



**HAL**  
open science

## Motifs : un tour d'horizon

Clément Dupont

► **To cite this version:**

Clément Dupont. Motifs : un tour d'horizon. La Gazette de la Société mathématique de France, 2024, 178, pp.32-47. <hal-04407529>

**HAL Id: hal-04407529**

**<https://hal.science/hal-04407529v1>**

Submitted on 23 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# MOTIFS : UN TOUR D'HORIZON

CLÉMENT DUPONT

Ce texte est paru dans la *Gazette de la Société Mathématique de France* en octobre 2023. Il constitue une introduction (partielle et partielle) à la théorie des motifs, un programme initié par Grothendieck et qui structure aujourd'hui la géométrie et l'arithmétique des variétés algébriques.

## 1. AUX SOURCES DES MOTIFS

Nous décrivons ici une partie de la généalogie, multiple et diverse, de la notion de motif, en mettant l'accent sur le rôle important des conjectures de Weil. Ces conjectures concernent les fonctions zêta des variétés algébriques définies sur un corps fini et trouvent elles-mêmes leur source dans les travaux de Riemann sur la répartition des nombres premiers. La théorie des motifs telle que pensée par Grothendieck est un prolongement de travaux classiques sur la cohomologie des variétés algébriques et la géométrie énumérative, que nous introduisons.

1.1. **Fonction zêta, fonctions  $L$ .** Riemann introduit en 1859 la *fonction zêta*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1),$$

qu'il prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, et pour laquelle il démontre une équation fonctionnelle reliant  $\zeta(s)$  et  $\zeta(1-s)$ . Euler avait déjà calculé en 1735 :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \dots,$$

et en général  $\zeta(2k) \in \mathbb{Q}\pi^{2k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

La factorisation en produit de nombres premiers donne une écriture de la fonction zêta, déjà remarquée par Euler et appelée *produit eulérien* :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Riemann en déduit que les zéros complexes de la fonction zêta contrôlent la répartition des nombres premiers, et formule au passage une conjecture toujours ouverte, l'*hypothèse de Riemann* : ces zéros (hormis les zéros « triviaux »  $s = -2, -4, -6, \dots$ ) devraient être situés sur la droite  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ .

Vingt ans avant Riemann, son mentor Dirichlet avait déjà usé des méthodes de l'analyse (réelle) pour prouver le *théorème de la progression arithmétique* : pour des entiers  $a, d \geq 1$  premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à  $a$  modulo  $d$ . Sa preuve repose sur les *fonctions  $L$* ,

$$L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

associées à des *caractères de Dirichlet*  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

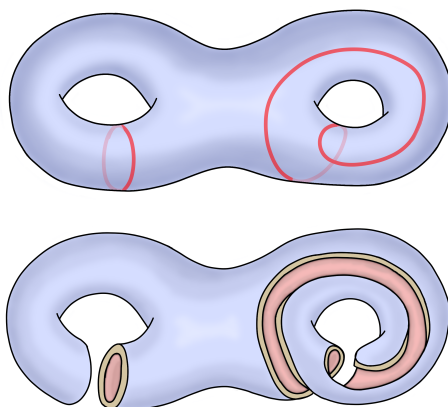
À partir de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle apparaissent de nombreuses « fonctions  $L$  » (ou fonctions  $\zeta$ ) dans l'esprit de celles de Dirichlet, associées à divers objets de nature arithmétique : corps de nombres (Dedekind), représentations galoisiennes (E. Artin), formes modulaires (Hecke), etc. Ces fonctions ont des caractéristiques (souvent conjecturales!) communes : produit eulérien, prolongement analytique, équation fonctionnelle, valeurs intéressantes aux entiers, hypothèse de Riemann.

Une des sources de la théorie des motifs est la recherche d'un cadre pour structurer les propriétés des fonctions  $L$  issues de l'arithmétique, qui sont toutes des cas particuliers de fonctions  $L$  associées aux motifs.

**1.2. Coïncidences?** Le terme de *motif*, inventé par Grothendieck, évoque une phrase musicale qu'on retrouve, sous différentes incarnations, à plusieurs endroits d'une œuvre. En peinture, le motif est le sujet d'une toile, qui en est une représentation du point de vue d'un artiste. Un motif au sens mathématique est un objet associé à une variété algébrique et qui s'incarne en des invariants de natures différentes, expliquant certaines « coïncidences » entre ces invariants. C'est donc aussi le motif, au sens de raison d'être, de ces incarnations différentes d'un phénomène commun.

Une de ces coïncidences a trait à la notion de genre. Pour une surface de Riemann compacte  $X$ , on a l'égalité entre les deux quantités suivantes, appelées *genre* de  $X$  (voir [Lê20, PP16] pour des analyses historiques de la notion de genre).

- (a) Un invariant *topologique* : le « nombre de trous » de  $X$ , c'est-à-dire le nombre de tores (« donuts ») qu'on doit recoller entre eux pour former  $X$ . C'est-aussi le nombre maximal de coupures (données par des courbes continues, fermées simples deux à deux disjointes) qu'on peut effectuer sur  $X$  sans la déconnecter. La figure suivante<sup>1</sup> montre une surface de Riemann compacte de genre 2 avec un système maximal de coupures, et une représentation de la surface découpée.



- (b) Un invariant *analytique* : la dimension de l'espace vectoriel complexe des 1-formes différentielles holomorphes sur  $X$  (données dans une coordonnée locale  $z$  par une formule  $f(z) dz$  avec  $f$  holomorphe), classiquement appelées « différentielles de première espèce ».

On verra au §1.7 une troisième incarnation du genre qui a, via les conjectures de Weil, influencé les développements de la théorie des motifs.

- (c) Un invariant *arithmétique*, lié au nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales correspondant à une courbe algébrique définie sur un corps fini.

Les « coïncidences » dont la notion de motif est censée rendre compte se formalisent via la cohomologie des variétés algébriques.

1. Les figures de cet article ont été réalisées par Anthony Genevois.

1.2.1. *Variétés algébriques.* On s'intéresse aux variétés algébriques définies sur un corps  $k$ , comme les variétés affines (resp. projectives), définies dans l'espace affine  $\mathbb{A}^n$  (resp. projectif  $\mathbb{P}^n$ ) par un système d'équations données par des polynômes en  $n$  variables (resp. des polynômes homogènes en  $n+1$  variables) à coefficients dans  $k$ . Pour une variété algébrique  $X$  et un corps  $K$  contenant  $k$ , on a l'ensemble  $X(K)$  de ses  $K$ -points rationnels, qui est l'ensemble des solutions dans  $K$  du système d'équations.

*Exemple A.* Considérons  $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ , la droite affine privée du point 0, définie sur  $k = \mathbb{Q}$ . C'est une variété algébrique affine qui peut être décrite par l'équation  $xy = 1$  dans le plan affine  $\mathbb{A}^2$ . On a  $X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ .

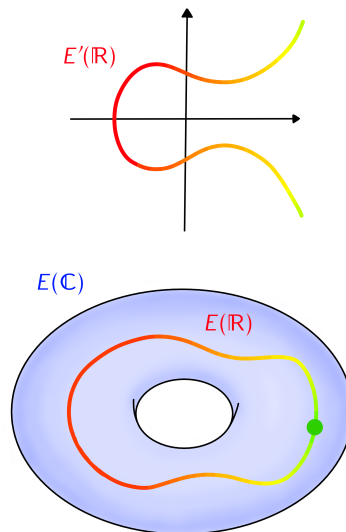
*Exemple B.* Considérons la variété algébrique définie sur  $k = \mathbb{Q}$  par une équation de la forme

$$E: y^2 z = x^3 + uxz^2 + vz^3$$

dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^2$  avec coordonnées homogènes  $[x : y : z]$ . Dans l'espace affine  $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$  où  $z \neq 0$ , cela correspond à l'équation (obtenue en posant  $z = 1$  dans l'équation de  $E$ ) :

$$E': y^2 = x^3 + ux + v.$$

Le seul point de  $E \setminus E'$  (« à l'infini ») est  $[0 : 1 : 0]$ . Si les paramètres  $u, v \in \mathbb{Q}$  sont tels que  $x^3 + ux + v$  est à racines simples on dit que  $E$  est une *courbe elliptique*. La figure suivante montre  $E(\mathbb{R})$  (le point à l'infini correspond à la direction verticale), et  $E(\mathbb{C})$ , une surface de Riemann compacte de genre 1.



1.3. **Cohomologie des variétés algébriques.** Un outil a pris une importance considérable au  $XX^e$  siècle dans l'étude (entre autres) des variétés algébriques : les *groupes de cohomologie*, qui sont des espaces vectoriels de dimension finie

$$H^0(X), H^1(X), H^2(X), \dots$$

associés à une variété algébrique  $X$ , et qui encodent de manière concise certaines « obstructions » liées à la géométrie de  $X$ . À la base de la théorie des motifs figure le fait étonnant qu'il y a plusieurs façons de mettre en place un tel outil, dont les deux suivantes (voir plus bas pour des exemples de calculs).

- (a) La *cohomologie de Betti*, ou *singulière*, disponible si  $k$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , mise en place par Betti, Poincaré, E. Noether, et d'autres. Le groupe de cohomologie de Betti

$H_{\mathbb{B}}^n(X)$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie, dual de l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  de l'espace topologique  $X(\mathbb{C})$  :

$$H_{\mathbb{B}}^n(X) = H_n(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})^\vee.$$

Rappelons que l'homologie singulière est définie comme le quotient de l'espace des  $n$ -cycles topologiques par celui des  $n$ -bords.

