



HAL
open science

Rôle de la visualisation dans la conceptualisation des objets de l'Analyse en classes préparatoires -Cas d'approximation polynômiale locale d'une fonction

Fatma Belhaj Amor

► To cite this version:

Fatma Belhaj Amor. Rôle de la visualisation dans la conceptualisation des objets de l'Analyse en classes préparatoires -Cas d'approximation polynômiale locale d'une fonction. 2024. hal-04411114

HAL Id: hal-04411114

<https://hal.science/hal-04411114>

Preprint submitted on 23 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rôle de la visualisation dans la conceptualisation des objets de l'Analyse en classes préparatoires – Cas d'approximation polynômiale locale d'une fonction

Fatma Belhaj Amor

Abstract. The concept of local polynomial approximation of a function plays a decisive role in solving problems related to intra- and extra-mathematical domains at the beginning of the preparatory classes for engineering studies. This article presents the development and implementation of a situation, in the context of collaborative work with the teacher of the first-year Physics-Chemistry (PC) class, enabling the visualization of graphical representations with a view to helping students appropriate the concepts of limited developments and the best approximation of a function in the vicinity of a point. The methodology used to analyze the students' work was based, within the framework of the theory of didactic situations, on the model of reasoning analysis, with a view to identifying and characterizing the difficulties experienced by the students in conceptualizing these mathematical objects. Experimentation demonstrated the value of graphs as a model for polynomial approximation of a function in the vicinity of a real. Indeed, visualizing graphical representations helped students distinguish the formulas used to determine a polynomial approximation of a function in the vicinity of a real: the Taylor-Young formula and the generalized definition of limited development.

Keywords. Local approximation of a function, didactic situation, mathematical reasoning, students' difficulties, conceptions.

Résumé. Le concept d'approximation polynômiale locale d'une fonction joue un rôle déterminant dans la résolution des problèmes liés aux domaines intra et extra-mathématiques au début du cycle des classes préparatoires aux études d'ingénieurs. Cet article présente l'élaboration et la mise en œuvre d'une situation, dans le cadre d'un travail collaboratif avec l'enseignante de la classe de première année Physique-Chimie (PC), permettant la visualisation des représentations graphiques en vue d'aider les étudiants à l'appropriation des concepts de développements limités et de la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un point. La méthodologie d'analyse des travaux des étudiants est basée, dans le cadre de la théorie des situations didactiques, sur le modèle d'analyse des raisonnements en vue d'identifier et de caractériser les difficultés éprouvées par les étudiants lors de la conceptualisation de ces objets mathématiques. L'expérimentation a donné l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel. En effet, la visualisation des représentations graphiques a aidé les étudiants à distinguer les formules utilisées pour déterminer une approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel : la formule de Taylor-Young et la définition généralisée du développement limité.

Mots-clés. Approximation locale d'une fonction, situation didactique, raisonnement mathématique, difficultés des étudiants, conceptions.

Table des matières

1. Introduction et problématique.....	3
2. Cadre et outils théoriques.....	5

2.A.	La théorie des situations didactiques : Un cadre pertinent de l'analyse des raisonnements ..	5
2.A.a.	Notion de situation à dimension adidactique	6
2.A.b.	Institutionnalisation des savoirs et des connaissances en termes de répertoire didactique	6
2.B.	Outillages didactiques pour l'analyse du raisonnement mathématique	7
2.B.a.	Représentations sémiotiques d'un concept mathématique.....	7
2.B.b.	Les différents paradigmes liés à l'apprentissage de l'Analyse.....	8
2.B.c.	Analyse logique du raisonnement en termes de dimension sémantique et/ou syntaxique	8
2.B.d.	Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances lors de la production d'un raisonnement	9
3.	Méthodologie mise en œuvre	9
3.A.	Sujets	9
3.B.	Instrumentations	10
3.B.a.	Présentation de la situation	10
3.B.b.	Les données recueillies avant la mise en œuvre de la situation	10
3.B.c.	Les données recueillies lors de la mise en œuvre de la situation	11
3.C.	Éléments d'analyse <i>a priori</i> de la situation sur les plans mathématique et didactique.....	12
3.D.	Méthode d'analyse des données.....	12
3.D.a.	Elaboration du modèle d'analyse des raisonnements	12
3.D.b.	Les raisonnements attendus.....	13
4.	Principaux résultats de l'analyse des raisonnements	15
4.A.	Analyse globale des raisonnements.....	16
4.A.a.	Analyse de la question liée à la détermination des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction au voisinage de 0.....	16
4.A.b.	Analyse de la question liée à la détermination de la meilleure approximation de la fonction au voisinage de 0.....	18
4.A.c.	Analyse de la question (2-c).....	18
4.B.	Analyse qualitative : Exemples des épisodes du trinôme 1.....	20
4.B.a.	Episode 2 : Détermination des représentations algébriques des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0.....	20
4.B.b.	Episode 3 : Détermination de la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0.....	20
4.B.c.	Episode 4 : Détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0.....	21
5.	Intérêt et limite de l'étude réalisée	21

6. Conclusion et perspectives.....	22
Références.....	23

1. Introduction et problématique

Au début du cycle des classes préparatoires aux études d'ingénieurs, les objets d'approximation locale d'une fonction sont introduites afin d'être des nouvelles techniques permettant l'étude d'une fonction, le calcul de sa limite et l'existence de ses intégrales lors de la transition Secondaire/Supérieur, ainsi que l'étude de la convergence des séries dans le domaine des mathématiques en première année Physique-Chimie (PC). Par ailleurs, les étudiants mobilisent ces objets en tant que nouvelle méthode lors de la détermination des approximations de fonctions par des polynômes au voisinage d'un réel dans le domaine de la physique, l'optique, la mécanique, etc.

La conceptualisation des notions de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes, de la formule de Taylor-Young et de développements limités nécessitent l'articulation des connaissances et des savoirs qui relèvent des domaines de l'Analyse fonctionnelle et de la Topologie. Par ailleurs, la notion de « voisinage d'un réel » est introduite dans le chapitre « Analyse asymptotique » de l'Analyse avant d'être traitée en Topologie à la fin de première année des classes préparatoires.

Une étude d'enseignement et d'apprentissage du concept de développement limité, en termes de transposition didactique en première année du cycle des classes préparatoires aux études d'ingénieurs en Tunisie, ont prouvé que ce concept mathématique n'est pas introduit en tant que nouvelle connaissance inhérente à l'approximation locale d'une fonction permettant d'articuler ses différentes représentations dans des domaines intra et extra mathématiques, (Belhaj Amor, 2018). Nos travaux ont mis en évidence un phénomène important : il existe des difficultés récurrentes éprouvées par les étudiants en rapport avec l'appropriation et l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction à l'entrée dans le supérieur, (Belhaj Amor, 2020).

Dans le domaine de l'étude des fonctions, certains chercheurs en didactique ont prouvé que les difficultés rencontrées par les étudiants résultent principalement du changement de contrat didactique lors de la transition Secondaire/Supérieur, (Pepin, 2014 ; Gueudet & Pepin, 2018 ; Bloch & Gibel, 2022). Ce changement de contrat se réalise soit au niveau du processus de l'étude des signes et des représentations (Berger, 2004 ; Bardini & Pierce, 2018), soit au niveau de paradigme (Winsløw, 2007). Par ailleurs, certains travaux conduits sur la notion des séries de Taylor ont établi que les étudiants sont confrontés à des difficultés pour réaliser les tâches, (Alcock & Simpson, 2005), et des grandes difficultés à raisonner qui peuvent atteindre « un état de surcharge cognitive », (Kung & Speer, 2010).

Certains chercheurs explorent la manière adoptée par des mathématiciens pour transmettre certaines notions et certains concepts, comme la convergence ponctuelle dans une série de Taylor (Martin, 2012) et les notions de Topologie (Nemirovs & Smith, 2011 ; Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011). Par ailleurs, certains auteurs ont prouvé l'intérêt du changement du processus d'enseignement-apprentissage des concepts mathématiques par l'articulation de l'approche graphique "dynamique" et algébrique, au niveau supérieur. En effet, ils ont mis en œuvre des dispositifs pédagogiques en vue

d'aider les étudiants à établir des liens entre les représentations algébriques et celles graphiques des polynômes de Taylor, et notamment des images visuelles dynamiques à l'aide d'un logiciel CAS (Computer Algebra System), (Kidron, 2003 ; Kidron & Zahavi, 2002). Une étude des techniques d'approximations des fonctions (Alcock & Simpson, 2005 ; Kidron, 2003 ; Oehrtman, 2009) souligne l'influence des images graphiques sur l'apprentissage de la convergence des séries de Taylor, (Kidron & Zehavi, 2002 ; Kidron, 2003) et de l'approximation polynômiale d'ordre 1 d'une fonction (Artigue, 2002).

