



**HAL**  
open science

## Vérités ou fictions mathématiques ?

Claude Lobry

► **To cite this version:**

Claude Lobry. Vérités ou fictions mathématiques ?. Alliage : Culture - Science - Technique, 2024, 83.  
hal-04416878

**HAL Id: hal-04416878**

**<https://hal.science/hal-04416878>**

Submitted on 25 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

## Vérités ou fictions mathématiques ?

**Claude Lobry**

*Université de Nice*

### Résumé

On appelle généralement *modélisation mathématique* l'intervention de techniques mathématiques dans différents domaines autres que la physique. Nous montrons que dans une science jeune, *en train de se faire*, comme la théorie écologique, l'intervention des mathématiques est comparable à celle d'un roman. Dans les deux cas, l'écriture d'une fiction nous aide à mieux comprendre la réalité. Mais de même qu'il ne faut pas confondre fiction et réalité, il ne faut pas confondre la certitude d'une preuve mathématique avec la vérité sur le monde.

### Mots-clés

Mathématique, modélisation, fiction, écologie.

### Abstract

The intervention of mathematical techniques in various fields other than physics is generally called *mathematical modeling*. We show that in a young science, in the process of being made, like the ecological theory, the intervention of mathematics is comparable to that of a novel. In both cases, writing a fiction helps us to better understand reality. But just as we should not confuse fiction with reality, we should not confuse the certainty of a mathematical proof with the truth about the world.

### Keywords

Mathematics, modelisation, fiction, ecology.

### L'auteur

Claude Lobry, mathématicien, chercheur associé au Centre de Recherches en Histoire des Idées de l'université de Nice. Il a profité de sa retraite pour préparer et soutenir une thèse de philosophie consacrée à la perception de l'Analyse Non Standard en France.

lobrinria@wanadoo.fr

Mon titre est un peu mensonger. Il ne sera pas question de la Vérité mathématique (avec un grand "V"). J'avais pensé à un autre : *De quoi parle-t-on quand on parle de « Modèle Mathématique »* qui était un peu plus près de mon propos mais également mensonger. En effet il y a tant à dire sur ce sujet qu'il ne sera qu'à peine effleuré dans ce court texte. Finalement un titre qui aurait bien convenu est *Des mathématiques comme du roman*, mais ça n'aurait pas fait très sérieux.

Je vais donc parler d'un tout petit aspect de la question de la modélisation dans un domaine à la mode : l'écologie. Petit mais méconnu et que je pense utile de mettre en lumière. En effet quand on parle de « modèle » ou, ce qui revient un peu au même, de « mathématisation » (autrefois on aurait dit « mise en équation ») on insiste toujours sur le fait que « le modèle n'est pas la réalité », qu'il n'est qu'une « image » etc. . . Je n'insiste pas. Ce dont je vais parler n'a rien à voir avec un  $(n+1)$ -ème exposé de cette saine philosophie de la modélisation pour laquelle je renvoie à des auteurs compétents<sup>1</sup>.

Toutes les disciplines scientifiques ne sont pas au même état de développement. On peut pratiquer la modélisation mathématique dans le cadre de *sciences bien établies* ou dans le cadre de *la science qui se fait*<sup>2</sup>. Je vais parler de la modélisation dans la construction de la *théorie écologique*, c'est à dire dans une science assez jeune, *en train de se faire*. Mais, dans l'espoir de me faire mieux comprendre, par contraste, je vais commencer par rappeler ce que l'on entend par modélisation dans les sciences de l'ingénieur, donc des sciences bien

---

<sup>1</sup> Il existe un très grand nombre d'ouvrages qui abordent la question de la modélisation comme, par exemple celui de G. ISRAEL : *La mathématisation du réel, essai sur la modélisation mathématique*, Collection "Science ouverte", Seuil, 1998, ou ceux de N. BOULEAU : *Philosophies des mathématiques et de la modélisation : du chercheur à l'ingénieur*, l'Harmattan, 1999, et *La modélisation critique*, Collection Indisciplines, Editions Quæ, 2014, ou enfin Jean-Marie LEGAY, *L'expérience et le modèle*. Editions Quæ, 1997.

<sup>2</sup> Cette distinction entre « la science bien établie » et la « science qui se fait » a été popularisée par B. Latour. Pour rester dans le domaine des sciences du vivant je citerai de lui le texte d'une conférence qu'il fit à l'INRA en 1994 : B. LATOUR, *Le métier de chercheur. Regard d'un anthropologue*, texte 2ème édition revue et corrigée. Editions Quæ, 2001.

établies.

Pourquoi la modélisation dans la théorie écologique? La mathématisation du monde ne va pas de soi et pose des questions éthiques. Par exemple, en économie, de nombreuses voix s'élèvent contre l'abus de l'usage ou contre le mauvais usage voire même, contre l'usage tout court des mathématiques. Comme on l'aura remarqué la discussion sur cette question est assez idéologique, les gens de gauche étant plutôt contre les mathématiques ceux de droite plutôt pour. Les mathématiciens ainsi accusés de cautionner les pires dérives du capitalisme neo-libéral se réclament de leurs bonnes intentions : « Nous ne faisons que fabriquer des outils, ce n'est pas de notre faute s'ils sont mal utilisés » disent-ils, ce qui n'est pas une réponse beaucoup plus satisfaisante que celle du vendeur de Kalachnikov : « Je ne fais que vendre, ce n'est pas moi qui tire... ». En d'autres termes le champ de l'économie ne semble pas propice à une discussion philosophique sereine sur le rôle de la modélisation mathématique. Alors que l'écologie, écologie scientifique s'entend, semble plus éloignée des passions politiques. Pour le moment elle vit douillettement dans son cadre néo-darwinien qui semble satisfaire l'immense majorité sinon la totalité des chercheurs. Mais ce ne sera probablement plus le cas quand elle sera rattrapée par l'urgence des problèmes posés par un usage plus responsable de la planète. Raisons de plus pour profiter de la situation actuelle. La théorie écologique donc, mais aussi et surtout parce que c'est un domaine que je connais un peu, ce qui n'est pas le cas de l'économie.

## Les mathématiques et la modélisation dans l'art de l'ingénieur.

Les ingénieurs sont certainement les plus gros consommateurs

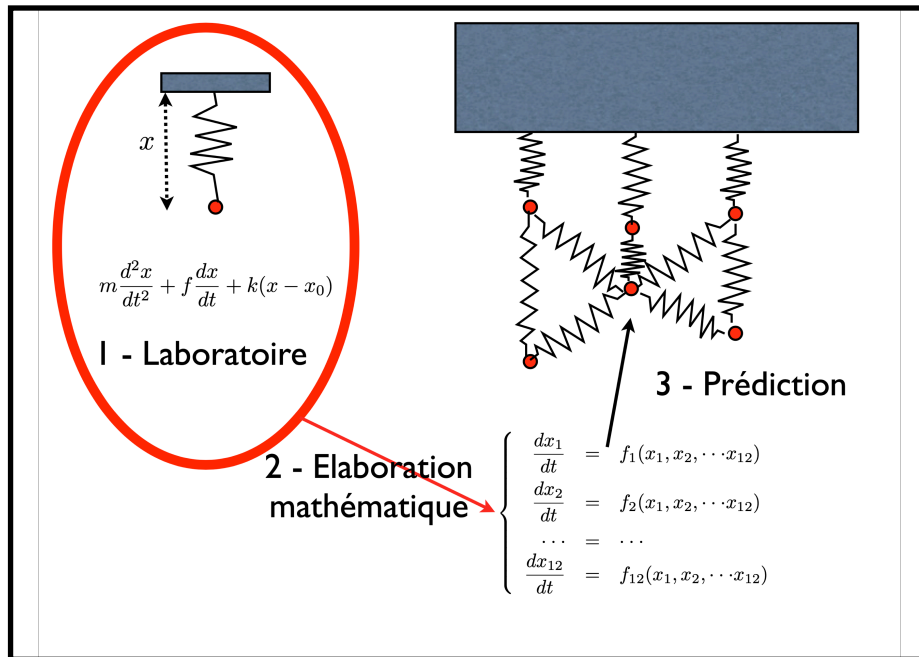


Figure 1 – Du laboratoire à la réalité

actuels de mathématiques. Voyons sur un exemple comment cela fonctionne. Sur la figure 1 on peut voir en haut à droite un dispositif constitué de 6 masses rouges reliées par des ressorts et suspendues au plafond. Imaginons que pour une raison quelconque on désire prévoir comment vont vibrer ces ressorts en cas de déplacement du support<sup>3</sup>. On va procéder de la façon suivante :

