indépendamment du comportement du système. En particulier le problème de la planification de trajectoires, dont la solution est donnée par le théorème 2.25, se pose en terme de commande en boucle ouverte. Les limitations de ce type de loi de commande sont cependant assez évidentes : la moindre erreur sur les données (la condition initiale par exemple) ne pourra être prise en compte. Par exemple une commande en boucle ouverte sur une voiture donnerait ceci : pour suivre une ligne droite, positionnez vos roues dans l'axe, tenez bien votre volant, et fermez les yeux. . .

Pour réguler le système, il faut faire appel à un autre type de loi de commande $u(t) = v(t) + K(y(t))$, dite *commande en boucle fermée*, qui tient compte à tout moment de l'information disponible en sortie pour déterminer la commande.



Généralement, les commandes en boucle fermée que l'on utilise dépendent directement de l'état du système : $u(t) = v(t) + K(x(t))$. On parle alors de commande *par retour d'état*. Notez que ces lois ont aussi leur inconvénient : elles nécessitent la connaissance de l'état $x(t)$, ce qui peut être impossible, ou très coûteux. Nous reviendrons sur ce point dans la section 3.3.

Intéressons-nous maintenant au problème de la stabilisation d'un système commandé (Σ) : le but est de construire une loi de commande par retour d'état qui amène le système à l'origine, quel que soit le point de départ. Comme dans les sections précédentes, nous nous plaçons dans le cadre des systèmes linéaires autonomes, autrement dit, (Σ) se réduit à l'équation différentielle commandée

$$(\Sigma) : \quad x'(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Définition 2.22. Le système commandé (Σ) est dit *asymptotiquement stabilisable* par retour d'état s'il existe une loi de commande $u(t) = K(x(t))$ telle que l'origine soit un équilibre globalement asymptotiquement stable de l'équation différentielle

$$x'(t) = Ax(t) + BK(x(t)),$$

appelée *équation ou système bouclé*. Autrement dit, toute solution $x(t)$ de cette équation bouclée tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ indépendamment de la condition initiale.

Nous allons chercher le retour d'état sous la forme d'une fonction linéaire de l'état, c'est-à-dire $u(t) = Kx(t)$ avec $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (une telle loi est appelée *loi proportionnelle*). Dans ce cas, l'équation différentielle dont il faut montrer la stabilité asymptotique (*i.e.* le système bouclé) est

$$x'(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t).$$

Or d'après la proposition 2.14 une telle équation différentielle admet 0 pour équilibre asymptotiquement stable si et seulement si la matrice $A + BK$ a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives. Existe-t-il $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A + BK$ satisfasse cette condition? Le résultat d'algèbre linéaire suivant, dont nous donnons la démonstration en annexe en A.4, permet de répondre à cette question.

Théorème 2.23 (de placement des pôles). *Si la paire (A, B) satisfait le critère de Kalman, alors, pour tout réel ρ , il existe une matrice $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que toute valeur propre de $A + BK$ a une partie réelle inférieure à ρ .*

Par conséquent, si un système (Σ) est commandable, il existe une matrice $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que toutes les valeurs propres de $A + BK$ ont une partie réelle négative.

Corollaire 2.24. *Si le système (Σ) est commandable, il est asymptotiquement stabilisable par retour d'état proportionnel.*

2.5 Suivi de trajectoires

Le problème du suivi de trajectoire est le suivant. Considérons un système de contrôle linéaire

$$(\Sigma) : \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

et supposons que l'on ait déjà déterminé une trajectoire de référence $x^r(\cdot)$, associée à la loi de commande $u^r(\cdot)$, que l'on souhaite suivre. L'objectif est de suivre cette trajectoire.

Si $x(0) = x^r(0)$, il suffit d'appliquer la commande $u^r(\cdot)$ pour que la solution du système (Σ) soit exactement $x_r(\cdot)$. En revanche si $x(0) \neq x^r(0)$ ce ne sera pas le cas. Plus généralement, en pratique (Σ) est une modélisation du phénomène qui nous intéresse, et n'en représente qu'une approximation, aussi fidèle soit elle. Il n'est donc pas raisonnable de considérer que $x(0)$ est exactement égal à $x^r(0)$, ni que la solution correspondante à la commande $u^r(\cdot)$ va être exactement $x^r(\cdot)$. Il est donc nécessaire de modifier la commande pour assurer que le système suive aussi bien que possible la trajectoire de référence.

Introduisons l'erreur $\Delta x(t) = x(t) - x^r(t)$, $t \in [0, T]$, entre la trajectoire réelle et la référence. De même on note $\Delta u(t) = u(t) - u^r(t)$. Pour résoudre le problème de suivi il suffit donc de trouver une commande qui fasse tendre Δx vers 0. Or, comme $\dot{x}^r(t) = Ax^r(t) + Bu^r(t)$, on obtient

$$\dot{\Delta x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t).$$

Pour faire tendre Δx vers 0, on est donc ramené au problème de la stabilisation en 0 du système ci-dessus. On a vu à la section 2.4.2 qu'il suffit de choisir une matrice K telle que $A + BK$ est Hurwitz et poser $\Delta u(t) = K\Delta x(t)$. La commande résultante,

$$u(t) = u^r(t) + K(x(t) - x^r(t)),$$

permet donc d'assurer le suivi de la consigne $x^r(\cdot)$: quelle que soit la condition initiale $x(0)$, la trajectoire de (Σ) associée à cette commande va converger exponentiellement vers la trajectoire de référence. Notez que ce problème de suivi s'insère dans le problème plus général de la régulation (section B.5), ce qui donne un moyen de choisir quantitativement la matrice K .

2.6 *Compléments

2.6.1 Planification exacte

Nous avons vu section 2.3 comment résoudre le problème de la planification des trajectoires à l'aide des formes de Brunovsky. Il existe cependant aussi une résolution directe, que nous présentons ci-dessous, que l'on obtient à partir de la preuve du théorème de Kalman. Cette méthode, certes élégante, est cependant peu applicable en pratique, le calcul et l'inversion de la matrice grammienne G pouvant être très coûteux.

Théorème 2.25. *Soit G la matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme*

$$G = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^\top (e^{(T-s)A})^\top ds,$$

appelée matrice grammienne du système. Alors

$$\text{Im } G = \mathcal{A}_T.$$

De plus, si (Σ) est commandable, alors G est bijective et la commande $\bar{u}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$\bar{u}(s) = (e^{(T-s)A}B)^\top G^{-1}v,$$

amène le système de l'état $x(0) = 0$ au temps $t = 0$ à l'état $x(T) = v$ au temps $t = T$.

PREUVE. Montrons déjà le premier point. Pour $w \in \mathbb{R}^n$,

$$Gw = \int_0^T e^{(T-s)A}BB^\top(e^{(T-s)A})^\top w ds = \int_0^T e^{(T-s)A}Bu_w(s)ds,$$

où on a posé

$$u_w(s) = B^\top(e^{(T-s)A})^\top w. \quad (2.5)$$

La formule (2.2) montre alors que $\text{Im } G$ est l'ensemble des états atteignables au temps T par des commandes de la forme (2.5). Mais dans la démonstration du théorème 2.2, nous avons justement démontré que l'orthogonal de cet ensemble est inclus dans l'orthogonal de $\mathcal{R}(A, B)$. Par conséquent

$$\mathcal{R}(A, B) \subset \text{Im } G.$$

Mais $\text{Im } G \subset \mathcal{A}_T$ et comme, d'après le théorème 2.2, $\mathcal{A}_T = \mathcal{R}(A, B)$, on a

$$\text{Im } G = \mathcal{R}(A, B).$$

▷ Le deuxième point est une conséquence de ce qui précède. □

La commande $\bar{u}(\cdot)$ jouit en outre d'une propriété remarquable, celle de minimiser un coût.

Théorème 2.26. *Si $u(\cdot)$ est une commande qui amène le système de l'état $x(0) = 0$ en $t = 0$ à $x(T) = v$ en $t = T$, on a*

$$\int_0^T \|u(s)\|^2 ds \geq \int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 ds.$$

En d'autres termes, la commande $\bar{u}(\cdot)$ est celle qui minimise l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(s)\|^2 ds.$$

Ce résultat est un premier pas en direction d'un domaine tenant à la fois de l'automatique et de l'optimisation, la *théorie de la commande optimale*. On y reviendra plus loin dans le chapitre 4.

PREUVE. Calculons

$$\begin{aligned} E(\bar{u} + (u - \bar{u})) &= E(\bar{u}) + \int_0^T \langle (e^{(T-s)A}B)^\top G^{-1}v, u(s) - \bar{u}(s) \rangle ds + E(u - \bar{u}) \\ &= E(\bar{u}) + \int_0^T \langle G^{-1}v, e^{(T-s)A}B(u(s) - \bar{u}(s)) \rangle ds + E(u - \bar{u}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme les trajectoires associées aux commandes $u(\cdot)$ et $\bar{u}(\cdot)$ ont les mêmes extrémités 0 et v , on a, d'après la proposition 1.5,

$$\int_0^T e^{(T-s)A}B(u(s) - \bar{u}(s)) ds = 0;$$

par conséquent pour tout u du type considéré

$$E(u) \geq E(\bar{u}).$$

□

2.6.2 Cas des systèmes linéaires non autonomes

Considérons maintenant un système commandé linéaire mais non autonome, qui s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où, pour tout $t \in [0, T]$, $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B(t) \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et la dépendance en t de A et B est L^∞ sur $[0, T]$. La commande $u(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^m et est elle aussi L^∞ .

Définition 2.27. Pour $t_0 \in [0, T]$, la fonction $t \mapsto R_A(t, t_0)$ de $[0, T]$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme l'unique solution $M(\cdot)$ de l'équation différentielle matricielle

$$\begin{cases} M'(t) &= A(t)M(t), \quad t \in [0, T], \\ M(t_0) &= I. \end{cases}$$

La matrice $R_A(t, t_0)$ est appelée *résolvante entre t_0 et t de $A(\cdot)$* .

La résolvante possède les propriétés suivantes (voir [2, chap. 3] pour plus de détails).

- Pour tous $t, t_0 \in [0, T]$ la matrice $R_A(t, t_0)$ est inversible et $R_A(t, t_0)^{-1} = R_A(t_0, t)$.
- Toute solution de l'équation différentielle $x'(t) = A(t)x(t)$ vérifie

$$x(t) = R_A(t, t_0)x(t_0), \quad \text{pour tous } t, t_0 \in [0, T].$$

- Pour tous t_0, t_1, t_2 dans $[0, T]$,

$$R_A(t_2, t_0) = R_A(t_2, t_1) R_A(t_1, t_0).$$

La formule de la *de variation de la constante* pour les équations non autonomes prend la forme suivante.

Proposition 2.28. Soient $u(\cdot)$ une commande, $t_0 \in [0, T]$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x^0,$$

admet une unique solution notée $x_u(\cdot)$. Cette solution est définie sur $[0, T]$ et vérifie :

$$x_u(t) = R_A(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t R_A(t, s)B(s)u(s) ds.$$

PREUVE. Poser $y(t) = R_A(t, t_0)^{-1}x_u(t)$ et dériver la relation $x_u(t) = R_A(t, t_0)y(t)$. \square

... conditions suffisantes de commandabilité (à compléter avec les preuves)...

On a un premier résultat de commandabilité qui généralise le théorème 2.25.

Théorème 2.29. Le système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est commandable en temps T (depuis un point initial quelconque) si et seulement si la matrice

$$G(T) = \int_0^T R_A(T, s)B(s)B(s)^\top R_A(T, s)^\top ds,$$

dite matrice grammienne du système, est inversible.

Et un deuxième qui ressemble plutôt au critère de Kalman.

Théorème 2.30. Considérons le système

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

où les applications A, B sont de classe C^∞ sur $[0, T]$. Définissons par récurrence

$$B_0(t) = B(t), \quad B_{i+1}(t) = A(t)B_i(t) - \frac{dB_i}{dt}(t).$$

(i) S'il existe $t \in [0, T]$ tel que

$$\text{Vect}\{B_i(t)v : v \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n,$$

alors le système est commandable en temps T .

(ii) Si de plus les applications A, B sont analytiques sur $[0, T]$, alors le système est commandable en temps T si et seulement si

$$\forall t \in [0, T], \quad \text{Vect}\{B_i(t)v : v \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n.$$

2.6.3 Commandabilité locale des systèmes non-linéaires

Pour un système non linéaire, on peut donner une condition suffisante de commandabilité locale à partir du système linéarisé. Cette condition est présentée sous forme d'un exercice.

Exercice.

Rappelons un résultat vu précédemment : si le système

$$x' = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

est commandable, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ il existe un *unique* contrôle $u_w(\cdot)$ de la forme

$$u_w(s) = B^\top (e^{A(T-s)})^\top w, \quad s \in [0, T],$$

avec $|w| \leq C|v|$, qui amène de l'état $x(0) = 0$ à l'état $x(T) = v$.

Notons $B_n(0, 1)$ la boule de \mathbb{R}^n de centre 0 et de rayon 1 et considérons une application de classe C^1

$$f : B_n(0, 1) \times B_m(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) \longmapsto f(x, u),$$

telle que $f(0, 0) = 0$. On pose

$$\begin{cases} A = D_x f(0, 0) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \\ B = D_u f(0, 0) \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $|w| \leq \delta$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x, u_w), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admet une solution unique sur $[0, T]$.

2. Notons ϕ l'application :

$$\begin{aligned} \{w \in \mathbb{R}^n, |w| \leq \delta\} &\longrightarrow C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \\ w &\longmapsto \text{la solution de (1.)} \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est de classe C^1 et calculer $D\phi(w = 0)$.

3. Montrer que si la paire (A, B) est commandable alors il existe un $\tilde{\delta} > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| \leq \tilde{\delta}$ il existe un contrôle $u_w(s)$ défini sur $[0, T]$ tel que la solution de (1.) vérifie $x(T) = v$.

4. En déduire le résultat suivant.

Soit un système $\dot{x} = f(x, u)$ dans \mathbb{R}^n tel que $f(0, 0) = 0$. Si le linéarisé autour de la solution identiquement nulle est commandable, alors le système est commandable dans un voisinage de 0.

2.6.4 Stabilisation locale de systèmes non linéaires

Stabilisation par linéarisation, à écrire...

Chapitre 3

Observabilité et observateurs

3.1 Observabilité

Considérons à nouveau un système commandé linéaire autonome

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad t \in [0, T],$$

avec $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_{p,m}(\mathbb{R})$. Le problème de l'*observabilité* est le suivant : connaissant $y(t)$ et $u(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ ($T > 0$), est-il possible de déterminer $x(t)$ pour tout t ?

Commençons par rappeler que, d'après la formule de variation de la constante, on a

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

La commande $u(\cdot)$ étant supposée connue, le deuxième terme du membre de droite de l'égalité précédente est connu également, donc la connaissance de $x(0)$ est équivalente à celle de $x(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Appelons *espace d'inobservabilité* \mathcal{I}_T du système (Σ) l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{I}_T = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : Ce^{tA}x_0 \equiv 0\}.$$

Définition 3.1. Le système commandé (Σ) est dit *observable* si son espace d'inobservabilité est réduit à $\{0\}$.

Le résultat élémentaire suivant montre que cette définition correspond bien à la question que l'on s'était posée initialement.

Proposition 3.2. Si le système (Σ) est observable, la connaissance de $y(\cdot)$ et $u(\cdot)$ détermine de façon univoque $x(\cdot)$.

PREUVE. Considérons deux trajectoires $x(\cdot)$ et $\tilde{x}(\cdot)$ correspondant à la même entrée $u(\cdot)$ et à la même sortie $y(\cdot)$. En exprimant l'égalité entre les sorties et en utilisant la variation de la constante, on obtient, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} C \left(e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \right) + Du(t) \\ = C \left(e^{tA}\tilde{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \right) + Du(t), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $Ce^{tA}(x(0) - \tilde{x}(0)) = 0$, c'est-à-dire $x(0) - \tilde{x}(0) \in \mathcal{I}_T$. D'après la définition de l'observabilité, ceci implique $x(0) = \tilde{x}(0)$, et donc $x(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$. \square

Il existe un critère très simple permettant de déterminer si un système est observable.

Théorème 3.3 (Critère d'observabilité de Kalman). *L'espace d'inobservabilité \mathcal{I}_T du système (Σ) est égal au noyau de la matrice $(np \times n)$*

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, le système (Σ) est observable si et seulement si $\ker \mathcal{O} = \{0\}$. On dit alors que la paire (A, C) est observable.