Ces précédents travaux n'ont pas ciblé l'intérêt de l'élaboration et la mise en œuvre, dans le cadre d'un travail collaboratif avec l'enseignant de la classe, une situation d'enseignement-apprentissage permettant la visualisation des représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations polynômiales au voisinage d'un point en vue d'aider les étudiants à surmonter les difficultés liées à la conceptualisation du concept d'approximation polynômiale locale d'une fonction en première année des classes préparatoires de filière Physique-Chimie (PC).

Nous avons conduit une étude institutionnelle des programmes de première année (PC) et de quatrième année secondaire de filière Sciences Expérimentales, ainsi que le polycopié du cours de l'enseignante avec qui nous avons ensuite conduit la recherche de nature collaborative. Cette étude nous amène à conclure que les recommandations des programmes invitent les enseignants à aider les élèves à la rédaction autonome et l'explication orale d'un raisonnement mathématique en articulant ses différentes représentations (analytique, algébrique, graphique, numérique et géométrique), ainsi que d'introduire une nouvelle notion à partir de ses différentes représentations et par la prise en considération des connaissances antérieures de l'étudiant.

Par contre, l'approche graphique n'était pas initialement convoquée par l'enseignante de classes préparatoires (PC). En outre, au niveau Secondaire, les élèves sont habitués à construire des représentations graphiques lors de l'introduction d'une nouvelle notion et à déterminer les représentations algébriques des fonctions affines et paraboliques à partir de ses interprétations graphiques.

Ces travaux nous amènent à établir l'intérêt du changement du processus d'enseignement-apprentissage du concept d'approximation polynômiale locale d'une fonction par la proposition d'une situation (Brousseau, 1998) permettant l'usage raisonné de ses représentations graphiques.

Dans notre expérimentation, l'enseignante a un rôle très spécifique par l'intégration de deux situations lors de l'enseignement du chapitre "Analyse asymptotique" en utilisant le logiciel dynamique Geogebra pour la construction graphique des fonctions étudiées, (Belhaj Amor, 2022). Après l'enseignement du concept de développement limité déduit de la formule de Taylor-Young et celui de sa définition généralisée, nous souhaitons permettre aux étudiants de percevoir la différence entre ces deux définitions en vue de l'appropriation de ce concept mathématique à partir des conditions nécessaires de leurs utilisations.

Dans le cadre de l'apprentissage des objets mathématiques, nous rejoignons le point de vue de Brousseau et Gibel (2005) qui donnent l'intérêt de l'analyse détaillée des raisonnements produits par les étudiants confrontés à une situation en vue d'étudier la nature et l'origine des erreurs apparaissant dans leurs productions. Cette analyse des erreurs se réalise par l'étude du développement cognitif et du fonctionnement des connaissances mobilisées par les élèves. Un ensemble des connaissances

fausses constitue une *conception erronée*, (Brousseau, 1989). Cette conception sera difficile à modifier ou à rejeter et qui donnera lieu à des conflits cognitifs véritables. Dans ce cas, elle fait un obstacle : ontogénique, épistémologique lié à la genèse historique du concept ou didactique lié au choix de l'enseignement. La question qui se pose est la suivante :

L'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à une situation réelle en classe permet-elle d'identifier leurs conceptions (valides ou erronées) afin d'étudier la nature et l'origine de leurs difficultés inhérentes à l'appropriation et l'usage raisonné des objets d'approximation polynômiale locale d'une fonction en première année (PC) ?

Nous commençons cet article par la présentation de cadre et des outils théoriques adoptés afin de conduire une analyse plus fine des raisonnements produits par des étudiants (âgés de 18 à 20 ans) confrontés à une situation en termes de connaissances et de savoirs mobilisés. Dans la deuxième partie, nous expliciterons la méthodologie de recherche mise en œuvre et la méthode d'analyse de la séquence. La troisième partie porte sur la présentation synthétique des principaux résultats de l'analyse *a posteriori* des travaux des trinômes qui est basée sur le modèle d'analyse du raisonnement. Finalement, nous présenterons l'intérêt de ce travail et nous ouvrirons autres perspectives dans le domaine de didactique de l'Analyse.

2. Cadre et outils théoriques

A l'instar de Gibel (2018), un raisonnement mathématique est classifié d'après ses fonctions et le type de situation étudiée. Il est intéressant de définir les conditions dans lesquelles les raisonnements mathématiques ont été produits lors de la résolution d'une situation à dimension adidactique au niveau du Primaire, du Secondaire et du Supérieur, (Ibidem). L'étude d'un raisonnement produit par un étudiant confronté à une situation d'action par la mise en considération du fonctionnement des connaissances nous permettra *a priori* d'identifier la nature et l'origine de ses difficultés.

2.A. La théorie des situations didactiques : Un cadre pertinent de l'analyse des raisonnements

Dans notre travail, nous mettons la focale sur l'étude du fonctionnement et du développement cognitif des connaissances et des savoirs mobilisés par l'étudiant lors de son action pour construire un apprentissage du concept d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel par confrontation à une situation mathématique en classe. En mobilisant les concepts de la théorie des situations didactiques, cette analyse nous offre la possibilité d'étudier leurs connaissances et leurs savoirs mobilisés, ainsi que le rôle de l'enseignant. Cette dialectique sujet/situation nécessite une étude des rapports établis entre l'étudiant et les savoirs inhérents à la Topologie et à l'Analyse fonctionnelle. L'analyse didactique de cette dialectique nous permettra *a priori* d'étudier les conceptions des étudiants (valides ou erronés) en vue de produire un raisonnement.

Par ailleurs, le professeur a un rôle déterminant dans le processus d'enseignement-apprentissage des objets d'approximation polynômiale locale d'une fonction en première année (PC). Il convient alors d'effectuer une analyse précise des interactions entre le sujet et le milieu avec lequel il interagit. Nous devons conduire une analyse didactique de la relation entre enseignant, étudiants, savoirs et milieu effectuée lors de la confrontation des étudiants à une situation réelle en classe. Cette relation

didactique se réalise dans un champ de l'étude des expérimentations. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) est un cadre théorique pertinent qui permet l'analyse de ces expérimentations par l'adaptation des notions de situation, d'institutionnalisation des savoirs et des connaissances et de schéma de la structuration du milieu (Bloch, 2005).

2.A.a. Notion de situation à dimension adidactique

Dans le système sujet-milieu, l'activité de l'enseignant et de l'étudiant s'articulent tout au long de déroulement d'une séquence. En effet, en classe lors de l'interaction de l'étudiant en situation réelle, il peut se saisir des problèmes et des difficultés, à ce moment, l'enseignant doit interagir pour lui aider.

Dans notre cas de la confrontation des étudiants à une situation à dimension adidactique liée à notre objet d'étude, l'enseignant fournit à la réflexion de ses étudiants. En effet, il admet un rôle important lors des interactions étudiant/savoirs et étudiant/milieux, (Bloch, 1999). Dans ce cas, on parle d'une situation à dimension adidactique qui

- "- d'une part, est dépendante des connaissances présentes dans le milieu et des connaissances que l'enseignant peut y injecter ;
 - d'autre part se manifeste par une interaction de connaissances élèves / professeur."
- (Bloch, 1999, p.33)

Dans notre travail, nous nous intéressons notamment à une situation d'action au point de vue de la construction d'un savoir.

2.A.b. Institutionnalisation des savoirs et des connaissances en termes de répertoire didactique

Selon les travaux de Brousseau, l'institutionnalisation des savoirs est liée à un processus didactique et résulte d'une intervention spécifique permettant à l'étudiant et l'enseignant de « reconnaître » et de légitimer « l'objet d'enseignement ». Par ailleurs, lorsque l'étudiant est confronté à une situation d'action, il a recours à ses connaissances antérieures et ses savoirs qui sont sous forme de définitions, propriétés, formules, théorèmes, des règles du calcul formel et algébrique, etc. Cet ensemble des savoirs et des connaissances mobilisés constitue le répertoire didactique, (Gibel, 2018).

- Répertoire didactique de la classe

Dans le cas de l'enseignement de la notion d'approximation locale d'une fonction en première année (PC), le répertoire didactique de la classe est constitué des attendus des étudiants par le professeur, suite à son enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction dans le chapitre « Analyse asymptotique ». Dans le champ de l'étude locale d'une fonction, nous pouvons distinguer deux composantes du répertoire didactique :

- le répertoire didactique du Secondaire : il intègre toutes les propriétés, les formules, les techniques, les théorèmes, les règles du calcul algébrique et formel enseignés au niveau Secondaire ;
- le répertoire didactique du Supérieur : il intègre les propriétés, les formules, les définitions, les techniques, les théorèmes, etc. qui sont liés aux notions de développement limité d'une fonction au voisinage d'un point et à la formule de Taylor-Young. En fait, il est le répertoire didactique des connaissances et des savoirs enseignés dans la classe de première année (PC).