1. Dans une première phase l'ingénieur analyse dans un laboratoire le mouvement d'une masse suspendue à un ressort et établit qu'il est parfaitement décrit par l'objet mathématique « équation différentielle »  $m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + r(x - x_0) = 0$  dont les paramètres  $m$ ,  $r$  et  $f$  dépendent de la masse et des propriétés

<sup>3</sup> Prédire les réactions d'un immeuble à un tremblement de terre est, en plus difficile, un problème du même type.

du ressort.

2. Ensuite l'ingénieur « assemble » les équations ci-dessus en un système plus complexe de 16 équations dont il sait que la « résolution » permettra de répondre à la question posée (ici prédire le mouvement en cas de secousse).
3. Enfin l'ingénieur « résout » les équations.

En fait les choses ne se passent pas exactement ainsi. Les trois phases ci-dessus sont un petit résumé de plus de quatre siècles d'activité scientifique. La phase 1, la possibilité de faire tenir tout mouvement possible d'une masse suspendue à un ressort (ou d'un pendule) dans une petite équation mathématique correspond aux tout débuts de la mécanique classique avec Galilée puis Newton et à la découverte de notions aussi peu intuitives que la vitesse instantanée qui trouve son expression mathématique dans la *dérivée* représentée symboliquement par  $\frac{dx}{dt}$ . Bien entendu l'ingénieur moderne n'a plus à faire les expériences de la phase 1 qui relie le monde des ressorts à celui des équations. Elles ont été faites maintes et maintes fois et les résultats consignés dans d'innombrables ouvrages. En revanche, pour chaque dispositif particulier l'ingénieur aura à « assembler » un nouveau système d'équations (c'est pour ça qu'on le paye) en respectant des règles qui sont bien établies, celles qui découlent des lois de la mécanique. Enfin, pour la « résolution des équations » on fera appel aux mathématiques ; dans ce cas précis on utilisera tout le savoir faire accumulé dans la « théorie des systèmes dynamiques », la branche des mathématiques qui s'occupe de ce genre de problèmes depuis Newton et qui est encore très vivante, surtout depuis qu'elle doit contrôler ce que font les ordinateurs quand ils simulent des systèmes d'équations.

C'est en gros toujours ce même schéma qui est reproduit, qui permet les exploits époustouflants de la sonde spatiale Rosetta et la confiance qui nous fait accepter une chose aussi peu naturelle que monter dans un avion de transport. Dans mon exemple, le contrôle du modèle mathématique se fait dans le cadre de la physique qui est, par excellence la science mathématisée. Mais dans d'autres

pratiques de modélisation de l'ingénieur d'autres « sciences de contrôle » peuvent intervenir. Ainsi, la modélisation des ondes sismiques se fait-elle sous le contrôle de la physique et de la géologie ; dans la modélisation d'une raffinerie de pétrole on utilisera des lois de la chimie ; dans la modélisation d'un bassin versant il sera certainement utile de faire intervenir des connaissances issues de la géologie et des sciences de la vie pour tenir compte des effets de la végétation mais, dans ce dernier cas, le rôle de ces sciences sera plus d'apporter des connaissances au modèle que d'en contrôler les mathématiques. Toutefois cette subtilité du lien qu'entretiennent mathématiques et physique qu'on retrouve dans la modélisation mathématique n'est pas directement l'objet de ce que je veux exposer ici. D'ailleurs une bonne façon d'éviter cette discussion serait, comme le propose J.-M. Lévy-Leblond<sup>4</sup> de dire que « (...) son rapport aux mathématiques constitue la détermination de la physique ». Ainsi, je pourrais dire que, dans les sciences de l'ingénieur, les mathématiques du modèle sont contrôlées par les lois de la physique (tout court) ou de la bio-physique, de la géo-physique, etc. ...

### **Un exemple de modèle en écologie**

Donc, dans les sciences de l'ingénieur, l'usage des mathématiques dans les modèles se fait sous le contrôle de sciences bien établies. En

---

<sup>4</sup> LEVY-LEBLOND Jean-Marc, « Physique et mathématiques », dans *Penser les mathématiques*, Seuil 1982



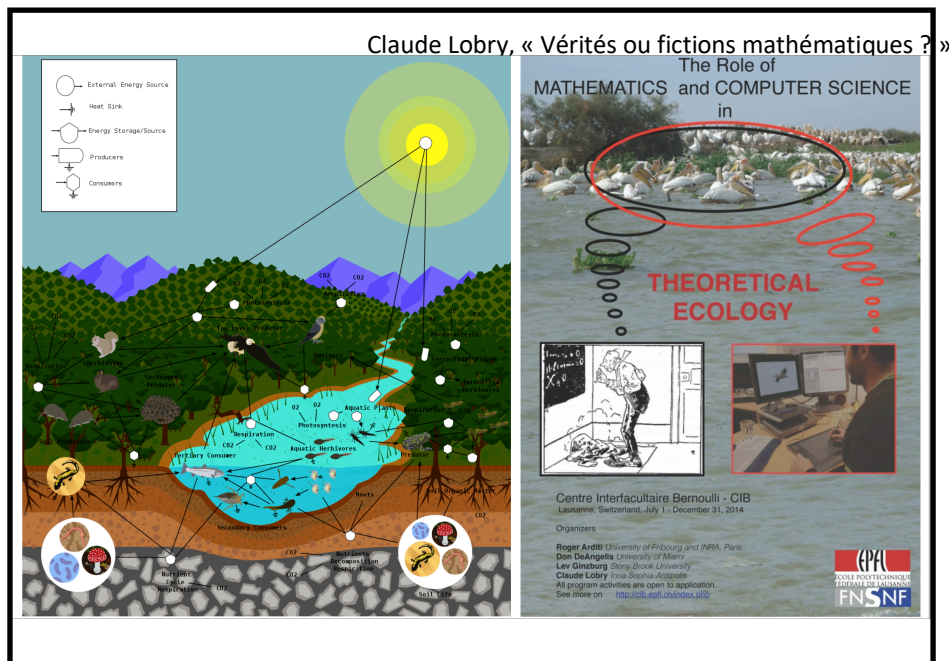


Figure 2 – Capture d'écran le 01/02/2023

revanche, dans la science écologique qui est récente, ce que font les modèles mathématiques pose question. Pour le montrer commentons la capture d'écran de la figure 2 d'une requête Google faite le premier mars 2023 depuis mon ordinateur<sup>5</sup>. Les mots clefs de ma recherche étaient "Mathematics+Ecological+Theory". La première image est celle qui ouvre l'article *Theoretical ecology* de Wikipedia, la seconde est une affiche relative à une manifestation scientifique devant se dérouler d'aout à décembre 2014 à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

L'article de Wikipedia est assez triomphaliste. Par exemple, la légende de l'image est « Mathematical models developed in theoretical ecology predict complex food webs are less stable than simple ». Bigre, prédire que la complexité favorise la stabilité d'une chaîne trophique ce n'est pas rien ! Mais, de son côté, l'affiche de droite qui annonce un "semestre Bernoulli" dont la thématique a pour titre « The rôle of mathematics and computer sciences in theoretical ecology » est plus modeste. Le choix ironique d'une

<sup>5</sup> Je précise, car ces choses sont si mystérieuses, que rien ne garantit que si vous faites la même expérience vous verrez exactement la même chose mais vous pourrez retrouver les images que je vous montre.

vignette du Savant Cosinus<sup>6</sup> montre que pour les organisateurs le rôle des mathématiques dans la théorie écologique n'est pas clair. Le fait que ce semestre scientifique auquel ont participé une centaine de chercheurs se tienne à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, qui n'est pas connue pour être un repaire de gauchistes déviants, montre bien qu'il s'agit d'une « vraie » question qui préoccupe la communauté scientifique « sérieuse ». La discordance entre l'article de Wikipédia et la réalité de l'activité scientifique mériterait des commentaires mais ils me conduiraient trop loin de mon sujet.

