



**HAL**  
open science

# Effet des contraintes induites par les polluants à l'interface air-eau dans les écoulements tournants avec surface plane

Antoine Faugaret, Laurent Martin Witkowski, Yohann Duguet, Yann Fraigneau

## ► To cite this version:

Antoine Faugaret, Laurent Martin Witkowski, Yohann Duguet, Yann Fraigneau. Effet des contraintes induites par les polluants à l'interface air-eau dans les écoulements tournants avec surface plane. 24e Congrès Français de Mécanique, Aug 2019, Brest, France. hal-04410362

**HAL Id: hal-04410362**

**<https://hal.science/hal-04410362v1>**

Submitted on 22 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Effet des contraintes induites par les polluants à l'interface air-eau dans les écoulements tournants avec surface plane.

A. FAUGARET<sup>a,b</sup>, L. MARTIN WITKOWSKI<sup>a,c</sup>, Y. DUGUET<sup>a</sup>, Y. FRAIGNEAU<sup>a</sup>

a. LIMSI-CNRS, Campus Universitaire d'Orsay Université Paris-Saclay, F-91405 Orsay, France,

b. Sorbonne Université, Collège Doctoral, F-75005 Paris, France

c. Sorbonne Université, Faculté des Sciences et Ingénierie, UFR d'Ingénierie, F-75005 Paris, France

antoine.faugaret@limsi.fr & laurent.martin\_witkowski@sorbonne-universite.fr & duguet@limsi.fr & yann.fraigneau@limsi.fr

## Résumé :

*L'étude des instabilités d'un écoulement tournant avec surface libre révèle des écarts conséquents entre les expériences menées avec de l'eau et les simulations numériques : des variations de la tension de surface, imputée à la pollution de surface, modifient l'écoulement et abaissent la valeur du nombre de Reynolds critique. En utilisant plusieurs modèles par ordre croissant de complexité, nous montrons comment la condition limite à l'interface influe sur l'écoulement et sur sa stabilité, et pourquoi la condition de glissement classique n'est pas pertinente dans la configuration considérée.*

## Abstract :

*The study of instabilities in rotating flow with a flat free surface shows robust discrepancies between experiments with water and numerical simulation. Pollutants at the interface lead to variations in the surface tension of the fluid, that deeply modify the bulk flow and shift the critical Reynolds number downwards. Through several models of increasing complexity, we demonstrate how the boundary condition at the interface influences the flow and its stability, and why the classical stress-free condition is not relevant in our configuration.*

**Mots clés : Interface ; Surfactants ; Instabilité ; Rotation ; Surface libre ; Simulation numérique ; Expérimental ; Fluides**

## 1 Introduction

L'écoulement d'un liquide induit par la rotation d'un disque au fond d'une cavité cylindrique donne naissance à plusieurs types d'instabilités qui dépendent du régime de rotation. Les plus spectaculaires,

pour des vitesses de rotations élevées, se visualisent facilement par la déformation de l'interface air-liquide, qui prend des formes polygonales. Pour des vitesses de rotations bien plus faibles - suffisamment pour que l'interface reste plane - il existe également une instabilité très esthétique, qui prend la forme d'une succession de tourbillons caractérisée par un nombre d'onde azimutal  $m > 0$ , qui dépend du rapport de forme  $G = \frac{h}{R}$  et de la vitesse angulaire  $\Omega$ .

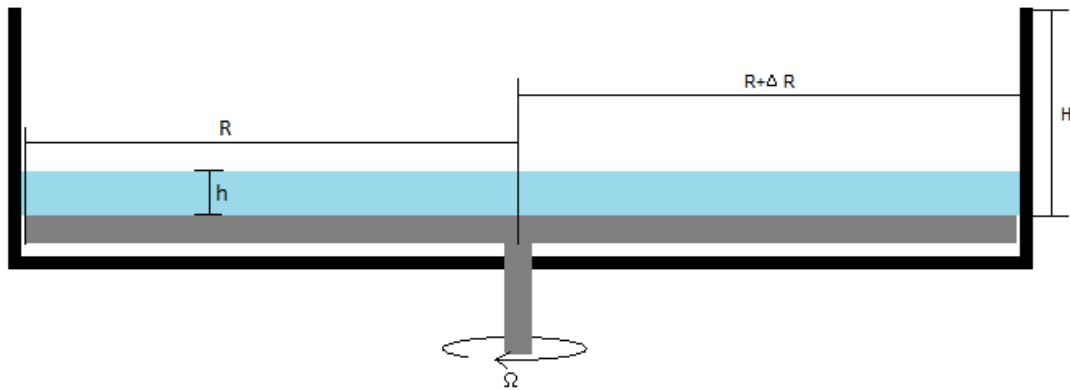
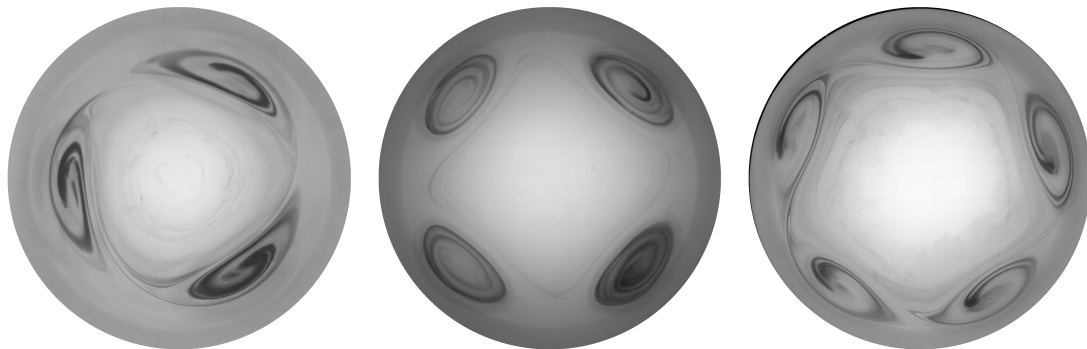


FIGURE 1: Schéma en coupe du dispositif expérimental

En cherchant à reproduire cette instabilité, nous avons été confronté à des écarts conséquents et reproductibles sur les valeurs des nombres de Reynolds critiques. Ce nombre de Reynolds  $Re = \frac{R^2 \Omega}{\nu}$  est construit sur le rayon  $R$  de la cavité, la pulsation  $\Omega$  du disque et la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide. Après avoir cherché sans succès la possible source de ces écarts dans les imperfections expérimentales, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la surface libre dans nos codes de calcul.