- (b) La *cohomologie de de Rham (algébrique)*, définie par Grothendieck [Gro66] et qui est disponible si  $k$  est de caractéristique zéro. Le groupe de cohomologie de de Rham  $H_{\text{dR}}^n(X)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie, analogue purement algébrique de la cohomologie de de Rham en géométrie différentielle (quotient de l'espace des  $n$ -formes différentielles fermées par celui des formes exactes), les formes différentielles  $\mathcal{C}^\infty$  étant remplacées par les formes différentielles algébriques.

Si  $k$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , un théorème de Grothendieck, combiné au théorème de de Rham classique, donne un isomorphisme canonique entre ces deux théories cohomologiques, une fois les coefficients étendus aux nombres complexes :

$$(1) \quad H_{\text{dR}}^n(X) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{B}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

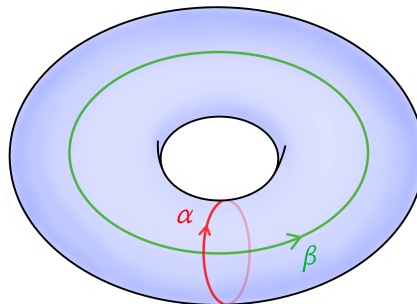
Cet isomorphisme est issu de l'intégration des formes différentielles (représentants de classes de cohomologie de de Rham) le long de cycles sur  $X(\mathbb{C})$  (représentants de classes d'homologie singulière).

Notamment, les groupes de cohomologie de Betti et de de Rham ont la même dimension... ce qui est une « coïncidence » étonnante puisqu'ils mesurent des obstructions de natures très différentes!

*Exemple A.* Le groupe  $H_{\text{B/dR}}^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$  est de dimension 1. Du côté Betti, il y a en effet une unique obstruction à pouvoir contracter un lacet  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}^*$ , mesurée par l'*indice*  $\text{Ind}(\gamma)$ , le nombre de fois que  $\gamma$  tourne autour de 0. Du côté de Rham, il y a une unique obstruction à l'existence d'une primitive d'une fonction méromorphe avec un seul pôle en 0, mesurée par le *résidu*  $\text{Res}(f)$ . Ces obstructions, topologique et analytique, sont reliées par la formule des résidus, qui est un précurseur de l'isomorphisme de comparaison (1) :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \text{Ind}(\gamma) \text{Res}(f).$$

*Exemple B.* La courbe elliptique  $E$  et la courbe elliptique épointée  $E'$  ont les mêmes groupes de cohomologie  $H_{\text{B/dR}}^1(E) \simeq H_{\text{B/dR}}^1(E')$ , de dimension 2. Une base de  $H_{\text{B}}^1(E)^\vee = H_1(E(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$  est donnée par les classes de deux lacets  $\alpha$  et  $\beta$  comme dans la figure suivante. Une base de  $H_{\text{dR}}^1(E')$  est donnée<sup>2</sup> par les classes des formes différentielles  $dx/y$  (qui s'étend en une forme différentielle sur  $E$ ) et  $x dx/y$  (qui a un pôle d'ordre 2 au point à l'infini).



2. La cohomologie de de Rham algébrique de  $E'$  est plus facile à décrire que celle de  $E$  grâce au fait que  $E'$  est affine : toutes les classes de cohomologie peuvent être représentées par des formes algébriques globales.

Plus généralement, pour une surface de Riemann compacte  $X$  de genre  $g$ , le  $H_{\text{B/dR}}^1(X)$  est de dimension  $2g$ . Du côté Betti, un système maximal de coupures de  $X$  ne remplit que la moitié de ce groupe de cohomologie – de même du côté de Rham avec une base des différentielles de première espèce. Ce phénomène est un cas particulier de la théorie de Hodge, dont il sera question au §1.5.

Les théories de Betti et de de Rham partagent des caractéristiques formelles importantes, compatibles à l'isomorphisme de comparaison (1) :

- la functorialité (contravariante) : un morphisme de variétés algébriques  $f : X \rightarrow Y$  induit une application linéaire dans l'autre sens

$$(2) \quad f^* : H^n(Y) \longrightarrow H^n(X) ;$$

- une structure d'algèbre graduée commutative sur  $H^\bullet(X)$  induite par le *cup-produit*

$$H^i(X) \otimes H^j(X) \longrightarrow H^{i+j}(X) ;$$

- la *formule de Künneth* :

$$H^n(X \times Y) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) ;$$

- la *dualité de Poincaré* : si  $X$  est une variété algébrique projective lisse<sup>3</sup> et connexe de dimension  $d$  alors  $H^{2d}(X)$  est de dimension 1 et l'accouplement

$$H^i(X) \otimes H^{2d-i}(X) \longrightarrow H^{2d}(X)$$

donné par le cup-produit est non dégénéré pour tout entier naturel  $i \in \{0, \dots, 2d\}$ .

Mentionnons enfin, en anticipant le §1.6 où les définitions correspondantes seront données, une caractéristique essentielle de la cohomologie, qui la relie aux cycles algébriques :

- des applications *classe de cycle* issues des groupes de Chow, pour  $X$  lisse :

$$(3) \quad \text{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^{2r}(X) \quad , \quad Z \mapsto [Z].$$

**1.4. Périodes.** L'isomorphisme de comparaison (1) peut être représenté par une matrice, quitte à choisir une  $k$ -base de la cohomologie de de Rham et une  $\mathbb{Q}$ -base de la cohomologie de Betti. Dans le cas où  $k$  est un corps de nombres (extension finie de  $\mathbb{Q}$ ) une telle matrice s'appelle *matrice des périodes* et ses coefficients sont appelés *périodes*. Concrètement, ce sont des intégrales de formes différentielles algébriques le long de cycles tracés sur  $X(\mathbb{C})$ .

*Exemple A.* Dans le cas de  $H^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$ , il y a essentiellement une seule période, associée à la classe de la forme différentielle  $\frac{dz}{z}$  et à la classe du lacet  $\{|z| = 1\}$  parcouru dans le sens trigonométrique :

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

*Exemple B.* Une matrice des périodes de  $H^1(E)$  est de taille  $2 \times 2$ . Ses quatre coefficients sont des « intégrales elliptiques », par exemple

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{y} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ux + v}}$$

où  $a$  est la plus grande racine réelle de  $x^3 + ux + v$ . Ce sont des périodes, au sens usuel, des fonctions elliptiques, variantes des fonctions trigonométriques où l'ellipse remplace le cercle. Des intégrales similaires donnent aussi la formule exacte pour la période du pendule pesant en mécanique newtonienne.

3. Une variété algébrique projective est dite lisse si elle vérifie le critère jacobien usuel de la géométrie différentielle.

Les intégrales vues jusqu'à présent se calculent sur des domaines sans bord. Il est naturel de considérer des intégrales plus générales en incluant les groupes de *cohomologie relative*  $H^n(X, Y)$  où  $Y$  est une sous-variété de  $X$  (où vit le bord du domaine d'intégration). Par exemple, le groupe de cohomologie relative  $H^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, \{1, a\})$ , pour un  $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ , contient dans sa matrice des périodes l'intégrale

$$\int_1^a \frac{dt}{t} = \log(a).$$

On obtient alors une notion plus générale de période, qui est équivalente à la notion élémentaire suivante définie par Kontsevich et Zagier [KZ01].

**Définition.** Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire s'écrivent sous la forme d'intégrales absolument convergentes

$$\int_{\sigma} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

où  $f \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  et  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  est un domaine semi-algébrique défini sur  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire défini par un nombre fini d'inégalités  $g \geq 0$  avec  $g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ .

Les périodes forment un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  qui contient le corps  $\overline{\mathbb{Q}}$  des nombres algébriques et qui est dénombrable. On ne connaît pourtant aucun nombre complexe « intéressant » qui ne soit pas une période, même s'il est conjecturé que la base  $e$  du logarithme népérien n'est pas une période. En plus de  $\pi$ , des intégrales elliptiques, et des logarithmes, notons que la valeur de la fonction zêta en un entier  $n \geq 2$  est une période, grâce à la formule

$$\zeta(n) = \int_{[0,1]^n} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{1 - x_1 \cdots x_n}.$$

Elle apparaît dans la matrice des périodes d'un groupe de cohomologie relative associé à un arrangement de sous-variétés de  $\mathbb{A}^n$ .

Par ailleurs, les périodes apparaissent naturellement en physique : les *intégrales de Feynman*, qui calculent les probabilités des interactions entre particules élémentaires, s'expriment en fonction de périodes.

L'étude de l'arithmétique des périodes est une des raisons d'être de la théorie des motifs.

**1.5. Théorie de Hodge.** Focalisons-nous un instant sur la cohomologie de Betti, c'est-à-dire sur les invariants topologiques des variétés algébriques complexes (définies sur  $k = \mathbb{C}$ ). Une question centrale est : comment la structure de variété algébrique contraint-elle la topologie ? La théorie de Hodge est un ensemble d'outils pour répondre à cette question. Elle remonte au résultat fondateur suivant de Hodge [Hod52], dont il est important de préciser qu'il repose sur des méthodes analytiques (géométrie kählérienne).