Retenons simplement que les mathématiques interviennent incontestablement dans la théorie écologique et que la nature de cette intervention est l'objet de controverses. Le dialogue qui suit essaye de donner l'esprit d'une partie importante des discussions qui ont eu lieu au cours du semestre Bernoulli que je viens d'évoquer.

### **Un dialogue qui aurait pu avoir lieu.**

Avant de commencer je dois rappeler quelques concepts élémentaires de l'écologie tels qu'ils sont enseignés dans les premières années universitaires des filières de sciences de la vie.

En écologie on appelle *peuplement* un très grand nombre d'individus, appartenant à différents groupes (espèces, groupes d'espèces, etc.) qui interagissent entre eux. La *dynamique des peuplements* (ou des populations) cherche à expliquer et prédire l'évolution au cours du temps de la taille de ces groupes. Par exemple on pourra s'intéresser aux poissons de la mer Adriatique et aux relations entre certains qui sont les *prédateurs* d'autres qui sont leurs *proies*. On dit dans ce cas

---

<sup>6</sup> Christophe est l'auteur en 1900 d'une bande dessinée intitulée *L'idée fixe du savant Cosinus* qui met en scène un mathématicien ayant tellement peu de sens pratique qu'il n'arrive pas, en dépit de tous ses efforts, à sortir de Paris. Christophe était un naturaliste, professeur à la Sorbonne, et on dit qu'il s'est inspiré de ses collègues, illustres mathématiciens, tels Hadamard et Painlevé.

qu'on étudie la *relation proie-prédateur* ou *ressource-consommateur*<sup>7</sup>. Le concept de *relation ressource-consommateur* est assez clair. Par exemple quand on dit que « la vache consomme (mange) de l'herbe », on dit que de la matière (l'herbe) est transformée en une autre matière (de la vache); ici la ressource est vivante mais ce n'est pas toujours le cas (les bactéries consomment de la cellulose).

Il existe un autre grand concept classique de la théorie écologique. C'est celui de *relation de compétition*. Mais cette relation est beaucoup moins claire que celle de prédation. En effet prenons l'exemple suivant : certaines bactéries envoient dans le milieu naturel où elles se trouvent des enzymes destinées à fractionner des molécules de cellulose, qui ne sont pas directement assimilables par ces bactéries, en des molécules plus petites, disons du glucose pour faire vite, qui sont assimilables. En tant que productrices d'enzymes les bactéries collaborent pour produire un substrat à la disposition de toute la communauté; mais, en tant que consommatrices du glucose, les bactéries sont en compétition. Ainsi le concept de *compétition* est un concept discutable et discuté que certains voudraient voir abandonné. C'est pourquoi le dialogue imaginaire que je vais exposer maintenant n'est pas totalement anecdotique<sup>8</sup>.

Dans mon dialogue interviennent un théoricien de l'écologie que j'appelle Théo (pour **théoricien**) et un mathématicien que j'appelle Umberto pour une raison qui apparaîtra plus tard.

**Théo** - Soient deux populations - je pourrais aussi dire espèces,

---

<sup>7</sup> Je n'ai pas choisi cet exemple au hasard. U. d'Ancona était un halieute italien intrigué par certains aspects de la pêche dans la mer Adriatique. Il était par ailleurs beau-fils de V. Volterra, un très grand mathématicien. De leurs discussions sont issus des travaux fondateurs dans la mathématisation de l'écologie dans les années 1920.

<sup>8</sup> A l'idée de compétition est associée celle d'exclusion (le mauvais compétiteur est éliminé) et donc de sélection naturelle. La théorie écologique a commencé à se développer à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle dans la foulée du darwinisme, mais aussi dans le contexte de théories économiques faisant une place importante à l'idée de compétition. Les liens entre le développement de la terminologie de la théorie écologique et "l'air du temps" de l'époque mériteraient d'être explorés mais une discussion sérieuse sur ces questions nous entrainerait beaucoup trop loin.

mais sans que "espèce" ait précisément le sens qu'il a en biologie, je veux simplement dire que mes individus dans chaque population partagent une caractéristique commune. Soient donc A et B deux populations dont on note  $x(t)$  et  $y(t)$  les tailles respectives à l'instant  $t$ . Je dis que A et B sont en compétition dans un "environnement" E si toute augmentation de  $y$  diminue la vitesse de croissance de  $x$  et réciproquement. Et j'ajoute : l'environnement E est favorable à B si la population B gagne la compétition, c'est à dire si B "élimine" A, ce qui veut dire qu'au cours du temps A finit par disparaître.

Un environnement n'est généralement pas fixe dans le temps. Par exemple, la saisonnalité peut être responsable d'une succession deux environnements  $E_1$  puis  $E_2$  puis à nouveau  $E_1$  puis  $E_2$ , etc. Si  $E_1$  et  $E_2$  sont tous deux favorables à B il n'y a pas de problème : B élimine A. En revanche si  $E_1$  est favorable à A mais  $E_2$  est favorable à B, il y a problème et l'issue de la compétition est incertaine. Mais je reste certain que l'affirmation : "Une succession d'environnements favorables à B est favorable à B" est toujours vraie. C'est le bon sens même. Et pourtant quelques collègues me contestent ce point.

**Umberto** - Je ne connais rien à la réalité de l'écologie mais je peux te montrer qu'ils n'ont peut-être pas tort.

**Théo, ironique** - Je serais curieux de connaître tes raisons qui sont probablement des raisons de mathématicien.

**Umberto** - Absolument. Mais avant il me faut, sans rentrer dans les détails techniques, préciser un peu plus ce que font les mathématiques en dynamique des populations. J'ai déjà évoqué avec toi, lors d'une conversation précédente, à propos de la mécanique classique ces objets mathématiques qu'on appelle "équations différentielles". Pour que tu comprennes bien ce que j'ai à te dire, il me faut préciser un peu ce que j'en disais alors. Tu as entendu parler du poète persan Omar Khayyam, du philosophe René Descartes et du mathématicien Alexandre Grothendieck qui vient de disparaître ?

**Théo** - Bien sûr, mais qu'ont-ils en commun ?

**Umberto** - Ils ont en commun d'avoir joué un rôle décisif dans ce qu'on appelle la géométrie algébrique. La géométrie euclidienne était l'art de dire des choses incontestables sur les figures que l'on peut tracer à l'aide de la "règle et du compas"; les Grecs étaient aussi intéressés par les propriétés des nombres et se sont posés des questions sur la possibilité de résoudre des équations du type  $a^n + b^n = c^n$  où  $a, b, c$ , et  $n$  sont des entiers et qui ont donné naissance à l'algèbre où l'on manipule des équations qui portent sur des nombres plus généraux que les entiers. On attribue à Omar Khayyam l'idée d'associer des *figures* (des dessins) et des *équations*, idée semble-t-il perdue puis retrouvée par Descartes. Ainsi en établissant un lien systématique entre une *paire de nombres* et un point du plan (ses *coordonnées*) nous avons appris à l'école à associer à la figure du cercle l'équation  $x^2 + y^2 = r^2$  où cette fois  $x, y$  et  $r$  sont des nombres dits réels (nombres qui s'écrivent avec un développement décimal).