PREUVE. D'après le théorème de Cayley–Hamilton (c'est un argument que nous avons déjà utilisé dans la démonstration du théorème 2.2), pour tout $t \in [0, T]$,

$$Ce^{tA} \in \text{Vect}(C, CA, \dots, CA^{n-1}).$$

Par conséquent, si

$$CA^j v = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (3.1)$$

on a $Ce^{tA}v = 0$, c'est-à-dire que v est dans l'espace d'inobservabilité de (Σ) . Mais la condition (3.1) est équivalente au fait que $v \in \ker \mathcal{O}$. Nous avons donc démontré que $\ker \mathcal{O}$ est inclus dans l'espace d'inobservabilité de (Σ) .

\triangleright Réciproquement, supposons que pour tout $t \in [0, T]$, $Ce^{tA}v = 0$. Alors, en dérivant j fois l'égalité précédente en $t = 0$ ($0 \leq j \leq n-1$), il vient

$$\forall 0 \leq j \leq n-1, CA^j v = 0,$$

ce qui signifie que $v \in \ker \mathcal{O}$. L'inclusion réciproque est démontrée. \square

Remarque 3.4. Si l'on compare le théorème précédent avec le théorème 2.2 on s'aperçoit que le système (Σ) est observable si et seulement si le système dual

$$(\tilde{\Sigma}) : \quad z'(t) = A^\top z(t) + C^\top u(t)$$

est commandable (prendre la transposée de la matrice \mathcal{O}). Autrement dit,

la paire (A, C) est observable si et seulement si la paire (A^\top, C^\top) est commandable.

3.2 Observateur asymptotique

Motivation : supposons que le système $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, soit observable. Le but est de construire un *observateur asymptotique* $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$, i.e. une fonction dynamique $\hat{x}(\cdot)$ de l'observable $y(\cdot)$, telle que $\hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. L'idée est de copier la dynamique du système observé et d'y ajouter un terme correctif qui tient compte de l'écart entre la prédiction et la réalité.

Définition 3.5. Un *observateur asymptotique* (ou *observateur de Luenberger*) $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$ est une solution d'un système du type

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad (3.2)$$

où $L \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée *matrice de gain*, telle que

$$\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \hat{x}(t) - x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque 3.6. Il est important de comprendre que l'observateur $\hat{x}(\cdot)$ est une fonction que l'on construit. On peut le voir comme un logiciel : une fois choisis les paramètres (la matrice L , la condition initiale $\hat{x}(0)$), le logiciel prend comme entrées les fonctions $y(t), u(t)$ et calcule $\hat{x}(t)$ en intégrant l'équation différentielle (3.2).

Remarque 3.7. Le terme $y(t) - C\hat{x}(t)$ utilisé pour modifier la dynamique est appelé *innovation*. C'est la différence entre la sortie mesurée, $y(t) = Cx(t)$, et la sortie prédite par l'observateur, $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$.

Introduisons $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, l'erreur entre la prédiction $\hat{x}(\cdot)$ et l'état réel $x(\cdot)$. Cette erreur satisfait une équation différentielle linéaire,

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t),$$

et donc $e(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ pour toute valeur initiale $e(0)$ si et seulement si la matrice $A - LC$ est Hurwitz. Construire un observateur asymptotique revient donc à déterminer une matrice de gain L telle que $A - LC$ soit Hurwitz.

Théorème 3.8 (Théorème de placement des pôles de l'observateur). *Si la paire (A, C) est observable, alors le système admet un observateur asymptotique (i.e. on peut construire une matrice de gains L telle que $A - LC$ soit Hurwitz).*

PREUVE. La paire (A^\top, C^\top) étant commandable, d'après le théorème de placement de pôles il existe une matrice L^\top telle que la matrice $A^\top - C^\top L^\top$ soit Hurwitz. \square

3.3 Observateur-contrôleur

On a vu comment construire :

- un contrôleur (retour d'état) pour un système commandable,
- un observateur asymptotique pour un système observable.

Il semble naturel, pour un système commandable et observable, de chercher à construire un contrôleur comme une fonction de l'observateur asymptotique et non directement de l'état : c'est l'étape de *synthèse observateur-contrôleur*.

Définition 3.9. On appelle *retour dynamique de sortie*, ou *observateur-contrôleur*, le contrôle $u = K\hat{x}$, où

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}).$$

Théorème 3.10 (Théorème de stabilisation par retour dynamique de sortie). *Si le système $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, est commandable et observable, alors il est stabilisable par retour dynamique de sortie, i.e. il existe des matrices de gain $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telles que les matrices $A + BK$ et $A - LC$ soient Hurwitz, et alors le système bouclé*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= (A + BK)\hat{x} + L(y - C\hat{x})\end{aligned}$$

est asymptotiquement stable.

PREUVE. Posons $e = \hat{x} - x$. Alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix},$$

et donc ce système est asymptotiquement stable si et seulement si les matrices $A + BK$ et $A - LC$ sont Hurwitz, ce qui est possible avec les propriétés de commandabilité et d'observabilité. \square

Remarque 3.11. Le fait que la tâche de stabilisation se résolve indépendamment de celle de reconstruction porte le nom de *principe de séparation*.

Suivi de consigne

... A faire...

Chapitre 4

Commande optimale : la théorie linéaire-quadratique

Ce chapitre est une introduction à la commande optimale. On se restreint pour cette introduction aux systèmes de contrôle linéaires autonomes avec un coût quadratique, un cas d'une grande importance pratique. Une présentation plus générale incluant le cas non autonome est présentée en annexe au chapitre B.

Nous considérons donc un système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n avec condition initiale donnée,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \quad (4.1)$$

À chaque commande $u = u(\cdot)$ est associée une unique trajectoire de 4.1 que nous noterons $x_u = x_u(\cdot)$. On se donne aussi une fonction permettant de mesurer le "coût" d'une commande (coût qui peut être économique, énergétique, etc). On considère ici un coût quadratique du type :

$$C(u) = x_u(T)^\top Q x_u(T) + \int_0^T (u(t)^\top U u(t) + x_u(t)^\top W x_u(t)) dt,$$

où $T > 0$ est fixé et :

- $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive ;
- $W, Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices symétriques (semi-définies) positives.

Le coût $C(u)$ étant quadratique, il est naturel de se restreindre aux lois de commande dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, les seules pour lesquelles $C(u)$ peut être fini. Le problème de contrôle optimal est alors le problème d'optimisation suivant.

Problème LQ (linéaire-quadratique) Déterminer la commande $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ qui minimise $C(u)$, *i.e.* solution de

$$\inf \{C(u) : u \text{ fonction } L^2 \text{ de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}^m\}.$$

On dira qu'une solution u de ce problème de minimisation, si elle existe, est une *commande optimale* (ou *minimisante*) et la trajectoire x_u associée une *trajectoire optimale* (ou *minimisante*).

Notons que l'on n'impose aucune contrainte sur le point final $x(T)$, contrairement à ce qui sera fait pour la planification de trajectoires optimales section 4.4.

Remarque 4.1. Les matrices symétriques Q, W, U sont des matrices de *pondération* et doivent donc être positives. Comme nous le verrons dans la section suivante le fait que U soit de plus définie positive est crucial pour l'existence et l'unicité, c'est cette propriété qui assure la coercivité et la stricte convexité de la fonction C . En revanche les matrices Q et W ne sont pas nécessairement définies, par exemple si $Q = 0$ et $W = 0$ alors la commande $u = 0$ est toujours optimale.

Remarque 4.2. On a supposé pour alléger les notations que le temps initial est égal à 0. Cependant ce temps initial ne joue aucun rôle particulier, il est facile de vérifier que tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle $[t_0, T]$, avec des contrôles dans l'espace $L^2([t_0, T], \mathbb{R}^m)$. Ce sera utilisé dans la section 4.3.

4.1 Existence de trajectoires optimales

Théorème 4.3. *Il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.*

PREUVE. On va utiliser un résultat classique d'analyse fonctionnelle (voir par exemple le cours ANA201 [7] ou [8]) :

Soient E un espace de Banach réflexif, \mathcal{C} un convexe non vide fermé de E , et $F : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement, non identiquement égale à $+\infty$ et strictement convexe. Si F est "infinie à l'infini", alors elle admet un unique minimum sur \mathcal{C} .

Pour montrer le théorème 4.3 il suffit donc de montrer que la fonction $F = C$ définie sur $E = \mathcal{C} = L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, qui est un espace de Hilbert donc un Banach réflexif, vérifie les hypothèses du résultat ci-dessus.

▷ C est une fonction finie et continue sur $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ (elle est même C^∞). Cela résulte d'une part du fait que C est quadratique en $u(\cdot)$ et $x_u(\cdot)$ et d'autre part de l'expression de $x_u(\cdot)$ en fonction de $u(\cdot)$ donnée par la formule de variation de la constante (Lemme 1.5),

$$x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds. \quad (4.2)$$

▷ C est "infinie à l'infini" car, U étant définie positive, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ on a $v^\top Uv \geq cv^\top v$, et donc, pour tout $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$,

$$C(u) \geq \int_0^T u(t)^\top Uu(t)dt \geq c \int_0^T u(t)^\top u(t)dt = c\|u\|_{L^2}^2.$$

▷ C est strictement convexe. En effet, remarquons d'abord que la fonction $f(u) = u^\top U u$ définie sur \mathbb{R}^m est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice U est symétrique définie positive. Ensuite, d'après (4.2) l'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)$ est affine, ceci pour tout $t \in [0, T]$. Or la matrice W étant symétrique positive, ceci implique que l'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)^\top W x_u(t)$ est convexe (la composée d'une fonction convexe avec une fonction affine est convexe). On raisonne de même pour le terme $x_u(T)^\top Q x_u(T)$. Enfin, l'intégration respectant la convexité, on a bien que le coût est strictement convexe en u . \square

4.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Théorème 4.4. *Une trajectoire x de (4.1) est optimale pour le problème LQ si et seulement le contrôle associé u satisfait*

$$u(t) = U^{-1} B^\top p(t), \quad (4.3)$$

où le vecteur adjoint $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est la solution de

$$\dot{p}(t) = -A^\top p(t) + W x(t) \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T], \quad (4.4)$$

ayant pour condition finale

$$p(T) = -Q x(T). \quad (4.5)$$

PREUVE. Il est aisé de vérifier que le coût $C(\cdot)$ est une fonction différentiable sur $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ (elle est même analytique) au sens de Fréchet. Un contrôle minimisant u vérifie donc nécessairement

$$dC(u) = 0.$$

Calculons cette différentielle en un contrôle u . Il faut donc faire un développement limité de $C(\tilde{u})$ où

$$\tilde{u}(t) = u(t) + \delta u(t)$$

est une perturbation du contrôle u dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Notons x la trajectoire associée à u sur $[0, T]$, \tilde{x} celle associée à \tilde{u} et $\delta x = \tilde{x} - x$ la différence. En tenant compte du fait que Q , W et U sont symétriques dans le développement de

$$C(\tilde{u}) = \tilde{x}(T)^\top Q \tilde{x}(T) + \int_0^T (\tilde{u}(t)^\top U \tilde{u}(t) + \tilde{x}(t)^\top W \tilde{x}(t)) dt$$

sous la forme $C(\tilde{u}) = C(u) + dC(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|_{L^2})$, on déduit que

$$\frac{1}{2} dC(u) \cdot \delta u = x(T)^\top Q \delta x(T) + \int_0^T (x(t)^\top W \delta x(t) + u(t)^\top U \delta u(t)) dt. \quad (4.6)$$

▷ Introduisons maintenant le vecteur adjoint $p(t)$ comme solution du problème de Cauchy suivant :

$$\dot{p}(t) = -A^\top p(t) + Wx(t), \quad p(T) = -Qx(T).$$

La formule de variation de la constante nous conduit à

$$p(t) = e^{-tA^\top} p(0) + \int_0^t e^{(s-t)A^\top} Wx(s) ds$$

pour tout $t \in [0, T]$, où

$$p(0) = -e^{TA^\top} Qx(T) - \int_0^T e^{sA^\top} Wx(s) ds.$$

▷ Revenons alors à l'équation (4.6). Remarquons d'abord que, puisque $\tilde{x}(0) = x(0) = x_0$, la différence $\delta x = \tilde{x} - x$ vérifie, d'après la formule de variation de la constante (Lemme 1.5),

$$\delta x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B \delta u(s) ds \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)^\top W \delta x(t) dt &= \int_0^T x(t)^\top W e^{tA} \left(\int_0^t e^{-sA} B \delta u(s) ds \right) dt \\ &= \left(\int_0^T x(s)^\top W e^{sA} ds \right) \left(\int_0^T e^{-sA} B \delta u(s) ds \right) \\ &\quad - \int_0^T \left(\int_0^t x(s)^\top W e^{sA} ds \right) e^{-tA} B \delta u(t) dt. \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^t x(s)^\top W e^{(s-t)A} ds = p(t)^\top - p(0)^\top e^{-tA},$$

et d'après l'expression de $p(0)$ on arrive à :

$$\int_0^T x(t)^\top W \delta x(t) dt = -x(T)^\top Q \int_0^T e^{(T-t)A} B \delta u(t) dt - \int_0^T p(t)^\top B \delta u(t) dt.$$

Injectons cette égalité dans (4.6), en tenant compte du fait que :

$$x(T)^\top Q \delta x(T) = x(T)^\top Q \int_0^T e^{(T-t)A} B \delta u(t) dt.$$

On trouve alors

$$\frac{1}{2} dC(u) \cdot \delta u = \int_0^T (u(t)^\top U - p(t)^\top B) \delta u(t) dt. \quad (4.7)$$

▷ Soit u un contrôle optimal. Alors pour tout $\delta u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ on a $dC(u) \cdot \delta u = 0$. L'expression (4.7) implique donc que, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$u(t)^\top U - p(t)^\top B = 0,$$

ce qui implique bien la conclusion souhaitée.

▷ Réciproquement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant (4.4) et (4.5) et si le contrôle u est donné par (4.3), alors il est bien clair d'après le raisonnement précédent que

$$dC(u) = 0.$$

Or C étant strictement convexe ceci implique que u est un minimum global de C . \square

Remarque 4.5. Définissons la fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(x, p, u) = p^\top (Ax + Bu) - \frac{1}{2}(x^\top Wx + u^\top Uu)$$

Alors les équations données par le principe du maximum LQ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^\top p + Wx, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

puisque $p^\top B - u^\top U = 0$. Ceci annonce le principe du maximum de Pontryagin général (systèmes non linéaires et coût quelconque), qui dit en gros qu'une trajectoire optimale avec son vecteur adjoint doit satisfaire une équation hamiltonienne et que chaque valeur du contrôle maximise le hamiltonien. Mais ici dans le cas LQ on peut dire mieux : d'une part le principe du maximum LQ est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, grâce à la théorie de Riccati que nous allons voir maintenant.

4.3 Fonction valeur et équation de Riccati

4.3.1 Définition de la fonction valeur

Soient $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. À ces données est associé un problème LQ : minimiser le coût quadratique

$$C(u) = x_u(T)^\top Qx_u(T) + \int_0^T (u(t)^\top Uu(t) + x_u(t)^\top Wx_u(t)) dt, \quad (4.8)$$

pour $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, où x_u est la trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4.9)$$

Pour T fixé, on définit le coût minimal comme une fonction de l'état initial x_0 .

Définition 4.6. La fonction valeur S_T au point x_0 est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ. Autrement dit,

$$S_T(x_0) = \inf\{C(u) \mid u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m), x_u(0) = x_0\}.$$

Remarque 4.7. On a existence d'une unique trajectoire optimale d'après le théorème 4.3, et donc la borne inférieure ci-dessus est un minimum.

4.3.2 Équation de Riccati

Théorème 4.8. L'unique contrôle u solution du problème LQ (4.8)-(4.9) et la trajectoire associée x vérifient

$$u(t) = U^{-1}B^\top E(t)x(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

où $E(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[0, T]$ de l'équation matricielle de Riccati :

$$\dot{E}(t) = W - A^\top E(t) - E(t)A - E(t)BU^{-1}B^\top E(t), \quad E(T) = -Q. \quad (4.10)$$

De plus, pour tout $t \in [0, T]$, la matrice $E(t)$ est symétrique et

$$S_T(x_0) = -x_0^\top E(0)x_0. \quad (4.11)$$

Remarque 4.9. En particulier le théorème affirme que le contrôle optimal u se met sous forme de commande par retour d'état,

$$u(t) = K(t)x(t),$$

où $K(t) = U^{-1}B^\top E$. Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation, comme nous le verrons plus loin.