(a)  $m = 3$ ,  $G = 0.25$ ,  $Re = 1968$     (b)  $m = 4$ ,  $G = 0.107$ ,  $Re = 5623$     (c)  $m = 5$ ,  $G = 0.0714$ ,  $Re = 4714$

FIGURE 2: Différents modes d'instabilités. Visualisations obtenues avec de l'encre, injectées dans des mélanges eau-glycérol. Vue de dessus.

Traditionnellement, la condition limite à l'interface air-liquide est une condition de Neumann sur les composantes tangentielles de vitesse. Cette condition s'avère satisfaisante dans un grand nombre de cas, cependant des expériences [5] montrent que l'état de la surface peut fortement influencer l'écoulement dans le bulk, en induisant des forces de type Marangoni liées aux inhomogénéités spatiales de la tension de surface. Bien que certaines expériences ont recours à des surfactants introduits avec des concentrations contrôlées à l'interface air-fluide, il est également admis que la surface de certains fluides, de l'eau en particulier, est extrêmement sensible à la "pollution" naturelle par contact avec l'air ambiant ([12]).

Nous cherchons à quantifier l'influence de ce phénomène sur l'écoulement et les instabilités dans la cavité cylindrique. En particulier nous cherchons à comprendre si la présence de polluants peut expliquer le désaccord persistant entre théorie et simulations numériques concernant le nombre de Reynolds critique au-delà duquel les instabilités se développent.

## 2 Méthodes expérimentales

Pour reproduire le phénomène d'instabilité étudié, nous disposons d'un banc expérimental sur lequel nous pouvons adapter deux cavités de dimensions différentes.

La partie commune aux deux expériences comporte le groupe moto-réducteur (moteur à courant continu couplé à un réducteur 1 :12) et sa chaîne de commande, ainsi que l'ensemble de l'instrumentation de mesure. Si le rapport de forme des deux cavités est différent, elles sont toutes les deux décrites par le schéma en coupe de la figure 1. La première expérience est constituée d'une cavité en plexiglas de 6.8 mm d'épaisseur, pour un diamètre de  $R + \Delta R = 140.3$  mm, et une hauteur de  $H = 71.5$  mm. A travers le fond de cette cavité, on fait passer l'arbre de transmission, solidaire du disque. Un joint à lèvres assure l'étanchéité au niveau de l'arbre. Cet arbre est guidé dans sa rotation par une paire de roulements à bille, et est en prise directe sur l'arbre de sortie du réducteur. Le disque est en laiton, d'un rayon de  $R = 139.6$  mm et d'une épaisseur de 8.5 mm. Les variations de hauteur de sa surface lors de la rotation sont évaluées à moins de 0.3 mm. Cette mesure est confirmée à l'aide d'un capteur Keyence LK-G10. Cette cavité permet d'atteindre des rapports de forme  $G \sim 0.5$ .

La seconde expérience est de dimension plus réduite, puisque le rayon de la cavité est  $R + \Delta R = 70$  mm, mais sa hauteur  $H = 114$  mm permet des rapports de forme plus élevés, comme ici  $G = 1.5$ . Le cylindre du réservoir est en verre, d'épaisseur 5.2 mm. Le disque, toujours composé de laiton, a un rayon  $R$  de 68 mm pour une épaisseur de 10.1 mm. Les variations de hauteur de sa surface sont du même ordre de grandeur que dans le cas de la première expérience. Comme précédemment, l'arbre de transmission, solidaire du disque, passe à travers le fond de la cavité, et l'étanchéité est assurée au niveau du disque par un joint à lèvres. Le guidage de la rotation est réalisé par deux roulements à billes montés en X, tandis que le couplage entre la sortie du réducteur et l'arbre du disque est réalisé par un joint d'Oldham, permettant de corriger un éventuel manque de coaxialité des deux arbres, tout en garantissant l'homocinétisme.

On notera que  $\Delta R$  représente la taille de l'interstice entre le disque et la paroi verticale de la cavité. Cette distance étant suffisamment faible pour ne pas avoir d'impact, on utilisera par la suite  $R$  pour désigner indifféremment le rayon des disques et des cavités.

Au cours de nos expériences, nous utilisons de l'eau dé-ionisée, ou de l'eau directement prélevée du robinet. Éventuellement, pour augmenter la viscosité du fluide, nous avons recours à un mélange eau-glycérol, donc la viscosité est alors évaluée en fonction de la température, d'après [2], et dont les indices optiques sont tabulés dans [4].

Les mesures de vitesse sont effectuées par LDV, avec l'emploi d'un laser Dantec couplé à un processeur BSAFlow. Le fluide estensemencé avec des particules Dantec. Les deux cavités étant cylindriques, et les deux faisceaux laser traversant trois milieux différents (air, cavité, fluide), on réalise une correction sur les mesures LDV, aussi bien sur le rayon de convergence des lasers que sur la mesure de vitesse même.

Ces corrections sont détaillées dans [6]. Le dispositif LDV est monté sur un déplacement horizontal piloté, d'un pas de 0.01 mm.

Initialement, le fluide est au repos. Le disque est mis en rotation par palier de  $1 \text{ tr.min}^{-1}$ . A chaque palier, on observe un temps d'attente de l'ordre de 5 min, afin de s'assurer de l'établissement de l'écoulement. Cette procédure est dérivée de celle utilisée par S. Poncet dans [11].