**Théo** - Et Alexandre Grothendieck, dont j'ai entendu dire que dès les années 70-80 il avait des positions écologiques ultra radicales ?

**Umberto** - Il est tout simplement considéré par les mathématiciens contemporains comme le plus grand continuateur des Grecs, de Khayyam et de Descartes. Mais son engagement citoyen est étranger à notre question. On peut dire que la géométrie algébrique ce sont les mathématiques de la forme fixe. L'ambition de la théorie des équations différentielles est différente. Elle est de rendre compte de la forme de ce qui évolue dans le temps. Quand une quantité change dans le temps on garde la trace de cette évolution en dessinant une "courbe", par exemple la "courbe de température" d'un malade, des chutes de pluie d'une station touristique ou de la bourse. Tu comprends ça ?

**Théo, vexé** - Ne me fais pas plus ignorant que je suis ! En écologie nous avons une quantité considérable de courbes de ce genre. Nous gardons la trace de l'évolution des populations sous la forme de courbes qui retracent leur abondance au cours du temps.

**Umberto** - Et bien les "équations différentielles" sont des sortes de machines mathématiques qui permettent de produire des courbes qui traduisent une évolution temporelle<sup>9</sup>, des courbes que vous, théoriciens, pourriez interpréter comme des évolutions d'abondance. On a une très bonne idée de ce que font les "équations différentielles" si l'on pense à un programme d'ordinateur qui, chaque fois qu'on l'appelle, trace une ou plusieurs courbes à l'écran. L'expression "équation différentielle" est un peu trompeuse, il n'y a rien à "résoudre" mais plutôt à "produire". Cela s'explique historiquement mais peu importe. Ainsi, du système différentiel ci-dessous :

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - 2.0x - 2.0y)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2.5y(1 - 1.5x - 1.5y)$$
(1)

nous retiendrons que c'est un objet mathématique qui "produit" des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  dont on peut tracer le graphe (l'évolution) comme indiqué sur la figure 3 ci-dessous.

**Théo**, sur un ton un peu pincé - Cher Umberto tu exagères décidément un peu trop mon incompetence. Il me semble bien me souvenir qu'au cours de ma licence de sciences de la vie, un professeur de mathématiques plein de bonne volonté nous avait montré des équations de ce genre et nous avait expliqué dans quelles conditions elles étaient représentatives d'une relation de compétition.

Je me souviens qu'à cette théorie étaient attachés les noms de Lotka et Volterra. Je me souviens même pourquoi les équations que tu me montres sont représentatives de la *compétition*. Si je prends la première équation je vois que la vitesse de croissance de l'espèce A diminue quand la quantité de B augmente (à cause

---

9. Ici Umberto donne une définition assez restrictive de l'objet mathématique "équation différentielle". Les équations différentielles permettent bien d'autres choses, par exemple d'établir quel doit être le profil d'une voûte qui doit résister à certaines charges, ce qui n'a rien à voir avec l'écoulement du temps. Mais dans le contexte de sa discussion, il a raison de s'en tenir là.

du signe – devant le  $2y$  dans la parenthèse). Même chose pour B.

**Umberto** - C'est très bien. Tu as parfaitement compris. Ainsi, si tu as accepté l'idée que ce genre d'équations peut, dans une certaine mesure, représenter une relation de compétition, tu n'auras pas de mal à accepter mes arguments.

**Théo** - Oui, je suis tout à fait ouvert à l'idée qu'une idéalité mathématique puisse être associée efficacement à la

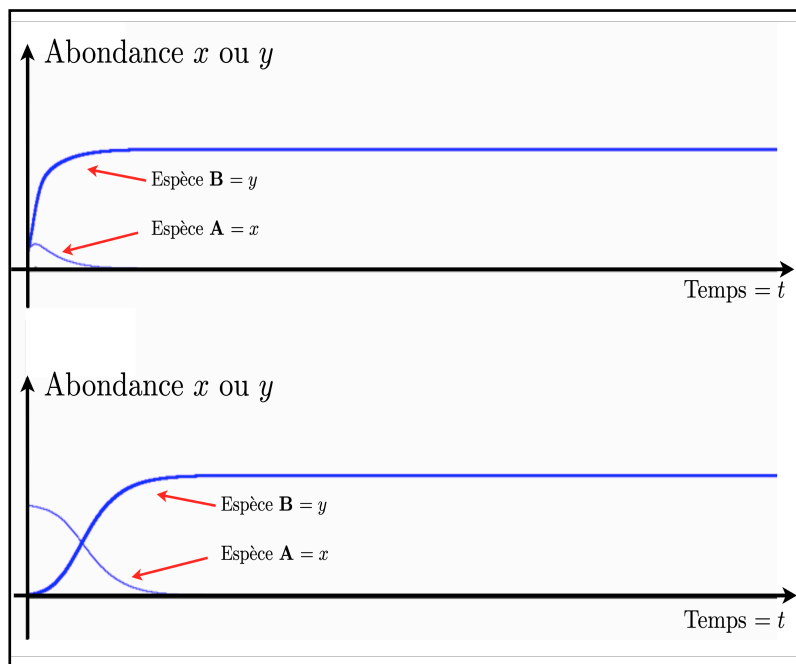


Figure 3 - Compétition dans l'environnement  $E_1$

compréhension d'un phénomène naturel. Une abstraction mathématique peut, en simplifiant la complexité du réel, faire ressortir un trait essentiel qui autrement serait noyé dans un fatras de faits secondaires.

**Umberto** - Parfait. Alors sur la figure 3-haut, nous voyons deux courbes, une en bleu gras l'autre en bleu fin ; l'axe horizontal est censé représenter le temps, l'axe vertical les valeurs de  $x$  et  $y$  qui représentent l'abondance à l'instant  $t$  des espèces A et B. On voit

que  $x$  qui avait la même valeur que  $y$  au temps 0 décroît et disparaît alors que  $y$  croît jusqu'à une certaine valeur pour ne plus en bouger. De même sur la Fig. 3-bas, bien qu'au temps 0 la valeur de  $y$  soit très petite et la valeur de  $x$  importante, au bout d'un certain temps c'est toujours  $y$  qui se rapproche d'une valeur non nulle alors que  $x$  finit par sembler très petit, voire nul.

**Théo** - Si tes équations produisent bien ces courbes, ce que je crois volontiers car j'ai confiance en toi, je suis tout à fait prêt à accepter que le système d'équations différentielles (1) est un modèle de la situation d'un environnement favorable à l'espèce  $B$ . Je vois dans les équations différentielles (1)

1. Une construction mathématique susceptible d'être légitimement associée à l'évolution de la taille de deux populations en compétition.
2. Une instanciation de cette construction (i.e. le choix des paramètres, des nombres qui apparaissent) qui représente bien le fait que l'environnement est favorable à  $B$ .

Comme je t'ai déjà dit le point 1) m'a été enseigné en licence. Pour le point 2), une fois accepté que  $x$  et  $y$  sont les abondances de deux populations en compétition, je vois bien que  $B$  élimine  $A$ . Je pourrais te demander « qu'est-ce qui me prouve que, quelles que soient les conditions initiales de la simulation, on aura toujours le même résultat ? » mais je sais d'expérience que tu me répondrais probablement que « ce fait peut se démontrer mathématiquement » ; si tu me le dis, je te fais confiance, même si je ne peux pas m'en convaincre moi-même.

**Umberto** - C'est exact. Il n'est effectivement pas difficile de démontrer, au sens mathématique du terme, que l'élimination de  $A$  a toujours lieu et ne dépend pas des abondances relatives initiales. Je te propose maintenant une autre instanciation du modèle de Lotka-Volterra, soit :



$$\frac{dx}{dt} = 2.5x(1 - 0.75x - 0.75y) \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - 0.70x - 0.70y)$$

donc un autre environnement  $E_2$  où c'est toujours B qui gagne la compétition puisque sur les courbes de la figure 4 c'est toujours  $x$  qui tend vers 0.