- Répertoire didactique de l'étudiant

En classes préparatoires, les étudiants considèrent que les cours et les travaux dirigés dispensés par l'enseignant ne suffisent pas pour l'apprentissage et l'usage raisonné des notions et des concepts mathématiques. D'une certaine manière, ceci constitue pour les étudiants un prolongement de l'étude. En conséquence, l'étudiant, confronté à une situation mathématique en classe, a recours à son propre répertoire didactique, selon Gibel (2018).

La résolution par l'étudiant d'une situation à dimension adidactique nécessite l'utilisation de son répertoire de représentation. De ce fait, chaque étudiant décide de la mise en œuvre d'une suite d'actions, valides ou erronées, relevant de l'usage de son répertoire d'action. À partir des résultats obtenus, il va modifier son répertoire de représentation, (Ibidem).

Pour ceci, nous adoptons, dans le cadre de la théorie des situations didactiques, le modèle d'analyse des raisonnements introduit par Bloch et Gibel (2011) et nous envisageons de l'enrichir par des outils théoriques permettant l'étude des connaissances et des savoirs d'ordres topologique et fonctionnel en termes de conceptions lors de l'appropriation et l'usage raisonné du concept d'approximation polynômiale locale d'une fonction.

2.B. Outillages didactiques pour l'analyse du raisonnement mathématique

Dans le cadre de l'analyse d'un raisonnement mathématique en vue d'étudier des erreurs des étudiants, nous rejoignons le point de vue de de Brousseau (1998) qui souligne que le sens d'une connaissance mathématique se définit par plusieurs moyens parmi eux l'ensemble des conceptions.

Dans notre travail, une conception est un outil d'ordre théorique qui permet l'analyse des observations des étudiants en situation, (Artigue, 1991). De ce fait, une *conception* est considérée comme un outil pour la construction d'un concept mathématique qui permet la modélisation de l'étudiant en tant qu'agent apprenant, (Ibidem). Par ailleurs, une *conception* est liée à la connaissance de l'apprenant en situation. Elle est distinguée par les représentations et les traitements qu'elle mobilise dans un domaine scolaire. En conclusion, une « *conception est l'instance d'un concept par le système du [sujet<>milieu]* », (Ibidem.).

Le système des représentations joue un rôle déterminant dans la conception. Nous allons attacher à définir les représentations selon la sémiotique de Peirce et les registres de représentation sémiotique de Duval (2006).

2.B.a. Représentations sémiotiques d'un concept mathématique

Nous pensons que l'étude des signes nous aidera à conduire une analyse plus fine d'un concept mathématique. La *sémiotique* désigne l'étude des signes et de leurs significations.

Par ailleurs, une analyse de l'activité mathématique nécessite des outils permettant l'analyse des connaissances et des savoirs mobilisés par l'étudiant. Comme indiqué dans les travaux de Bloch et Gibel (2011), cette analyse nécessite d'avoir recours à une analyse sémiotique de Peirce afin d'analyser les signes produits, leurs usages et leurs transformations. A l'instar de ces didacticiens, l'étude des signes qui apparaissent dans la production des étudiants nous aide à identifier les différentes conceptions, valides ou erronées.

Comme le spécifie Duval (2006), la distinction entre un objet et ses différentes représentations est obligatoire dans l'analyse sémiotique d'une activité mathématique. Le seul moyen d'avoir accès à un objet mathématique est de prendre en compte ses différentes représentations sémiotiques.

Dans notre étude des objets inhérents à l'approximation polynômiale locale d'une fonction, nous pouvons distinguer plusieurs registres de représentation sémiotique : algébrique, analytique, graphique, géométrique et numérique. De ce fait, la sémiotique triadique de Peirce, couplée à l'approche sémiotique de Duval (2006), pourrait nous permettre d'analyser le processus des raisonnements produits par les étudiants.

2.B.b. Les différents paradigmes liés à l'apprentissage de l'Analyse

L'étude historico-épistémologique des notions liées aux objets d'approximation locale d'une fonction, nous a permis d'établir l'existence des obstacles (Brousseau, 1989) résultant d'une rupture d'ordre épistémologique et qui sont étroitement liés au changement de paradigme, (Belhaj Amor, 2022). Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Kuzniak, Montoya, Vandebrouck et Vivier (2015) qui ont conduit une étude de l'évolution historique des mathématiques et son impact sur l'enseignement actuel en identifiant trois paradigmes de l'Analyse standard :

"Paradigme [Analyse Arithmetico-géométrique] (AG) (...) qui permet des interprétations provenant, avec quelques implicites, de la géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel (...).

Paradigme [Analyse Calculatoire] (AC) : (...) dans ce calcul algébrique généralisé, les règles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits (...).

Paradigme [Analyse Infinitésimale] (AI) : "(...) un travail spécifique et formel s'appuie sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité, (...)." (Kuzniak, Montoya, Vandebrouck & Vivier, 2015, p.7)

Dans notre étude, nous nous intéressons à identifier clairement dans quel paradigme s'inscrit le raisonnement de l'étudiant et notamment sa manière d'appréhender les conceptions. Nous pensons que l'identification des paradigmes de l'Analyse standard nous permettra d'étudier d'une manière plus précise l'évolution des connaissances et des savoirs mobilisés par les étudiants confrontés à une situation réelle en classe en vue de produire un raisonnement.

2.B.c. Analyse logique du raisonnement en termes de dimension sémantique et/ou syntaxique

Afin de conduire une analyse plus approfondie des raisonnements, nous pensons nécessaire de relier le signe, son sens et sa dénotation lors de la construction et l'utilisation du concept d'approximation locale d'une fonction. Pour cela, nous procéderons à une analyse logique d'un concept mathématique en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique introduites dans les travaux de Frege (1971) et Tarski (1974) et développées dans les travaux de Kouki, Belhaj Amor & Hachaïchi (2016) et Belhaj Amor (2018, 2020) pour étudier les raisonnements produits par les étudiants confrontés à une situation à dimension adidactique.

Dans notre travail, nous distinguons la dimension sémantique, la dimension syntaxique et l'articulation de ces deux dimensions lors de la construction des conceptions valides dans des productions des étudiants. La syntaxe fournit des règles des transformations et formulations des

expressions analytique et algébrique lors de son appropriation et de son usage par l'adaptation des définitions ou théorèmes ou propriétés du concept mathématique. La sémantique désigne toute interprétation des représentations graphiques des objets d'approximation locale d'une fonction, ainsi que toute interprétation ou vérification des expressions algébriques ou analytiques. L'articulation sémantique/syntaxique est liée à la mobilisation des moyens de contrôle, de justification et de vérification lors de l'utilisation et la mise en œuvre d'une syntaxe soit une propriété, une formule, une définition ou un théorème, etc. du répertoire didactique.

2.B.d. Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances lors de la production d'un raisonnement

Au début du cursus universitaire, lorsque les étudiants sont confrontés en classe à une situation, nous conduisons des analyses didactiques de leurs productions mettant en jeu l'usage d'une connaissance ou d'un savoir. Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Robert (1998) qui a déterminé les caractéristiques de mise en fonctionnement des connaissances et des savoirs, en termes d'outils, relatives à un niveau scolaire bien déterminé. Elle a distingué trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves : Niveau technique, niveau des connaissances mobilisables et celui des connaissances disponibles.

Dans notre travail, les étudiants confrontés à une situation peuvent rencontrer des difficultés inhérentes liées :

- au niveau technique : Par exemple, les étudiants sont confrontés au problème lié au fonctionnement de l'outil " approximation locale d'une fonction ". En effet, ils ne parviennent pas à appliquer la formule de Taylor-Young ou la définition généralisée lors de la détermination des développements limités d'une fonction au voisinage d'un réel ;
- au niveau des connaissances mobilisables : Par exemple, ils ne savent pas appliquer la méthode algébrique (calcul de limite) lors de la détermination de la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel ;
- au niveau des connaissances disponibles : Par exemple, ils décident seuls d'utiliser la définition généralisée du développement limité pour déterminer l'expression du reste à partir de la fonction.

3. Méthodologie mise en œuvre

3.A. Sujets

Dans l'étude réalisée, les étudiants sont inscrits en première année des classes préparatoires Physique-Chimie (PC) et ont été admis au baccalauréat de filière Sciences Expérimentales avec un score élevé. Par ailleurs, une enseignante expérimentée de l'Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Tunis (IPEIT), Madame Rajia Slim, a accepté de participer à ce travail de recherche.