### 3 Méthodes numériques

Pour l'étude numérique de cet écoulement, nous utilisons deux codes numériques. Le premier est un code de stabilité linéaire (LSA) nommé ROSE, tandis que le second, intitulé Sunfluidh, est un code de simulation numérique directe (DNS) instationnaire. Les deux codes sont écrits en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , l'origine du repère étant au centre du disque.

#### 3.1 Analyse de stabilité linéaire

Pour déterminer le nombre de Reynolds critique d'apparition des instabilités,  $Re_c$ , nous utilisons un code d'analyse de stabilité linéaire basé sur des différences finies. Dans un premier temps, il détermine l'état de base par une méthode itérative de Newton. Cet état de base est une solution stationnaire axisymétrique des équations de Navier Stokes, calculé en formulation vorticité, fonction de courant, moment angulaire,  $(\omega, \psi, \Gamma)$ . Ensuite les modes propres du système linéarisé autour de cet écoulement de base sont calculés numériquement sous la forme  $\epsilon \Re(v(r, z) \exp(\lambda t + m\theta))$ , où  $m \geq 0$  est le nombre d'onde azimuthal,  $\lambda$  est la valeur propre, et  $v(r, z)$  est le vecteur propre. Le problème aux valeurs propres est résolu grâce à une méthode d'Arnoldi implémentée à la librairie ARPACK. Enfin, une méthode de la tangente permet de converger itérativement vers la valeur exacte de  $Re_c$ , pour laquelle la partie réelle de  $\lambda$  est nulle. Les maillages utilisés sont cartésiens 2D et réguliers dans un plan méridien  $(O, \mathbf{r}, \mathbf{z})$ . Le pas d'espace est typiquement de l'ordre de  $10^{-3}$ .

#### 3.2 Simulation numérique directe (DNS)

Nous utilisons le code de DNS Sunfluidh pour valider les résultats de l'analyse de stabilité linéaire dans un contexte non linéaire. Ce code développé au LIMSIS traite de multiples configurations, en particulier les écoulements instationnaires incompressibles en géométrie cylindrique. Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées selon une méthode de volumes finis d'ordre 2 en espace. La résolution en temps est faite avec un schéma BDF2 d'ordre 2, tandis que l'équation de Poisson sur la pression est résolue par diagonalisation partielle. Le maillage est orthogonal, avec des raffinements aux niveaux des couches limites à la paroi et sur le disque. Pour les faibles rapports de formes, on insère un moyeu sur  $0 \leq r \leq \frac{R}{2}$ , conformément à [11]. Ceci permet de réduire le nombre total de points de maillage, dont le pas en espace est de l'ordre de  $10^{-3}$ .

### 4 Equations

Pour un fluide newtonien incompressible, l'écoulement est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles adimensionnées

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}. \end{cases} \quad (1)$$

Les variables d'adimensionalisation sont  $R$  pour les longueurs,  $\Omega^{-1}$  pour le temps, et la densité du fluide est unitaire. Les vitesses de rotation étant faibles, le nombre de Froude  $Fr = \frac{\Omega^2 R}{g}$  basé sur la gravité  $g$  reste faible. On fait donc l'hypothèse que la déformation de la surface est négligeable.

## 4.1 Conditions aux limites

Sur chaque paroi solide on impose les conditions classiques de non glissement et d'imperméabilité, qui s'écrivent le long de la paroi verticale de la cavité, immobile dans le repère du laboratoire

$$u_r = u_\theta = u_z = 0 \quad (2)$$

et sur le disque en rotation

$$\begin{cases} u_r = u_z = 0, \\ u_\theta = r. \end{cases} \quad (3)$$

Les conditions à l'interface air-liquide seront détaillées par la suite selon le degré de modélisation choisi.

## 5 Condition de Neumann à l'interface air-liquide

### 5.1 Condition limite

Pour dériver les conditions limites à la surface, on résout, pour la contrainte normale, la relation de saut

$$[\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}]_l^g = 0, \quad (4)$$

et pour les contraintes tangentielles

$$[\mathbf{t} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}]_l^g = 0, \quad (5)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant à la surface, chaque vecteur tangent vérifiant  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ , et les indices  $g$  et  $l$  indiquent respectivement les phases gazeuse et liquide. Dans les deux cas, le tenseur des contraintes  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$  est calculé d'après la loi newtonienne suivante :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}} = 2\mu \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} + \lambda Tr(\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{I}}}_d, \quad (6)$$

où  $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}_d$  est la matrice identité,  $tr(\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}) = 0$  à cause de l'incompressibilité, et

$$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \quad (7)$$

La surface étant plane, indéformable, on a  $\mathbf{n}_g = -\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{n}_l = +\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_r$  ou  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_\theta$ . Avec l'hypothèse que les coefficients de viscosité pour la phase gazeuse sont négligeables devant ceux de la phase liquide, et en développant les relations de saut, on obtient, pour la contrainte normale

$$u_z = 0, \quad (8)$$

et pour les contraintes tangentielles :

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

## 5.2 Validation et accords

Afin de valider les codes de calculs numériques pour ensuite les comparer aux expériences, on choisit un rapport de forme  $G = 0.0714 = 1/14$ , correspondant à un remplissage pour lequel L. Kahouadji [7] a obtenu un très bon accord entre les nombres de Reynolds critiques calculés par stabilité linéaire, et les seuils de stabilité mesurés expérimentalement par S. Poncet [11].

	Poncet	Kahouadji	ROSE	Sunfluidh
$Re_c$	16420	16972	17581	$\sim 17052$
$f_{m=5}$	-	0.711	0.709	0.708

TABLE 1: Comparaison des nombres de Reynolds critiques et des fréquences de rotation pour  $G = 0.0714$ ,  $m = 5$ . Les fréquences sont normalisées par rapport à la fréquence du disque  $f_d = 2\pi\Omega$ .