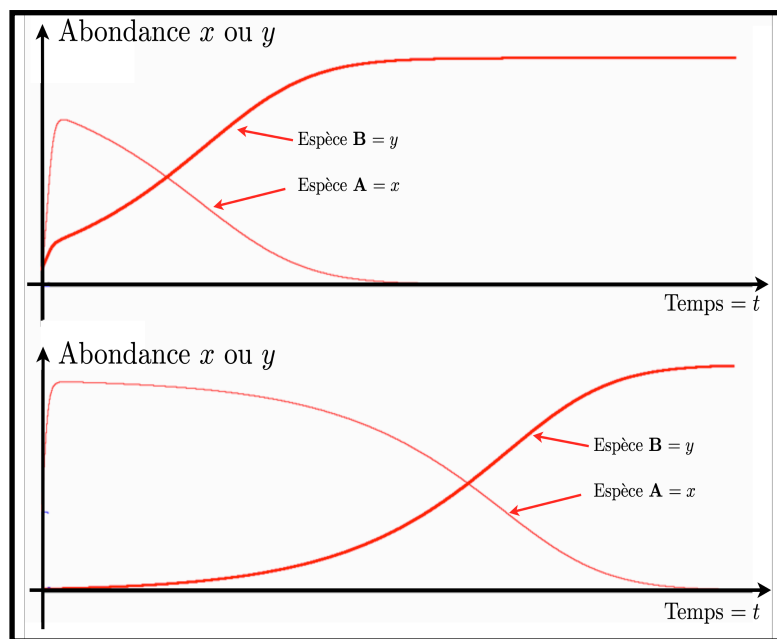


Figure 4 - Compétition dans l'environnement  $E_2$

**Théo** - Il n'y a aucun doute. Tu m'as donc proposé deux modèles de deux environnements *distincts qui sont tous deux favorables à B*.

**Umberto** - Alors voyons maintenant ce qui se passe si nous faisons agir successivement les deux environnements. Examinons la figure 5. Elle a été produite par l'ordinateur en faisant agir successivement les *modèles* (1) et (2) pendant une durée d'une unité de temps (peu importe l'unité) pendant une

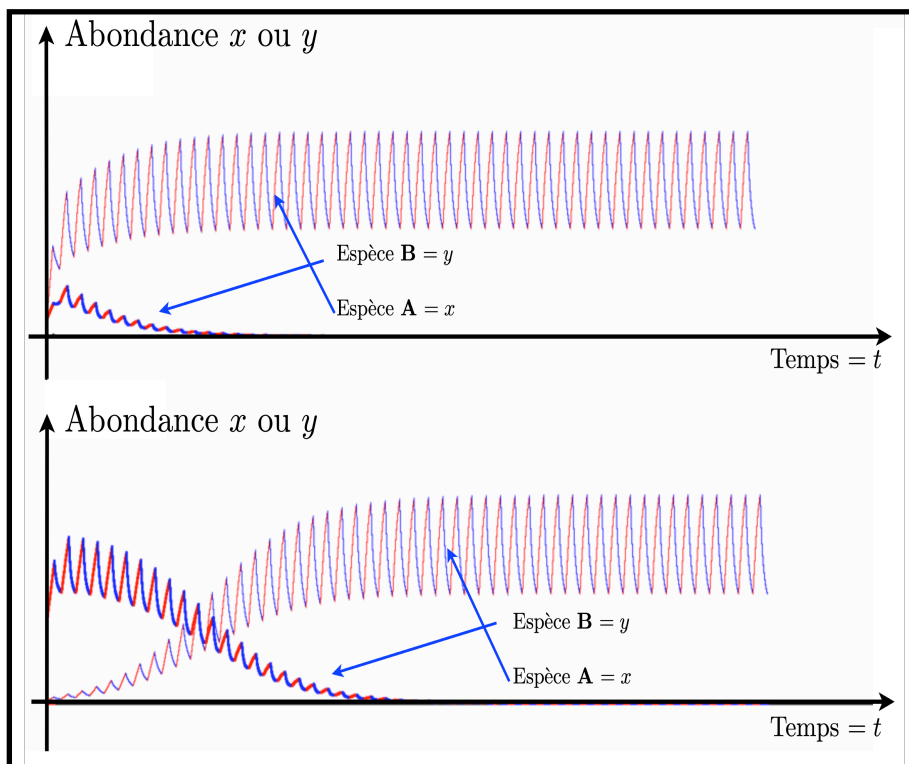


Figure 5 - Succession d'environnements  $E_1, E_2, E_1, \dots$

durée totale de 100 unités. On observe donc 100 alternances des environnements 1 et 2. Le code couleur précédent a été maintenu : les parties bleues correspondent à  $E_1$ , les rouges à  $E_2$ . Nous voyons<sup>10</sup> que la population B (la courbe en trait gras) disparaît au profit de la population A.

*Donc une succession d'environnements favorables à B s'est avérée être favorable à A*

ce qui t'oblige à revoir ton affirmation.

**Théo** - Le résultat de cette simulation est à première vue paradoxal. Il y a donc quelque chose qui cloche dans mon affirmation car je ne peux mettre en doute le résultat de ta simulation.

<sup>10</sup> On observe également une oscillation dans la taille des populations, mais ce n'est pas le point qui nous intéresse ici.

**Umberto** – Là, tu as peut-être tort. Il faut toujours être prudent dans l'interprétation des simulations. Certains phénomènes peuvent être de purs artefacts liée à la façon dont le programme est implémenté et dont la machine l'exécute. Les simulations numériques produites par des ordinateurs n'ont de valeur que lorsqu'elles sont encadrées par une solide théorie mathématique. Mais c'est le cas ici. Tu peux avoir confiance.

**Théo, réfléchissant** - Essayons de trouver ce qui cloche. Peut-être ai-je accepté trop vite de considérer que tes deux modèles étaient des modèles d'environnement favorables à  $B$ . Sur la figure 4 il est flagrant que l'abondance  $x$  de l'espèce  $A$ , avant de tendre vers 0, commence par croître beaucoup plus vite que l'abondance de  $B$ . Tu ne peux pas dire qu'alors l'environnement est favorable à  $B$ .

**Umberto** - Ah, pardon! C'est toi qui m'as dit que favorable à  $B$  voulait dire «  $B$  gagne la compétition ». C'est bien le cas, non ?

**Théo** - Non, tu as une vision trop stricte de "favorable".

**Umberto** – Ça, ce n'est pas mon problème, mon travail est de proposer des interprétations *non ambiguës* de ce que tu dis. Libre à toi de prendre ou pas, mais tu avais accepté mon modèle.

**Théo** - O.K., tu as raison, il faut que je réfléchisse à ce que je veux dire par "favorable", voire même par "compétition".

Avant de passer à la suite il me faut préciser que le personnage de Théo, pour les besoins de mon exposé, est mathématiquement trop naïf<sup>11</sup>. Un vrai théoricien de l'écologie est beaucoup plus compétent en mathématiques, mais cet exemple, quoique très simple, est tout à fait représentatif d'un certain usage des mathématiques en écologie théorique.

## Le roman mathématique

---

<sup>11</sup> Le lecteur mathématicien intéressé trouvera une analyse mathématique du modèle de Umberto dans BENAÏM Michel et LOBRY Claude, « Lotka–Volterra with randomly fluctuating environments or “how switching between beneficial environments can make survival harder” », *The Annals of Applied Probability*, 26(6), 3754-3785 (2016).

Les citations suivantes sont extraites de *l'Apostille au Nom de la Rose* de Umberto Eco.

Je pense que pour raconter, il faut avant tout se construire un monde, le plus meublé possible, jusque dans les plus petits détails. (...)