3.B. Instrumentations

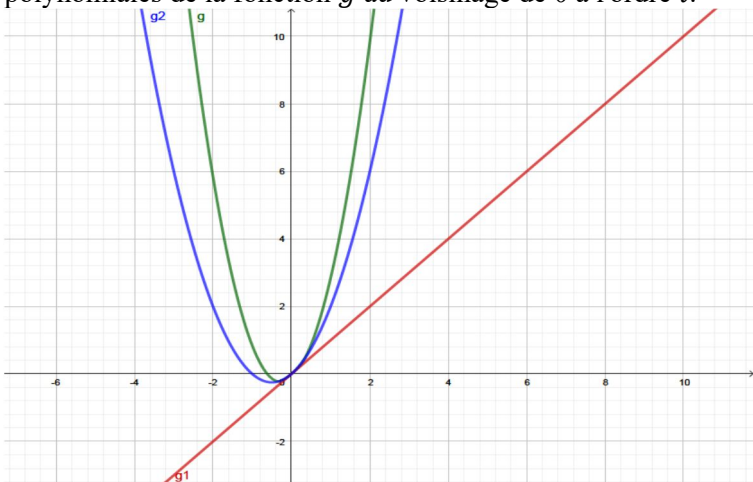
3.B.a. Présentation de la situation

En respectant les recommandations du programme de première année (PC), nous avons construit et élaboré, en collaboration étroite avec l'enseignante de la classe, aux étudiants une situation permettant d'introduire une propriété très importante de la notion d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel par l'usage de ses différentes représentations en articulant les dimensions sémantique et syntaxique par un travail s'inscrit dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

Dans la troisième séance de chapitre "Analyse asymptotique", nous avons fait la dévolution aux étudiants du problème mathématique suivant :

Soit la fonction g définie par : $g(x) = x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1-a). Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} .
b). Déterminer l'expression de la fonction prolongée de g qu'on notera toujours g .
 On considère les représentations graphiques des fonctions g , g_1 et g_2 avec g_i les approximations polynômiales de la fonction g au voisinage de 0 à l'ordre i .



2-a) Déterminer les expressions des fonctions g_1 et g_2 .
b) Quelle est la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0 ?
c) Donner les développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0.

3-a) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
b) La fonction g est-elle deux fois dérivable en 0 ?

4) Peut-on exprimer g_2 en fonction des coefficients $g(0)$ et $g'(0)$?

Tableau 1 - Enoncé du problème mathématique

Cette situation vise à donner l'intérêt de la définition généralisée du concept de développement limité en évaluant la capacité des étudiants à articuler les différentes représentations des objets d'approximation polynômiale locale d'une fonction en vue d'introduire la propriété du concept de développement limité. Cette propriété est liée à l'étude d'un cas particulier d'une fonction au voisinage d'un réel déterminé. En effet, la fonction objet d'étude n'est pas définie en 0, cependant elle admet une approximation polynômiale au voisinage de ce réel sans-être deux-fois dérivable en ce réel.

3.B.b. Les données recueillies avant la mise en œuvre de la situation

L'enseignante a planifié son enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » de manière à programmer deux séances afin de proposer deux situations en classe. Elle a accepté d'interagir avec nous et de suivre nos recommandations inhérentes à la gestion des phases au cours desquelles les

étudiants sont confrontés à une situation à dimension adidactique en privilégiant, pour répondre à leurs éventuelles questions, le recours à une guidance faible. Elle organise le processus de la transposition didactique des savoirs à enseigner aux savoirs enseignés de ce chapitre en suivant le déroulement prévu de notre expérimentation.

L'enseignante commence le chapitre « Analyse asymptotique », en janvier 2020, par l'introduction du concept de la relation de comparaison des suites et des fonctions. A la fin de cette séance, elle informe ses étudiants des deux classes de (PC) qu'ils vont travailler en groupes hétérogènes, plus précisément en trinômes, pendant les deux prochaines séances dans l'amphi. Ils ont accepté que nous récupérions la photocopie de leurs productions après que l'enseignante les ait informés des enjeux et du cadre de la recherche. Pendant la deuxième séance de ce chapitre, l'enseignante fait un rappel du concept de relation de comparaison des fonctions, ensuite, elle propose une situation, permettant l'introduction du concept de la formule de Taylor-Young et la meilleure approximation d'une fonction par l'usage du logiciel de Geogebra, aux huit groupes (Belhaj Amor, 2022). A partir de leurs raisonnements produits et la visualisation des représentations graphiques, elle introduit la formule de Taylor-Young au début de la troisième séance de ce chapitre. Ensuite, elle propose la situation objet d'étude de cet article à la classe comportant 24 étudiants qui est divisée en groupes de trinôme.

L'accord du responsable administratif de l'Institut Préparatoire (IPEIT) nous permet d'enregistrer les séances en des vidéos et de prendre des photos.

3.B.c. Les données recueillies lors de la mise en œuvre de la situation

L'enseignante commence la troisième séance du chapitre "Analyse asymptotique" par un rappel sur la formule de Taylor-Young puis elle introduit la définition généralisée du concept de développement limité à partir d'un "cours dialogué" en utilisant le logiciel Geogebra (Belhaj Amor, 2022). Dans un deuxième temps, elle distribue elle-même à chaque étudiant l'énoncé de la situation afin de leur laisser d'avantage du temps pour travailler en trinôme. Ensuite, elle construit les représentations graphiques des fonctions étudiées par l'utilisation du logiciel Geogebra et de projecteur au tableau. Tous les documents sont autorisés. Quand les étudiants rencontrent des difficultés pour répondre aux questions et que leurs échanges ne leur permettent pas de les surmonter alors ils ont la possibilité de demander l'aide auprès de l'enseignante pour pallier les insuffisances du milieu auquel ils sont confrontés. Cette dernière, par une guidance faible (Bartolini-Bussi, 2009), le plus souvent sous la forme d'un questionnement adéquat, pourra les amener à envisager une interprétation de leurs productions ou à prendre de nouvelles décisions. Après trente minutes, l'enseignante ramasse les copies des trinômes. Par la suite, elle laisse la parole aux étudiants de répondre oralement aux différentes questions proposées dans la situation. L'intervention de l'enseignante dépend de la nature de la réponse, valide ou erronée, donnée. Son rôle principal est de susciter le débat au sein de la classe quant à la pertinence, la validité et la complexité du raisonnement produit. Ensuite, elle s'appuie sur ces raisonnements produits par les étudiants afin d'introduire la propriété du développement limité.

3.C. Eléments d'analyse *a priori* de la situation sur les plans mathématique et didactique

Dans cette partie, nous présentons des éléments d'analyse *a priori* de la situation sur le plan didactique et mathématique. Compte tenu des contraintes éditoriales, nous avons choisi de présenter dans cet article uniquement l'analyse détaillée des questions (2-a), (2-b) et (2-c) de l'énoncé du problème mathématique en vue d'étudier les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'appropriation et l'usage raisonné du concept de développement limité et de la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un point.

Sur le plan didactique, la situation est assimilable à une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999) visant l'utilisation des connaissances et des savoirs inhérents aux différentes représentations du concept d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel lors de son appropriation dans le paradigme [AI] et son usage raisonné dans les différents paradigmes [AI], [AC] ou [AG].

Les principaux objectifs de cette situation sont :

- ✓ la détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 d'une fonction prolongée par continuité en ce réel ;
- ✓ l'étude de cas d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 alors qu'elle n'est pas nécessairement deux fois-dérivable au voisinage de ce réel ;
- ✓ la détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 d'une fonction au voisinage de 0 par l'articulation de ses différentes représentations numérique, graphique, géométrique, algébrique et analytique.

Nous distinguons quatre variables didactiques :

- VD1 : la nature de la fonction à étudier. Dans notre cas, la fonction g est de classe $C^n(R \setminus \{0\})$ et admet une approximation locale d'ordre 2 au voisinage de 0.
- VD2 : le choix du type de représentation d'une fonction mobilisée lors de la détermination de ces expressions algébrique et analytique. Les fonctions sont présentées à partir de leurs représentations graphiques.
- VD3 : le choix de la formulation de l'expression du reste du développement limité à partir de l'expression de la fonction donnée.
- VD4 : le choix de l'ordre du développement limité à réaliser.

3.D. Méthode d'analyse des données

Notre méthodologie des analyses *a priori* et *a posteriori* des travaux des étudiants est basée, dans la théorie des situations didactiques, sur le modèle d'analyse des raisonnements introduit par Bloch et Gibel (2011, 2022) et Gibel (2018) et développé dans nos travaux de recherche.