On constate d'après le tableau 1 que les résultats des deux codes concordent avec la littérature. Nous avons aussi comparé les résultats de ROSE avec ceux publiés par S.J. Cogan ([3]), pour  $G = 1.5$ , sur les deux premiers modes instables

	mode	Cogan	ROSE
$Re_c$	1	2152	2124
	3	2525	2478

TABLE 2: Comparaison des nombres de Reynolds critiques pour  $G = 1.5$ .

Ici aussi les accords sont très bons, indifféremment du changement de rapport de forme ou du mode sélectionné.

## 5.3 Désaccords numérique-expérimental

En tentant de reproduire les expériences de S. Poncet selon le même protocole, la valeur  $Re_c = 16420$  n'a pas été retrouvée. Les premiers essais, utilisant du Kalliroscope comme marqueur passif, ont donné des résultats difficilement reproductibles, avec tout de même un comportement prédominant : la croissance du mode  $m = 5$  autour de  $Re = 10192$ . Mais sur certaines réalisations, l'écoulement reste axisymétrique même pour  $Re \gg 6076$ . Cette inconstance a été imputée au Kalliroscope, et notamment à sa tendance à former des micelles à l'interface. L'utilisation d'une encre soluble dans l'eau, injectée à la fin de chaque palier, a permis d'obtenir des résultats beaucoup plus reproductibles, mais également de mettre en évidence l'existence du mode  $m = 5$  dès  $Re = 6076$ . Ces résultats ont été confirmés par des mesures LDV de la vitesse azimutale  $u_\theta$ , pour lesquelles on obtient un signal mono-périodique

dès  $Re = 6076$ . Malgré cet écart conséquent entre les valeurs numériques et expérimentales de  $Re_c$ , l'accord entre les fréquences du mode  $m = 5$  reste très bon : dans l'expérience pour  $Re = 16464$ , la fréquence du mode d'instabilité est  $f = 0.73$ , à comparer aux fréquences obtenues par LSA et DNS présentées dans le tableau 1. De fait, la variation de fréquence  $f_m$  en fonction du nombre de Reynolds est faible.

Un tel désaccord a déjà été noté en 2004 ([10]) pour  $G = 0.25$  : expérimentalement le nombre de Reynolds critique est estimé à  $Re_c \sim 2000$  pour un mode  $m = 3$ . Nous avons validé ces résultats expérimentalement avec un mélange eau-glycérine ( $Re_c = 2096$ ,  $m = 3$ ), alors que les prédictions numériques indiquent  $Re_c = 3488$  pour  $m = 2$ .

L'utilisation de la LDV pour la mesure des profils de vitesse  $u_\theta$  selon  $R$  permet de mettre en évidence des écarts entre expériences et simulations.

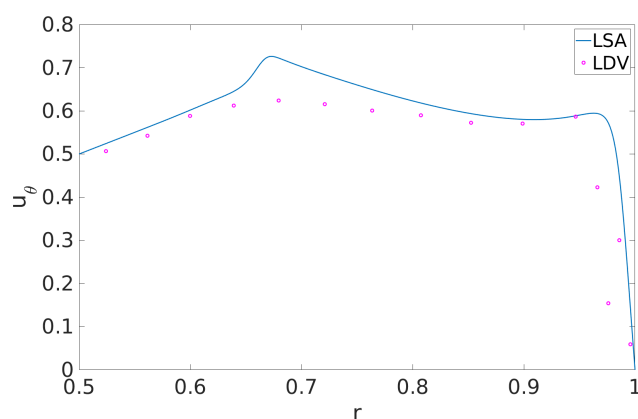


FIGURE 3: Comparaison numérique/expérimental de  $u_\theta(r)$  pour  $G = 0.0714$  et  $Re = 16467$ . Mesure LDV légèrement en dessous de la surface,  $h = 0.0585$ .

Sur la figure 3, le profil donné par l'étude de stabilité linéaire présente une survitesse en  $r \sim 0.67$  absente des mesures LDV. La différence entre numérique et expérimental est encore plus flagrante sur la figure 4 sur la composante axiale  $u_z$  de la vitesse.

Malgré une assez bonne reproductibilité des mesures LDV, nous n'obtenons pas un bon accord entre les profils numériques et expérimentaux. Sur les mesures LDV de  $u_z$ , le minimum de vitesse est atteint autour de  $r \sim 0.85$ , sans être une démarcation aussi franche que la valeur minimale de  $u_z$  dans le profil numérique. Cela indique que la recirculation dans le plan méridien est plus courte dans l'expérience, avec une intensité moindre, et cependant plus étalée radialement.

## 6 Gel de la composante radiale de vitesse à l'interface air-liquide

Le Kalliroscope utilisé comme traceur dans les expériences, engendre une pollution de la surface, qui peut mener à un gel plus ou moins partiel de celle-ci. Nous avons donc reconsidéré l'influence de la condition limite sur l'écoulement. Cette idée a déjà été exploitée dans un canal annulaire ([5]), où la présence d'une pellicule insoluble à l'interface modifie considérablement  $u_r$  à la surface, ainsi que l'écoulement dans sa globalité.



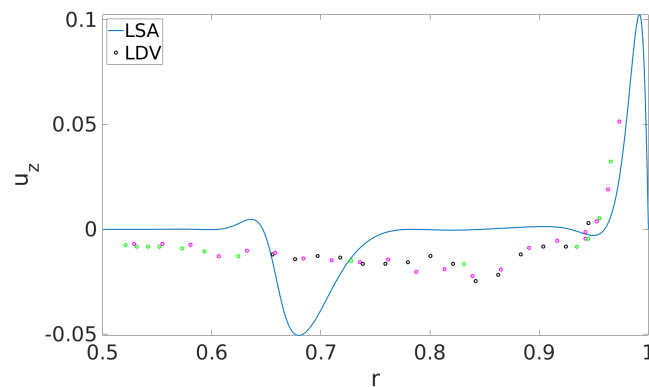


FIGURE 4: Comparaison numérique/expérimental de  $u_z(r)$  pour  $G = 0.0714$  et  $Re = 18737$ . Mesure LDV à mi-hauteur,  $h = 0.0357$ .