PREUVE. D'après le théorème 4.3, il existe une unique trajectoire optimale qui, d'après le théorème 4.4, est caractérisée par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BU^{-1}B^\top p, \\ \dot{p} &= -A^\top p + Wx, \end{aligned}$$

avec $x(0) = x_0$ et $p(T) = -Qx(T)$. De plus, le contrôle s'écrit :

$$u = U^{-1}B^\top p.$$

Il faut donc montrer que l'on peut écrire $p(t) = E(t)x(t)$, où $E(t)$ est solution de (4.10). Notons que si p s'écrit ainsi alors d'après l'équation satisfaite par le couple (x, p) , on trouve facilement que $E(t)$ doit satisfaire l'équation (4.10). En utilisant l'unicité de la trajectoire optimale, on va maintenant montrer que p s'écrit effectivement ainsi. Soit $E(t)$ solution de l'équation :

$$\dot{E} = W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, \quad E(T) = -Q.$$

Tout d'abord $E(t)$ est symétrique car, le second membre de l'équation et la matrice Q étant symétriques, cette équation différentielle peut être considérée comme étant définie sur l'espace vectoriel des matrices symétriques. A priori on ne sait pas cependant que la solution est bien définie sur $[0, T]$ tout entier. On montrera cela plus loin (lemme 4.10).

Posons maintenant $p_1(t) = E(t)x_1(t)$, où x_1 est solution de

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + Bu_1,$$

et $u_1 = U^{-1}B^\top Ex_1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= E\dot{x}_1 + \dot{E}x_1 \\ &= E(Ax_1 + BU^{-1}B^\top Ex_1) + (W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E)x_1 \\ &= -A^\top p_1 + Wx_1. \end{aligned}$$

Autrement dit le triplet (x_1, p_1, u_1) vérifie exactement les équations du théorème 4.4. Par conséquent la trajectoire x_1 est optimale, et par unicité il vient $x_1 = x$, $u_1 = u$, puis $p_1 = p$. En particulier on a donc $p = Ex$, et $u = U^{-1}B^\top Ex$. Dédoublons-en la formule (4.11). Pour cela calculons d'abord, le long de la trajectoire $x(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x(t)^\top E(t)x(t)) &= \frac{d}{dt} (p(t)^\top x(t)) = \dot{p}(t)^\top x(t) + p(t)^\top \dot{x}(t) \\ &= (-p(t)^\top A + x(t)^\top W)x(t) + p(t)^\top (Ax(t) + Bu(t)) \\ &= x(t)^\top Wx(t) + p(t)^\top Bu(t). \end{aligned}$$

Par ailleurs de l'expression de u on déduit :

$$u^\top Uu = (U^{-1}B^\top Ex)^\top UU^{-1}B^\top Ex = x^\top EBU^{-1}B^\top Ex = p^\top Bu.$$

Finalement on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt} (x(t)^\top E(t)x(t)) = x(t)^\top Wx(t) + u(t)^\top Uu(t),$$

et par conséquent :

$$S_T(x) = x(T)^\top Qx(T) + \int_0^T \frac{d}{dt} x(t)^\top E(t)x(t) dt.$$

Or puisque $E(T) = -Q$ et $x(0) = x_0$, il vient $S_T(x_0) = -x_0^\top E(0)x_0$.

Lemme 4.10. *L'application $t \mapsto E(t)$ est bien définie sur $] -\infty, T]$ tout entier.*

PREUVE. Si l'application $E(t)$ n'est pas définie sur tout $] -\infty, T]$, alors il existe $t_* < T$ tel que $\|E(t)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers t_* par valeurs supérieures. En particulier pour tout $\alpha > 0$ il existe $t_0 \in]t_*, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x_0\| = 1$, tels que

$$|x_0^\top E(t_0)x_0| \geq \alpha. \quad (4.12)$$

D'après le théorème 4.3, il existe une unique trajectoire optimale $x(\cdot)$ pour le problème LQ sur $[t_0, T]$, telle que $x(t_0) = x_0$ (voir remarque 4.2). Cette trajectoire est caractérisée par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BU^{-1}B^\top p, & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{p} &= -A^\top p + Wx, & p(T) &= -Qx(T). \end{aligned}$$

D'après le théorème de dépendance continue des solutions d'une équation différentielle par rapport à la condition initiale, les extrémités $x(T)$ au temps T des trajectoires issues au temps t_0 de x_0 sont uniformément bornées lorsque $0 \leq t_0 < T$ et $\|x_0\| = 1$. Donc les solutions correspondantes $x(t), p(t)$ du système différentiel précédent sont uniformément bornées sur $[0, T]$. En particulier la quantité $p(t_0)^\top x(t_0)$ doit être bornée indépendamment de t_0 et x_0 de norme un. Or on sait que $p(t) = E(t)x(t)$, donc :

$$p(t_0)^\top x(t_0) = x_0^\top E(t_0)x_0,$$

et on obtient une contradiction avec (4.12). □

Ceci achève la preuve du théorème. □

Notons qu'il est clair d'après l'expression (4.11) du coût minimal que la matrice $E(0)$ est symétrique négative, mais pas forcément définie. On peut améliorer ce résultat mais il faut une hypothèse supplémentaire.

Lemme 4.11. *Si l'une des conditions suivantes (non équivalentes) est satisfaite :*

- (i) *la matrice Q est symétrique définie positive,*
- (ii) *la matrice W est symétrique définie positive,*
- (iii) *la paire $(A, W^{1/2})$ est observable,*

alors la matrice $E(0)$ est symétrique définie négative.

Rappelons que $W^{1/2}$ désigne l'unique matrice symétrique positive telle que $(W^{1/2})^2 = W$.

PREUVE. Soit x_0 tel que $x_0^\top E(0)x_0 = 0$, et montrons que $x_0 = 0$. Pour cela on considère le problème LQ :

$$\min C(u) = x_u(T)^\top Qx_u(T) + \int_0^T (u(t)^\top Uu(t) + x_u(t)^\top Wx_u(t)) dt,$$

où x_u trajectoire de $\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$.

Soit $u = u(\cdot)$ un minimum de ce problème et $x(\cdot) = x_u(\cdot)$ la trajectoire associée. D'après le théorème 4.8, la valeur minimale du problème est $C(u) = -x_0^\top E(0)x_0 = 0$. Comme $C(u)$ est la somme de trois termes positifs ou nuls, chacun doit être nul et donc $\int_0^T u(t)^\top U u(t) dt = 0$. La matrice U étant définie positive, on a $u(t) = 0$ sur $[0, T]$.

Avec l'hypothèse (ii), la conclusion est immédiate puisque le même raisonnement implique que $x(\cdot)$ est identiquement nulle. Dans le cas (i) on a aussi $x(T) = 0$. Donc la trajectoire $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy $\dot{x} = Ax$, $x(T) = 0$, et par unicité $x(\cdot)$ est identiquement nulle. En particulier $x_0 = x(0) = 0$.

Avec l'hypothèse (iii), on déduit de $C(u) = 0$ que $W^{1/2}x(t)$ est identiquement nul sur $[0, T]$. Puisque $\dot{x} = Ax$, on obtient par dérivations successives

$$0 = W^{1/2}x(t) = W^{1/2}Ax(t) = \dots = W^{1/2}A^{n-1}x(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

et donc $x(t) = 0$ puisque $(A, W^{1/2})$ est observable. Ainsi $x_0 = x(0) = 0$, ce qui achève la preuve. \square

Variante du problème précédent. Soit $T > 0$ fixé. Pour tout $t < T$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, considérons le problème LQ qui consiste à trouver une trajectoire solution de

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t) = x_0, \tag{4.13}$$

minimisant le coût quadratique

$$C_T(t, u) = x_u(T)^\top Q x_u(T) + \int_t^T (u(t)^\top U u(t) + x_u(t)^\top W x_u(t)) dt. \tag{4.14}$$

Définition 4.12. La fonction valeur S au point (t, x_0) est la borne inférieure des coûts pour ce problème LQ. Autrement dit :

$$S_T(t, x_0) = \inf \{ C_T(t, u) \mid x_u(t) = x_0 \}.$$

Théorème 4.13. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $t < T$ il existe une unique trajectoire optimale x associée au contrôle u pour le problème (4.13), (4.14). Le contrôle optimal vérifie

$$u(s) = U(s)^{-1} B(s)^\top E(s) x(s),$$

pour tout $s \in [t, T]$, où $E(s) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[t, T]$ de l'équation matricielle de Riccati :

$$\dot{E} = W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, \quad E(T) = -Q.$$

De plus, pour tout $s \in [t, T]$, la matrice $E(s)$ est symétrique, et pour tout $t \leq T$ on a :

$$S_T(t, x_0) = -x_0^\top E(t)x_0. \tag{4.15}$$

PREUVE. La différence par rapport au cas précédent est que l'on paramétrise le temps initial. Le seul changement est donc la formule (4.15). Comme dans la démonstration précédente, on a :

$$S_T(t, x_0) = x(T)^\top Q x(T) + \int_t^T \frac{d}{ds} x(s)^\top E(s) x(s) ds.$$

Or puisque $E(T) = -Q$ et $x(t) = x_0$, il vient $S_T(t, x_0) = -x_0^\top E(t) x_0$. \square

Remarque 4.14. L'expression (4.15) montre que la matrice de Riccati $E(t)$ est symétrique négative pour tout $t \leq T$.

Remarque 4.15. L'équation de Riccati étant fondamentale, notamment dans les problèmes de régulateur (voir section suivante), la question de son implémentation numérique se pose naturellement. On peut procéder de manière directe : il s'agit alors, en tenant compte du fait que $E(t)$ est symétrique, d'intégrer un système différentiel non linéaire de $n(n+1)/2$ équations. Il existe aussi une méthode permettant de se ramener à l'intégration d'un système linéaire, ce qui est beaucoup plus facile à programmer, voir la section B.3.3 en annexe.

4.4 Planification de trajectoires optimales

Le problème de planification de trajectoires peut se résoudre en cherchant les solutions d'un problème LQ avec contrainte terminale.

Problème LQ avec contraintes terminales : Un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et un point final x_1 étant fixés, déterminer parmi les trajectoires $x_u(\cdot)$ vérifiant $x_u(0) = x_0$ et $x_u(T) = x_1$ celles qui minimisent le coût

$$C(u) = \int_0^T (u(t)^\top U u(t) + x_u(t)^\top W x_u(t)) dt.$$

Rappelons que U est supposée définie positive et W semi-définie positive.

Théorème 4.16. *Supposons le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ commandable. Alors il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ avec contraintes terminales. De plus une trajectoire x satisfaisant $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$ est minimisante si et seulement le contrôle associé satisfait*

$$u(t) = U^{-1} B^\top p(t),$$

où le vecteur adjoint $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $(x, p)(\cdot)$ satisfait l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BU^{-1}B^\top p(t), \\ \dot{p}(t) = -A^\top p(t) + Wx(t), \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

... compléter, preuve à écrire...

4.5 Problème en horizon infini

Considérons maintenant le problème LQ en horizon infini. Il s'agit de déterminer un contrôle u dans $L^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^m)$ minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} (u(t)^\top U u(t) + x_u(t)^\top W x_u(t)) dt,$$

où x_u est la trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0.$$

On utilise toujours les mêmes hypothèses sur A , B , W et U . En particulier, $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, alors que $W \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive mais pas forcément définie.

Proposition 4.17. *Si le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est commandable, alors il existe une unique trajectoire minimisante.*

PREUVE. La preuve est identique à celle du théorème 4.3, la seule différence est que la fonction C n'est pas forcément finie. Il suffit donc de montrer qu'il existe des trajectoires solutions du système (4.1) sur $[0, +\infty[$ et de coût fini. Or, puisque le système est supposé commandable, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à 0 sur $[0, T]$ pour un temps $T > 0$ quelconque. On étend alors le contrôle u par 0 sur $]T, +\infty[$, de sorte que la trajectoire reste en 0. On a ainsi construit une trajectoire solution du système sur $[0, +\infty[$ et de coût fini. Ceci permet d'affirmer que la fonction C n'est pas identiquement égale à $+\infty$ sur $L^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^m)$. Les autres arguments de la preuve du théorème 4.3 sont inchangés. \square

Le résultat suivant donne une caractérisation complète de la solution du problème.

Théorème 4.18. *Considérons le problème LQ en horizon infini avec les hypothèses suivantes :*

- (i) U est symétrique définie positive,
- (ii) W est symétrique semi-définie positive et la paire $(A, W^{1/2})$ est observable,
- (iii) la paire (A, B) est commandable.

Alors il existe une unique trajectoire minimisante pour ce problème, associée sur $[0, +\infty[$ au contrôle optimal

$$u(t) = U^{-1} B^\top E x(t),$$

où $E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est l'unique matrice symétrique définie négative solution de l'équation de Riccati stationnaire :

$$A^\top E + EA + EBU^{-1}B^\top E = W. \quad (4.16)$$

De plus le coût minimal vaut $S_\infty(x_0) = -x_0^\top E x_0$. Par ailleurs le système bouclé

$$\dot{x} = (A + BU^{-1}B^\top E)x$$

est globalement asymptotiquement stable, et la fonction $V(x) = -x^\top E x$ est une fonction de Lyapunov stricte pour ce système.

Il est très important de noter que le contrôle optimal s'écrit sous forme de boucle fermée $u = Kx$, avec $K = U^{-1}B^\top E$ et $A + BK$ Hurwitz (la trajectoire minimisante associée tend donc vers 0 lorsque t tend vers l'infini). On retrouve le fait que si le système est commandable alors il est stabilisable par feedback linéaire (voir le théorème de placement de pôles). Cependant, alors que la méthode de stabilisation décrite par le théorème de placement de pôles consiste à réaliser un placement de pôles, ici la matrice K est choisie de manière à minimiser un certain critère. On parle de stabilisation par retour d'état optimal. C'est donc une méthode (parmi beaucoup d'autres) de stabilisation, on appelle cette méthode la *régulation linéaire-quadratique*, ou "linear-quadratic regulation" en anglais, d'où le sigle LQR souvent utilisé.

Remarque 4.19. En général l'équation (4.16) admet plusieurs solutions, mais elle n'admet qu'une seule solution symétrique définie négative.

Remarque 4.20. L'hypothèse (ii) est en particulier vérifiée quand la matrice W est symétrique définie positive.

PREUVE.

▷ Montrons d'abord qu'il existe une matrice symétrique définie négative solution de l'équation (4.16).

Pour $T > 0$, considérons le problème LQ sur $[0, T]$:

$$\min C_T(u) = \int_0^T (u(t)^\top U u(t) + x_u(t)^\top W x_u(t)) dt,$$

$$\text{où } x_u \text{ trajectoire de } \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

et appelons $E(T, t)$ la solution de l'équation de Riccati associée :

$$\dot{E} = W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, \quad E(T, T) = 0. \quad (4.17)$$

D'après les résultats de la section 4.3, on sait que $E(T, t)$ est définie pour tout $t \leq T$ et que le coût minimal du problème LQ ci-dessus est $S_T(x_0) = -x_0^\top E(T, 0)x_0$.

Soit maintenant $D(t)$ la solution de

$$\dot{D} = W + A^\top D + DA - DBU^{-1}B^\top D, \quad D(0) = 0. \quad (4.18)$$

Il est clair que $-D(T - t)$ satisfait (4.17), ce qui implique que $D(t) = -E(T, T - t)$ est définie sur \mathbb{R}^+ . De plus pour tout $T > 0$ on a $D(T) = -E(T, 0)$, et on déduit du lemme 4.11 que $D(T)$ est symétrique définie positive.

Par ailleurs on a, pour tout $T > 0$, $S_T(x_0) = x_0^\top D(T)x_0$. Il est clair que si $0 < t_1 \leq t_2$ alors pour tout u on a $C_{t_1}(u) \leq C_{t_2}(u)$, et donc $x_0^\top D(t_1)x_0 \leq x_0^\top D(t_2)x_0$. Ceci est en fait indépendant de x_0 , car l'équation de Riccati ne dépend nullement de la donnée initiale. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $t \mapsto x^\top D(t)x$ est croissante.