3.D.a. Elaboration du modèle d'analyse des raisonnements

Dans notre étude, nous conduirons une analyse des raisonnements qui est orientée selon quatre axes dont le premier est lié au niveau du milieu de la situation et de paradigmes correspondants, (Belhaj Amor, 2022). Le deuxième axe se réalise selon l'analyse des fonctions des raisonnements (Bloch & Gibel, 2011). Le troisième est l'étude des signes (Peirce) et des représentations sémiotiques (Duval, 2006) observables. Le dernier axe est l'étude de l'usage logique des connaissances antérieures

de l'étudiant et les éléments du contrôle. Nous présentons la synthèse de la méthodologie d'analyse des raisonnements dans ce schéma :

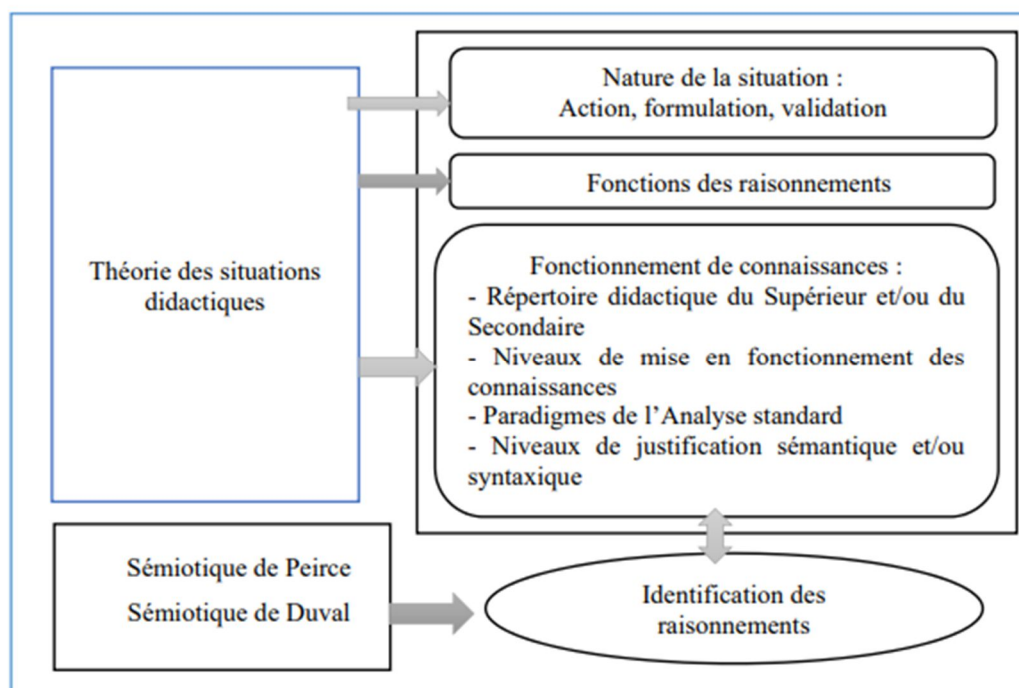


Figure 1 - Schéma du modèle d'analyse des raisonnements

Dans notre travail, nous adoptons le cadre de la théorie des situations didactiques en mettant la focale sur les notions de conception, connaissance, savoir, situation mathématique, situation à dimension adidactique, institutionnalisation et structuration du milieu. Lorsque les étudiants vont se confronter à une situation réelle en classe, nous allons nous intéresser à l'analyse de leur production en termes de raisonnement :

- du point de vue de conceptions : Notre nous intéressons à connaître si la production relève du paradigme [AC], si elle relève du paradigme [AG] ou si elle relève du type d'Analyse spécifique au Supérieur : le paradigme [AI] ;
- du point de vue logique : Notre travail est spécifique en distinguant deux éléments très importants du raisonnement par l'identification de la dimension sémantique ou de la dimension syntaxique ou de l'articulation des deux dimensions ;
- du point de vue des signes : C'est l'étude des signes qu'apparaissent dans un raisonnement par l'analyse sémiotique de Peirce en référant aux registres de représentation sémiotique de Duval (2006) ;
- du point de vue du fonctionnement des connaissances et des savoirs mobilisés par leurs actions sur le milieu : C'est l'étude de fonction, forme et nature du raisonnement.

3.D.b. Les raisonnements attendus

Les étudiants confrontés à une situation mathématique vont travailler en groupe afin de rédiger la synthèse de leurs raisonnements dans des copies.

Notre méthodologie repose sur la prise en compte des quatre composantes du modèle d'analyse de raisonnement qui est déduit du modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011) et de Gibel (2018), lors de l'analyse des différents types de raisonnement élaborés par les étudiants dans une situation mathématique. Par ailleurs, dans ce type de situation, les niveaux de milieux où se situent les étudiants sont : le milieu objectif (M_2), le milieu de référence (M_1) et le milieu d'apprentissage (M_0).

Nous présentons l'application du modèle d'analyse des raisonnements produits par les étudiants confrontés à la situation dans des tableaux selon les axes. Cette méthodologie d'analyse de raisonnement par la mise en jeu de ses composantes (fonctions, dimension sémiotique, nature et justification) associée à chaque niveau de milieux M_2 , M_1 et M_0 est réalisée selon ces quatre axes :

- Fonctions des raisonnements : Dans chaque trinôme les étudiants vont interagir entre eux pour décider des actions à réaliser sur les objets mathématiques, effectuer et contrôler le calcul, interpréter des représentations graphiques, etc. .

Milieu M_2	Milieu M_1	Milieu M_0
R_{11} [AC], [AG] et [AI] - Décision de la stratégie de calcul de limite de la fonction - Décision d'interpréter les représentations graphiques pour déterminer les approximations polynômiales de g au voisinage de 0 - Décision de calculer la limite d'une fonction pour déterminer l'expression du reste.	R_{12} [AG], [AC] et [AI] - Interpréter les représentations graphiques de fonctions g, g_1 et g_2 afin de déterminer la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0 - Décider du calculer les limites du rapport des fonctions afin de déterminer la meilleure approximation de g au voisinage de 0 - Contrôler la cohérence et la validité des résultats - Prouver l'existence et l'unicité des approximations polynômiales g_1 et g_2 de g au voisinage de 0	R_{13} [AI] et [AG] - Contrôler la cohérence des résultats obtenus par des procédures analytiques avec les résultats obtenus graphiquement. - Généraliser le concept du développement limité - Développement limité au voisinage d'un réel d'une fonction n'est pas définie en ce réel. - Formaliser la propriété de concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel - Justification analytique et graphique de la meilleure approximation de g au voisinage de 0 - Contrôler, établir des liens et effectuer des interprétations dans les registres graphique et géométrique

Tableau 2 - Le modèle milieu/fonctions des raisonnements/paradigmes

- Niveau d'utilisation des symboles, des signes et des représentations sémiotiques : Ils vont devoir mobiliser des signes et des symboles pour effectuer du calcul de limite de l'expression du reste, d'interpréter les représentations graphiques, ainsi que pour modéliser l'écart entre la fonction étudiée g et son approximation polynômiale au voisinage de 0 afin de déterminer la meilleure approximation de cette fonction au voisinage de ce réel.

Milieu M_2	Milieu M_1	Milieu M_0
R_{21} [AI] - Symboles iconiques pour désigner la somme ou le quotient de fonctions	R_{22} [AI] - Indices spécifiques pour mettre le lien entre une fonction et ses approximations polynômiales ainsi qu'entre ses différentes approximations locales au voisinage de 0 - Symboles spécifiques pour modéliser l'écart entre l'approximation polynômiale et la fonction étudiée.	R_{23} [AI] Arguments formels spécifiques : - Symboles arguments liés à la construction des preuves (l'existence et l'unicité des approximations polynômiales, les tracés des courbes, etc.)

Tableau 3 - Le modèle milieux/symboles/paradigmes

- Utilisation et caractérisation du répertoire didactique : Ils vont mobiliser leurs connaissances antérieures relatives au système générateur et au registre des formules. Et plus précisément, ils vont utiliser des méthodes de calcul de limites pour déterminer l'expression de reste et l'étude des représentations graphiques des fonctions.