**Théorème** (Décomposition de Hodge). *Soit  $X$  une variété algébrique complexe projective et lisse, soit  $n$  un entier naturel. On a une décomposition*

$$H_{\mathbb{B}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=n}} H^{p,q}(X)$$

qui vérifie la « symétrie de Hodge »

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X).$$

Concrètement, l'espace  $H^{p,q}(X)$  est l'espace des classes de cohomologie qui peuvent être représentées par une forme différentielle  $\mathcal{C}^{\infty}$  complexe de type  $(p, q)$ , c'est-à-dire écrite en coordonnées holomorphes locales  $z_i$  avec  $p$  occurrences de  $dz_i$  et  $q$  occurrences de  $d\bar{z}_i$ . La décomposition de Hodge est une structure supplémentaire contraignante sur la cohomologie de Betti ; par exemple, la symétrie de Hodge implique que  $H_{\mathbb{B}}^n(X)$  est de dimension paire si  $n$  est impair.

Comme  $H^{1,0}(X)$  est l'espace des 1-formes holomorphes sur  $X$ , cela explique, dans le cas des surfaces de Riemann (variétés algébriques complexes projectives lisses de dimension 1), que la dimension de  $H_{\mathbb{B}}^1(X)$  est le double du genre de  $X$ .

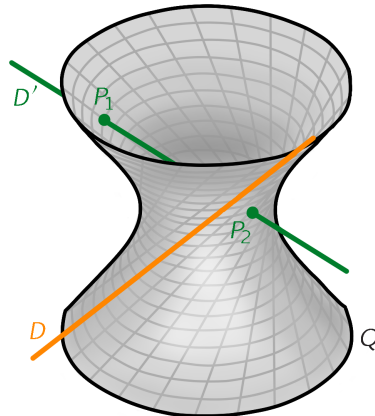
**1.6. Cycles algébriques.** La géométrie algébrique regorge de problèmes énumératifs comme : combien de droites de l'espace projectif de dimension 3 sont contenues dans une surface cubique lisse donnée? (Réponse : 27)

Une approche moderne à ce genre de question est la théorie de l'intersection, qui est l'étude des cycles algébriques. Un cycle algébrique (ici, à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ) de codimension  $r$  dans une variété algébrique  $X$  est une combinaison linéaire formelle

$$a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n$$

où les  $a_i \in \mathbb{Q}$  et les  $Z_i$  sont des sous-variétés de codimension  $r$  de  $X$ . On définit le  $r$ -ième *groupe de Chow*  $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$  comme le quotient de l'espace des cycles algébriques de codimension  $r$  par la relation d'équivalence rationnelle. Cette relation identifie deux cycles algébriques qui sont reliés par une famille de cycles algébriques paramétrés par  $\mathbb{P}^1$ . L'intersection des cycles algébriques donne une structure d'anneau gradué à  $CH^*(X)_{\mathbb{Q}}$ , notée  $(Z, Z') \mapsto Z \cdot Z'$ . En effet, le quotient par l'équivalence rationnelle permet de « déplacer » deux cycles algébriques jusqu'à ce qu'ils s'intersectent dans la codimension attendue. Par exemple, la figure suivante représente une surface quadrique lisse  $Q$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^3$  et une droite  $D$  contenue dans  $Q$ . Comme  $D$  est rationnellement équivalente à une droite  $D'$  qui intersecte  $Q$  en deux points distincts  $P_1$  et  $P_2$ , on a

$$Q \cdot D = Q \cdot D' = P_1 + P_2.$$



Le lien entre cycles algébriques et cohomologie de Betti est donné par l'application *classe de cycle*, annoncée au §1.3, pour  $k$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $X$  une variété lisse :

$$(4) \quad CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H_{\mathbb{B}}^{2r}(X), Z \mapsto [Z].$$

Si  $X$  est en plus projective de dimension  $d$  on a la dualité de Poincaré  $H_{\mathbb{B}}^{2r}(X) \simeq H_{2(d-r)}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ , et  $[Z]$  est représenté par un cycle topologique de dimension  $2(d-r) = \dim_{\mathbb{R}}(Z(\mathbb{C}))$  défini par une triangulation quelconque de  $Z(\mathbb{C})$ .

Dans le cas où  $X$  est projective et lisse, on voit facilement que l'image de l'application (4) est contenue dans la partie de type  $(r, r)$  de la décomposition de Hodge. La conjecture de Hodge [Hod52] est l'affirmation réciproque. À l'instar de l'hypothèse de Riemann, il s'agit de l'un des sept *Millenium Prize Problems* du Clay Mathematics Institute.

**Conjecture** (Conjecture de Hodge). *Soit  $X$  une variété algébrique complexe projective et lisse, soit  $r$  un entier naturel. Tout élément de  $H_{\mathbb{B}}^{2r}(X) \cap H^{r,r}(X)$  est la classe d'un cycle algébrique de codimension  $r$  dans  $X$ .*

**1.7. Les conjectures de Weil.** Les conjectures de Weil ont été une source incroyable de développements en géométrie arithmétique. Elles ont trait à un problème très ancien : compter le nombre de solutions entières d'équations polynomiales à coefficients entiers (appelées *équations diophantiennes*). Une stratégie classique est de les réduire modulo un nombre premier  $p$  pour se ramener à des équations dans le corps  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  à  $p$  éléments. Rappelons que  $\mathbb{F}_p$  a une unique extension de degré  $n$  pour chaque entier  $n \geq 1$ , qu'on note  $\mathbb{F}_{p^n}$  et qui est l'unique corps à  $p^n$  éléments.

Adoptons un point de vue géométrique et considérons une variété algébrique  $X$  définie sur  $k = \mathbb{F}_q$ , pour  $q$  une puissance d'un nombre premier  $p$ . Dans la lignée des travaux de Riemann, et en suivant notamment E. Artin, Hasse, et Weil, on associe à  $X$  sa *fonction zêta*, qui est la série formelle

$$Z(X, t) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \#(X(\mathbb{F}_{q^n})) \frac{t^n}{n}\right).$$

On considérera également la variante

$$\zeta_X(s) = Z(X, q^{-s}).$$

dont les propriétés sont plus semblables à celles de la fonction zêta de Riemann.

Si  $X$  est une courbe projective lisse, F. K. Schmidt [Sch31] démontre en 1931 la rationalité de  $Z(X, t)$  :

$$Z(X, t) = \frac{P_X(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

où  $P_X(t)$  est un polynôme. De plus, le degré de  $P_X(t)$  est  $2g$  où  $g$  est le genre de  $X$ , défini comme la dimension de l'espace des 1-formes algébriques sans pôle sur  $X$ . Comme on le verra, l'apparition de ce nombre  $2g$ , qui est la dimension du  $H_{\text{B/dR}}^1$  d'une courbe projective lisse, n'est pas un hasard et a bien une explication cohomologique. Schmidt démontre aussi que si l'on écrit

$$P_X(t) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i t)$$

alors  $\alpha \mapsto q/\alpha$  permute les  $\alpha_i$ . Ce résultat est un analogue de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann puisqu'il implique une relation entre  $\zeta_X(s)$  et  $\zeta_X(1-s)$ .

Dans le cas du genre 1, Hasse [Has36] démontre en 1933 que si l'on écrit  $P_X(t) = (1-\alpha t)(1-\beta t)$ , alors

$$|\alpha| = |\beta| = \sqrt{q}.$$

Ce résultat est un analogue de l'hypothèse de Riemann : les racines de  $\zeta_X$  sont sur la droite  $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ . Au cours des années 1940, Weil [Wei40] généralise le théorème de Hasse au cas du genre quelconque et en déduit la *borne de Hasse-Weil* sur le nombre de points d'une courbe projective lisse définie sur un corps fini :

$$|\#(X(\mathbb{F}_q)) - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}.$$

Les conjectures de Weil [Wei49], énoncées en 1949, visent à généraliser ces résultats à toutes les variétés projectives et lisses définies sur un corps fini. Elles ont été démontrées l'une après l'autre, par Dwork [Dwo60] (rationalité de  $Z(X, t)$ , 1959), Grothendieck et ses collaborateurs [SGA73] (équation fonctionnelle, lien avec la cohomologie de Betti, 1964), et enfin Deligne [Del74] (analogue de l'hypothèse de Riemann, 1974).

Avant de donner une idée de la preuve des conjectures de Weil, mentionnons la *fonction zêta globale* d'une variété algébrique  $X$  définie sur  $\mathbb{Q}$ , donnée par le produit eulérien

$$\zeta_X(s) = \prod_{p \text{ premier}} Z(X_p, p^{-s}),$$

où  $X_p$  est la réduction de  $X$  modulo  $p$ . La définition de  $Z(X_p, t)$  doit être adaptée pour un nombre fini de nombres premiers  $p$ , pour lesquels la réduction de  $X$  modulo  $p$  n'est pas lisse. Si  $X$  est un point, on retrouve la fonction zêta de Riemann. Dans le cas d'une courbe elliptique  $E$  on s'attend à ce que les propriétés analytiques de la fonction  $\zeta_E$  reflètent des propriétés

arithmétiques de  $E$ . Notamment, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer – un autre *Millenium Prize Problem* – relie le développement de Taylor de  $\zeta_E(s)$  en  $s = 1$  à la structure du groupe des points rationnels  $E(\mathbb{Q})$ .