Montrons qu'elle est également majorée. Le système étant commandable, la proposition 4.17 montre qu'il existe au moins un contrôle v sur $[0, +\infty[$ de coût $C_T(v)$ fini. En notant u_T le contrôle tel que $C_T(u_T) = S_T(x)$, on déduit de l'optimalité de u_T que la fonction $t \mapsto C_t(u_T) = x^\top D(t)x$ est majorée (par $C_T(v)$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto x^\top D(t)x$ étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle converge. En appliquant cette conclusion aux éléments d'une base (e_i) de \mathbb{R}^n , on en déduit que chaque élément $d_{ij}(t)$ de la matrice $D(t)$ converge, car en effet :

$$d_{ij}(t) = e_i^\top D(t)e_j = \frac{1}{2}(e_i + e_j)^\top D(t)(e_i + e_j) - e_i^\top D(t)e_i - e_j^\top D(t)e_j.$$

Ainsi la matrice $D(t)$ converge vers une matrice $-E$, qui est nécessairement symétrique définie négative d'après la croissance de la fonction $t \mapsto x^\top D(t)x$.

Comme $D(t)$ est solution de l'équation différentielle (4.18), sa limite est nécessairement un équilibre de cette équation, ce qui implique finalement que E est solution de l'équation de Riccati stationnaire (4.16).

▷ Montrons maintenant que, pour toute solution E de l'équation (4.16) symétrique définie négative, la matrice $A_c = A + BU^{-1}B^\top E$ est une matrice de Hurwitz.

Il suffit pour ça de voir que la fonction $V(x) = -x^\top Ex$ est une fonction de Lyapunov stricte pour le système bouclé $\dot{x} = A_c x$. La forme quadratique V est bien définie positive puisque E est symétrique définie négative. Par ailleurs on calcule facilement le long d'une trajectoire $x(t)$ solution du système bouclé :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x(t)^\top (W + EBU^{-1}B^\top E)x(t).$$

Or la matrice W est par hypothèse positive, et la matrice $EBU^{-1}B^\top E$ est positive, donc cette quantité est strictement négative si $W^{1/2}x(t) \neq 0$. Remarquons de plus que les instants t tels que $W^{1/2}x(t) = 0$ sont des points isolés. En effet, $w(t) = W^{1/2}x(t)$ est une fonction lisse dont les n premières dérivées sont :

$$w'(t) = W^{1/2}A_c x(t), \dots, w^{(n-1)}(t) = W^{1/2}A_c^{n-1}x(t).$$

Or l'une de ces dérivées doit être non nulle car la paire $(A_c, W^{1/2})$ est observable en conséquence de l'hypothèse (ii) (le vérifier!). Ainsi $t \mapsto V(x(t))$ est une fonction dont la dérivée est négative presque partout, elle est donc strictement décroissante. On a donc bien une fonction de Lyapunov stricte, ce qui prouve que le système bouclé est asymptotiquement stable et la matrice A_c Hurwitz.

▷ On montre alors qu'il existe une unique matrice symétrique E solution de l'équation (4.16) telle que la matrice $A_c = A + BU^{-1}B^\top E$ est une matrice de Hurwitz.

En effet, on sait déjà qu'il existe au moins une telle solution de (4.16). Supposons qu'il en existe deux, E_1 et E_2 , c'est-à-dire que les matrices

$$A_1 = A + BU^{-1}B^\top E_1 \quad \text{et} \quad A_2 = A + BU^{-1}B^\top E_2$$

sont toutes les deux Hurwitz. On vérifie alors facilement que

$$(E_1 - E_2)A_1 + A_2^\top(E_1 - E_2) = 0,$$

c'est-à-dire que $X = E_1 - E_2$ est solution de l'équation de Sylvester $XA_1 + A_2^\top X = 0$. Or une telle équation admet une unique solution quand A_1 et $-A_2^\top$ n'ont pas de valeurs propres communes, ce qui est le cas ici puisque toutes les valeurs propres de A_1 et A_2 sont de partie réelle négative. Ainsi $X = 0$ et on a la conclusion sur l'unicité.

▷ Reprenons l'étude des problèmes LQ avec C_T introduits en début de preuve. Notons d'abord que, puisque pour tout u on a $C_{t_1}(u) \leq C_{t_2}(u)$ si $0 < t_1 \leq t_2$, on a l'inégalité

$$S_T(x_0) \leq S_\infty(x_0) \quad \text{pour tout } T > 0.$$

Or $S_T(x_0) = x_0^\top D(T)x_0$ converge vers $-x_0^\top E x_0$ quand $T \rightarrow \infty$, où E est la solution symétrique définie négative de (4.16), donc

$$-x_0^\top E x_0 \leq S_\infty(x_0).$$

Considérons maintenant la trajectoire $x(\cdot)$ associée à $u(t) = U^{-1}B^\top E x(t)$. Autrement dit, $x(\cdot)$ est solution de $\dot{x} = A_c x$, où $A_c = A + BU^{-1}B^\top E$, et tend donc vers 0 en $+\infty$. Calculons le coût de cette trajectoire :

$$\begin{aligned} C(u) &= \int_0^{+\infty} (u(t)^\top U u(t) + x_u(t)^\top W x_u(t)) dt, \\ &= \int_0^{+\infty} (x(t)^\top W x(t) + x(t)^\top E B U^{-1} B^\top E x(t)) dt, \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} (x(t)^\top E x(t)) \right) dt. \end{aligned}$$

Ainsi $C(u) = -x_0^\top E x_0$, ce qui implique que $-x_0^\top E x_0 = S_\infty(x_0)$ et que u est minimisant. La proposition 4.17 permet de conclure. \square

Chapitre 5

Estimation et filtre de Kalman

On propose dans ce chapitre une présentation simplifiée de l'estimation et du filtre de Kalman. La problématique est similaire à celle du chapitre 3, on cherche à estimer l'état $x(t)$ d'un système linéaire mais en supposant cette fois que la dynamique et la mesure sont bruitées, c'est-à-dire que le système s'écrit

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + G(t)\xi(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + \rho(t), \end{cases} \quad t \in [0, T],$$

où ξ et ρ sont des signaux aléatoires (des "bruits"). Commençons d'abord par donner un sens à ces équations.

5.1 Systèmes linéaires perturbés

On considérons une équation différentielle affine perturbée par un signal aléatoire,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) + G(t)\xi(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système dynamique et $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ est un signal aléatoire. Comme dans la sous-section 2.6.2, $x(t), b(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $G(t) \in \mathbb{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ pour tout $t \in [0, T]$ et la dépendance en t de A , M , G et b est L^2 sur $[0, T]$.

Définition 5.1. Considérons un *bruit blanc gaussien centré* $\xi(t)$ de densité spectrale M_ξ , où $M_\xi \in \mathbb{M}_q(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique semi-définie positive. On dit qu'un processus $x(t)$, $t \in [0, T]$, est une solution de (5.1) si chacune de ses valeurs $x(t)$ est une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(m(t), P(t))$ où :

- la moyenne $m(t) = \mathbb{E}[x(t)]$ est solution de

$$\dot{m}(t) = A(t)m(t) + b(t),$$

- la covariance $P(t) = \mathbb{E}[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^\top]$ est solution de

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A(t)^\top + G(t)M_\xi G(t)^\top.$$

Remarque 5.2. La donnée de la loi $\mathcal{N}(m(0), P(0))$ de $x(0)$ définit une unique solution $x(\cdot)$ définie sur tout $[0, T]$ puisque les équations différentielles pour m et P sont affines.

On n'a pas défini ici ce qu'est un bruit blanc gaussien centré. D'abord parce que ce n'est pas nécessaire pour la suite puisque seule la matrice M_ξ intervient dans la définition d'une solution. Par ailleurs la définition rigoureuse d'un tel processus, de même que celle d'une équation différentielle stochastique telle que (5.1), dépasse largement le cadre de ce cours et nécessite des notions difficiles de calcul stochastique (voir par exemple [9] pour les détails et l'interprétation à donner à la notion de bruit, ou encore le cours PRB203 [10]). On pourra vérifier que la notion de solution donnée ci-dessus correspond bien dans le cas affine à celle d'une équation différentielle stochastique.

Pour avoir quand même une notion de ce qu'est un bruit blanc gaussien centré il nous suffira de considérer (comme c'est fait en général dans les cours de traitement du signal et d'automatique) que ξ est caractérisé formellement par les propriétés suivantes : pour tout $t \in [0, T]$,

- $\xi(t)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle, $\mathbb{E}[\xi(t)] = 0$;
- la fonction de corrélation $\text{Cov}(\xi(t), \xi(s)) = \mathbb{E}[\xi(t)\xi(s)^\top]$ est égale à $M_\xi \delta_{t-s}$, où δ_t désigne la masse de Dirac en t .

La deuxième condition traduit le fait que les valeurs du signal ξ prises à deux instants différents ne sont pas corrélées.

5.2 Filtre de Kalman–Bucy

Considérons à nouveau le système

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\xi(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) + \rho(t), \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (5.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^q$ et $y, \rho \in \mathbb{R}^p$, les matrices ayant les dimensions correspondantes. Nous faisons dans toute cette section les hypothèses suivantes :

- (H1) ξ et ρ sont des bruits blancs gaussiens non corrélés de densités spectrales respectives M_ξ et M_ρ , *i.e.* (ξ, ρ) est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale $\begin{pmatrix} M_\xi & 0 \\ 0 & M_\rho \end{pmatrix}$.
- (H2) $x(0)$ est une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(m_0, P_0)$ non corrélée avec ξ et ρ ;
- (H3) la matrice M_ρ est définie positive.

Le problème du filtrage optimal est le suivant : connaissant l'entrée (déterministe) u , la mesure y et la densité initiale $\mathcal{N}(m_0, P_0)$ de $x(0)$, construire une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ optimale au sens suivant :

- l'estimation est non biaisée, c'est-à-dire que l'erreur $\epsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ est de moyenne nulle, $\mathbb{E}[\epsilon(t)] = 0$;

- la covariance totale de l'erreur $\mathbb{E}[\|\epsilon(t)\|^2] = \text{tr} \mathbb{E}[\epsilon(t)\epsilon(t)^\top]$ est minimale.

Définition 5.3. On appelle *filtre de Kalman–Bucy* le système qui associe aux entrées $u(\cdot)$ et $y(\cdot)$ la sortie $\hat{x}(\cdot)$ solution de

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t) - D(t)u(t)), \\ \hat{x}(0) = m_0, \end{cases}$$

où $L(t) = E(t)C(t)^\top M_\rho^{-1}$, la fonction $E(\cdot)$ étant la solution de l'équation différentielle matricielle

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = A(t)E(t) + E(t)A(t)^\top - E(t)C(t)^\top M_\rho^{-1}C(t)E(t) + G(t)M_\xi G(t)^\top, \\ E(0) = P_0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Remarque 5.4. La sortie \hat{x} est un processus gaussien. En effet, en remplaçant y par sa valeur, le couple (x, \hat{x}) vérifie

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \rho \end{pmatrix},$$

qui est bien une équation de la forme (5.1) puisque l'hypothèse (H1) garantit que (ξ, ρ) est un bruit blanc gaussien centré. En revanche \hat{x} n'est pas forcément définie sur tout $[0, T]$, il faut pour cela que $E(\cdot)$ le soit.

Lemme 5.5. *La solution $E(\cdot)$ de l'équation (5.3) est définie sur tout l'intervalle $[0, T]$. En conséquence, la sortie $\hat{x}(t)$ du filtre de Kalman–Bucy est définie pour tout $t \in [0, T]$.*

PREUVE. Remarquons que l'équation (5.3) est similaire à (4.18). Considérons donc la solution $\tilde{E}(\cdot)$ de l'équation de Riccati

$$\dot{\tilde{E}}(t) = \tilde{W}(t) - \tilde{A}(t)^\top \tilde{E}(t) - \tilde{E}(t)\tilde{A}(t) - \tilde{E}(t)\tilde{B}(t)\tilde{U}(t)^{-1}\tilde{B}(t)^\top \tilde{E}(t), \quad \tilde{E}(T) = -P_0, \quad (5.4)$$

où on a posé

$$\tilde{W}(t) = G(t)M_\xi G(t)^\top, \quad \tilde{A}(t) = A(t)^\top, \quad \tilde{B}(t) = C(t)^\top, \quad \tilde{U}(t) = M_\rho.$$

D'après le lemme 4.10 (ou plutôt le lemme B.12 dans le cas non autonome), $\tilde{E}(\cdot)$ est définie sur $[0, T]$. Posons alors $E(t) = -\tilde{E}(T - t)$ pour tout $t \in [0, T]$. On vérifie facilement que la fonction $E(\cdot)$ ainsi définie est la solution de (5.3), ce qui prouve le lemme. \square

Théorème 5.6. *Sous les hypothèses (H1)–(H3), la sortie $\hat{x}(t)$ du filtre de Kalman–Bucy est l'estimateur optimal de l'état $x(t)$ du système (5.2). De plus, $E(t)$ est la covariance de l'erreur $\epsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.*

La preuve complète de ce théorème nécessite un cadre probabiliste que nous n'avons pas développé ici (voir par exemple [11]). Nous nous contenterons donc de montrer un résultat plus faible, qui est que l'estimateur du filtre de Kalman–Bucy est optimal parmi tous les estimateurs obtenus à partir de filtres linéaires, c'est-à-dire les filtres dont la sortie est solution d'une équation de la forme

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + \hat{L}(t)y(t).$$

PREUVE DU THÉORÈME 5.6 (VERSION FAIBLE). Considérons un filtre linéaire

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + \hat{L}(t)y(t).$$

Comme noté dans la remarque 5.4, \hat{x} est un processus gaussien. Il en est de même pour l'erreur $\epsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ qui satisfait

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) = \hat{A}(t)\epsilon(t) + \left(\hat{A}(t) - A(t) + \hat{L}(t)C(t) \right) x(t) + \left(\hat{B}(t) - B(t) + \hat{L}(t)D(t) \right) u(t) \\ + \hat{L}(t)\rho(t) - G(t)\xi(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ainsi la moyenne de l'erreur $e(t) = \mathbb{E}[\epsilon(t)]$ est solution de l'équation différentielle

$$\dot{e}(t) = \hat{A}(t)e(t) + \left(\hat{A}(t) - A(t) + \hat{L}(t)C(t) \right) m(t) + \left(\hat{B}(t) - B(t) + \hat{L}(t)D(t) \right) u(t),$$

où $m(t) = \mathbb{E}[x(t)]$. Pour que l'estimation soit non biaisée (c'est-à-dire pour que la moyenne $e(t)$ soit identiquement nulle) indépendamment du choix de u , il faut nécessairement choisir :

$$\hat{A}(t) = A(t) - \hat{L}(t)C(t) \quad \text{et} \quad \hat{B}(t) = B(t) - \hat{L}(t)D(t).$$

L'erreur est alors solution de l'équation linéaire $\dot{e}(t) = \hat{A}(t)e(t)$ et il suffit de choisir $e(0) = 0$ pour que $e(t)$ soit identiquement nulle. Comme $e(0) = \mathbb{E}[\hat{x}(0)] - \mathbb{E}[x(0)]$, cela revient à choisir $\mathbb{E}[\hat{x}(0)] = m_0$.

On a donc montré qu'un estimateur non biaisé obtenu à partir d'un filtre linéaire est nécessairement solution de

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \hat{L}(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t) - D(t)u(t)), \\ \hat{x}(0) \text{ de loi } \mathcal{N}(m_0, \hat{P}_0). \end{aligned}$$

Les deux seuls paramètres libres dans un estimateur non biaisé sont donc $\hat{L}(\cdot)$ et la covariance initiale \hat{P}_0 de $\hat{x}(0)$. Ceux de l'estimateur optimal doivent être choisis de manière à minimiser le critère $J(t) = \mathbb{E}[\|\epsilon(t)\|^2]$ pour chaque $t \in [0, T]$.

Remarquons d'abord que $\mathbb{E}[\|\epsilon(0)\|^2] = \text{tr} \mathbb{E}[\epsilon(0)\epsilon(0)^\top] = \text{tr}(P_0 + \hat{P}_0)$ (les variables aléatoires $x(0)$ et $\hat{x}(0)$ sont supposées indépendantes). Il faut donc choisir $\hat{P}_0 = 0$ pour minimiser $J(0)$, ce qui revient à prendre une condition initiale déterministe $\hat{x}(0) = m_0$.