Notons  $u_r^S$  la vitesse radiale à la surface. Dans une première approche, nous avons brutalement imposé  $u_r^S = 0$  dans nos codes de calcul. Une telle hypothèse, bien que peu physique, permet de paramétrer l'effet de  $u_r^S$  sur l'écoulement. Pour un rapport de forme  $G = 0.0714$ , on observe une chute de  $Re_c$  de 17581 à 10447 pour  $m = 5$  (ROSE). Cette baisse est confirmée avec Sunfluidh où  $Re_c$  passe de 17052 à  $Re_c \sim 10388$ . Cette tendance qualitative nous pousse à considérer avec intérêt les résultats de ces simulations.

Cette nouvelle condition limite impacte l'écoulement de base.

D'après la figure 5 la survitesse est amortie, et la zone de recirculation voit sa longueur diminuer. De plus, la visualisation de la vorticité (cf figure 6)   la surface présente un motif tourbillonnaire qualitativement bien plus proche de celui obtenu expérimentalement. La fréquence de rotation du mode d'instabilité, par contre, évolue peu : elle passe de  $f_{m=5} \sim 0.71$  à  $f_{m=5} \sim 0.81$  (voir tableau 3).

$Re$	$f$			
	$\alpha = 0$		$\alpha = 1$	
	LSA	DNS	LSA	DNS
10388	-	-	0.817	0.811
12740	-	-	0.821	0.804
17052	-	0.708	0.827	-
17581	0.709	-	0.829	-
18620	0.721	0.721	0.830	0.811

TABLE 3:  volution de la fréquence du mode 5, pour  $G=0.0714$ .

## 6.1 Condition de Robin sur $u_r^S$

Pour comprendre cette différence dans l'aspect des motifs d'instabilité, on introduit un paramètre  $0 \leq \alpha \leq 1$  qui relie continûment (et linéairement) les condition limites de surface libre ( $\omega_\theta^S = \frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_S = 0$ ) et de "surface gelée" ( $u_r^S = 0$ ). La nouvelle condition hybride s'écrit

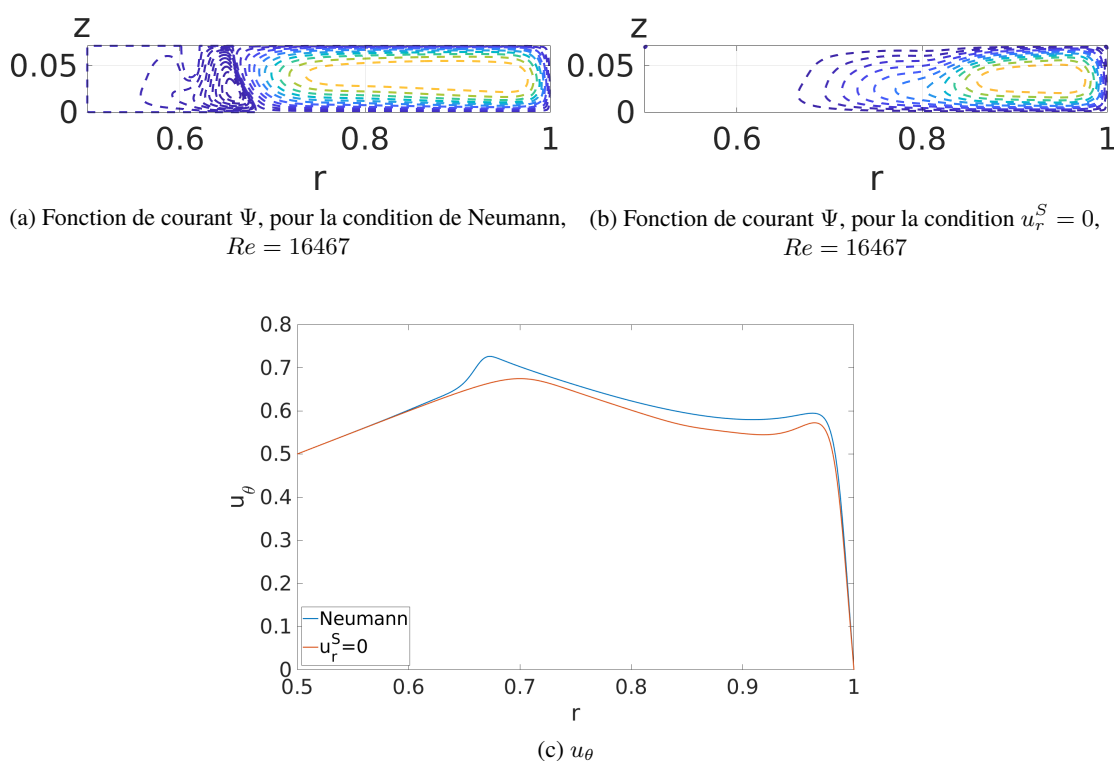


FIGURE 5: Comparaison de la recirculation dans le plan méridien pour les conditions a) de "surface libre" et b) de surface gelée. c) profil  $u_{\theta(r)}$  pour ces deux conditions.