**1.8. Encore plus de cohomologie.** Weil [Wei56] avait remarqué que ses conjectures avaient un goût cohomologique, par analogie avec le *théorème du point fixe de Lefschetz*. Ce théorème compte, sous certaines hypothèses, le nombre de points fixes d'un endomorphisme  $F$  d'un espace topologique  $X$  comme somme alternée des traces de l'endomorphisme  $F_*$  induit par  $F$  sur les différents groupes d'homologie singulière de  $X$  :

$$\#(X^F) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{Tr}(F_* : H_n(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Q})).$$

Quel rapport avec les conjectures de Weil? Une variété algébrique  $X$  définie sur  $\mathbb{F}_q$  a un endomorphisme canonique  $F$ , l'*endomorphisme de Frobenius*, qui élève les coordonnées à la puissance  $q$ , et  $X(\mathbb{F}_{q^n})$  est l'ensemble des points fixes de  $F^n$  dans l'ensemble  $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ , où  $\overline{\mathbb{F}}_q$  est une clôture algébrique de  $\mathbb{F}_q$ . Weil remarque que si l'on disposait d'une théorie cohomologique pour les variétés sur  $\mathbb{F}_q$  avec des propriétés formelles analogues à celles de la cohomologie singulière, on pourrait en déduire une preuve de ses conjectures – à l'exception notable de l'analogie de l'hypothèse de Riemann. Notamment, le polynôme  $P_X(t)$  dont il a été question dans le §1.7 s'interpréterait, via un théorème du point fixe à la Lefschetz, comme le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par le Frobenius sur  $H^1(X)$ , et l'équation fonctionnelle de la fonction  $\zeta_X$  serait une conséquence de la dualité de Poincaré.

Une telle théorie de cohomologie a été développée par Grothendieck et ses collaborateurs, notamment M. Artin, dans les années 1960 [SGA73], et continue la liste des théories de cohomologie commencée au §1.3 :

- (c) La *cohomologie étale  $\ell$ -adique*, disponible pour tout corps  $k$ , qui produit des espaces vectoriels  $H_{\text{ét}, \ell}^n(X)$  sur le corps  $\mathbb{Q}_\ell$  des nombres  $\ell$ -adiques, où  $\ell$  est un nombre premier différent de la caractéristique de  $k$ .

De manière analogue à la comparaison entre cohomologie de de Rham et de Betti (1), on a un isomorphisme de comparaison, dû à M. Artin, pour  $k$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  :

$$H_{\text{ét}, \ell}^n(X) \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{B}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Par ailleurs, les groupes de cohomologie étale  $\ell$ -adique ont une structure supplémentaire très riche : ils sont naturellement des représentations continues du groupe de Galois absolu du corps de définition  $k$ . Cela ouvre la voie à une étude géométrique des groupes de Galois.

**1.9. Vers les motifs.** Betti, de Rham, étale  $\ell$ -adique : trois théories de cohomologie<sup>4</sup> pour les variétés algébriques qui « donnent les mêmes résultats<sup>5</sup> ». Notamment, les groupes de cohomologie ont la même dimension et les mêmes propriétés formelles comme la dualité de Poincaré. Cependant, chaque théorie a ses spécificités et ses structures supplémentaires, comme la décomposition de Hodge en cohomologie de Betti et l'action galoisienne en cohomologie étale  $\ell$ -adique. De plus, les isomorphismes de comparaison entre théories de cohomologie font apparaître une richesse arithmétique, comme les périodes pour la comparaison entre Betti et de Rham (1).

Cette profusion de théories de cohomologie est un luxe : on peut transférer intuition et techniques d'une théorie à l'autre. Ce type de transfert est au cœur de la stratégie énoncée par Weil, et complétée par Serre [Ser60] et Grothendieck, pour attaquer ses conjectures. On verra

4. Mais aussi la *cohomologie cristalline*, qui remplace la cohomologie de de Rham sur un corps parfait de caractéristique positive.

5. Un slogan à nuancer, les isomorphismes de comparaison cachant des phénomènes subtils : Charles construit par exemple [Cha09] une variété algébrique  $X$  définie sur un corps de nombres  $k$  et deux plongements  $k \subset \mathbb{C}$  tels que les deux algèbres de cohomologie de Betti  $H_{\mathbb{B}}^*(X)$  correspondant aux deux plongements ne sont pas isomorphes.

aussi plus bas la notion de poids et la théorie de Hodge mixte, développée par Deligne [Del71] à partir de l'analogie entre cohomologie de Betti et cohomologie étale  $\ell$ -adique.

Il y a aussi des aspects plus frustrants de l'abondance des théories de cohomologie. Notamment, on a du mal à comparer les représentations galoisiennes données par la théorie étale  $\ell$ -adique pour différents nombres premiers  $\ell$ .

Ces considérations ont amené Grothendieck à dégager la notion de motif comme théorie de cohomologie « universelle ». Une intuition importante de Grothendieck est que la structure de cette théorie devrait être contrôlée par les cycles algébriques. Les motifs forment donc un cadre pour aborder des questions sur l'interaction entre cycles algébriques et cohomologie(s).

## 2. LA THÉORIE DES MOTIFS

Nous introduisons maintenant la théorie des motifs à proprement parler. Le lecteur impatient pourra parcourir le §2.1 avant de passer aux aspects galoisiens et aux applications aux périodes du §3.

**2.1. Motifs... et morphismes entre motifs.** Le *motif* d'une variété algébrique  $X$  est pensé par Grothendieck comme une version « universelle » de sa cohomologie, c'est-à-dire un objet  $M(X)$  qui contrôle les propriétés des groupes  $H^n(X)$  dans les différentes théories de cohomologie.

Pourquoi désirer une telle notion alors qu'on pourrait se contenter de la cohomologie? Une des raisons est qu'il arrive souvent que la cohomologie de deux variétés algébriques différentes  $X$  et  $Y$  contienne un « morceau commun » qui est « le même » dans chaque théorie : même dimension, mais aussi mêmes périodes, même décomposition de Hodge, même action du groupe de Galois absolu, etc. Cela se traduit notamment par un facteur commun dans les fonctions  $L$  associées à  $X$  et  $Y$ . On a alors envie d'exprimer, et si possible d'expliquer, cette « coïncidence » à un niveau conceptuel : le morceau commun est un objet en lui-même, un motif au sens mathématique, qui est un sous-objet commun aux objets  $M(X)$  et  $M(Y)$ .

L'exemple le plus simple de ce phénomène est que le  $H^0$  d'une variété algébrique connexe est toujours « le même ». L'explication est ici élémentaire : le morphisme de  $X$  vers un point induit par functorialité une application linéaire  $H^0(\text{point}) \rightarrow H^0(X)$  qui est un isomorphisme dans chaque théorie de cohomologie. En général, trouver des explications à de telles « coïncidences » est beaucoup plus compliqué. C'est un des buts de la théorie des motifs.

On est donc amené à donner un sens à la notion de « morceau commun » via une notion d'*isomorphisme entre motifs*, et plus généralement à relier des motifs différents via une notion de *morphisme entre motifs*. La question

« Qu'est-ce qu'un motif? »

n'est donc pas pertinente sans la question

« Qu'est-ce qu'un morphisme entre motifs? ».

Dit autrement, on cherche une *catégorie de motifs*. Rappelons qu'une *catégorie*  $C$  est la donnée

- d'une classe d'objets (par exemple les ensembles, les espaces vectoriels, les groupes)
- et d'une notion de morphisme (par exemple les applications, les applications linéaires, les morphismes de groupes), c'est-à-dire, d'ensembles de morphismes  $\text{Hom}_C(M, N)$  entre deux objets  $M$  et  $N$ , et d'une notion de composition des morphismes.

Il existe plusieurs approches des motifs, qui ne sont pas encore toutes unifiées, et sont plus ou moins utiles en fonction du contexte. Listons quelques-unes des caractéristiques attendues de « la » théorie des motifs.

(M1) Les motifs sont les objets d'une catégorie  $\text{Mot}(k)$ , la *catégorie des motifs* sur  $k$ , qui est  $\mathbb{Q}$ -linéaire : les ensembles de morphismes sont des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels et la composition des morphismes est bilinéaire.<sup>6</sup> Cet axiome est raisonnable puisque les motifs sont des abstractions des groupes de cohomologie, et donc des objets « linéaires ».

6. Pour des motifs plus généraux, l'anneau des coefficients n'est pas nécessairement  $\mathbb{Q}$ . On peut aussi vouloir remplacer le corps de définition  $k$  par un anneau commutatif général, voire une variété algébrique de paramètres.

(M2) Pour chaque théorie de cohomologie (Betti, de Rham, étale  $\ell$ -adique) à coefficients dans un corps  $F$  on a un *foncteur de réalisation*<sup>7</sup>

$$\text{Mot}(k) \longrightarrow \text{Vect}_F$$

vers la catégorie des espaces vectoriels sur  $F$  de dimension finie.