Puisque $J(0) = \text{tr } P_0$ est fixé, pour minimiser $J(t)$ il faut trouver pour chaque $t \in [0, T]$ la matrice $\hat{L}(t)$ qui minimise $\dot{J}(t)$. En notant $E(t) = \mathbb{E}[\epsilon(t)\epsilon(t)^\top]$ la matrice de covariance de l'erreur, on a $\dot{J}(t) = \text{tr } \dot{E}(t)$ puisque la trace est un opérateur linéaire. Or d'après (5.5) et la définition 5.1, E satisfait l'équation

$$\dot{E}(t) = \hat{A}(t)E(t) + E(t)\hat{A}(t)^\top + (G(t) \quad \hat{L}(t)) \begin{pmatrix} M_\xi & 0 \\ 0 & M_\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(t)^\top \\ \hat{L}(t)^\top \end{pmatrix},$$

où $\hat{A} = A - \hat{L}C$. On obtient alors

$$\dot{J}(t) = \text{tr} \left(2(A(t) - \hat{L}(t)C(t))E(t) + \hat{L}(t)M_\rho\hat{L}(t)^\top \right) + \text{tr} (G(t)M_\xi G(t)^\top).$$

Il faut donc minimiser la fonction $\phi : \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, qui à $\hat{L} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ associe

$$\phi(\hat{L}) = \text{tr} \left(2(A(t) - \hat{L}C(t))E(t) + \hat{L}M_\rho\hat{L}^\top \right) + \text{tr} (G(t)M_\xi G(t)^\top).$$

Cette fonction quadratique est strictement convexe puisque M_ρ est définie positive (hypothèse (H3)), elle admet donc un unique minimum L qui satisfait $D\phi(L) = 0$. Le calcul de la différentielle (par un développement limité par exemple) donne

$$D\phi(\hat{L}) : H \mapsto \text{tr} \left(2(\hat{L}M_\rho - E(t)C(t)^\top)H^\top \right).$$

Le minimum L de ϕ est donc solution de $LM_\rho - E(t)C(t) = 0$, c'est-à-dire

$$L = E(t)C(t)^\top M_\rho^{-1}.$$

En définissant $L(t)$ de cette façon pour tout t , on obtient que l'estimation \hat{x} est la sortie du filtre de Kalman–Bucy et que la covariance E de l'erreur satisfait bien (5.3). \square

5.3 Filtre de Kalman stationnaire

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de l'estimateur de la section précédente. On va pour cela se restreindre au cas où le système est autonome et on fait les hypothèses suivantes (en plus de (H1)-(H3)) :

- (H4) le système (5.2) est autonome, c'est-à-dire que les matrices A, B, C, D, G sont indépendantes du temps ;
- (H5) la matrice M_ξ est définie positive ;
- (H6) la paire $(A, (GM_\xi G^\top)^{1/2})$ est commandable ;
- (H7) la paire (A, C) est observable.

Pour analyser rigoureusement le comportement asymptotique du filtre de Kalman–Bucy, il faudrait définir ce filtre sur un intervalle $[t_0, T]$ puis faire tendre t_0 vers $-\infty$. On va adopter ici une approche plus “théorie du contrôle” et étudier plutôt le comportement de l’estimateur quand $t \rightarrow +\infty$ (le système étant autonome on peut choisir $T = +\infty$).

Commençons par étudier la limite de $E(\cdot)$. Revenons pour ça à l’équation (5.4) que nous avons utilisée dans la preuve du lemme 5.5 et remarquons que les matrices (autonomes) définissant cette équation ont les propriétés suivantes :

- $\tilde{U} = M_\rho$ est définie positive d’après (H3) ;
- $(\tilde{A}, \tilde{W}^{1/2}) = (A^\top, (GM_\xi G^\top)^{1/2})$ est observable, cela résulte de l’hypothèse (H6) et de la dualité commandabilité/observabilité (voir remarque 3.4) ;
- $(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A^\top, C^\top)$ est commandable, d’après (H7) et la dualité commandabilité/observabilité.

On retrouve ainsi les hypothèses du théorème 4.18. Un raisonnement identique à celui de la preuve de ce théorème (en remplaçant $D(\cdot)$ par $E(\cdot)$) montre que, quand $t \rightarrow +\infty$, la covariance $E(t)$ de l’erreur de l’estimateur converge vers l’unique matrice E symétrique définie positive solution de

$$AE + EA^\top - EC^\top M_\rho^{-1} CE + GM_\xi G^\top = 0.$$

La matrice $L(t)$ définissant le filtre de Kalman-Bucy converge donc vers $L = EC^\top M_\rho^{-1}$. De plus la matrice $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{U}^{-1}\tilde{B}^\top E = A^\top - C^\top M_\rho^{-1} CE$ est Hurwitz, ce qui implique par transposition que $A - LC$ est Hurwitz également.

Cette analyse nous amène à la définition suivante.

Définition 5.7. On appelle *filtre de Kalman* (ou filtre de Kalman stationnaire) le système qui associe aux entrées $u(\cdot)$ et $y(\cdot)$ la sortie $\hat{x}(\cdot)$ solution de

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + Bu + L(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)),$$

où $\hat{x}(0)$ est un point quelconque de \mathbb{R}^n et $L = EC^\top M_\rho^{-1}$, la matrice E étant l’unique solution symétrique définie positive de

$$AE + EA^\top - EC^\top M_\rho^{-1} CE + GM_\xi G^\top = 0.$$

Proposition 5.8. *Sous les hypothèses (H1)-(H7), la sortie $\hat{x}(t)$ du filtre de Kalman converge vers un estimateur non-biaisé optimal de l’état $x(t)$ du système (5.2).*

Remarque 5.9. Cette proposition implique que, même en l’absence de bruits (*i.e.* pour un système (Σ) déterministe tel que considéré au chapitre 3), on peut utiliser les équations du filtre de Kalman ci-dessus pour construire un observateur asymptotique. Dans ce cas les matrices M_ρ et M_ξ ne sont plus des données du bruit mais représentent des pondérations : M_ρ quantifie la défiance que l’on a envers les mesures alors que M_ξ quantifie la défiance envers la dynamique.

PREUVE. Il faut montrer que d'une part la moyenne $\mathbb{E}[\epsilon(t)]$ de l'erreur $\epsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ tend vers 0 (estimation non biaisée), et d'autre part que la covariance de $\epsilon(t)$ a la même limite que la covariance de l'erreur dans l'estimateur optimal.

L'équation de l'erreur est

$$\dot{\epsilon}(t) = (A - LC)\epsilon(t) + L\rho(t) - G\xi(t).$$

On en déduit que la moyenne $e(t) = \mathbb{E}[\epsilon(t)]$ est solution de $\dot{e} = (A - LC)e$ et donc tend vers 0 puisque $A - LC$ est Hurwitz. D'autre part la matrice de covariance de l'erreur $P(t) = \mathbb{E}[(\epsilon(t) - e(t))(\epsilon(t) - e(t))^\top]$ vérifie

$$\dot{P} = (A - LC)P + P(A - LC)^\top + GM_\xi G^\top + LM_\rho L^\top.$$

On peut vérifier que $P(t)$ tend vers E quand $t \rightarrow +\infty$ [...preuve à écrire...]. Comme E est la limite de la covariance de l'erreur pour l'estimateur optimal (voir ci-dessus), on a bien la conclusion souhaitée. \square

5.4 Lien avec la commande optimale LQ

Filtre de Kalman déterministe. Donnons une interprétation déterministe au filtre de Kalman. Le problème est d'estimer, d'après une observation, un signal perturbé. On reprend le système considéré dans ce chapitre (en supprimant les termes Bu et Du pour simplifier puisque la commande u ne joue aucun rôle dans les problèmes d'estimation), c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G\xi(t), \\ y(t) = Cx(t) + \rho(t), \end{cases} \quad t \in [0, T],$$

mais en considérant cette fois ξ et ρ comme des fonctions inconnues (déterministes) perturbant le système. La donnée initiale $x(0) = x_0$ est inconnue également. Le signal $y(t)$ représente une observation de la variable $Cx(t)$, et à partir de cette observation on veut construire une estimation de l'état final $x(T)$. On cherche une estimation optimale dans le sens que, le long de cette estimation, les perturbations ξ et $\rho = y - Cx$, ainsi que la donnée initiale x_0 , doivent être aussi petites que possible. On cherche donc à minimiser un coût de la forme :

$$x(0)^\top Qx(0) + \int_0^T ((y - Cx)^\top W(y - Cx) + \xi^\top U\xi) dt.$$

On suppose ici que les matrices Q et U sont symétriques définies positives et W symétrique positive.

Proposition 5.10. *L'estimation optimale de l'état final $x(T)$ est égale à $\hat{x}(T)$, où $\hat{x}(\cdot)$ est la solution de*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + FC^\top W(y - C\hat{x}), & \hat{x}(0) &= 0, \\ \dot{F} &= AF + FA^\top - FC^\top WCF + GU^{-1}G^\top, & F(0) &= Q^{-1}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi exactement les équations du filtre de Kalman-Bucy en posant $W = M_\rho^{-1}$, $U = M_\xi^{-1}$ et $Q = P_0^{-1}$ dans le cas où ces matrices sont toutes inversibles.

Pour montrer cette proposition, nous allons revenir à des notations habituelles de contrôle optimal et montrer la proposition 5.12 qui est, mutatis mutandis, identique à celle ci-dessus.

Problème de contrôle optimal associé On considère le problème suivant : connaissant un signal de référence $y(t)$ sur $[0, T]$, on cherche une trajectoire x solution sur $[0, T]$ de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

minimisant le coût

$$C(x, u) = x(0)^\top Qx(0) + \int_0^T ((Cx(t) - y(t))^\top W(Cx(t) - y(t)) + u(t)^\top Uu(t)) dt.$$

On n'impose aucune condition sur $x(0)$ et $x(T)$. On suppose que les matrices Q, U sont symétriques *définies* positives et W seulement positive.

Pour se ramener aux cas LQ habituel, il convient donc tout d'abord d'inverser le temps, de façon à ce que le coût pénalise le point final. On pose donc, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\tilde{x}(t) = x(T - t), \quad \tilde{u}(t) = u(T - t), \quad \tilde{y}(t) = y(T - t), \quad \tilde{A} = -A, \quad \tilde{B} = -B,$$

de sorte que l'on se ramène au problème de déterminer une trajectoire solution de $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}$, minimisant le coût :

$$\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \tilde{x}(T)^\top Q\tilde{x}(T) + \int_0^T ((C\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t))^\top W(C\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t)) + \tilde{u}(t)^\top U\tilde{u}(t)) dt.$$

Notons que, par construction, on a $\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{u}) = C(x, u)$.

Fixons une donnée initiale $\tilde{x}(0)$. On se retrouve alors exactement dans le cas d'un problème de poursuite, tel qu'étudié en annexe, section B.5. On obtient alors, d'après les équations (B.18),

$$\tilde{u}(t) = U^{-1}\tilde{B}^\top \tilde{E}\tilde{x} + U^{-1}\tilde{B}^\top \tilde{h},$$

où :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{E}} &= C^\top WC - \tilde{A}^\top \tilde{E} - \tilde{E}\tilde{A} - \tilde{E}\tilde{B}U^{-1}\tilde{B}^\top \tilde{E}, & \tilde{E}(T) &= -Q, \\ \dot{\tilde{h}} &= -C^\top W\tilde{y} - \tilde{A}^\top \tilde{h} - \tilde{E}\tilde{B}U^{-1}\tilde{B}^\top \tilde{h}, & \tilde{h}(T) &= 0, \\ \dot{\tilde{\alpha}} &= \tilde{y}^\top W\tilde{y} - \tilde{h}^\top \tilde{B}U^{-1}\tilde{B}^\top \tilde{h}, & \tilde{\alpha}(T) &= 0, \end{aligned}$$

et le coût minimal pour cette donnée initiale fixée $\tilde{x}(0)$ vaut :

$$-\tilde{x}(0)^\top \tilde{E}(0)\tilde{x}(0) - 2\tilde{x}(0)^\top \tilde{h}(0) - \tilde{\alpha}(0).$$

Il faut maintenant trouver $\tilde{x}(0)$ tel que ce coût soit minimal. Posons donc :

$$f(x) = -x^\top \tilde{E}(0)x - 2x^\top \tilde{h}(0) - \alpha(0).$$

Il faut donc déterminer un minimum de f . Notons tout d'abord que, la matrice Q étant par hypothèse définie positive, la matrice $\tilde{E}(0)$ est d'après le lemme 4.11 symétrique définie négative. En particulier la fonction f est strictement convexe et de ce fait admet un unique minimum. En un tel point on doit avoir $f'(x) = 0$, d'où $x = -\tilde{E}(0)^{-1}\tilde{h}(0)$.

Finalement, en reprenant le cours positif du temps, et en posant pour tout $t \in [0, T]$:

$$E(t) = -\tilde{E}(T-t), \quad h(t) = -\tilde{h}(T-t),$$

on arrive au résultat suivant.

Proposition 5.11. *Soit $y(\cdot)$ une trajectoire définie sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R}^p . On considère le problème de déterminer une trajectoire solution sur $[0, T]$ de*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

minimisant le coût

$$C(x, u) = x(0)^\top Qx(0) + \int_0^T ((Cx(t) - y(t))^\top W(Cx(t) - y(t)) + u(t)^\top Uu(t)) dt,$$

avec U, Q définies positives et W positive. Alors il existe une unique trajectoire minimisante, associée au contrôle

$$u(t) = U^{-1}B^\top E(t)x(t) + U^{-1}B^\top h(t),$$

et à la condition finale

$$x(T) = -E(T)^{-1}h(T),$$

où

$$\begin{aligned} \dot{E} &= C^\top WC - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, & E(0) &= Q, \\ \dot{h} &= -C^\top Wy - A^\top h - EBU^{-1}B^\top h, & h(0) &= 0, \end{aligned}$$

et le coût minimal vaut alors :

$$-h(T)^\top E(T)^{-1}h(T) + \int_0^T (y(t)^\top Wy(t) - h(t)^\top BU^{-1}B^\top h(t)) dt.$$

L'état final $x(T) = -E(T)^{-1}h(T)$ est la donnée qui nous intéresse principalement dans le problème du filtre de Kalman. L'estimation de cet état final peut être simplifiée de la manière suivante.

Posons $F(t) = E(t)^{-1}$. On trouve facilement, puisque $\dot{F} = -F\dot{E}F$:

$$\dot{F} = BU^{-1}B^\top + AF + FA^\top - FC^\top WCF, \quad F(0) = Q^{-1}.$$

Par ailleurs si on pose $\hat{x}(t) = -F(t)h(t)$, on trouve que :

$$\dot{\hat{x}} = (A - FC^\top WC)\hat{x} + FC^\top Wy, \quad \hat{x}(0) = 0.$$

Finalement on arrive au résultat suivant.

Proposition 5.12. *Sous les hypothèses de la proposition 5.11, l'état final $x(T)$ de la solution optimale est égal à $\hat{x}(T)$, où*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - FC^\top WC)\hat{x} + FC^\top Wy, & \hat{x}(0) &= 0, \\ \dot{F} &= BU^{-1}B^\top + AF + FA^\top - FC^\top WCF, & F(0) &= Q^{-1}. \end{aligned}$$

Annexe A

Formes normales des systèmes commandables

Le but de cette annexe est de donner des formes normales pour les systèmes linéaires autonomes, c'est-à-dire des systèmes particuliers auxquels on peut se ramener moyennant un changement linéaire de coordonnées. L'intérêt de ces formes normales est qu'elles permettent de traiter de façon très efficace le problème de la stabilisation (chapitre 2.4). On verra en particulier la preuve du théorème 2.23.

L'idée directrice est de se ramener à des systèmes scalaires d'ordre n où la commande est justement la dérivée d'ordre le plus élevé. Nous commençons donc par donner une caractérisation des équations différentielles d'ordre n .