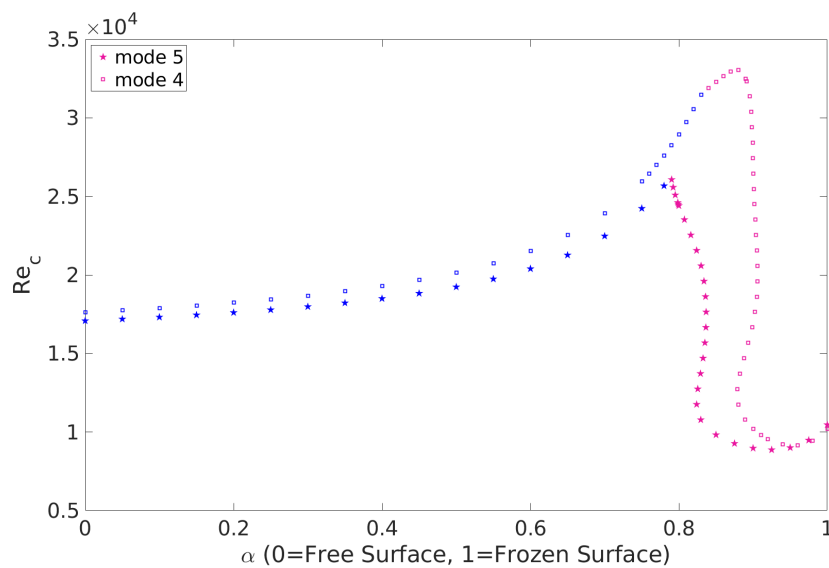
$$\alpha u_r^S + (1 - \alpha)\omega_\theta^S = 0 \quad (10)$$

En recherchant alors  $Re_c$  en fonction de  $\alpha$ , on obtient pour  $G = 0.0714$  la courbe neutre illustrée sur la figure 7.

On constate une chute brutale de la valeur de  $Re_c$  pour  $\alpha \geq 0.8$ . Ce décrochement correspond à la croissance d'un second mode  $m = 5$  plus instable (en rouge) que celui qui domine pour  $\alpha \rightarrow 0$  (en bleu). Les deux branches se croisent en un point de co-dimension 2. On note également que pour  $\alpha = 1$ , le mode  $m = 4$  est plus instable que le mode  $m = 5$ , avec des valeurs de  $Re_c$  respectives de 10192 et 10447. L'analyse de stabilité linéaire révèle que le mode 5 devient rapidement plus instable, autour de  $Re = 11172$ . Ce résultat est confirmé en DNS, puisqu'à  $Re = 12740$  on observe la croissance naturelle d'un mode  $m = 5$ . Globalement, on constate que les seuils des modes  $m = 4$  et  $m = 5$  restent proches, ce qui est confirmé expérimentalement : à quelques occasions, le premier mode d'instabilité observé est un mode  $m = 4$ , bien que dans la majeure partie des cas, le mode  $m = 5$  est plus instable.

## 7 Couplage champ de vitesse-concentration de polluant

L'existence de ce second mode  $m = 5$  instable a motivé l'utilisation d'un modèle plus complet pour représenter la condition à la surface. Partant de l'hypothèse qu'une pollution à l'interface fait varier la tension de surface effective, on résout une équation d'advection-diffusion à l'interface pour déterminer la distribution de concentration de polluant, et ainsi la distribution de la tension de surface. On suppose ici que le polluant ne pénètre pas dans le fluide.

FIGURE 6: Comparaison de la vorticité axiale  $\omega_z$  à la surface, pour  $Re = 95$ .FIGURE 7: Courbe neutre  $Re_c = f(\alpha, m)$ , pour  $G = 0.071429$ .

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla^s \cdot (c\mathbf{u}^s) + c(\nabla^s \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{Pe^s} \Delta^s c, \quad (11)$$

où  $Pe = \frac{\Omega R^2}{D^s}$ ,  $\nabla^s$  l'opérateur gradient surfacique, et avec  $D^s$  le coefficient de diffusion surfacique. Les détails du calcul de cette équation sont donnés dans [13]. De plus, on conserve l'hypothèse d'une surface indéformable, et donc  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ , d'où  $v \cdot \mathbf{n} = u_z = 0$ . L'équation d'advection-diffusion à la surface s'écrit donc

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla^s \cdot (c\mathbf{u}^s) = \frac{1}{Pe^s} \Delta^s c. \quad (12)$$

Pour relier la concentration à la tension de surface, on utilise une version simplifiée du modèle donné appliqué à une couche de Langmuir de vitamine K1 par [5]. Le développement limité est donné dans [8], et si l'on ne retient que le terme prédominant en  $c$ , la loi de comportement se résume à  $\sigma = (1 - \frac{k}{\sigma_0} c^2)$ , où  $k = 0.3$ . Lors de nos expériences, la surface n'apparaît pas saturée en polluant, ce qui justifie les petites valeurs de  $c$  et donc l'approximation précédente, ainsi que la non-pénétration du polluant dans

le coeur de l'écoulement ([1]).

## 7.1 Condition limite à l'interface

Pour établir le lien entre la tension de surface et le tenseur des contraintes, nous utilisons le modèle de Boussinesq-Scriven

$$\overline{\overline{T}} = (\sigma + (\kappa^S - \mu^S)\nabla^S \cdot u^s)\overline{\overline{I}}_d^S + 2\mu^S\overline{\overline{D}}^S, \quad (13)$$

où  $\mu^S$  et  $\kappa^S$  sont respectivement la viscosité de cisaillement surfacique et la viscosité de dilatation surfacique. Ces deux coefficients étant très faibles ([9]), ils sont négligés, et l'équilibre des contraintes tangentielles mène à de nouvelles conditions limites à la surface :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{1}{Ca} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{1}{Ca} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (14)$$

où  $Ca$  est le nombre capillaire défini comme  $Ca = \frac{\mu\Omega R}{\sigma_0}$ , et  $\sigma_0$  est la tension de surface de référence du fluide sans surfactant. Par ailleurs, la surface étant toujours indéformable, on conserve la condition surfacique  $u_z = 0$ . L'ensemble des calculs sont détaillés dans [8].