Il faut se créer des contraintes pour pouvoir inventer en toute liberté. En poésie (...). Pour la narrativité, la contrainte est donnée par le monde sous-jacent. Et cela n'a rien à voir avec le réalisme (même si cela explique jusqu'au réalisme). On peut construire un monde totalement irréel, où les ânes volent et où les princesses sont ressuscitées par un baiser : mais il faut que ce monde, purement possible et irréaliste, existe selon des structures définies au départ (il faut savoir si c'est un monde où une princesse peut être ressuscitée uniquement par le baiser d'un prince, ou encore par celui d'une sorcière, si le baiser d'une princesse retransforme en princes les seuls crapauds ou bien aussi, mettons, les tatous). (...)

Quand j'ai mis Jorge dans la bibliothèque, je ne savais pas encore que c'était lui l'assassin. Il a pour ainsi dire tout fait tout seul. Et qu'on n'aille pas penser qu'il s'agit là d'une position « idéaliste » — les personnages ont une vie propre et l'auteur, presque en transes, les fait agir en fonction de ce qu'ils lui suggèrent : ce sont des sottises, tout juste bonnes pour un sujet de dissertation au baccalauréat. Non. La vérité est que les personnages sont contraints d'agir selon les lois du monde où ils vivent et que le narrateur est prisonnier de ses prémisses.

Décortiquons mon dialogue entre Théo et Umberto à la lumière de ces citations.

Au départ, Théo s'interroge sur la compétition. Théo pense avoir une vision claire de ce que sont les concepts de "population", de "gagner une compétition" et "d'environnement". Il en déduit le concept "d'environnement favorable" et formule son affirmation :

*Une succession d'environnements favorables à B est favorable à B.*

Intervient Umberto, qui va écrire un "roman mathématique". En effet, il va poser les bases d'un monde virtuel, dont personne n'affirme qu'il représente un écosystème particulier si ce n'est que Théo accepte de reconnaître que ce monde virtuel a quelque rapport avec son discours (qui lui porte sur le monde réel).

— Dans les systèmes d'équations (1) et (2) il reconnaît dans les

variables  $x$  et  $y$  des quantités qui pourraient bien être les abondances de deux populations  $A$  et  $B$

- Dans les deux figures 3 et 4 il accepte de voir que  $B$  “gagne la compétition”.

Ces deux équations constituent la base du monde virtuel, de la fiction, qu’Umberto va faire “fonctionner”. Il va *déduire* de (1) et (2) une conséquence qui s’impose : dans une certaine succession des environnements c’est la population  $A$  qui remporte la compétition. Donc dans le monde virtuel de Umberto une succession d’environnements favorables n’est pas nécessairement favorable. Reprenons ce que disait Eco du roman :

- (...) Pour la narrativité, la contrainte est donnée par le monde sous-jacent. (...). On peut construire un monde totalement irréel, où les ânes volent et où les princesses sont ressuscitées par un baiser : mais il faut que ce monde, purement possible et irréaliste, existe selon des structures définies au départ (il faut savoir si c’est un monde où une princesse peut être ressuscitée uniquement par le baiser d’un prince, ou encore par celui d’une sorcière, si le baiser d’une princesse retransforme en princes les seuls crapauds ou bien aussi, mettons, les tatous).

*Pour Umberto ce sont donc les deux équations (1) et (2) qui fixent le monde sous-jacent. Comme dans un roman ce monde n’a pas besoin d’être réel et les équations ne représentent pas un écosystème concret.*

- Quand j’ai mis Jorge dans la bibliothèque, je ne savais pas encore que c’était lui l’assassin. Il a pour ainsi dire tout fait tout seul. Et qu’on n’aille pas penser qu’il s’agit là d’une position « idéaliste » (...). Non. La vérité est que les personnages sont contraints d’agir selon les lois du monde où ils vivent et que le narrateur est prisonnier de ses prémisses.

*A partir du moment où Umberto a fixé ses deux équations, donc son monde sous-jacent, il n’est plus totalement libre et les déductions mathématiques vont s’imposer à lui. Certes Umberto a décidé de porter son regard sur ce qui se passerait dans le cas d’une succession d’environnements mais une fois cette décision prise, il n’a plus le choix de ce qui va se passer (c’est la simulations qui va le dire), il est prisonnier de ses prémisses.*

De même que le roman n’a pas la prétention de décrire le monde tel

qu'il est mais d'alimenter notre réflexion sur lui, le modèle de Umberto n'est pas une image fidèle du monde mais une fiction qui a apporté sa petite pierre à sa théorisation. Elle a montré que le discours sur le monde porté par Théo était incohérent.

Mais pourquoi Théo a-t-il accepté aussi facilement que son discours soit considéré comme incohérent ? Après tout le lecteur d'un roman n'est pas forcément d'accord avec ce que le narrateur fait faire à son héros. N'a-t-on pas reproché au Guillaume du Nom de la Rose d'être resté bien froid devant le sort réservé à la pauvre paysanne qu'avait aimé Adso ? Eco s'en est défendu. Le lecteur d'un roman qui a accepté le monde sous-jacent de l'auteur n'accepte pas forcément ses déductions. Mais il se trouve que le roman que Umberto nous propose est écrit dans la langue mathématique et que *dans le monde de la science rien n'est considéré comme plus solide qu'une déduction mathématique.*

En mathématiques, s'il peut y avoir des doutes sur la "vérité" d'un énoncé, quel que soit le sens que l'on donne au mot "vérité", puisque la démonstration de cet énoncé dépend des axiomes choisis (du monde sous-jacent), il n'y a en revanche "*jamais*" de doute sur ce qu'est une démonstration correcte<sup>12</sup>. Dans le monde savant, jamais on ne contestera une démonstration mathématique. On peut se demander ce qui donne cette force de conviction aux preuves mathématiques. C'est grand mystère et un vaste sujet que je n'aborderai pas. Constatons simplement que c'est un fait et revenons aux mathématiques comme roman dans la science écologique.

Rien ne nous empêche d'écrire une suite au roman de Umberto. Toujours dans le même monde sous-jacent on peut s'amuser à développer d'autres conséquences que celle que j'ai décrite.

---

<sup>12</sup> Bien sûr, "jamais" est entre guillemets. L'accord sur ce qu'est une démonstration mathématiquement rigoureuse est provisoire et toujours remis en question. Mais les désaccords ne concernent que des régions très périphériques, philosophiques diraient certains, et l'évolution est très lente. Les théorèmes mathématiques établis aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles et très largement utilisés par les ingénieurs de nos jours, ne sont pas remis en cause.

Quelques dizaines de spécialistes des équations de Lotka-Volterra s'appliquent à le faire dans le monde. Travaillent-ils bien comme Théo et Umberto ? En fait, pour les besoins de la démonstration de ma thèse, j'ai simplifié à l'extrême le roman mathématique de Umberto mais dans un vrai travail de recherche, sans être forcément très sophistiqué mathématiquement, le roman mathématique a une certaine ampleur qui le rend un peu obscur à Théo. Ils sont donc obligés de dialoguer longuement, sans trop se comprendre et parfois avec pugnacité, avant qu'un petit progrès théorique se produise.

### **Image ou simulacre, métaphore ou singerie ?**

En écologie, on pratique souvent la "modélisation". Cette dernière expression recouvre des activités très différentes. Parfois, rarement, il s'agit clairement d'une activité du même type que celle que j'ai décrite à propos de modèles de ressorts dans les sciences de l'ingénieur et d'autres fois, rarement aussi, on retrouve l'activité romanesque de Umberto. La plupart du temps, il s'agit d'un mélange de ces deux activités où les théoriciens arrivent plus ou moins bien à se retrouver. C'est pourquoi il n'est pas inutile de bien clarifier le rôle de Umberto dans sa relation avec Théo. Comment allons-nous qualifier le fruit de son travail ?