Milieu M_2	Milieu M_1	Milieu M_0
R_{31} [AC] et [AI] Utilisation ponctuelles de connaissances anciennes : - Utilisation des règles du calcul algébrique et formel - Usage de la formule de Taylor-Young - Usage de la définition généralisée du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel - Usage de la méthode d'identification terme à terme. - Utilisation de la méthode de la résolution d'une équation de premier et deuxième degré à une seule inconnue - Usage de la formule de prouver une fonction prolongeable.	R_{32} [AG] et [AI] Enrichissement au niveau argumentaire : - Usage des propriétés d'une parabole - Utilisation des propriétés d'une droite - Usage des propriétés d'une fonction admettant des approximations polynômiales au voisinage de 0	R_{33} [AI] et [AG] - Définition généralisée du développement limité d'une fonction au voisinage de 0 - Visualisation d'une fonction et de ses approximations polynomiales au voisinage d'un réel - Propriété d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel sans être 2-fois dérivable en ce réel

Tableau 4 - Le modèle milieux/répertoire didactique/paradigmes

- Nature de la justification d'un raisonnement (les dimensions sémantique et/ou syntaxique) : Ils vont justifier leurs raisonnements en vérifiant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'utilisation des signes et des différentes formules du répertoire didactique.

Milieu M_2	Milieu M_1	Milieu M_0
R_{41} [AC], [AI] - Justification que la fonction g est de classe C^n en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ - Vérification des expressions des approximations polynômiales de g par l'interprétation des représentations graphiques	R_{42} [AG], [AC] et [AI] - Existence d'un voisinage de 0 - Existence de la fonction $\varepsilon(x)$. - Interprétation géométrique des représentations graphiques - Interprétation géométrique des représentations graphiques « dynamiques » pour donner la meilleure approximation polynômiale de g au voisinage de 0 - Justification des liens entre g , g_1 et g_2 .	R_{42} [AG] et [AI] - Interprétation géométrique des représentations graphiques de g et ses approximations polynômiales à l'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 - Interprétation des représentations graphiques pour donner la meilleure approximation polynômiale d'une fonction

Tableau 5 - Le modèle milieux/moyens de justification sémantique-syntaxique/paradigmes

4. Principaux résultats de l'analyse des raisonnements

Nous commençons cette section par la présentation d'une analyse quantitative et qualitative des raisonnements produits par les 8 trinômes, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Notre travail porte la focale sur l'analyse didactique des savoirs et des connaissances mobilisés en termes de conceptions afin d'identifier les difficultés rencontrées par ces

étudiants. Ensuite, nous présentons une analyse détaillée des productions du trinôme 1 selon notre modèle d'analyse des raisonnements.

4.A. Analyse globale des raisonnements

Nous distinguons les différents types de raisonnement selon l'intervention de l'enseignante :

- Raisonnements en situation à dimension adidactique (valide ou erroné) : Dans ce cas, le trinôme produit un raisonnement par une guidance faible. En effet, il rédige leur procédure de résolution suite à la demande de l'intervention de l'enseignante.
- Raisonnements en situation adidactique (valide ou erroné) : Dans ce cas, il produit un raisonnement d'une manière autonome. Il ne demande pas l'aide de l'enseignante.
- Absence de raisonnement : Dans le cas où il ne répond pas à la question.

Nous pouvons classer les différents types de techniques utilisées en mettant en jeux les paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015), les registres de représentation sémiotique (Duval, 2006) et les dimensions sémantique et /ou syntaxique selon ces quatre catégories :

- Technique arithmético-algébrique : Dans ce cas, l'étudiant effectue un calcul algébrique et numérique afin de développer son raisonnement dans les paradigmes [AC] et [AI]. Il effectue un pas de raisonnement de nature syntaxique.
- Technique géométrico-graphique : Dans ce cas, il interprète une représentation graphique d'un objet de géométrie pour confirmer directement sa représentation algébrique. Ce travail s'inscrivant dans les paradigmes [AI] et [AG] selon un aspect purement sémantique.
- Technique géométrico-algébrique : Dans ce cas, il interprète une représentation graphique d'un objet mathématique, en lien avec la géométrie, afin de développer un calcul algébrique et formel. Il produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique dans les paradigmes [AC] et [AG].
- Technique analytique : Dans ce cas, il utilise une formule du répertoire didactique du Supérieur par un travail s'inscrivant dans le paradigme [AI]. Par exemple, il détermine un développement limité d'ordre 1 de la fonction g par l'utilisation de sa définition généralisée afin de donner une représentation algébrique de son approximation polynômiale au voisinage de 0. Il produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique.

Nous allons résumer les réponses de huit trinômes aux différentes questions, dans des tableaux, en distinguant les différents types de raisonnements (valides ou erronés) et de techniques

4.A.a. Analyse de la question liée à la détermination des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction au voisinage de 0

Nous résumons les productions des groupes lors de la détermination de chacune des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0 dans deux tableaux.

	Raisonnements en situation à dimension adidactique		Raisonnements en situation adidactique		Absence de raisonnement
	Valides	Erronés	Valides	Erronés	
					nt

Types de technique utilisée	Analytique	0	0	0	1	0
	Géométrico-algébrique	1	0	4	1	
	Analytique et géométrico-algébrique	1	0	0	0	

Tableau 6 - Types de raisonnement et de techniques mobilisés lors de la détermination de la représentation algébrique de la fonction g_1

La majorité des groupes ont produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique par l'utilisation d'une connaissance mobilisable du répertoire didactique de Secondaire "la méthode géométrico-algébrique". Ces travaux s'inscrivent dans les différents paradigmes [AG], [AI] et [AC]. En effet, ces trinômes interprètent la représentation graphique de l'objet fonction g_1 pour développer un calcul algébrique dans les registres algébrique, graphique, géométrique et numérique.

Par ailleurs, le groupe 6 a utilisé une méthode du répertoire didactique du Supérieur "la formule de Taylor-Young", puis il a vérifié son raisonnement par l'interprétation de la représentation graphique de la fonction g_1 . En effet, ce groupe a développé son raisonnement, par une guidance faible, en mobilisant les différents registres analytique, algébrique, graphique, numérique et géométrique.

		Raisonnements en situation à dimension adidactique		Raisonnements en situation adidactique		Absence de raisonnement
		Valides	Erronés	Valides	Erronés	
Types de technique utilisée	Analytique	0	0	0	1	0
	Géométrico-algébrique	5	0	0		
	Aucune	0	0	2	0	

Tableau 7 - Types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de la représentation algébrique de la fonction g_2

La plupart des groupes ont produit des pas de raisonnements de nature sémantique/syntaxique par la mobilisation des différents registres algébrique, graphique, géométrique et numérique. Ces groupes ont utilisé une connaissance mobilisable du répertoire didactique du Secondaire pour déterminer l'expression de la fonction g_2 . En effet, ils ont interprété la représentation graphique de la fonction g_2 afin de développer un calcul algébrique et formel. En revanche, les deux groupes 5 et 7 ont donné directement l'expression de la fonction g_2 .

Par contre, le groupe 6 a utilisé une méthode fautive qui diffère de celles des autres groupes lors de la détermination des représentations algébriques des fonctions g_1 et g_2 .

Nous remarquons qu'au point de vue de conceptions, les étudiants préfèrent travailler dans le paradigme [AG]. De ce fait, la visualisation des représentations graphiques en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction joue un rôle déterminant dans la conceptualisation de ce concept mathématique.

4.A.b. Analyse de la question liée à la détermination de la meilleure approximation de la fonction au voisinage de 0

Nous résumons les réponses des groupes dans ce tableau :

		Raisonnements en situation à dimension adidactique		Raisonnements en situation adidactique		Absence de raisonnement
		Valides	Erronés	Valides	Erronés	
Types de technique utilisée	Géométrico-graphique	1	0	5	0	0
	Aucune	0	0	1	1	

Tableau 8 - Types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0

Nous remarquons que la plupart des trinômes considèrent que la représentation graphique de la fonction g_2 est plus proche de la représentation graphique de la fonction g . En réalité, les étudiants sont en train de visualiser ces représentations graphiques par la mesure de l'écart entre ces courbes. Cette interprétation géométrique s'inscrivant, dans les paradigmes [AG] et [AI], traduit l'existence d'une difficulté de justification de leurs raisonnements lors de l'articulation des différentes représentations.

La majorité des étudiants ont mis en œuvre des pas de raisonnements de nature sémantique dans des registres graphique et géométrique. Par ailleurs, le groupe 3 a considéré la fonction g_2 est plus proche de la représentation graphique de la fonction g au voisinage de 0. Il n'a produit aucun moyen de justification de son raisonnement.

La plupart des groupes n'ont pas essayé de chercher la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0 par la méthode algébrique du calcul de limite. Nous pouvons dire qu'il existe une erreur *d'ordre cognitif et conceptuel* liée à l'appropriation du concept d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel.

4.A.c. Analyse de la question (2-c)

Nous présentons le résumé des productions des étudiants lors de la détermination du développement limité de la fonction g d'ordre 1, puis celui d'ordre 2 au voisinage de 0 dans deux différents tableaux.