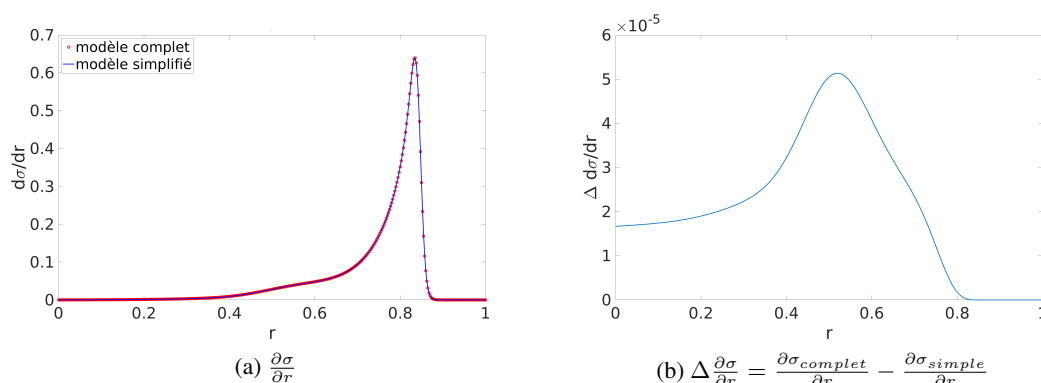


FIGURE 8: Comparaison des dérivées radiales des modèles simplifié et complet, ainsi que leur écart en fonction du rayon, pour  $G = 0.25$ ,  $Re = 1000$ ,  $C_0 = 0.4 \text{ mg.m}^{-2}$ .

On constate d'après la figure 8 que l'erreur commise sur  $\frac{\partial \sigma}{\partial r}$  entre le modèle simplifié et le modèle complet reste modérée, puisque l'écart sur la dérivée radiale n'excède pas  $5.10^{-5}$ .

## 7.2 Validation & Résultats

A une fin de validation, nous comparons les modifications implémentées dans ROSE aux résultats de [8], pour les paramètres  $G = 0.25$ ,  $Ca = 1e^{-3}$  et  $Pe = 1000$ . [8] obtiennent  $Re_c = 1050$ , et donnent, pour  $Re = 1000$ , les profils de  $u_r$  et  $c$  à la surface, ce qui valide notre calcul de l'écoulement de base. La figure 9 montre un accord excellent entre notre état de base axisymétrique et le champ moyen obtenu par [8].

On réalise maintenant, comme précédemment pour le paramètre  $\alpha$ , une étude de l'influence de la concentration initiale  $C_0$  sur le nombre de Reynolds critique.

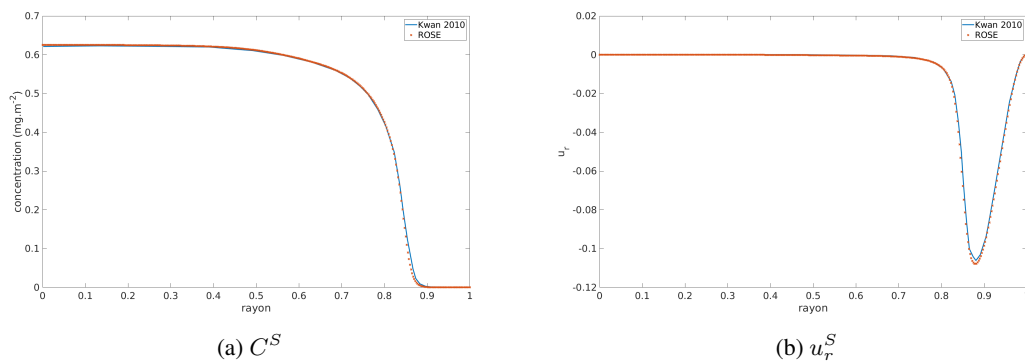


FIGURE 9: Comparaison de la vitesse radiale  $u_r^S$  à la surface, et de la concentration du polluant  $C^S$ , pour  $G = 0.25$ ,  $Re = 1000$ ,  $C_0 = 0.4 \text{ mg.m}^{-2}$ .

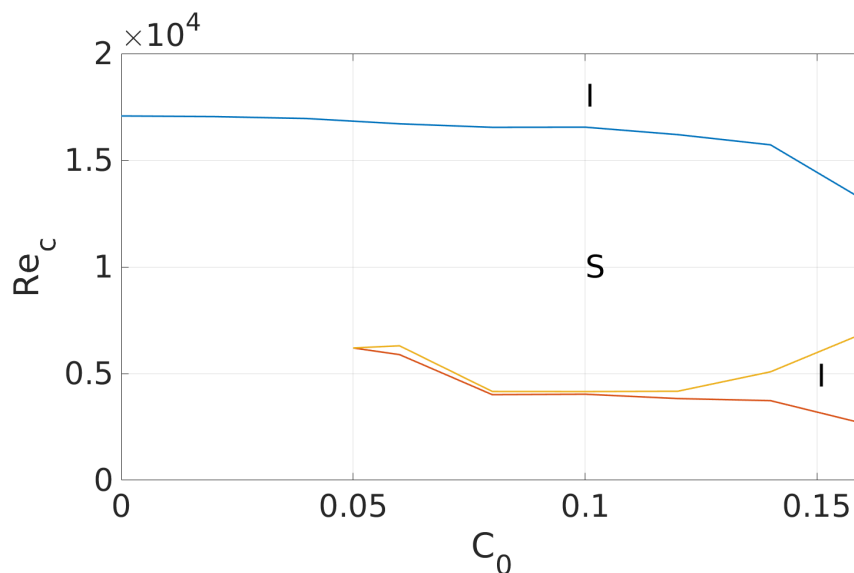


FIGURE 10: Courbe neutre  $Re_c = f(C_0)$ , pour  $G = 0.071429$  et  $m = 5$ . Les lettres capitales  $S$  et  $I$  signalent respectivement les zones stables et instables.