A.1 Équations différentielles scalaires d'ordre n

Une classe particulière d'équations différentielles est celle issue des équations scalaires d'ordre supérieur à un. Dans le cas linéaire autonome, une équation scalaire d'ordre n , où n est un entier supérieur à 1, s'écrit

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (\text{A.1})$$

où $y(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R} et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'équation différentielle associée est l'équation linéaire suivante sur \mathbb{R}^n :

$$x' = A_a x, \quad A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

obtenue en choisissant comme état $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Une telle matrice A_a est appelée *matrice compagne*, son polynôme caractéristique est très facile à calculer. On a en effet

$$P_{A_a}(\lambda) = \det(\lambda I - A_a) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

comme on le voit par récurrence en développant la dernière colonne du déterminant (faire le calcul). Remarquons que les coefficients de ce polynôme sont les mêmes que ceux de l'équation (A.1), ce qui est très utile en pratique.

Une question naturelle est alors la suivante : étant donnée une équation différentielle linéaire autonome $x' = Ax$, peut-on la considérer comme issue d'une équation scalaire d'ordre n , quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées ?

Reformulons la question. Rappelons d'abord qu'un changement linéaire de coordonnées $z = Px$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$, transforme l'équation $x' = Ax$ en $z' = PAP^{-1}z$, c'est-à-dire que la matrice A définissant l'équation différentielle est remplacée par sa conjuguée PAP^{-1} . On dit d'ailleurs que $z' = PAP^{-1}z$ est *conjuguée* à $x' = Ax$ par P . La question ci-dessus devient ainsi : étant donnée une matrice A de polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$, est-elle conjuguée à la matrice A_a ?

Remarque A.1. Notons que si A est conjuguée à une matrice A_a , toutes ses valeurs propres ont une multiplicité géométrique égale à 1. En effet, si λ est valeur propre de A , elle l'est aussi de A_a , avec la même multiplicité géométrique $e = \dim \ker_{\mathbb{C}}(\lambda I - A_a)$; or

$$\lambda I - A_a = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

est de rang $n - 1$, ses $n - 1$ premières lignes étant clairement linéairement indépendantes, ce qui implique $e = 1$.

Il est alors clair que toute matrice ne peut être conjuguée à une matrice A_a . Prenons par exemple une matrice qui est diagonalisable et qui a des valeurs propres multiples (I par exemple !). La diagonalisabilité implique que les multiplicités algébriques et géométriques coïncident, c'est-à-dire que ces dernières ne sont pas toutes égales à 1. Une telle matrice ne peut donc pas être conjuguée à une matrice A_a .

Pour répondre à la question précédente, on introduit la notion de vecteur cyclique.

Définition A.2. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$ est une base de \mathbb{R}^n s'appelle un *vecteur cyclique* pour A .

Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, la matrice A_a admet e_n pour vecteur cyclique (comme d'habitude, (e_1, \dots, e_n) désigne la base standard de \mathbb{R}^n) puisque :

$$\begin{aligned} A_a e_n &= e_{n-1} - a_1 e_n, \\ A_a^2 e_n &= e_{n-2} + \text{combinaison linéaire de } (e_{n-1}, e_n), \\ &\vdots \\ A_a^{n-1} e_n &= e_1 + \text{combinaison linéaire de } (e_2, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Remarquons par ailleurs que, si v est vecteur cyclique pour une matrice A , alors Pv est cyclique pour PAP^{-1} . Ainsi, si une matrice A est conjuguée à A_a , A admet un vecteur cyclique.

Proposition A.3. *L'équation $x' = Ax$ est conjuguée à une équation scalaire d'ordre n (c'est-à-dire que A est conjuguée à une matrice A_a) si et seulement si A admet un vecteur cyclique.*

PREUVE DE LA PROPOSITION A.3. Soit A une matrice de polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$. On a déjà montré plus haut que, si A est conjuguée à A_a , elle admet un vecteur cyclique. Il reste à montrer la réciproque : supposons donc que v soit un vecteur cyclique de A . On cherche à construire une base (f_1, \dots, f_n) dans laquelle A prend la forme A_a , ce qui est équivalent aux équations

$$\begin{cases} Af_n = f_{n-1} - a_1f_n, \\ \vdots \\ Af_2 = f_1 - a_{n-1}f_n, \\ Af_1 = -a_nf_n. \end{cases}$$

On sait d'autre part que f_n sera alors vecteur cyclique. Définissons donc les vecteurs f_n, \dots, f_1 par $f_n = v$ et

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= Af_n + a_1f_n, \\ &\vdots \\ f_1 &= Af_2 + a_{n-1}f_n, \end{aligned}$$

de façon que le système (A.1) soit vérifié. La famille (f_1, \dots, f_n) est génératrice puisque

$$\begin{aligned} \text{Vect}(f_n) &= \text{Vect}(v), \\ \text{Vect}(f_n, f_{n-1}) &= \text{Vect}(v, Av), \\ &\vdots \\ \text{Vect}(f_n, f_{n-1}, \dots, f_1) &= \text{Vect}(v, Av, \dots, A^{n-1}v) \\ &= \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

et par conséquent c'est une base de \mathbb{R}^n . Il ne reste plus qu'à vérifier que (A.1) est satisfaite. Calculons successivement

$$\begin{aligned} Af_1 &= A^2f_2 + a_{n-1}Af_n \\ &= A^2(Af_3 + a_{n-2}f_n) + a_{n-1}Af_n \\ &= A^3f_3 + a_{n-2}A^2f_n + a_{n-1}Af_n \\ &\vdots \\ &= A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + \dots + a_{n-1} A f_n. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Cayley–Hamilton, on a $A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + \dots + a_n f_n = 0$, ce qui implique $Af_1 = -a_n f_n$. La matrice A s'écrit donc sous la forme A_a dans la base (f_1, \dots, f_n) , ce qui prouve la proposition. \square

Remarque A.4. On voit dans la preuve précédente que, pour tout vecteur cyclique v de A , on peut construire une base (f_1, \dots, f_n) , avec $v = f_n$, dans laquelle A est sous la forme A_a .

A.2 Forme normale : cas $m = 1$

Équations commandées d'ordre n Ajoutons maintenant une commande à l'équation (A.1). On obtient ainsi une équation commandée scalaire d'ordre n linéaire et autonome :

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t), \quad (\text{A.2})$$

où la commande $u(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R} . En posant $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, cette équation s'écrit sous forme d'un système commandé dans \mathbb{R}^n ,

$$x' = A_a x + B u, \quad \text{où } B = e_n.$$

Ce système est commandable : en effet, on a vu dans la section précédente que $B = e_n$ est un vecteur cyclique pour A_a , ce qui implique $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. Le critère de Kalman est donc satisfait.

On cherche maintenant à stabiliser cette équation par retour d'état proportionnel. On choisit donc une commande de la forme $u = Kx$, où K est une matrice ligne. En notant $k = K^T \in \mathbb{R}^n$, on a $u = \sum_{i=1}^n k_i y^{(n-i)}$ et le système bouclé s'écrit comme une équation d'ordre n ,

$$y^{(n)}(t) + (a_1 - k_1)y^{(n-1)}(t) + \dots + (a_n - k_n)y(t) = 0.$$

La matrice associée est $A_a + BK = A_{a-k}$ de polynôme caractéristique $P_{A_{a-k}}(\lambda) = \lambda^n + (a_1 - k_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n - k_n)$. Il est donc clair que l'on peut choisir comme on veut les coefficients de ce polynôme, donc ses valeurs propres. La procédure est très simple :

- choisir $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s} = \bar{\lambda}_{2s-1}$ sont complexes et $\lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n$ sont réels ;
- former $Q(\lambda) = \prod(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n$;
- poser $k_i = a_i - b_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

On obtient ainsi une matrice $A_a + BK$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. En particulier le choix de valeurs propres à partie réelle < 0 permet de stabiliser asymptotiquement le système.

Remarquons que si on prend, dans l'équation commandée (A.2), une commande comportant un terme en retour d'état de la forme $u(t) = v(t) + a^T x(t)$, l'équation devient :

$$y^{(n)} = v,$$

c'est-à-dire un pur intégrateur. Cette forme réduite s'appelle *la forme de Brunovsky* de (A.2).

Lien avec la commandabilité : cas $m = 1$ Considérons un système commandé linéaire dans \mathbb{R}^n ,

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, \tau],$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ et la commande $u(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R} . Dans le même esprit que dans la section A.1, on se pose la question suivante : ce système peut-il être considéré, à changement de coordonnées près, comme une équation commandée d'ordre n ?

Remarquons d'abord qu'un changement de coordonnées linéaire $z = Px$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$, et $v = Nu$, $N \in GL_m(\mathbb{R})$, transforme le système $x' = Ax + Bu$ en $z' = PAP^{-1}z + PBN^{-1}v$. On dit que ces deux systèmes sont *des systèmes conjugués l'un à l'autre par P, N* .

Lemme A.5. *Si le système $x' = Ax + Bu$, avec $u(\cdot)$ à valeurs dans \mathbb{R} , est commandable, alors il est conjugué à une équation commandée d'ordre n : il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$PAP^{-1} = A_a \quad \text{et} \quad PB = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

PREUVE. Puisque le système est supposé commandable, la paire (A, B) satisfait le critère de Kalman : $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. Le vecteur B est donc cyclique pour A .

D'après la proposition A.3, A est conjuguée à A_a et, d'après la remarque A.4, on peut choisir la matrice de changement de coordonnées P de façon à ce que ce PB soit le dernier vecteur de base dans les nouvelles coordonnées. Le lemme est donc démontré. \square

On peut, en plus du changement de coordonnées de matrice P , modifier la commande en y ajoutant un retour d'état, $u = v + Kx$. Un choix adapté de K (précisément $K = a^T P$ avec les notations de la proposition) met ainsi le système $x' = Ax + Bu$ sous forme de Brunovsky.

Corollaire A.6. *Si le système $x' = Ax + Bu$, avec $u(\cdot)$ à valeurs dans \mathbb{R} , est commandable, alors il existe un changement de coordonnées et de commande*

$$\begin{cases} z = Px, \\ u = v + Kx, \end{cases} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad K \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{R}),$$

qui met le système sous forme de Brunovsky

$$y^{(n)} = v,$$

où $z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

A.3 Forme normale : cas général

Généralisons maintenant ce qui précède au cas où l'entrée u n'est plus de dimension un. On considère donc un système dans \mathbb{R}^n ,

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, \tau],$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et la commande $u(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Théorème A.7. *Soit un système commandé $x' = Ax + Bu$ dans \mathbb{R}^n dont la commande u est de dimension m . Supposons que le système est commandable et que $\text{rang}(B) = m$. Alors ce système est conjugué à un système $z' = \tilde{A}z + \tilde{B}v$ tel que :*

— \tilde{A} est de la forme :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{a^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{a^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{a^m} \end{pmatrix} + \tilde{B}\tilde{K},$$

où $\tilde{K} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et, pour $1 \leq i \leq m$, $A_{a^i} \in \mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{R})$ avec $n_1 + \dots + n_m = n$;

— \tilde{B} est de la forme :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{B}_m \end{pmatrix}, \quad \text{où } \tilde{B}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i}.$$

Corollaire A.8. *Si le système $x' = Ax + Bu$, avec une commande u de dimension m , est commandable et si $\text{rang}(B) = m$, alors il existe un changement de coordonnées et de commande*

$$\begin{cases} z = Px, \\ v = Nu + Kx, \end{cases} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

qui met le système sous forme de Brunovsky

$$y_1^{(n_1)} = v_1, \dots, y_m^{(n_m)} = v_m,$$

où $z = (y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(n_m-1)})$.

PREUVE DU COROLLAIRE. D'après le théorème A.7, il existe un changement de coordonnées $z = Px$ tel que le système s'écrit en coordonnées z comme $z' = \tilde{A}z + \tilde{B}Nu$. En prenant une commande de la forme $Nu = w - \tilde{K}z$, on obtient m systèmes découplés à une commande :

$$z'_i = A_{a^i}z_i + \tilde{B}_i w_i, \quad z_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Il suffit alors de prendre $w_i = v_i + (a^i)^T z_i$ pour conclure. □

Prouvons maintenant le théorème.

PREUVE DU THÉORÈME A.7. Soient (v_1, \dots, v_m) des vecteurs de \mathbb{R}^n formant une base de $\text{Im } B$. Considérons les matrices

$$\mathcal{C}_k = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B) \in \mathbb{M}_{n, km}(\mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, n.$$

En particulier, $\mathcal{C}_1 = B$ et \mathcal{C}_n est la matrice de commandabilité, qui est de rang n puisque le système $x' = Ax + Bu$ est supposé commandable. Remarquons que $\text{Im } \mathcal{C}_{k+1} = \text{Im } \mathcal{C}_k + A \text{Im } \mathcal{C}_k$. Quitte à réordonner les vecteurs v_1, \dots, v_m , on peut donc trouver une suite d'entiers positifs,

$$m_1 = m \geq \dots \geq m_n \geq m_{n+1} = 0,$$

tels que, pour tout $k = 1, \dots, n$, les vecteurs

$$v_1, \dots, v_{m_1}, Av_1, \dots, Av_{m_2}, \dots, A^{k-1}v_1, \dots, A^{k-1}v_{m_k}, \quad (\text{A.3})$$

forment une base de $\text{Im } \mathcal{C}_k$. Associons à tout $i \in \{1, \dots, m\}$ l'entier n_i tel que $m_{n_i+1} < i \leq m_{n_i}$. Les vecteurs $v_i, \dots, A^{n_i-1}v_i$ font partie de la base (A.3) de $\text{Im } \mathcal{C}_n$ et

$$A^{n_i}v_i = \sum_{k=1}^{n_i+1} \sum_{j=1}^{m_k} a_{k,j}^i A^{k-1}v_j.$$

Définissons alors, pour $i = 1, \dots, m$, les vecteurs $f_{n_i}^i, \dots, f_1^i$ par $f_{n_i}^i = v_i$ et

$$f_l^i = A^{n_i-l}v_i - \sum_{k=l+1}^{n_i} \sum_{j=1}^{m_k} a_{k,j}^i A^{k-1-l}v_j, \quad l = 1, \dots, n_i - 1.$$

Remarquons d'abord que l'ensemble des vecteurs f_l^i ainsi construits forme une base de \mathbb{R}^n . De plus, leurs images par A vérifient :

$$\begin{cases} Af_{n_i}^i &= f_{n_i-1}^i + \text{combinaison linéaire de } (f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m), \\ &\vdots \\ Af_2^i &= f_1^i + \text{combinaison linéaire de } (f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m), \end{cases}$$

$$Af_1^i = \text{combinaison linéaire de } (f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m).$$

Puisque $f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m$ est une base de $\text{Im } B$, on obtient que, dans la base

$$f_1^1, \dots, f_{n_1}^1, \dots, f_1^m, \dots, f_{n_m}^m,$$

le système $x' = Ax + Bu$ s'écrit sous la forme $z' = \tilde{A}z + \tilde{B}Nu$. □

A.4 Démonstration du théorème 2.23 de placement des pôles

Considérons d'une part un système dans \mathbb{R}^n ,

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{où } u(\cdot) \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^m,$$

que nous supposons commandable, et d'autre part un réel ρ .

Remarquons d'abord que, si $\text{rang}(B) = s < m$, il existe une matrice $G \in \mathbb{M}_{m,s}(\mathbb{R})$ telle que BG soit de rang s . En particulier, ceci implique que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} BG & ABG & \cdots & A^{n-1}BG \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}.$$

En se limitant aux commandes de la forme $u(\cdot) = G\tilde{u}(\cdot)$, où $\tilde{u}(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^s , on se ramène à étudier le système

$$x' = Ax + BG\tilde{u},$$

qui est également commandable. Quitte à faire cette réduction, nous supposons donc dans la suite que le rang de B est égal à la dimension m de la commande u .

D'après le corollaire A.8, il existe un changement de coordonnées et de commande

$$\begin{cases} z &= Px, \\ u &= N^{-1}v + Kx, \end{cases} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad N \in GL_m(\mathbb{R}), \quad K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

qui met le système sous forme de Brunovsky

$$y_1^{(n_1)} = v_1, \quad \dots, \quad y_m^{(n_m)} = v_m,$$

où $z = (y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(n_m-1)})$. Pour chaque indice $i = 1, \dots, m$, choisissons la commande v_i sous la forme :

$$v_i = -k_1^i y_1^{(n_1-1)} - \dots - k_{n_1-1}^i y_1,$$

où les coefficients $k_1^i, \dots, k_{n_1-1}^i$ sont choisis de façon à ce que le polynôme

$$\lambda^{n_i} + k_1^i \lambda^{n_i-1} + \dots + k_{n_i-1}^i,$$

n'ait que des valeurs propres à partie réelle inférieure à ρ (on peut choisir les coefficients du polynôme selon la procédure page 58). Remarquons que la commande ainsi construite est de la forme $v = K'z$.