Je vais défendre l'idée que "singerie" est la bonne option pour qualifier l'activité de Umberto. Notons tout de suite qu'un tel choix ne serait pas forcément celui de Théo. Voici un extrait d'un livre récent<sup>13</sup> de deux représentants contemporains de tout premier plan de la science écologique dont j'apprécie le travail et qui m'ont servi de modèle pour Théo. Ils sont les tenants d'une position théorique : *La ratio-dépendance*<sup>14</sup>, qui a suscité pas mal de discussions ces trois

---

<sup>13</sup> ARDITI Roger and GINZBURG Lev, *How Species Interact*. Oxford University Press 2012.

<sup>14</sup> Tout le livre est consacré à la démonstration de la plus grande pertinence d'une formulation mathématique faisant intervenir le quotient  $s/x$  de la quantité de ressource par celle de consommateur - *la ratio dépendance*- pour exprimer le taux de capture de la ressource. Je ne peux que conseiller au lecteur ce livre qui

dernières décennies et qui a fini par s'imposer (la citation est extraite de la conclusion de l'ouvrage).

Newton's law of inertia in physics has been used as a metaphor for the Malthus law of population growth. In the same way than Newton's law say how bodies move in the absence of external forces, the Malthus law says how populations grow in the absence of external constraints. (...) Extending this metaphor to include interacting species requires a ratio-dependent description of the interactions. In the language of the metaphor, the standard view is like saying that only a single body can move uniformly in space, but two cannot.

On voit donc toute l'importance que ces deux auteurs attachent à rapprocher leur science de la physique et ils ne seraient probablement pas d'accord pour qualifier de "singeries" leur usage des mathématiques. Je peux aussi rappeler l'importance que Galilée donnait à une formulation précise, rigoureuse, pour tout dire mathématique, des concepts. Alors pourquoi refuser aux mathématiques, concernant la science écologique, un rôle positif dans la création de mondes virtuels où tester la cohérence des discours et traiter ces derniers de "simulacres", avec toute la charge négative de cette expression, ou, pire, de "singeries"<sup>15</sup>? C'est que chaque époque a ses bonnes et ses mauvaises causes. Du temps de Galilée il était nécessaire de se battre contre les discours confus des aristotéliens et de promouvoir les vertus de la langue mathématique pour décrire la nature, voire d'affirmer que « [Le livre de la nature] est écrit en langage mathématique, (...)»<sup>16</sup>. De nos jours il en va peut-être autrement.

En effet, il est un domaine où l'usage des mathématiques s'est imposé de façon massive au cours du dernier demi-siècle. De

---

explique avec beaucoup de pertinence comment des mathématiques très simples sont mises en œuvre avec profit dans l'élaboration de théories écologiques.

<sup>15</sup>Jean-Pierre Aubin, un mathématicien qui a beaucoup réfléchi à l'usage des mathématiques dans les sciences "non physiques", plaiderait pour *métaphore mathématique*. Il expose longuement ses idées dans AUBIN Jean-Pierre, *La mort du devin, l'émergence du démiurge*, Ed. Beauchesne, 2010.

<sup>16</sup> Pour une analyse fouillée de l'usage des langues plus ou moins naturelles en physique je renvoie à LEVY-LEBLOND Jean-Marc, « La nature prise à la lettre ». In *La vitesse de l'ombre : aux limites de la science*, Seuil, 2006.



"politique" qu'elle était - on disait "économie politique" - l'économie est devenue, grâce à la mathématisation, "science économique". Disons ici quelques mots du créateur d'un style romanesque qui a eu beaucoup de succès, je veux parler de Gérard Debreu (1921-2004). Debreu a été l'inventeur de la "méthode axiomatique" en économie, méthode qu'il a exposée dans son livre fondateur de 1959, *Théorie de la valeur. Analyse axiomatique de l'équilibre économique*<sup>17</sup>, dont Google Books nous dit :

Seul ouvrage du prix Nobel 1983, *Théorie de la valeur* propose une démonstration rigoureuse de l'existence d'un équilibre concurrentiel qui est toujours aujourd'hui le fondement de nombreuses études d'économie théorique et appliquée. (...) Salué par les jurés du prix Nobel pour sa "clarté, sa rigueur analytique, sa valeur générale et l'élégance de sa présentation", ce livre est l'un de ceux qui ont le plus influencé la théorie économique fondamentale dans les quarante dernières années. (...)

Laissons la parole à l'auteur de *Théorie de la valeur*.

Les deux problèmes centraux de la théorie présentée dans cette monographie sont (1) l'explication de la valeur des biens et des services résultant de l'interaction par l'intermédiaire des marchés, des agents d'une économie de propriété privée, (2) l'explication du rôle des prix dans un état optimal d'une économie donnée.

Il s'agit donc, *a priori*, d'une tentative d'explication de certains aspects de la réalité.

Les premières solutions des deux problèmes précédents ont été données respectivement par L. Walras et V. Pareto, mais ni les maîtres de l'école de Lausanne, ni leurs disciples n'ont fait un exposé très rigoureux de leurs idées pendant plusieurs décades. (...)

G. Debreu cite alors quelques penseurs qui l'ont inspiré. Puis :

La théorie de la valeur est traitée ici sur le modèle de la rigueur de l'école formaliste contemporaine de mathématiques. L'effort vers la rigueur substitue des raisonnements et des résultats corrects à ceux qui ne l'étaient pas. (...) La fidélité à la rigueur dicte la forme axiomatique de l'analyse où la théorie, au sens strict, est logiquement complètement disjointe de ses interprétations.

---

<sup>17</sup> Publié initialement en 1959 sous le titre *Theory of Value. Analysis of Economic Equilibrium*, Coweles Foundation Monograph, 17. Traduction française, Dunod 3ème édition, 2001.

L'ouvrage s'ouvre ensuite par un chapitre de trente pages intitulé "Mathématiques". Il s'agit d'un résumé dans le plus pur style bourbachique du cours de "topologie générale" enseigné alors dans les licences de mathématiques françaises. Ensuite une cinquantaine de pages sont consacrées à attacher à divers concepts économiques des objets mathématiques précis : des espaces vectoriels, des relations de préordre, des produits scalaires etc. . . , pour aboutir à la définition d'une "économie de propriété" que je reproduis figure 6 pour bien montrer son extrême sophistication formelle. Je me

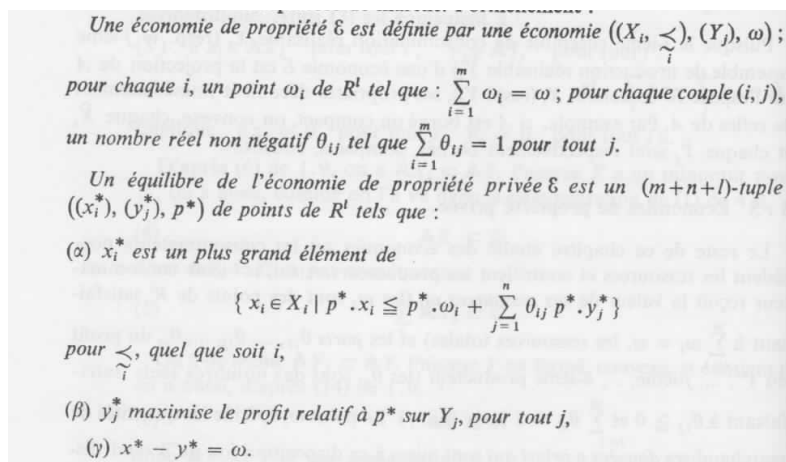


Figure 6 – G. Debreu, *Théorie de la Valeur*, p. 86

garderai bien de critiquer sur le fond cette démarche qui est exactement celle de Umberto qui, comme on l'aura sans doute deviné, m'est très proche et très sympathique. Debreu propose une histoire bâtie sur un monde mathématique sous-jacent dont il essaye de nous convaincre qu'il pourrait être un monde virtuel acceptable pour y faire fonctionner les concepts de Walras et Pareto et que dans ce monde il est établi ce qui est dit figure 7, à savoir que, sous quelques hypothèses supplémentaires, une économie de propriété privée possède un équilibre. Maintenant savoir si cette histoire apporte effectivement quelque chose à la clarification des concepts de l'économie est une autre affaire qui ressort de la compétence des théoriciens de l'économie. Mais tels qu'ils sont exposés dans l'ouvrage de 1959, ils ne sont pas plus qu'un roman et en aucun cas une théorie scientifique comme le laisse entendre son titre. A moins

que "théorie de la valeur" ne soit pas pris au sens de "théorie scientifique" mais au sens du langage courant : « c'est théorique », où « théorie » est synonyme d'un ensemble de spéculations sans véritable fondement.