(M3) Pour toute variété algébrique  $X$  définie sur  $k$  et tout entier naturel  $n$ , on a un objet  $M^n(X)$  de  $\text{Mot}(k)$ , le *motif* de  $X$  en degré  $n$ , dont les réalisations (images par un des foncteurs de réalisation) sont les groupes de cohomologie  $H^n(X)$  dans les différentes théories. (Plus généralement on veut aussi avoir à disposition des objets  $M^n(X, Y)$  jouant le rôle de groupes de cohomologie relative, même si on n'insistera pas sur cet aspect.) Plus formellement, on a des foncteurs contravariants<sup>8</sup>

$$(5) \quad \text{Var}(k) \longrightarrow \text{Mot}(k) , \quad X \mapsto M^n(X)$$

qui factorisent les foncteurs de cohomologie. On peut être plus ambitieux et demander que la catégorie  $\text{Mot}(k)$  soit la catégorie *universelle* qui factorise tous les foncteurs de cohomologie d'une classe donnée.

(M4) La catégorie  $\text{Mot}(k)$  a une structure de catégorie monoïdale symétrique (c'est-à-dire une notion de produit tensoriel) et les motifs  $M^n(X)$  satisfont à une formule de Künneth, et à la dualité de Poincaré si  $X$  est projective et lisse.

Enfin, ajoutons une condition qui n'est pas imposée dans certaines approches de la théorie des motifs, et que nous développerons au §3 avec des applications aux périodes.

(M5) La catégorie  $\text{Mot}(k)$  est tannakienne, avec les foncteurs de réalisation pour foncteurs fibre.

Contentons-nous de noter qu'une catégorie tannakienne est notamment abélienne (existence de noyaux et images avec les propriétés attendues).

**2.2. Motifs et cycles algébriques.** La caractéristique cruciale des motifs est l'axiome suivant.

(M6) Les morphismes dans la catégorie  $\text{Mot}(k)$  sont reliés aux cycles algébriques.

Précisons ce desideratum. Les applications linéaires (2) ne sont pas les seules disponibles dans toutes les théories cohomologiques. En effet, les applications classe de cycle (3) permettent de définir des applications linéaires entre groupes de cohomologie grâce à la notion de correspondance. Une *correspondance* entre deux variétés algébriques  $X$  et  $Y$  est un cycle algébrique dans le produit  $X \times Y$ . Notons  $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$  et  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  les deux projections. Si  $Z$  est une correspondance de codimension  $r$  entre  $X$  et  $Y$  projectives lisses, on peut considérer la composition :

$$(6) \quad H^n(Y) \xrightarrow{(\text{pr}_Y)^*} H^n(X \times Y) \xrightarrow{[Z] \cdot (-)} H^{n+2r}(X \times Y) \xrightarrow{(\text{pr}_X)_*} H^{n+2r-2\dim(Y)}(X)$$

où  $(\text{pr}_X)_*$  est l'« intégration le long des fibres », issue de la dualité de Poincaré. Le graphe d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est un cas particulier de correspondance de codimension  $r = \dim(Y)$  entre  $X$  et  $Y$ , pour lequel (6) est l'application linéaire (2) induite par  $f$ .

Une intuition importante de Grothendieck est que, dans le cadre des variétés projectives lisses, les applications linéaires (6) sont *les seules* qui doivent être considérés comme communes à toutes les théories cohomologiques, et sont donc la *définition* des morphismes entre motifs de variétés projectives lisses. (Nous verrons que le cas des variétés générales est plus subtil.)

7. Un foncteur  $F$  d'une catégorie  $C$  vers une catégorie  $D$  associe à tout objet  $M$  de  $C$  un objet  $F(M)$  de  $D$ , et à tout morphisme  $M \rightarrow N$  dans  $C$  un morphisme  $F(M) \rightarrow F(N)$  dans  $D$ , de manière compatible à la composition des morphismes.

8. Un foncteur contravariant reverse le sens des flèches : à un morphisme  $M \rightarrow N$  il associe un morphisme  $F(N) \rightarrow F(M)$  « dans l'autre sens », de manière compatible à la composition des morphismes.

**2.3. Motifs purs à la Grothendieck.** La première définition d'une catégorie des motifs est due à Grothendieck. Il s'agit d'une théorie partielle puisqu'elle ne concerne que les variétés algébriques projectives et lisses. Les motifs correspondants sont appelés *purs* pour les distinguer des motifs généraux qu'on appelle parfois *mixtes*. On doit à Manin [Man68] le premier texte sur les idées de Grothendieck au sujet des motifs purs.

Nous présentons maintenant la construction (en trois étapes) d'une des versions de la catégorie des motifs purs de Grothendieck. Il s'agit de la catégorie des *motifs numériques*, basée sur l'équivalence numérique entre cycles algébriques. Pour une variété algébrique projective lisse  $X$  de dimension  $d$  et deux éléments  $Z, Z' \in \text{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}}$ , on dit que  $Z$  et  $Z'$  sont *numériquement équivalents*, et on écrit  $Z \sim_{\text{num}} Z'$ , si pour tout  $W \in \text{CH}^{d-r}(X)_{\mathbb{Q}}$  de codimension complémentaire, les nombres d'intersection  $\#(Z \cdot W)$  et  $\#(Z' \cdot W)$  coïncident.

**2.3.1. Étape 1.** On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les variétés algébriques projectives lisses, où l'on note  $M(X)$  l'objet correspondant à une variété  $X$ ; les morphismes sont donnés par les correspondances modulo équivalence numérique :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M(Y), M(X)) = \text{CH}^{\dim(Y)}(X \times Y)_{\mathbb{Q}} / \sim_{\text{num}}.$$

La composition de correspondances  $Z_{12}$  entre  $X_1$  et  $X_2$  et  $Z_{23}$  entre  $X_2$  et  $X_3$  se fait par la formule

$$Z_{12} \circ Z_{23} = (\text{pr}_{13})_* ((\text{pr}_{12})^* (Z_{12}) \cdot (\text{pr}_{23})^* (Z_{23})),$$

où les  $\text{pr}_{ij} : X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_i \times X_j$  sont les projections. La catégorie  $\mathcal{C}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire et monoïdale symétrique, le produit tensoriel étant donné par le produit des variétés. L'objet correspondant à un point est noté  $\mathbb{Q}$ , c'est l'unité du produit tensoriel.

On a un foncteur contravariant  $\text{Var}(k) \rightarrow \mathcal{C}$  qui envoie  $X$  sur  $M(X)$  et un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  vers la classe du graphe de  $f$ .

**2.3.2. Étape 2.** L'objet  $M(X)$  de  $\mathcal{C}$  joue le rôle de la somme directe des  $H^n(X)$  pour tous les degrés  $n$ . On souhaiterait « découper » cet objet en une somme directe d'objets  $M^n(X)$ . Plus généralement, on souhaiterait aussi « découper » chaque  $M^n(X)$  en somme directe d'objets plus petits (« particules élémentaires »?) quand une telle décomposition existe dans chaque théorie de cohomologie.

On définit donc la catégorie  $\mathcal{D}$  comme étant la *complétion pseudo-abélienne* de  $\mathcal{C}$ . Cela revient à rajouter formellement des objets qui jouent le rôle de noyaux ou images des projecteurs : pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}$  et tout morphisme  $e : M \rightarrow M$  qui vérifie  $e \circ e = e$ , on a des objets  $\ker(e)$  et  $\text{Im}(e)$  dans  $\mathcal{D}$  et une décomposition  $M = \ker(e) \oplus \text{Im}(e)$ .

On obtient alors une décomposition  $M(\mathbb{P}^1) = M^0(\mathbb{P}^1) \oplus M^2(\mathbb{P}^1)$  dans  $\mathcal{D}$ , grâce au projecteur donné par le cycle algébrique  $\mathbb{P}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . On montre facilement que  $M^0(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Q}$  est le motif trivial. Même si  $H^2(\mathbb{P}^1)$  est de dimension 1, le motif  $M^2(\mathbb{P}^1)$  n'est pas isomorphe au motif trivial. Une manière de le voir est que parmi les périodes de  $H^2(\mathbb{P}^1)$  figure  $2i\pi$ , alors que les périodes du  $H^0$  du point sont des nombres rationnels. Ou encore, en théorie de Hodge,  $H^2(\mathbb{P}^1)$  est de type  $(1, 1)$  alors que le  $H^0$  du point est de type  $(0, 0)$ . On note

$$M^2(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Q}(-1),$$

qu'on appelle le *motif de Lefschetz*.

**2.3.3. Étape 3.** La catégorie des motifs numériques, notée  $\text{NumMot}(k)$ , est définie à partir de  $\mathcal{D}$  en rajoutant formellement un inverse tensoriel à  $\mathbb{Q}(-1)$ , c'est-à-dire un objet  $\mathbb{Q}(1)$ , appelé *motif de Tate*, qui vérifie

$$\mathbb{Q}(-1) \otimes \mathbb{Q}(1) \simeq \mathbb{Q}.$$

Cette étape a pour but d'induire sur  $\text{NumMot}(k)$  une notion de dualité compatible à la dualité de Poincaré en cohomologie : pour une variété projective lisse  $X$  de dimension  $d$ , on a

$$M(X)^\vee = M(X) \otimes \mathbb{Q}(1)^{\otimes d}$$

Le théorème suivant, conjecturé par Grothendieck et démontré par Jannsen [Jan92] en 1992, justifie la construction.

**Théorème.** *La catégorie  $\text{NumMot}(k)$  est abélienne semi-simple<sup>9</sup>.*

La catégorie des motifs numériques est donc une bonne candidate pour « la » catégorie des motifs purs. Comme on le verra plus bas, on ne sait cependant pas démontrer qu'elle satisfait tous les axiomes (M1)-(M6).