En résumé, on a construit une commande $u = \tilde{K}x$, où $\tilde{K} = K'P + K$, telle que la matrice $A + B\tilde{K}$ est conjuguée par P à la matrice :

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} A_{k^1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{k^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k^m} \end{pmatrix}$$

dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle inférieure à ρ puisque son polynôme caractéristique est :

$$P_{\tilde{A}_b} = (\lambda^{n_1} + k_1^1 \lambda^{n_1-1} + \dots + k_{n_1-1}^1) \cdots (\lambda^{n_m} + k_1^m \lambda^{n_m-1} + \dots + k_{n_m-1}^m).$$

Le théorème 2.23 est démontré.

Annexe B

La théorie linéaire-quadratique générale (cas non autonome)

On reprend dans ce chapitre la théorie linéaire-quadratique présentée au chapitre 4 dans un cadre plus général où le système et le coût infinitésimal dépendent du temps. C'est un cadre important en pratique, par exemple lorsqu'on veut minimiser l'écart au carré par rapport à une trajectoire nominale (problème de poursuite).

Nous allons donc considérer un système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n avec condition initiale donnée,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (\text{B.1})$$

À chaque commande $u = u(\cdot)$ est associée une unique trajectoire de B.1 que nous noterons $x_u = x_u(\cdot)$. On se donne aussi une fonction permettant de mesurer le "coût" d'une commande (coût qui peut être économique, énergétique, etc). On considère ici un coût quadratique du type :

$$C(u) = x_u(T)^\top Q x_u(T) + \int_0^T (u(t)^\top U(t)u(t) + x_u(t)^\top W(t)x_u(t))dt,$$

où $T > 0$ est fixé, pour tout t , $U(t) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, $W(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, et $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive. On suppose que la dépendance en t de A , B , W et U est L^∞ sur $[0, T]$. Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Le problème de contrôle optimal est alors le suivant, nous l'appellerons *problème LQ* (linéaire-quadratique) :

Problème LQ : Déterminer la commande $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ qui minimise $C(u)$, *i.e.*

$$\min \{C(u) : u \text{ fonction } L^2 \text{ de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}^m\}.$$

Notons que l'on n'impose aucune contrainte sur le point final $x(T)$. Pour toute la suite, on pose :

$$\|x(t)\|_W^2 := x(t)^\top W(t)x(t), \quad \|u(t)\|_U^2 := u(t)^\top U(t)u(t), \quad \text{et } g(x) = x^\top Qx,$$

de sorte que

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Les matrices Q, W, U sont des matrices de *pondération*.

Remarque B.1. Par hypothèse, les matrices Q et $W(t)$ sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies. Par exemple si $Q = 0$ et $W = 0$ alors le coût est toujours minimal pour le contrôle $u = 0$.

Remarque B.2. On a supposé pour alléger les notations que le temps initial est égal à 0. Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle $[t_0, T]$, avec des contrôles dans l'espace $L^2([t_0, T], \mathbb{R}^m)$. Ce sera utilisé dans la section B.3.

Remarque B.3. Les résultats des sections B.1 et B.2 seront en fait valables pour des systèmes linéaires perturbés $\dot{x} = Ax + Bu + r$.

B.1 Existence de trajectoires optimales

Introduisons l'hypothèse de coercivité suivante sur U :

$$\exists \alpha > 0 \mid \forall u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \quad \int_0^T \|u(t)\|_U^2 dt \geq \alpha \int_0^T u(t)^\top u(t) dt. \quad (\text{B.2})$$

Par exemple cette hypothèse est satisfaite si l'application $t \mapsto U(t)$ est continue sur $[0, T]$, ou encore s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ on ait $v^\top U(t)v \geq cv^\top v$.

On a le théorème d'existence suivant.

Théorème B.4. *Sous l'hypothèse (B.2), il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.*

PREUVE. On va utiliser un résultat classique d'analyse fonctionnelle (voir par exemple le cours ANA201 [7], ou [8]) :

Soient E un espace de Banach réflexif, C un convexe non vide fermé de E , et $F : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi continue inférieurement, non identiquement égale à $+\infty$ et strictement convexe. Si F est "infinie à l'infini", alors elle admet un unique minimum sur C .

Pour montrer le théorème B.4 il suffit donc de montrer que la fonction $F = C$ définie sur $E = C = L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, qui est un espace de Hilbert donc un Banach réflexif, vérifie les hypothèses du résultat ci-dessus.

▷ C est une fonction finie et continue sur $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ (elle est même C^∞). Cela résulte directement de l'expression de $x_u(\cdot)$ en fonction de $u(\cdot)$ donnée par la formule de variation de la constante (Lemme 2.28),

$$x_u(t) = R_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R_A(t, s)B(s)u(s) ds. \quad (\text{B.3})$$

▷ C est "infinie à l'infini" d'après l'hypothèse (B.2).

▷ C est strictement convexe. En effet, remarquons d'abord que pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $f(u) = u^\top U(t)u$ définie sur \mathbb{R}^m est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice $U(t)$ est symétrique définie positive. Ensuite, d'après (B.3) l'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)$ est convexe, ceci pour tout $t \in [0, T]$. Or la matrice $W(t)$ étant symétrique positive, ceci implique que l'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)^\top W(t)x_u(t)$ est convexe. On raisonne de même pour le terme $x_u(T)^\top Qx_u(T)$. Enfin, l'intégration respectant la convexité, on a bien que le coût est strictement convexe en u . \square

B.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : principe du maximum dans le cas LQ

Théorème B.5. *Une trajectoire x de (B.1) est optimale pour le problème LQ si et seulement le contrôle associé u satisfait*

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top p(t). \quad (\text{B.4})$$

où le vecteur adjoint $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est la solution de

$$\dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t) + W(t)x(t) \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T], \quad (\text{B.5})$$

ayant pour condition finale

$$p(T) = -Qx(T). \quad (\text{B.6})$$

PREUVE. Il est aisé de vérifier que le coût $C(\cdot)$ est une fonction différentiable sur $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ (elle est même analytique) au sens de Fréchet. Un contrôle minimisant u vérifie donc nécessairement

$$dC(u) = 0.$$

Calculons cette différentielle en un contrôle u . Il faut donc faire un développement limité de $C(u_{\text{pert}})$ où

$$u_{\text{pert}}(t) = u(t) + \delta u(t)$$

est une perturbation du contrôle u dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Notons x la trajectoire associée à u sur $[0, T]$, x_{pert} celle associée à u_{pert} et $\delta x = x_{pert} - x$ la différence. En tenant compte du fait que Q , $W(t)$ et $U(t)$ sont symétriques dans le développement de

$$C(u_{pert}) = g(x_{pert}(T)) + \int_0^T (\|x_{pert}(t)\|_W^2 + \|u_{pert}(t)\|_U^2) dt,$$

sous la forme $C(u_{pert}) = C(u) + dC(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|_{L^2})$, on déduit que

$$\frac{1}{2} dC(u) \cdot \delta u = x(T)^\top Q \delta x(T) + \int_0^T (x(t)^\top W(t) \delta x(t) + u(t)^\top U(t) \delta u(t)) dt. \quad (\text{B.7})$$

▷ Introduisons maintenant le vecteur adjoint $p(t)$ comme solution du problème de Cauchy suivant :

$$\dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t) + W(t)x(t), \quad p(T) = -Qx(T).$$

Comme la résolvante de $-A(t)^\top$ est $R_A(t, 0)^{-\top}$, la formule de variation de la constante nous conduit à :

$$p(t) = R_A(t, 0)^{-\top} \Lambda + \int_0^t R_A(t, s)^{-\top} W(s)x(s) ds$$

pour tout $t \in [0, T]$, où :

$$\Lambda = -R_A(T, 0)^\top Qx(T) - \int_0^T R_A(s, 0)^\top W(s)x(s) ds.$$

▷ Revenons alors à l'équation (B.7). Remarquons d'abord que la différence $\delta x = x_{pert} - x$ vérifie, d'après la formule de variation de la constante (Lemme 2.28),

$$\delta x(t) = \int_0^t R_A(t, s) B(s) \delta u(s) ds \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)^\top W(t) \delta x(t) dt &= \int_0^T x(t)^\top W(t) R_A(t, 0) \int_0^t R_A(s, 0)^{-1} B(s) \delta u(s) ds dt \\ &= \int_0^T x(s)^\top W(s) R_A(s, 0) ds \int_0^T R_A(s, 0)^{-1} B(s) \delta u(s) ds \\ &\quad - \int_0^T \int_0^t x(s)^\top W(s) R_A(s, 0) ds R_A(t, 0)^{-1} B(t) \delta u(t) dt. \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^t x(s)^\top W(s) R_A(t, s)^{-1} ds = p(t)^\top - \Lambda^\top R_A(t, 0)^{-1},$$

et d'après l'expression de Λ on arrive à :

$$\int_0^T x(t)^\top W(t) \delta x(t) dt = -x(T)^\top Q \int_0^T R_A(T, t) B(t) \delta u(t) dt - \int_0^T p(t)^\top B(t) \delta u(t) dt.$$

Injectons cette égalité dans (B.7), en tenant compte du fait que :

$$x(T)^\top Q \delta x(T) = x(T)^\top Q \int_0^T R_A(T, t) B(t) \delta u(t) dt.$$

On trouve alors

$$\frac{1}{2} dC(u) \cdot \delta u = \int_0^T (u(t)^\top U(t) - p(t)^\top B(t)) \delta u(t) dt. \quad (\text{B.8})$$

▷ Soit u un contrôle optimal. Alors pour tout $\delta u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ on a $dC(u) \cdot \delta u = 0$. L'expression (B.8) implique donc que, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$u(t)^\top U(t) - p(t)^\top B(t) = 0,$$

ce qui implique bien la conclusion souhaitée.

▷ Réciproquement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant (B.5) et (B.6) et si le contrôle u est donné par (B.4), alors il est bien clair d'après le raisonnement précédent que :

$$dC(u) = 0.$$

Or C étant strictement convexe ceci implique que u est un minimum global de C . □

Remarque B.6. Si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai.

Remarque B.7. Définissons la fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(x, p, u) = p^\top (Ax + Bu) - \frac{1}{2} (x^\top Wx + u^\top Uu)$$

Alors les équations données par le principe du maximum LQ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^\top p + Wx, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

puisque $p^\top B - u^\top U = 0$. Ceci annonce le principe du maximum de Pontryagin général (systèmes non linéaires et coût quelconque), qui dit en gros qu'une trajectoire optimale avec son vecteur adjoint doit satisfaire une équation hamiltonienne et que chaque valeur du contrôle maximise le hamiltonien. Mais ici dans le cas LQ on peut dire mieux : d'une part le principe du maximum LQ est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, grâce à la théorie de Riccati que nous allons voir maintenant.

B.3 Fonction valeur et équation de Riccati

B.3.1 Définition de la fonction valeur

Soit $T > 0$ fixé, et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x, \quad (\text{B.9})$$

minimisant le coût quadratique

$$C_T(u) = x(T)^\top Qx(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt. \quad (\text{B.10})$$

On définit alors :

Définition B.8. La *fonction valeur* S_T au point x est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ. Autrement dit :

$$S_T(x) = \inf\{C_T(u) \mid x_u(0) = x\}.$$

Remarque B.9. Sous l'hypothèse (B.2) on a existence d'une unique trajectoire optimale d'après le théorème B.4, et dans ce cas cette borne inférieure est un minimum.

B.3.2 Equation de Riccati

Théorème B.10. Sous l'hypothèse (B.2), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique trajectoire optimale x associée au contrôle u pour le problème (B.9), (B.10). Le contrôle optimal se met sous forme de boucle fermée :

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top E(t)x(t),$$

où $E(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[0, T]$ de l'équation matricielle de Riccati :

$$\dot{E}(t) = W(t) - A(t)^\top E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^\top E(t), \quad E(T) = -Q. \quad (\text{B.11})$$

De plus, pour tout $t \in [0, T]$, la matrice $E(t)$ est symétrique et :

$$S_T(x) = -x^\top E(0)x. \quad (\text{B.12})$$

Remarque B.11. En particulier le théorème affirme que le contrôle optimal u se met sous forme de *boucle fermée* :

$$u(t) = K(t)x(t),$$

où $K(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top E(t)$. Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation, comme nous le verrons plus loin.

PREUVE. D'après le théorème B.4, il existe une unique trajectoire optimale qui, d'après le théorème B.5, est caractérisée par le système d'équations :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BU^{-1}B^\top p, \\ \dot{p} &= -A^\top p + Wx,\end{aligned}$$

avec $x(0) = x$ et $p(T) = -Qx(T)$. De plus, le contrôle s'écrit :

$$u = U^{-1}B^\top p.$$

Il faut donc montrer que l'on peut écrire $p(t) = E(t)x(t)$, où $E(t)$ est solution de (B.11). Notons que si p s'écrit ainsi alors d'après l'équation satisfaite par le couple (x, p) , on trouve facilement que $E(t)$ doit satisfaire l'équation (B.11). En utilisant l'unicité de la trajectoire optimale, on va maintenant montrer que p s'écrit effectivement ainsi. Soit $E(t)$ solution de l'équation :

$$\dot{E} = W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, \quad E(T) = -Q.$$

Tout d'abord $E(t)$ est symétrique car, le second membre de l'équation et la matrice Q étant symétriques, cette équation différentielle peut être considérée comme étant définie sur l'espace vectoriel des matrices symétriques. A priori on ne sait pas cependant que la solution est bien définie sur $[0, T]$ tout entier. On montrera cela plus loin (lemme B.12).

Posons maintenant $p_1(t) = E(t)x_1(t)$, où x_1 est solution de

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + Bu_1,$$

et $u_1 = U^{-1}B^\top Ex_1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= E\dot{x}_1 + \dot{E}x_1 \\ &= E(Ax_1 + BU^{-1}B^\top Ex_1) + (W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E)x_1 \\ &= -A^\top p_1 + Wx_1.\end{aligned}$$

Autrement dit le triplet (x_1, p_1, u_1) vérifie exactement les équations du théorème B.5. Par conséquent la trajectoire x_1 est optimale, et par unicité il vient $x_1 = x$, $u_1 = u$, puis $p_1 = p$. En particulier on a donc $p = Ex$ et $u = U^{-1}B^\top Ex$. Dédoublons-en la formule (B.12). Pour cela calculons d'abord, le long de la trajectoire $x(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t)^\top E(t)x(t) &= \frac{d}{dt}p(t)^\top x(t) = \dot{p}(t)^\top x(t) + p(t)^\top \dot{x}(t) \\ &= (-p(t)^\top A(t) + x(t)^\top W(t))x(t) + p(t)^\top (A(t)x(t) + B(t)u(t)) \\ &= x(t)^\top W(t)x(t) + p(t)^\top B(t)u(t).\end{aligned}$$

Par ailleurs de l'expression de u on déduit :

$$u^\top U u = (U^{-1} B^\top E x)^\top U U^{-1} B^\top E x = x^\top E B U^{-1} B^\top E x = p^\top B u.$$

Finalement on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt} x(t)^\top E(t) x(t) = x(t)^\top W(t) x(t) + u(t)^\top U(t) u(t),$$

et par conséquent :

$$S_T(x) = x(T)^\top Q x(T) + \int_0^T \frac{d}{dt} x(t)^\top E(t) x(t) dt.$$

Or puisque $E(T) = -Q$ et $x(0) = x$, il vient $S_T(x) = -x^\top E(0)x$.