		Raisonnements en situation à dimension adidactique		Raisonnements en situation adidactique		Absence de raisonnement
		Valides	Erronés	Valides	Erronés	
Types de technique utilisée	Analytique	4	0	0	3	0
	Aucune	0	0	1	0	

Tableau 8 - Types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination du développement limité d'ordre 1 de la fonction g au voisinage de 0

Nous remarquons que la moitié des groupes ont donné la représentation analytique du développement limité d'ordre 1 de la fonction g au voisinage de 0 par un travail s'inscrivant dans le paradigme [AI]. Ces trinômes ont produit leurs raisonnements après la demande l'aide auprès de l'enseignante. Cette dernière leur questionne afin de leur guider à utiliser la définition généralisée du développement limité. Par ailleurs, les autres groupes ont mobilisé une méthode fautive.

		Raisonnements en situation à dimension adidactique		Raisonnements en situation adidactique		Absence de raisonnement
		Valides	Erronés	Valides	Erronés	
Types de technique utilisée	Analytique	1	4	0	1	0
	Aucune	0	0	1	1	

Tableau 9 - Types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 de la fonction g au voisinage de 0

Nous remarquons que tous les trinômes ont effectué des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* liées à l'appropriation du concept de développement limité d'une fonction au voisinage de 0. En effet, la majorité des groupes ont utilisé une méthode fautive lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 dans le paradigme [AI].

Par ailleurs, le groupe 7 a présenté les représentations analytiques des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0 sans la précision d'un voisinage. Ce trinôme considère qu'un développement limité d'une fonction est la somme de son approximation polynômiale et de l'expression du reste présentée sous deux formes différentes : $[x^2, \varepsilon(x)]$ et $[o(x^2)]$.

Le groupe 6 a donné directement les représentations analytiques des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction g sans la précision d'un voisinage de 0 (un intervalle centré en 0 au sens de la topologie). Ce trinôme a déjà utilisé ces expressions pour déterminer des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0 dans la question précédente (2-b).

Par ailleurs, le groupe 1 a utilisé une méthode n'ayant aucune relation avec le répertoire didactique de la classe. Nous allons présenter, dans la section suivante, une analyse détaillée des raisonnements produits par ce trinôme afin d'identifier et de caractériser l'origine de leurs erreurs.

Les groupes 7 et 8 sont confrontés à une difficulté au niveau de connaissance mobilisable. Ils ont développé une technique analytique fautive (*) lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 de la fonction g au voisinage de 0. Ces deux trinômes ont effectué une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* liée à l'appropriation du concept de développement limité. En effet, ils ne parviennent pas à utiliser la définition généralisée de ce concept mathématique.

(*) $DL_2(0)$ Il existe des coefficients réels tel que $g(x) = 0 + 1(x - 0) + 1(x - 0)^2 + (x - 0)^2 \varepsilon(x)$

En conclusion, la majorité des groupes ont produit des raisonnements valides d'une manière autonome lors de la détermination des représentations algébriques des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0. En revanche, les groupes 4 et 6 sont confrontés à un problème lorsqu'il faut choisir une méthode adéquate pour déterminer les représentations algébriques des approximations polynômiales de la fonction g au voisinage de 0. Ils ont mis en œuvre des pas de raisonnement de nature sémantique, par une guidance faible.

La plupart des étudiants donnent l'intérêt de l'approche graphique lors de la détermination des expressions algébriques des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 d'une fonction au voisinage d'un point.

Nous pouvons dire que tous les étudiants parviennent de percevoir que la formule de Taylor-Young n'est pas applicable dans ce cas pour déterminer le développement limité d'ordre 2.

4.B. Analyse qualitative : Exemples des épisodes du trinôme 1

Dans cette section, nous présentons une analyse détaillée des raisonnements produits par le trinôme 1 selon le modèle d'analyse développé précédemment en identifiant ses différents axes.

4.B.a. Episode 2 : Détermination des représentations algébriques des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0

Ce groupe a développé la méthode du répertoire didactique du Secondaire lors de la détermination des représentations algébriques des fonctions g_1 et g_2 [$g_1(x) = x$ et $g_2(x) = x + x^2$]. En effet, il interprète ses représentations graphiques (droite et parabole) par le choix des points de chaque courbe afin de préciser l'équation d'une droite et celle d'une parabole selon un calcul algébrique. De ce fait, il a produit des pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique par un travail s'inscrivant dans les paradigmes [AC] et [AG].

4.B.b. Episode 3 : Détermination de la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0

L36 La meilleure approximation de la fonction g au $V(0)$
L37 $g(x) = g_1(x) + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + o(x^3)$
L38 $g(x) = g_2(x) + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + o(x^3)$
L39 On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g_2(x)}{g(x) - g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{o(x^2)}$
L40 Car graphiquement C_{g_2} est plus proche que C_{g_1} au $V(0)$

Tableau 10 - Extrait de copie du trinôme 1

Identification du niveau de milieux, des paradigmes et des registres de représentation sémiotique correspondants	Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique
Les représentations graphiques des fonctions g , g_1 et g_2 prennent les statuts d'arguments dans le milieu de référence. Ce trinôme mobilise des objets de géométrie pour étudier la fonction g au voisinage de 0. Il développe deux méthodes par un travail s'inscrivant dans les paradigmes [AG] et [AI] : - Une méthode fautive dans le registre analytique. - Une méthode géométrico-graphique dans les registres géométrique et graphique.	<p>[(36)] Décision de la détermination de la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0.</p> <p>[(37)] Utilisation d'une méthode fautive pour déterminer une représentation analytique de la fonction g. Il déduit cette expression par l'utilisation de l'approximation polynômiale d'ordre 1 de cette fonction.</p> <p>[(38)] Usage d'une méthode erronée pour déterminer une représentation analytique de la fonction g. Il détermine cette représentation en utilisant l'approximation polynômiale d'ordre 2 de cette fonction.</p> <p>Les étapes (37) et (38) traduisent l'existence d'une difficulté liée à l'appropriation du concept de développement limité.</p> <p>[(39)] Rétroaction sur sa procédure de résolution. Il barre sa méthode algébrique en décidant l'inefficacité de cette technique. Il calcule les écarts entre les courbes mais il effectue une faute de simplification du calcul du rapport de deux fonctions. Cette erreur commise est due aux étapes (37) et (38)). Il détermine des représentations fautes des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction g.</p> <p>[(40)] Mobilisation des éléments de géométrie pour justifier son raisonnement. Il interprète les représentations graphiques pour mesurer les écarts entre ces courbes. Il développe une technique géométrico-graphique du répertoire didactique du Supérieur.</p>

Tableau 11 - Analyse des raisonnements selon le modèle d'analyse

4.B.c. Episode 4 : Détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0

L41 $DL_1(0)$
L42 $g(x) = x \cdot \varepsilon(x)$
L43 $= g_1(x) \cdot \varepsilon(x)$
L44 $g(0) = 0$
L45 $DL_2(0)$
L46 $g(x) = (x + x^2) \cdot \varepsilon(x)$
L47 $= 0$

Tableau 12 - Extrait de copie du trinôme 1

Identification du niveau de milieux, des paradigmes et des registres de représentation sémiotique correspondants	Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique
Le milieu objectif est constitué des fonctions g , g_1 et g_2 . Ce trinôme étudie la fonction g au voisinage de 0 dans le paradigme [AI]. Cette méthode erronée est développée dans les registres analytique et numérique.	<p>[(41)] Décision de déterminer le développement limité d'ordre 1 de la fonction g au voisinage de 0.</p> <p>[(42)-(43)] Utilisation d'une méthode erronée lors de la détermination du développement limité d'ordre 1 de la fonction g au voisinage de 0. Cette <i>erreur d'ordre cognitif et conceptuel</i> traduit l'existence d'une difficulté liée à la connaissance mathématique mobilisable.</p> <p>[(44)] Calcul numérique de la valeur de la fonction g en 0.</p> <p>[(45)] Décision de déterminer le développement limité d'ordre 2 de la fonction g au voisinage de 0.</p> <p>[(46)-(47)] Utilisation d'une méthode fautive lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 de la fonction g au voisinage de 0. Il existe une <i>erreur d'ordre cognitif et conceptuel</i>.</p> <p>En conclusion, ce groupe est confronté au problème lié à l'appropriation du concept de développement limité.</p>

Tableau 13 - Analyse des raisonnements selon le modèle d'analyse

Le modèle d'analyse du raisonnement nous a permis d'identifier et de caractériser la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de l'usage raisonné des représentations graphiques du concept d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage de 0. À partir de ces analyses, nous avons remarqué que ces difficultés apparaissent lors du passage du niveau du milieu objectif au niveau du milieu de référence par l'interprétation des représentations graphiques des fonctions étudiées et ses représentations algébriques dans le milieu M₂.