2.3.4. *Motifs de Chow, motifs homologiques.* On peut répéter la construction ci-dessus avec les variantes suivantes :

- travailler avec les groupes de Chow non quotientés, ce qui produit la catégorie des *motifs de Chow*  $\text{CHMot}(k)$  ;
- remplacer l'équivalence numérique par l'équivalence homologique  $\sim_{\text{hom}}$  (deux cycles algébriques sont homologiquement équivalents si leurs classes dans une théorie cohomologique donnée coïncident), ce qui produit la catégorie des *motifs homologiques*  $\text{HomMot}(k)$ .

Des cycles algébriques homologiquement équivalents sont numériquement équivalents, d'où des foncteurs

$$\text{CHMot}(k) \longrightarrow \text{HomMot}(k) \longrightarrow \text{NumMot}(k).$$

2.4. **Les conjectures standard.** On souhaiterait définir, pour une théorie de cohomologie donnée à coefficients dans un corps  $F$ , un foncteur de réalisation  $\text{NumMot}(k) \rightarrow \text{Vect}_F$  par la formule

$$M(X) \mapsto H^\bullet(X) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X),$$

et par (6) pour les morphismes. Mais après avoir quotienté les groupes de Chow par l'équivalence numérique, cela n'a de sens que si deux cycles algébriques numériquement équivalents sont homologiquement équivalents, c'est-à-dire si la conjecture suivante est vérifiée.

**Conjecture.** *Les relations d'équivalence homologique et numérique coïncident :  $\sim_{\text{hom}} = \sim_{\text{num}}$ .*

On s'attend donc à une équivalence de catégories :  $\text{HomMot}(k) \stackrel{?}{\cong} \text{NumMot}(k)$ . Notons que la catégorie  $\text{CHMot}(k)$  n'est pas abélienne en général (mais on conjecture qu'elle l'est dans le cas d'un corps fini  $k$ ). Son rôle dans la théorie est clarifié par la notion de motif mixte, qu'on développera au §2.6.

Si l'on travaille avec les motifs homologiques pour assurer l'existence de foncteurs de réalisation, un autre problème se pose (en plus du fait qu'on ne sait pas prouver que la catégorie  $\text{HomMot}(k)$  est abélienne). En effet, on ne sait pas en général « découper » l'objet  $M(X)$  de  $\text{HomMot}(k)$  en une somme directe d'objets  $M^n(X)$  qui se réaliseraient en les groupes de cohomologie  $H^n(X)$ . Cela revient à la conjecture suivante, dont on peut montrer qu'elle est en fait une conséquence de la précédente.

**Conjecture.** *Soit  $X$  une variété algébrique projective et lisse de dimension  $d$ , soit un entier  $i \in \{0, \dots, 2d\}$ . Le « projecteur de Künneth »*

$$H^\bullet(X) \twoheadrightarrow H^i(X) \hookrightarrow H^\bullet(X)$$

*est induit par une correspondance, c'est-à-dire un élément de  $\text{CH}^d(X \times X)_{\mathbb{Q}}$ , via la construction (6).*

Dans le cas où  $k$  est un corps fini, cette conjecture a été démontrée par Katz et Messing [KM74].

9. Un objet  $M$  d'une catégorie abélienne  $C$  est dit simple si ses seuls sous-objets sont  $0$  et  $M$ . On dit que  $C$  est semi-simple si tout objet de  $C$  est somme directe d'objets simples.

Les deux conjectures précédentes font partie d'un ensemble cohérent de « conjectures standard sur les cycles algébriques » énoncées par Grothendieck [Gro69, Kle94] en 1969. Grothendieck voyait un double intérêt à ces conjectures : elles permettaient de fonder la théorie des motifs, et avaient comme conséquence formelle la plus difficile des conjectures de Weil, l'analogue de l'hypothèse de Riemann. Celle-ci découlerait en effet de résultats de positivité de formes quadratiques sur les cycles algébriques (modulo équivalence), analogues du théorème de l'indice de Hodge en géométrie complexe.

Malheureusement, très peu de progrès ont été faits sur les conjectures standard depuis lors : prouver ces conjectures, ou encore la conjecture de Hodge, nécessite de produire des cycles algébriques, tâche pour laquelle on ne dispose pas de techniques générales. De plus, Deligne [Del74] a conclu la preuve des conjectures de Weil sans recourir à la stratégie suggérée par Grothendieck. Ironiquement, les travaux de Deligne sur les conjectures de Weil ont permis de faire des progrès sur les conjectures standard, dont le théorème de Katz–Messing évoqué ci-dessus.

Dans le dernier demi-siècle, la théorie des motifs s'est développée dans une direction qui n'était pas celle initialement envisagée par Grothendieck, contournant les conjectures standard. Celles-ci restent cependant un guide précieux et une source importante de questions sur les cycles algébriques, et les catégories de motifs purs à la Grothendieck sont un outil central pour y répondre.

Mentionnons au passage la théorie des *cycles motivés* d'André [And96], faisant suite à la notion de *cycle de Hodge absolu* de Deligne [Del82], et qui permet de mettre au point une théorie inconditionnelle des motifs purs ayant les caractéristiques attendues (M1)-(M6). L'idée est de remplacer les cycles algébriques par certaines classes de cohomologie qui viennent conjecturalement des cycles algébriques.

**2.5. Extensions entre motifs.** Un précurseur de la notion de motif mixte est la notion de *poids*, développée par Deligne [Del71] d'après des idées de Grothendieck. L'idée est que la cohomologie des variétés algébriques (dans toutes les théories) est munie d'une filtration canonique, la *filtration par le poids*

$$\cdots \subset W_{i-1} H^n(X) \subset W_i H^n(X) \subset \cdots \subset H^n(X)$$

telle que le quotient  $W_i/W_{i-1}$  est « pur de poids  $i$  », c'est-à-dire s'exprime en fonction de  $H^i$  de variétés algébriques projectives lisses. Les groupes de cohomologie des variétés algébriques projectives lisses sont donc les « briques élémentaires » permettant de construire les groupes de cohomologie de toutes les variétés algébriques. En cohomologie étale  $\ell$ -adique la filtration par le poids est induite par les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius, alors qu'en cohomologie de Betti elle est au cœur de la théorie de Hodge mixte.

À titre d'exemple, considérons une courbe algébrique projective lisse  $X$  et deux points rationnels  $a \neq b$  de  $X$ . On a alors une suite exacte courte

$$(7) \quad 0 \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow H^1(X \setminus \{a, b\}) \longrightarrow \mathbb{Q}(-1) \longrightarrow 0$$

qui exprime  $H^1(X \setminus \{a, b\})$  comme extension des groupes de cohomologie « purs »  $H^1(X)$  et  $\mathbb{Q}(-1)$ , de poids respectifs 1 et 2.

Un point important est que l'extension (7) est rarement scindée, c'est-à-dire que  $H^1(X \setminus \{a, b\})$  n'est pas la somme directe  $H^1(X) \oplus \mathbb{Q}(-1)$  – en tout cas, pas de manière qui soit compatible aux isomorphismes de comparaison entre différentes théories cohomologiques, ni à la théorie de Hodge ou à l'action du groupe de Galois absolu. Au niveau des périodes, l'obstruction à un tel scindage est mesurée par des intégrales de formes différentielles « de troisième espèce », c'est-à-dire avec des pôles d'ordre 1 en  $a$  et  $b$ . Il est clair, cependant, que l'extension (7) est scindée si le diviseur  $(a) - (b)$  de degré 0 est trivial dans le groupe de Picard  $\text{Pic}^0(X)$ , c'est-à-dire s'il existe une fonction rationnelle sur  $X$  avec seulement un zéro d'ordre 1 en  $a$  et un pôle d'ordre 1 en  $b$ . Cela suggère une relation entre la structure des extensions telles que (7) et les cycles algébriques.

Cette idée est développée par Beilinson (influencé par des idées de Deligne), qui dans un article important [Bei87] postule en 1984 l'existence d'une catégorie abélienne de motifs (mixtes)  $\text{Mot}(k)$  qui contiendrait la catégorie  $\text{NumMot}(k)$  et où les groupes d'extensions seraient reliés aux cycles algébriques. Par exemple, dans le cas d'une courbe algébrique projective lisse  $X$  on aurait :

$$\text{Ext}_{\text{Mot}(k)}^1(\mathbb{Q}(-1), M^1(X)) \simeq \text{Pic}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

et l'extension (7) correspondrait à la différence  $(a) - (b) \in \text{Pic}^0(X)$ .

Beilinson va plus loin et énonce une conjecture qui prévoit que les valeurs spéciales des fonctions  $L$  de motifs purs (et donc de toutes les fonctions  $L$  classiques issues de l'arithmétique) sont contrôlées de manière précise par les extensions entre motifs purs. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer en est un cas particulier. Conclusion : même si l'on ne s'intéresse qu'aux variétés algébriques projectives et lisses, on ne peut se passer des motifs mixtes !

**2.6. Motifs mixtes à la Voevodsky.** Il semble difficile d'étendre la définition des motifs purs à la Grothendieck, qui ne concernent que les variétés algébriques projectives lisses, aux motifs mixtes, qui sont censés être une théorie cohomologique universelle pour toutes les variétés algébriques. Un premier point de blocage est que (6) n'est pas défini si  $Y$  n'est pas projective lisse.