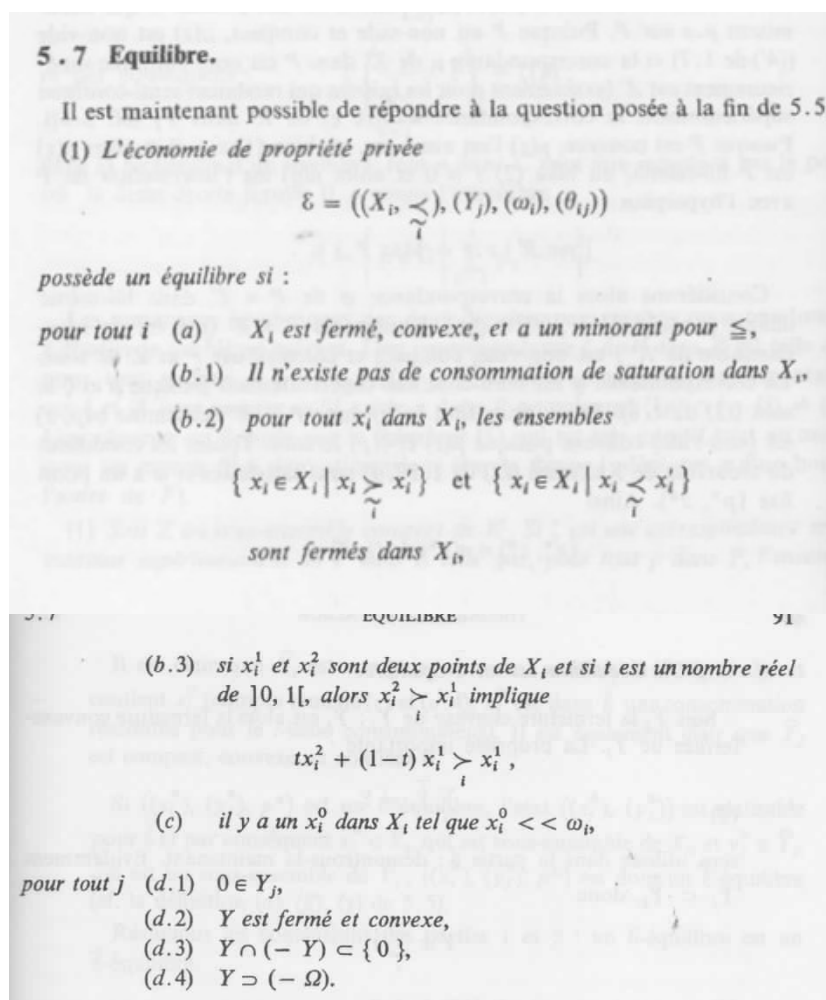


Figure 7 – G. Debreu, Théorie de la Valeur, p. 90-91

## Comme Ivar Ekeland<sup>18</sup> je chéris l'aphorisme

En mathématiques, les noms sont arbitraires. Libre à chacun d'appeler un opérateur auto-adjoint un « éléphant » et une décomposition spectrale une « trompe ». On peut alors démontrer un théorème suivant lequel « tout éléphant a une trompe ». Mais on n'a pas le droit de laisser croire que ce résultat a quelque chose à voir avec de gros animaux gris.

énoncé que le site du Palais de la Découverte attribue à Gerald Sussman.

\* \* \*

Le romancier construit des mondes imaginaires pour mieux explorer la réalité des choses. Son cadre a le droit d'être tout à fait fantasmagorique mais son récit doit se dérouler de façon logique. De la même manière et pour le même objectif, dans certaines sciences, il arrive que l'on écrive des romans mathématiques et cette pratique a son utilité. En particulier, les mathématiques aident à s'assurer de la cohérence interne d'un discours porté sur la réalité. Un tel usage des mathématiques est donc tout à fait légitime. Le danger est évidemment que, pour toutes sortes de raisons qui n'ont pas été discutées ici on en vienne à prendre le "modèle mathématique" pour la réalité elle-même, ainsi qu'il en a été le cas en économie où la soi-disant "théorie économique" mathématisée est utilisée pour sortir du champ de la discussion politique ce qui devrait y rester.

En raison de l'impact de plus en plus évident de l'espèce humaine sur l'évolution de la planète, la "science écologique", plus jeune et peut être moins assurée encore que sa grande soeur économique, est à son tour de plus en plus souvent utilisée à mauvais escient, parfois même pour défendre de mauvaises causes<sup>19</sup>. Le risque est grand de voir émerger des "théories écologiques mathématisées" qui se

---

<sup>18</sup> Dans EKELAND Ivar, *Le Calcul, l'imprévu*, Seuil 1984 p. 123 ; mais lui c'était à propos de la théorie des catastrophes de R. Thom.

<sup>19</sup> N'oublions pas que le biologiste Ernst Haeckel (1834-1919), à qui on attribue la création de l'écologie scientifique, a développé des idées qui l'ont conduit à avancer des théories racistes.

pareraient des vertus de la science physique, servir d'argument d'autorité dans des discussions importantes. C'est pourquoi je plaide, sans espoir de succès faut-il le préciser, pour l'usage de "singerie mathématique" plutôt que "métaphore" ou "modèle" pour désigner ces romans mathématiques dont j'espère en revanche avoir démontré l'importance dans l'élaboration de la théorie écologique.

## Remerciements

Ce texte a une longue histoire. Il y a plus de soixante ans maintenant, étudiant en mathématiques à l'Université de Grenoble, j'ai lu, un peu par hasard, *Théorie de la valeur* de Gérard Debreu. Peu de temps avant j'avais eu la chance de suivre l'enseignement de physique de Michel Soutif (1921-2016) réputé pour sa remarquable clarté<sup>20</sup>. C'est certainement grâce à lui que j'ai tout de suite compris que la *Théorie de la valeur* était d'une autre nature que la *théorie électromagnétique*. Après une longue maturation je suis revenu sur cette question que j'ai eu le plaisir d'exposer en public au séminaire *Idée, Vérité, Image - Eidos, Alêtheia, Eidolon* organisé par Elsa Grasso et Arnaud Zucker le 16 janvier 2015<sup>21</sup> puis de les ré-exposer lors du séminaire *Science-Fiction et Enseignement des mathématiques*<sup>22</sup> organisé par Estelle Blanquet, Jean-Luc Gautero, Eric Picholle et Pascal Thomas les 16-17 novembre de la même année. A la même époque, Jean-Marc Lévy-Leblond m'a convaincu de consacrer mes loisirs de retraité à l'écriture d'une thèse de philosophie où cette histoire est également développée. Je les remercie tous très chaleureusement.

---

<sup>20</sup> Voir sa notice sur Wikipedia

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Michel\\_Soutif](https://fr.wikipedia.org/wiki/Michel_Soutif)

<sup>21</sup> Les notes de cette conférence ont été déposées sur le site

<https://shs.hal.science/halshs-01167427/file/Lobry.pdf>

<sup>22</sup> Les actes de cette conférence sont édités sous le titre *Univers mathématiques* par les Éditions du Somnium

<https://somniumeditions.fr>