Lemme B.12. *L'application $t \mapsto E(t)$ est bien définie sur $[0, T]$ tout entier.*

PREUVE. Si l'application $E(t)$ n'est pas définie sur $[0, T]$ entier, alors il existe $0 < t_* < T$ tel que $\|E(t)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers t_* par valeurs supérieures. En particulier pour tout $\alpha > 0$ il existe $t_0 \in]t_*, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x_0\| = 1$, tels que

$$|x_0^\top E(t_0) x_0| \geq \alpha. \tag{B.13}$$

D'après le théorème B.4, il existe une unique trajectoire optimale $x(\cdot)$ pour le problème LQ sur $[t_0, T]$, telle que $x(t_0) = x_0$ (voir remarque B.2). Cette trajectoire est caractérisée par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BU^{-1}B^\top p, & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{p} &= -A^\top p + Wx, & p(T) &= -Qx(T). \end{aligned}$$

Il résulte du théorème de dépendance continue des solutions d'une équation différentielle par rapport à la condition initiale que les extrémités $x(T)$ au temps T des trajectoires issues au temps t_0 de x_0 , sont uniformément bornées lorsque $0 \leq t_0 < T$ et $\|x_0\| = 1$, et donc les solutions correspondantes $x(t), p(t)$ du système différentiel précédent sont uniformément bornées sur $[0, T]$. En particulier la quantité $p(t_0)^\top x(t_0)$ doit être bornée indépendamment de t_0 . Or on sait que $p(t) = E(t)x(t)$, donc :

$$p(t_0)^\top x(t_0) = x_0^\top E(t_0) x_0,$$

et on obtient une contradiction avec (B.13). □

Ceci achève la preuve du théorème. □

Notons qu'il est clair d'après l'expression (B.12) du coût minimal que la matrice $E(0)$ est symétrique négative. On peut améliorer ce résultat.

Lemme B.13. *Si l'une des conditions suivantes (non équivalentes) est satisfaite :*

- (i) *la matrice Q est symétrique définie positive,*
 - (ii) *pour tout $t \in [0, T]$ la matrice $W(t)$ est symétrique définie positive,*
 - (iii) *les matrices A et W sont constantes et la paire $(A, W^{1/2})$ est observable,*
- alors la matrice $E(0)$ est symétrique définie négative.*

Rappelons que $W^{1/2}$ désigne l'unique matrice symétrique positive telle que $(W^{1/2})^2 = W$.

PREUVE. Soit x_0 tel que $x_0^\top E(0)x_0 = 0$, et montrons que $x_0 = 0$. Pour cela on considère le problème LQ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \\ \min & x(T)^\top Qx(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt, \end{aligned}$$

pour lequel, d'après le théorème B.10, le coût minimal vaut $-x_0^\top E(0)x_0 = 0$. Par conséquent, puisque pour tout t la matrice $U(t)$ est définie positive, on a $u(t) = 0$ sur $[0, T]$.

Avec l'hypothèse (ii), la conclusion est immédiate puisque $x(\cdot)$ est identiquement nulle. Dans le cas (i) on a aussi $x(T) = 0$. Donc la trajectoire $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy $\dot{x} = Ax, x(T) = 0$, et par unicité $x(\cdot)$ est identiquement nulle. En particulier $x_0 = x(0) = 0$.

Avec l'hypothèse (iii), on déduit de $C(u) = 0$ que $W^{1/2}x(t)$ est identiquement nul sur $[0, T]$. Puisque $\dot{x} = Ax$, on obtient par dérivations successives

$$0 = W^{1/2}x(t) = W^{1/2}Ax(t) = \dots = W^{1/2}A^{n-1}x(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

et donc $x(t) = 0$ puisque $(A, W^{1/2})$ est observable. Ainsi $x_0 = x(0) = 0$, ce qui achève la preuve. \square

Remarque B.14. On voit dans la preuve qu'on pourrait remplacer l'hypothèse (iii) par celle, plus faible, que la paire $(A(t)^\top, (W^{1/2}(t))^\top)$ satisfait la condition suffisante de contrôlabilité (i) du théorème 2.29.

Variante du problème précédent. Soit $T > 0$ fixé. Pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, considérons le problème LQ qui consiste à trouver une trajectoire solution de

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t) = x, \tag{B.14}$$

minimisant le coût quadratique

$$C_T(t, u) = g(x(T)) + \int_t^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt. \tag{B.15}$$

On définit alors :

Définition B.15. La *fonction valeur* S au point (t, x) est la borne inférieure des coûts pour ce problème LQ. Autrement dit :

$$S_T(t, x) = \inf\{C_T(t, u) \mid x_u(t) = x\}.$$

Théorème B.16. Sous l'hypothèse (B.2), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0, T]$ il existe une unique trajectoire optimale x associée au contrôle u pour le problème (B.14), (B.15). Le contrôle optimal se met sous forme de boucle fermée :

$$u(s) = U(s)^{-1}B(s)^\top E(s)x(s),$$

pour tout $s \in [t, T]$, et où $E(s) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[t, T]$ de l'équation matricielle de Riccati :

$$\dot{E} = W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, \quad E(T) = -Q.$$

De plus, pour tout $s \in [t, T]$, la matrice $E(s)$ est symétrique, et pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$S_T(t, x) = -x^\top E(t)x. \quad (\text{B.16})$$

PREUVE. La différence par rapport au cas précédent est que l'on paramétrise le temps initial. Le seul changement est donc la formule (B.16). Comme dans la démonstration précédente, on a :

$$S_T(t, x) = x(T)^\top Qx(T) + \int_t^T \frac{d}{ds} x(s)^\top E(s)x(s) ds.$$

Or puisque $E(T) = -Q$ et $x(T) = x$, il vient $S_T(t, x) = -x^\top E(t)x$. □

Remarque B.17. L'équation de Riccati étant fondamentale, la question de son implémentation numérique se pose naturellement. On peut procéder de manière directe : il s'agit alors, en tenant compte du fait que $E(t)$ est symétrique, d'intégrer un système différentiel non linéaire de $n(n+1)/2$ équations.

B.3.3 Représentation linéaire de l'équation de Riccati

On a la propriété suivante.

Proposition B.18. Plaçons-nous dans le cadre du théorème B.10. Soit

$$R(t, T) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{pmatrix}$$

la résolvante du système linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BU^{-1}B^\top p^\top, \\ \dot{p} &= -A^\top p + Wx. \end{aligned}$$

Alors pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$E(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q) (R_1(t) - R_2(t)Q)^{-1}.$$

PREUVE. Par définition de la résolvante on a :

$$\begin{aligned}x(t) &= R_1(t)x(T) + R_2(t)p(T), \\p(t) &= R_3(t)x(T) + R_4(t)p(T).\end{aligned}$$

Or on sait que $p(T) = -Qx(T)$, donc :

$$x(t) = (R_1(t) - R_2(t)Q)x(T) \quad \text{et} \quad p(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q)x(T).$$

On conclut en remarquant que $p(t) = E(t)x(t)$. Notons que la matrice $R_1(t) - R_2(t)Q$ est inversible sur $[0, T]$ car le problème LQ est bien posé, comme nous l'avons vu précédemment. \square

Par conséquent pour résoudre l'équation de Riccati (B.11), il suffit d'intégrer un système linéaire (il faut calculer une résolvante), ce qui est très facile à programmer. Cette méthode (due à Kalman-Englar) est notamment préférable à la méthode directe dans le cas stationnaire.

B.4 Planification de trajectoires optimales

Le problème de planification de trajectoires peut se résoudre en cherchant les solutions d'un problème LQ avec contrainte terminale.

Problème LQ avec contraintes terminales : Un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et un point final x_1 étant fixés, déterminer parmi les trajectoires $x_u(\cdot)$ vérifiant $x_u(0) = x_0$ et $x_u(T) = x_1$ celles qui minimisent le coût

$$C(u) = \int_0^T (u(t)^\top U(t)u(t) + x(t)^\top W(t)x(t)) dt.$$

Théorème B.19. *Sous l'hypothèse (B.2) sur $U(\cdot)$, il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ avec contraintes terminales. De plus une trajectoire x satisfaisant $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$ est minimisante si et seulement le contrôle associé satisfait*

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top p(t),$$

où le vecteur adjoint $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $(x, p)(\cdot)$ satisfait l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)U(t)^{-1}B(t)^\top p(t), \\ \dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t) + W(t)x(t), \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

... compléter, preuve à écrire...

B.5 Application aux problème de régulation

On s'intéresse ici au problème du régulateur d'état, aussi appelé "problème d'asservissement" ou "problème de poursuite", ou en anglais "tracking problem". Considérons le système de contrôle linéaire perturbé :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{B.17})$$

et soit $\xi(t)$ une certaine trajectoire de \mathbb{R}^n sur $[0, T]$, partant d'un point ξ_0 (et qui n'est pas forcément solution du système (B.17), contrairement au problème de suivi vu à la section 2.5). Le but est de déterminer un contrôle tel que la trajectoire associée, solution de (B.17), suive le mieux possible la trajectoire de référence $\xi(t)$.

On introduit alors l'erreur sur $[0, T]$:

$$z(t) = x(t) - \xi(t),$$

qui est solution du système de contrôle :

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + r_1(t), \quad z(0) = z_0,$$

où $z_0 = x_0 - \xi_0$ et $r_1(t) = A(t)\xi(t) - \dot{\xi}(t) + r(t)$. Il est alors raisonnable de vouloir minimiser le coût :

$$C(u) = z(T)^\top Q z(T) + \int_0^T (\|z(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt,$$

où Q, W, U sont des matrices de pondération. Pour absorber la perturbation r_1 , on augmente le système d'une dimension, en posant :

$$z_1 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & r_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que l'on se ramène à minimiser le coût

$$C(u) = z_1(T)^\top Q_1 z_1(T) + \int_0^T (\|z_1(t)\|_{W_1}^2 + \|u(t)\|_U^2) dt,$$

pour le système de contrôle

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + B_1 u,$$

partant du point $z_1(0)$.

La théorie LQ faite précédemment prévoit alors que le contrôle optimal existe, est unique, et s'écrit

$$u(t) = U(t)^{-1} B_1(t)^\top E_1(t) z_1(t),$$

où $E_1(t)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{E}_1 = W_1 - A_1^\top E_1 - E_1 A_1 - E_1 B_1 U^{-1} B_1^\top E_1, \quad E_1(T) = -Q_1.$$

Posons :

$$E_1(t) = \begin{pmatrix} E(t) & h(t) \\ h(t)^\top & \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on établit facilement les équations différentielles de E, h, α :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, & E(T) &= -Q, \\ \dot{h} &= -A^\top h - Er_1 - EBU^{-1}B^\top h, & h(T) &= 0, \\ \dot{\alpha} &= -2r_1^\top h - h^\top BU^{-1}B^\top h, & \alpha(T) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Résumons tout ceci dans la proposition suivante.

Proposition B.20. *Soit ξ une trajectoire de \mathbb{R}^n sur $[0, T]$, et considérons le problème de poursuite pour le système de contrôle :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,$$

où l'on veut minimiser le coût :

$$C(u) = (x(T) - \xi(T))^\top Q(x(T) - \xi(T)) + \int_0^T (\|x(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Alors il existe un unique contrôle optimal, qui s'écrit :

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top E(t)(x(t) - \xi(t)) + U(t)^{-1}B(t)^\top h(t),$$

où $E(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $h(t) \in \mathbb{R}^n$ sont solutions sur $[0, T]$ de

$$\begin{aligned} \dot{E} &= W - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, & E(T) &= -Q, \\ \dot{h} &= -A^\top h - E(A\xi - \dot{\xi} + r) - EBU^{-1}B^\top h, & h(T) &= 0, \end{aligned}$$

et de plus $E(t)$ est symétrique. Par ailleurs le coût minimal est alors égal à

$$\begin{aligned} &-(x(0) - \xi(0))^\top E(0)(x(0) - \xi(0)) - 2h(0)^\top (x(0) - \xi(0)) \\ &- \int_0^T \left(2(A(t)\xi(t) - \dot{\xi}(t) + r(t))^\top h(t) + h(t)^\top B(t)U(t)^{-1}B(t)^\top h(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Remarque B.21. Notons que le contrôle optimal s'écrit bien sous forme de boucle fermée

$$u(t) = K(t)(x(t) - \xi(t)) + H(t).$$

Remarque B.22. Si $\dot{\xi} = A\xi + r$, i.e. la trajectoire de référence est solution du système sans contrôle, alors dans les notations précédentes on a $r_1 = 0$, et d'après les équations (B.18) on en déduit que $h(t)$ et $\alpha(t)$ sont identiquement nuls. On retrouve alors le cadre LQ de la section précédente. En fait :

- Si $\xi = 0$ et $r = 0$, le problème est un problème LQ standard.
- Si $r = 0$, il s'agit d'un problème de poursuite de la trajectoire ξ .
- Si $\xi = 0$, c'est un problème de régulation avec la perturbation r .

Variante : le problème de poursuite d’une sortie (ou “output tracking”)

On ajoute au problème précédent une variable de sortie :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned}$$

et étant donné un signal de référence $\xi(t)$ on cherche un contrôle tel que, le long de la trajectoire associée, l’observable $z(\cdot)$ soit proche de $\xi(\cdot)$. Notons qu’on retrouve le cas précédent si $y(t) = x(t)$.

Posant $z(t) = y(t) - \xi(t)$, on cherche à minimiser le coût :

$$C(u) = z(T)^\top Qz(T) + \int_0^T (\|z(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Posons alors :

$$x_1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} C(T)^\top QC(T) & -C(T)^\top Q\xi(T) \\ -\xi^\top(T)QC(T) & \xi^\top(T)Q\xi(T) \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} C^\top WC & -C^\top W\xi \\ -\xi^\top WC & \xi^\top W\xi \end{pmatrix},$$

et A_1, B_1 comme précédemment (avec $r_1 = r$). Alors on cherche un contrôle u , associé à la trajectoire x_1 solution de $\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u$, minimisant le coût

$$C(u) = x_1(T)^\top Q_1x_1(T) + \int_0^T (\|x_1(t)\|_{W_1}^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

En raisonnant comme précédemment, on arrive au résultat suivant.

Proposition B.23. *Soit ξ une trajectoire de \mathbb{R}^p sur $[0, T]$, et considérons le problème de poursuite de la sortie r pour le système de contrôle avec sortie :*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned}$$

où l’on veut minimiser le coût :

$$C(u) = (y(T) - \xi(T))^\top Q(y(T) - \xi(T)) + \int_0^T (\|y(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Alors il existe un unique contrôle optimal, qui s’écrit :

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^\top E(t)x(t) + U(t)^{-1}B(t)^\top h(t),$$

où $E(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $h(t) \in \mathbb{R}^p$ sont solutions sur $[0, T]$ de

$$\begin{aligned} \dot{E} &= C^\top WC - A^\top E - EA - EBU^{-1}B^\top E, & E(T) &= -C(T)^\top QC(T), \\ \dot{h} &= -C^\top W\xi - A^\top h - Er - EBU^{-1}B^\top h, & h(T) &= -C(T)^\top Q\xi(T), \end{aligned}$$

et de plus $E(t)$ est symétrique. Par ailleurs le coût minimal est alors égal à

$$-x(0)^\top E(0)x(0) - 2h(0)^\top x(0) - \alpha(0),$$

où $\alpha(t)$ est solution de

$$\dot{\alpha} = \xi^\top W \xi - 2r^\top h - h^\top B U^{-1} B^\top h, \quad \alpha(T) = \xi(T)^\top Q \xi(T).$$

Remarque B.24. Il existe d'autres variantes de ce problème, notamment le même problème que ci-dessus, sauf que le coût s'écrit :

$$C(u) = x(T)^\top Q x(T) + \int_0^T (\|y(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

Le seul changement est dans la matrice augmentée Q_1 , et donc dans les conditions aux limites de E et h , qui deviennent dans ce cas : $E(T) = -Q$ et $h(T) = 0$.

Enfin, il y a aussi une autre variante du problème LQ, celle où la fonction g apparaissant dans le coût est linéaire en x . Nous laissons l'écriture de toutes ces variantes au lecteur, la méthode étant de toute façon la même que précédemment.

Bibliographie

- [1] E. Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications.
- [2] Frédéric Jean. *Stabilité et commande des systèmes dynamiques*. Les Presses de l'ENSTA, September 2011.
- [3] N. Petit and P. Rouchon. Automatique, dynamique et contrôle des systèmes. Cours ENSTA.
- [4] E. D. Sontag. *Mathematical control theory : deterministic systems*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1990.
- [5] M. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, London, 1974.
- [6] F. Laudenbach. *Calcul Différentiel et Intégral*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [7] Patrick Joly and Hasnaa Zidani. ANA201 - Analyse fonctionnelle. Polycopié de cours ENSTA.
- [8] Ivar Ekeland and Roger Temam. *Convex analysis and variational problems*. Classics in applied mathematics 28. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1 edition, 1987.
- [9] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.
- [10] Francesco Russo. PRB203 - Introduction au calcul stochastique. Polycopié de cours ENSTA.
- [11] Brian D. O. Anderson and John B. Moore. *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1990.