Dans la vision de Grothendieck, la catégorie des motifs est *abélienne*, avec des propriétés formelles proches de la catégorie des espaces vectoriels où vivent les groupes de cohomologie. Beaucoup de progrès de la théorie des motifs à partir des années 1980 vont reposer sur la suggestion, due à Deligne, de baser la théorie des motifs non pas sur les groupes de cohomologie, mais sur les *complexes* qui les calculent. Plutôt que de chercher à définir directement une catégorie abélienne des motifs, on cherche donc à

- d'abord définir une catégorie *triangulée* des motifs, qui aurait les propriétés attendues de la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des motifs<sup>10</sup> ;
- puis en extraire la catégorie abélienne des motifs grâce à un formalisme (« t-structures ») mis en place par Beilinson–Bernstein–Deligne–Gabber [BBDG18].

Il y a de bonnes raisons de privilégier le cadre triangulé au cadre abélien. D'abord, les catégories dérivées sont le réceptacle naturel des foncteurs dérivés, qui sont le langage de la cohomologie. En outre, on sait depuis les travaux de Grothendieck et de ses collaborateurs sur la cohomologie étale  $\ell$ -adique que dans le cadre des familles de variétés algébriques les propriétés de la cohomologie s'expriment plus aisément dans la catégorie dérivée d'une catégorie de faisceaux (formalisme des « six opérations »). Par ailleurs, les groupes d'extensions entre motifs, centraux dans les visions de Beilinson et de Deligne, s'incarnent simplement dans le cadre triangulé comme des groupes de morphismes, ce qui rend très cohérent le slogan (M6) « les morphismes entre motifs sont reliés aux cycles algébriques ».

La construction d'une catégorie triangulée de motifs  $\text{DMot}(k)$  a été effectuée par Voevodsky [Voe00] et indépendamment par Hanamura [Han95] et Levine [Lev98]. Les morphismes dans  $\text{DMot}(k)$  sont reliés aux cycles algébriques via les groupes de Chow supérieurs de Bloch [Blo86] :

$$\text{Hom}_{\text{DMot}(k)}(\mathbb{Q}(-n), M(X)[i]) \simeq \text{CH}^n(X, 2n - i).$$

Les motifs de Chow  $\text{CHMot}(k)$  forment une sous-catégorie pleine de  $\text{DMot}(k)$ . Contrairement à la catégorie des motifs purs, la catégorie  $\text{DMot}(k)$  n'est cependant pas basée sur les groupes de Chow et leurs quotients mais sur le formalisme des *correspondances finies* (ou « morphismes multivalués ») qui permettent de s'affranchir de subtilités liées à la théorie de l'intersection et notamment des « lemmes de déplacement » des cycles algébriques.

Il existe plusieurs définitions de  $\text{DMot}(k)$ , plus ou moins pratiques en fonction des points de vue. Un ingrédient central dans toutes les constructions est la «  $\mathbb{A}^1$ -localisation » : on force, pour

10. La catégorie dérivée  $D(A)$  d'une catégorie abélienne  $A$  s'obtient à partir de la catégorie des complexes dans  $A$  en inversant formellement les quasi-isomorphismes. Elle vérifie les axiomes d'une catégorie triangulée, définis par Verdier d'après Grothendieck.

toute variété algébrique  $X$ , la projection  $X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X$  à induire un isomorphisme au niveau des motifs. Un tel isomorphisme existe en effet dans toute théorie de cohomologie – par exemple, en cohomologie de Betti, cela résulte du fait que  $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$  est contractile.

Il semble donc que la première moitié du programme soit accomplie, et il reste à extraire une catégorie abélienne de la catégorie  $\text{DMot}(k)$ . Malheureusement, ce problème d’existence d’une « t-structure motivique » est toujours ouvert, et est probablement difficile puisqu’il implique les conjectures standard de Grothendieck!

Alors, la théorie des motifs est-elle condamnée à être un grand édifice inutile tant qu’on n’a pas démontré des conjectures difficiles sur les cycles algébriques? La réponse est un grand non : le formalisme triangulé des motifs a amené des résultats nouveaux, comme la conjecture de Bloch–Kato démontrée par Voevodsky [Voe11] en utilisant sa catégorie  $\text{DMot}(k)$ . La fin de ce texte est consacrée aux applications des motifs à l’étude des périodes, qui reposent sur les aspects galoisiens des motifs.

### 3. ASPECTS GALOISIENS ET APPLICATIONS AUX PÉRIODES

**3.1. Groupes de Galois motiviques.** On cherche à construire une catégorie  $\text{Mot}(k)$  qui soit *tannakienne*; notamment elle doit être abélienne, monoïdale symétrique rigide (existence de duals), et tout foncteur de réalisation  $\text{Mot}(k) \rightarrow \text{Vect}_F$  est exact et fidèle (*foncteur fibre*). Contentons-nous ici du cas *neutre*, c’est-à-dire tel qu’il existe un foncteur fibre à valeurs dans les espaces vectoriels sur  $F = \mathbb{Q}$  (par exemple le foncteur de réalisation de Betti pour  $k$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ).

Le formalisme tannakien, développé par Saavedra [SR72] et Deligne [Del90] d’après des idées de Grothendieck, est une « machine qui produit des groupes de Galois ». Pour un foncteur de réalisation  $\text{Mot}(k) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$ , on a un schéma en groupes<sup>11</sup>  $G$  défini sur  $\mathbb{Q}$ , appelé *groupe de Galois motivique*, qui agit linéairement sur la réalisation de tout objet de  $\text{Mot}(k)$ , et donc sur tous les groupes de cohomologie  $H^n(X)$  et plus généralement  $H^n(X, Y)$ , de manière compatible à tous les morphismes dans  $\text{Mot}(k)$ . Cette action est si riche qu’elle connaît toute la structure des motifs : le foncteur naturel

$$\text{Mot}(k) \longrightarrow \text{Rep}(G)$$

induit par le foncteur de réalisation est une équivalence de catégories. On peut donc étudier la structure des motifs via la théorie des représentations des groupes algébriques.

Notons au passage que le formalisme tannakien suggère de *définir* la catégorie des motifs comme la catégorie des représentations d’un certain schéma en groupes (ou dualement comme la catégorie des comodules sur une algèbre de Hopf). C’est l’approche suivie par Nori [Nor00, HMS17] et par Ayoub [Ayo14] qui définissent deux candidats pour le groupe de Galois motivique. Bien que leurs approches soient fondamentalement différentes (celle de Nori est relativement élémentaire alors que celle d’Ayoub repose sur le formalisme triangulé des motifs à la Voevodsky), on sait maintenant grâce aux travaux de Choudhury–Gallauer [CG17] qu’elles produisent les mêmes groupes de Galois motiviques. Dans le cas des motifs purs, ces groupes de Galois motiviques coïncident avec ceux produits par la théorie des cycles motivés d’André [And96].

**3.2. Vers une théorie de Galois des périodes.** Intéressons-nous au cas  $k = \mathbb{Q}$ , et appliquons le formalisme tannakien à une catégorie tannakienne de motifs  $\text{Mot}(k)$  et au foncteur de réalisation de Betti. Le groupe de Galois motivique  $G$  agit linéairement sur tous les groupes de cohomologie  $H_{\mathbb{B}}^n(X)$  et plus généralement  $H_{\mathbb{B}}^n(X, Y)$ . En se rappelant que les périodes apparaissent comme les coefficients de l’isomorphisme de comparaison (1) entre Betti et de Rham, cela suggère que  $G$

11. Un schéma en groupes défini sur  $\mathbb{Q}$  est la limite projective de groupes algébriques définis sur  $\mathbb{Q}$ , c’est-à-dire de sous-groupes de  $\text{GL}_N$  définis par des conditions polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  en les  $N^2$  coefficients des matrices.

agit sur l'algèbre des périodes via la formule :

$$g \cdot \int_{\sigma} \omega = \int_{g \cdot \sigma} \omega.$$

Problème : il se pourrait *a priori* que deux écritures d'une même période comme coefficient matriciel de (1) donnent deux actions différentes de  $G$ . La conjecture des périodes de Grothendieck prévoit que ce phénomène ne se produit jamais. Pour l'énoncer, notons  $T$  le torseur, produit par la « machine tannakienne », des isomorphismes entre les foncteurs de réalisation de de Rham et de Betti, et soit  $\text{comp} \in T(\mathbb{C})$  son point complexe induit par (1).

**Conjecture** (Conjecture des périodes). *Le point complexe  $\text{comp}$  est un point générique de  $T$ .*

Plus simplement, cette conjecture affirme que les périodes ne vérifient pas de relations algébriques qui ne soient pas « explicables » par des morphismes entre motifs. Elle se spécialise en des conjectures de transcendance très concrètes sur certaines familles de périodes, rarement démontrées [And09] mais qui peuvent être confirmées expérimentalement. Notons tout de même les résultats généraux de Wüstholz [Wüs86] et Huber–Wüstholz [HW22] au sujet des relations entre périodes de groupes de cohomologie de degré 1.

La conjecture des périodes pour les motifs de Nori est équivalente [HMS17] à l'énoncé élémentaire suivant [KZ01].