Les résultats préliminaires présentés dans la figure 10 montrent un comportement cohérent avec nos attentes : pour de très faibles valeurs de concentration de polluant ( $C_0 \leq 0.05 \text{ mg.m}^{-2}$ ),  $Re_c$  évolue peu, restant proche de la valeur théorique donnée par l'analyse stabilité linéaire dans le cas de la condition de Neumann. Mais au-delà d'une valeur seuil  $C_0 \sim 0.05 \text{ mg.m}^{-2}$ , on constate l'existence d'une bulle d'instabilité pour des  $Re$  beaucoup plus faibles. Ainsi,  $Re_c$  est réduit d'un facteur 2.75 lorsque  $C_0$  passe de 0.0 à  $0.05 \text{ mg.m}^{-2}$ , ce qui est consistant avec les ordres de grandeur de  $Re_c$  dans l'étude expérimentale. Si les résultats sont prometteurs, une étude plus détaillée de cette condition limite est nécessaire afin de justifier, par un phénomène de pollution de l'interface air-liquide, l'écart subsistant entre les résultats numériques et expérimentaux.

## 8 Conclusions et perspectives

Cette étude résume les recherches expérimentales et numériques, menées en parallèle, des seuils d'instabilité d'un écoulement tournant en présence d'une surface libre. Des écarts reproductibles et robustes

persistent entre la modélisation numérique classique de l'interface air-liquide et les mesures expérimentales. Après s'être assurés de la reproductibilité des résultats expérimentaux et avoir écarté les sources d'erreur, nous nous sommes intéressés à l'influence de la condition limite sur l'écoulement. Nous avons eu recours à trois modélisations de l'interface gaz-liquide (en plus de la condition "classique" de type Neumann sur les composantes tangentielles de vitesse), étudiées par ordre croissant de complexité et de réalisme. La première approche, en "gelant" la composante radiale à la surface a permis d'obtenir un abaissement conséquent du nombre de Reynolds critique, et un champ de vorticité plus proche des motifs expérimentaux calculé par les simulations numériques. La seconde approche, grâce à une condition mixte à un paramètre de type Robin, appliquée sur la composante radiale de vitesse à la surface, a révélé l'existence d'une seconde branche de modes instables (à laquelle appartient le modèle gelé précédent), ainsi que la présence d'un point de codimension 2 au croisement des deux branches. Enfin, l'implémentation d'un modèle plus complet, avec couplage entre le champ de vitesse et la concentration d'un polluant insoluble à la surface, a fourni des premiers résultats prometteurs, avec une chute brutale du nombre de Reynolds critique, même pour de faibles concentration de polluant.

Ces travaux vont être poursuivis par des comparaisons qualitatives, grâce aux visualisations 3D des motifs d'instabilités, et par des confrontations quantitatives, notamment entre les profils de vitesse expérimentaux et numériques. Afin de garantir l'accord entre ces profils, nous prévoyons de tester plusieurs modèles de relation entre la tension de surface et la concentration de polluant. Une autre piste consiste à prendre en compte la diffusion d'un polluant soluble dans le fluide, qui ne serait donc plus cantonné à la surface. Enfin, à l'issue de ces étapes, nous espérons pouvoir proposer une modèle efficace pour simuler l'interface gaz-liquide avec un coût numérique réduit comparé à l'utilisation d'une équation d'advection-diffusion couplée au champ de vitesse.

## Références

- [1] M.M. Bandi, V.S. Akella, D.K. Singh, R.S. Singh & S. Mandre, Hydrodynamic Signatures of Stationary Marangoni-Driven Surfactant Transport, *Physical Review Letters*, 2017, vol. 119, iss. 26, pp. 264501.
- [2] N.S. Cheng, Formula for the Viscosity of a Glycerol/Water Mixture, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2008, 47 (9), pp 3285–3288.
- [3] S.J. Cogan, K. Ryan & G.J. Sheard, Symmetry breaking and instability mechanisms in medium depth torsionally driven open cylinder flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, vol. 672, pp. 521-544.
- [4] Glycerine Producers' Association, *Physical Properties of Glycerine and Its Solutions*, Glycerine Producers' Association.
- [5] A.H. Hirsra, J.M. Lopez & R. Miraghaie, Measurement and computation of hydrodynamic coupling at an air/water interface with an insoluble monolayer, *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, vol. 443, pp. 271-292.
- [6] S. Huisman, D. van Gils & C. Sun, Applying laser Doppler anemometry inside a Taylor–Couette geometry using a ray-tracer to correct for curvature effects, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2012, vol. 36, pp. 115.
- [7] L. Kahouadji, *Analyse de stabilité linéaire d'écoulements tournants en présence de surface libre*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 2011.
- [8] Y.Y. Kwan, J. Park & J. Shen, A mathematical and numerical study of incompressible flows with a surfactant monolayer, *Discrete and continuous dynamical systems*, 2010, vol. 28, no. 1, pp. 181-197.
- [9] J.M. Lopez & A. Hirsra, Surfactant-Influenced Gas-Liquid Interfaces : Nonlinear Equation of State and Finite Surface Viscosities, *Journal of colloid and interface science*, 2000, vol. 229, pp. 575-583.
- [10] J.M. Lopez, F. Marques, A.H. Hirsra & R. Miraghaie, Symmetry breaking in free surface cylinder flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 502, pp. 99-126.
- [11] S. Poncet & M.P. Chauve, Shear layer instability in a rotating system, *Journal of Flow Visualization and Image Processing*, 2007, vol. 14, no. 1, pp. 85-105.
- [12] A. Ponce-Torre & E.J. Vega, The effects of ambient impurities on the surface tension, *EPJ Web of Conferences*, 2016, vol. 114, pp. "02098".
- [13] H.A. Stone, A simple derivation of the time-dependent convective-diffusion equation for surfactant transport along a deforming surface, *Physics of Fluids A*, 1990, vol. 2, pp. 111-112.