5. Intérêt et limite de l'étude réalisée

La collaboration étroite avec l'enseignante de l'Institut préparatoire de Tunis a permis la construction et la mise en œuvre d'une situation d'enseignement-apprentissage du concept d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel en classe de première année (PC). Cette situation repose sur des illustrations graphiques. Elle a un rôle central dans la construction du concept d'approximation polynômiale locale d'une fonction par l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique, ainsi que des travaux s'inscrivant dans les différents paradigmes ([AC], [AG] et [AI]) lors

de l'appropriation du concept de développement limité et de la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel.

De ce fait, l'expérimentation a permis d'amener, de mettre en lumière le niveau de justification attendue dans l'élaboration des différents formes de raisonnements et de percevoir l'intérêt de l'articulation des différentes représentations sémiotiques du concept d'approximation polynômiale locale d'une fonction lors de sa conceptualisation. Par ailleurs, le schéma de la structuration du milieu nous a permis d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés par les étudiants, ainsi que la manière dont ces savoirs se transforment pour étudier le déroulement final de la séquence.

L'analyse des raisonnements nous a fourni des renseignements précis sur les conceptions, valides et erronées, au travers de l'utilisation que les étudiants font de leurs connaissances (au niveau technique, de connaissances mobilisables et disponibles) pour la production des raisonnements. Par ailleurs, il y a une complexité à produire des raisonnements qui s'inscrivent dans le paradigme [*Analyse Infinitésimale*]. En fait, il y a une vraie complexité à coupler des connaissances relatives à la fonction, à la notion de voisinage et à l'identification de l'écart entre la fonction et son approximation polynômiale au voisinage d'un point.

L'analyse des raisonnements produits par des étudiants, confrontés à une situation en classe, nous a permis d'identifier la nature et l'origine de leurs difficultés inhérentes à la conceptualisation des objets d'approximation polynômiale locale d'une fonction en première année (PC). En effet, le modèle d'analyse des raisonnements par la prise en compte de ses composantes (fonction, dimension sémiotique, nature et justification) nous a permis d'identifier et de caractériser les erreurs effectuées par des étudiants confrontés à une situation mathématique. En effet, ce modèle nous a permis de mettre en évidence, du point de vue des conceptions, les erreurs qui relèvent d'obstacles (Brousseau, 1986). A l'issue de cette analyse des raisonnements, nous pouvons identifier et caractériser des obstacles liés à l'appropriation du concept de développement limité :

- Obstacle épistémologique : Ce type d'obstacle est lié à la genèse historique des notions d'approximation locale d'une fonction transcendante ou algébrique. En effet, il résulte de l'articulation des connaissances et des savoirs des deux domaines de la topologie et de l'Analyse fonctionnelle lors de l'appropriation du concept de développement limité.
- Obstacle didactique : Ce type d'obstacle est lié aux choix didactiques de l'enseignant. Par exemple, l'étudiant cherche le développement limité d'ordre 3 de la fonction au voisinage de 0 lors de la détermination de la meilleure approximation de cette fonction au voisinage de 0. Il remémore la question de la situation 1 résolue par l'enseignante au début de la séance de cours.

6. Conclusion et perspectives

Nous avons conduit une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori* des travaux des étudiants, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), selon le modèle des raisonnements afin d'étudier la nature et l'origine de leurs difficultés inhérentes à la conceptualisation de la notion d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel en première année (PC).

Dans notre travail, la mise en œuvre de la situation, couplée au modèle d'analyse des raisonnements, est un dispositif intéressant qui nous a permis de repérer les conceptions des étudiants

au travers de leurs productions. L'expérimentation a permis de percevoir l'intérêt de l'articulation des différentes représentations de notre objet d'étude, notamment du point de vue du contrôle sémantique, ainsi que de mettre en lumière le niveau de justification attendue dans l'élaboration des différentes formes de raisonnements.

A l'instar des chercheurs en didactique Alcock et Simpson (2015), la visualisation des représentations graphiques, créées en papiers ou construites à l'aide d'un logiciel dynamique de la géométrie, jouent un rôle important, dans la pensée mathématique. En effet, notre expérimentation a donné l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel. Elle offre aux étudiants la possibilité d'accéder au sens des savoirs : approximation polynômiale d'une fonction et sa meilleure approximation au voisinage d'un point.

L'expérimentation a permis l'adaptation d'une situation produite aux conditions ordinaires d'enseignement et aux besoins des enseignants. Cette étude pourra jouer un rôle dans la formation des enseignants du point de vue de la construction des connaissances, de l'importance de contrat didactique et de l'ouverture sur leur formation par l'utilisation du cadre graphique par un travail dans l'environnement de la technologie lors de l'enseignement des nouvelles notions au début du cursus dans le Supérieur.

Références

- Alcock, L. & Simpson, A. (2005). « Convergence of sequences and series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role ». *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 77-100.
- Artigue, M. (1991). Introduction au débat sur les enseignements de didactique en IUFM. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (S6), 67-70.
- Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 8(1), 59-72.
- Bardini, C. & Pierce, R. (2018). Symbols: pillars of the secondary-university bridge? In V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, S. Goodchild, & N.-M. Hogstad (Eds) *Proceedings of INDRUM 2018* (pp. 478-486), Kristiansand : Norway.
- Bartolini-Bussi, M. (2009). Proof and proving in Primary school: An experimental approach. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.). *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol.1, 53-58). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Belhaj Amor, F. (2018). Le processus de transposition didactique de l'objet développement limité. In Maha Abboud (Eds.). *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2018* (pp.620-623). Gennevilliers, France.
- Belhaj Amor F. (2020). Nature et origine des difficultés des étudiants lors de l'utilisation des approximations locales des fonctions en début de l'université : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs. In Hausberger, M. Bosch & F. Chelloughi (Eds.). *Third conference of the*

International Network for Didactic Research in University Mathematics INDRUM2020 (pp.63-72), Bizerte, Tunisia.

Belhaj Amor, F. (2022). Enseignement et apprentissage des approximations locales des fonctions au début du cursus dans le Supérieur-Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Université virtuelle de Tunis. En ligne : <https://www.theses.fr/2022PAUU3020>

Berger, M. (2004). L'échec de la protection de l'enfance. *Dans Enfance & Psy* 1(25), 131-134.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193. <https://revue-rdm.com/1999/l-articulation-du-travail/>

Bloch, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In Salin M. H., Clanché P., Sarrazy B. (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp.143-152). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : études des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 191-227.

Bloch, I. & Gibel, P. (2022). Situations de recherche pour l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'Université. *Épjournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur*.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In: Bednarz N., Garnier C. (Eds.). *Construction des savoirs*. (pp.41-63). Montréal : Editions Agence d'ARC.

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. La théorie des situations didactiques, La pensée sauvage 1998. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 115-160.

Brousseau, G. & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. In *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 13-58). Springer, Boston, MA.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.

Frege, G. (1971). Sens et dénotation. *Écrits logiques et philosophiques*, 102-126.

Gibel, P. (2018). Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Gueudet, G. & Pepin, B. (2018). Didactic contract at the beginning of university: A focus on resources and their use. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 56-73.

- Kidron, I. (2003). Polynomial approximation of functions: Historical perspective and new tools. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (IJCML) 8, 299–331.
- Kidron, I., & Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 9, 205–227.
- Kouki, R., Belhaj Amor, F. & Hachaïchi, Y. (2016). Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'Université : Entre syntaxe et sémantique. In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.). *Proceedings of the 1st Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 123-132). Montpellier: INDRUM.
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2015). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du Supérieur : identification et construction. In Matheron Y, Gueudet Gh et Cerli V (Eds). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de 18ième école d'été de didactique des mathématiques*. Brest, France. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Kung, D. & Speer, N. (2010). Do they really get it? Evaluating evidence of student understanding of power series. In *Proceedings of the Thirteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Raleigh, NC: North Carolina State University.
- Martin, J. (2012). Differences between experts' and students' conceptual images of the mathematical structure of Taylor series convergence. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 267-283.
- Nemirovsky, R. & Smith, M. (2011). The physicality of symbol use: Projecting horizons and traversing improvisational paths across inscriptions and notations: In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman, *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 314–324). Portland.
- Pepin, B. (2014). Using the construct of the didactic contract to understand student transition into university mathematics education. *Policy futures in education*, 12(5), 646-657.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des cours mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8(2), 139-190.
- Tarski, A. (1974). *Logique, sémantique, mathématique : 1923-1944* (vol.2). Paris : Armand Colin.
- Wilkerson-Jerde, M. H., & Wilensky, U. (2011). Designed and Emergent Pedagogical Supports for Coordinating Quantitative and Agent-Based Descriptions of Complex Dynamic Systems. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Winslow, C. (2007) Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 189-204.