**Conjecture** (Conjecture des périodes de Kontsevich–Zagier). *Toutes les relations  $\mathbb{Q}$ -linéaires entre périodes sont des conséquences de trois familles de relations :*

- la bilinéarité de l'intégration ;
- la formule de changement de variable ;
- la formule de Stokes.

Si l'on croit à la conjecture des périodes on obtient, en suivant André [And09], une théorie de Galois des périodes, qui contient la théorie de Galois classique des nombres algébriques, et où les groupes de Galois sont en général des groupes algébriques définis sur  $\mathbb{Q}$ . Mais même sans savoir démontrer la conjecture des périodes, le formalisme tannakien peut être utilisé pour démontrer des résultats impressionnants sur les périodes, dont on donne maintenant deux exemples.

### 3.3. Applications des motifs aux périodes.

3.3.1. *Valeurs zêta multiples, et le théorème de Brown.* Les *valeurs zêta multiples* sont des sommes de séries multiples qui généralisent les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers :

$$\zeta(n_1, \dots, n_r) = \sum_{0 < k_1 < \dots < k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}},$$

où les paramètres  $n_i$  sont des entiers  $\geq 1$  avec  $n_r \geq 2$ . Elles apparaissent naturellement dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique, notamment via le calcul d'intégrales de Feynman. Ce sont des périodes d'objets d'une catégorie tannakienne de motifs, les motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$  – un des cadres pour lesquels on sait produire une catégorie tannakienne à partir du formalisme triangulé de Voevodsky –, qui devrait former une sous-catégorie tannakienne de  $\text{Mot}(\mathbb{Q})$ . Le qualificatif « de Tate mixte » désigne les extensions itérées des motifs  $\mathbb{Q}(-n) = \mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

Le théorème de Brown [Bro12] est un résultat de structure sur la catégorie des motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$ , qui a comme conséquence concrète l'énoncé suivant, conjecturé par Hoffman [Hof97].

**Théorème.** *Toute valeur zêta multiple peut s'écrire comme combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire des valeurs zêta multiples  $\zeta(n_1, \dots, n_r)$  avec  $n_i \in \{2, 3\}$  pour tout  $i$ .*

L'ingrédient central de la preuve est la théorie de Galois (motivique) des valeurs zêta multiples, initiée par Goncharov [Gon05]. Aussi surprenant que cela puisse paraître, on ne connaît pas à ce jour de preuve « non motivique » du théorème précédent. On renvoie le lecteur au livre de Burgos Gil et Fresán [BGF] pour plus de détails sur sa preuve.

Le théorème de Brown a des conséquences hors des motifs et des valeurs zêta multiples, grâce aux liens entre les motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$  et les groupes de tresses ou encore les espaces de modules de courbes. À titre d'exemple, il est un des ingrédients de la preuve d'un théorème récent de Chan–Galatius–Payne [CGP21] sur la taille de la cohomologie de l'espace de modules  $\mathcal{M}_g$  qui paramètre les courbes projectives et lisses de genre  $g$ .

3.3.2. *Séries de périodes, et le théorème d'Ayoub.* Le théorème d'Ayoub [Ayo15], dont nous ne donnerons pas l'énoncé ici, est un analogue « fonctionnel » de la conjecture des périodes de Kontsevich–Zagier où les périodes sont remplacées par des « séries de périodes », qui sont certaines séries de Laurent en une variable

$$\sum_{i \gg -\infty} \left( \int_{[0,1]^n} f_i \right) t^i.$$

La preuve repose sur l'analyse de la structure des motifs sur  $k = \mathbb{C}(t)$  et du groupe de Galois motivique (de Nori ou d'Ayoub) correspondant.

Ce qui est frappant dans le théorème d'Ayoub est qu'il s'agit d'un énoncé général de transcendance qui s'applique à toutes les périodes au sens fonctionnel, en une variable. Son pendant arithmétique (les conjectures des périodes du §3.2) semble beaucoup plus difficile. Par exemple, la conjecture des périodes implique que  $\zeta(3)$  n'est pas un multiple rationnel de  $\pi^3$ , ce qu'on ne sait pas démontrer. La théorie des motifs reste cependant un guide précieux pour structurer les relations (ainsi que l'absence de relation) entre périodes.

3.3.3. *Pour aller plus loin.* Le lecteur intéressé trouvera plus d'informations dans le livre de référence d'André [And04]. Le livre de Kahn [Kah18] est une introduction aux idées motiviques basée sur les fonctions zêta et  $L$ . L'article introductif de Kahn [Kah07] et le livre de Murre, Nagel et Peters [MNP13] contiennent des détails sur les catégories de motifs purs. Le livre de Cisinski et Déglise [CD19] étudie les catégories triangulées de motifs mixtes. Pour l'approche de Nori aux motifs et les liens avec les périodes, on pourra se référer au livre de Huber et Müller-Stach [HMS17]. Le volume collectif [PER24], avec des contributions de Fresán, Rivoal, et l'auteur, constitue une introduction à l'étude de l'arithmétique des périodes via les motifs.

*Remerciements.* Merci à Giuseppe Ancona, Yves André, Damien Calaque, Ricardo Campos, Javier Fresán, Charlotte Hardouin, François Lê, et un relecteur anonyme pour leurs commentaires sur une version préliminaire de cet article. Merci à Anthony Genevois pour avoir réalisé les figures de l'article.

## RÉFÉRENCES

- [And96] Y. ANDRÉ : Pour une théorie inconditionnelle des motifs. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 83:5–49, 1996.
- [And04] Y. ANDRÉ : *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, volume 17 de *Panor. Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [And09] Y. ANDRÉ : Galois theory, motives and transcendental numbers. In *Renormalization and Galois theories*, volume 15 de *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 165–177. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [Ayo14] J. AYOUB : L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I. *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)*, 693:1–149, 2014.
- [Ayo15] J. AYOUB : Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier. *Ann. of Math. (2)*, 181(3):905–992, 2015.
- [BBDG18] A. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, P. DELIGNE et O. GABBER : Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 de *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 2018.

- [Bei87] A. A. BEILINSON : Height pairing between algebraic cycles. In *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, numéro 1289 de Lecture Notes in Math., pages 1–25. Springer, Berlin, 1987.
- [BGF] J. I. BURGOS GIL et J. FRESÁN : *Multiple zeta values : from numbers to motives*. Clay Mathematics Proceedings, à paraître.
- [Blo86] S. BLOCH : Algebraic cycles and higher  $K$ -theory. *Adv. in Math.*, 61(3):267–304, 1986.
- [Bro12] F. BROWN : Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$ . *Ann. of Math. (2)*, 175(2):949–976, 2012.
- [CD19] D.-C. CISINSKI et F. DÉGLISE : *Triangulated categories of mixed motives*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2019.
- [CG17] U. CHOUDHURY et M. GALLAUER : An isomorphism of motivic Galois groups. *Adv. Math.*, 313:470–536, 2017.
- [CGP21] M. CHAN, S. GALATIUS et S. PAYNE : Tropical curves, graph complexes, and top weight cohomology of  $\mathcal{M}_g$ . *J. Amer. Math. Soc.*, 34(2):565–594, 2021.
- [Cha09] F. CHARLES : Conjugate varieties with distinct real cohomology algebras. *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)*, 630:125–139, 2009.
- [Del71] P. DELIGNE : Théorie de Hodge. I. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, pages 425–430. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [Del74] P. DELIGNE : La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43):273–307, 1974.
- [Del82] P. DELIGNE : *Hodge cycles on abelian varieties*, pages 9–100. Springer, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [Del90] P. DELIGNE : Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 de *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Dwo60] B. DWORK : On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. *Amer. J. Math.*, 82:631–648, 1960.
- [Gon05] A. B. GONCHAROV : Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry. *Duke Math. J.*, 128(2):209–284, 2005.
- [Gro66] A. GROTHENDIECK : On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (29):95–103, 1966.
- [Gro69] A. GROTHENDIECK : Standard conjectures on algebraic cycles. In *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, pages 193–199. Oxford Univ. Press, London, 1969.
- [Han95] M. HANAMURA : Mixed motives and algebraic cycles. I. *Math. Res. Lett.*, 2(6):811–821, 1995.
- [Has36] H. HASSE : Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III. *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)*, 175, 1936.
- [HMS17] A. HUBER et S. MÜLLER-STACH : *Periods and Nori motives*, volume 65 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer, Cham, 2017. With contributions by Benjamin Friedrich and Jonas von Wangenheim.
- [Hod52] W. V. D. HODGE : The topological invariants of algebraic varieties. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1*, pages 182–192. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952.
- [Hof97] M. E. HOFFMAN : The algebra of multiple harmonic series. *J. Algebra*, 194(2):477–495, 1997.
- [HW22] A. HUBER et G. WÜSTHOLZ : *Transcendence and linear relations of 1-periods*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2022.
- [Jan92] U. JANNSEN : Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity. *Invent. Math.*, 107(3):447–452, 1992.
- [Kah07] B. KAHN : Motifs. In *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui (Vol. 3)*. Cassini, 2007.
- [Kah18] B. KAHN : *Fonctions zêta et  $L$  de variétés et de motifs*. Nano. Calvage et Mounet, Paris, 2018.
- [Kle94] S. L. KLEIMAN : The standard conjectures. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 3–20. 1994.
- [KM74] N. M. KATZ et W. MESSING : Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields. *Invent. Math.*, 23:73–77, 1974.
- [KZ01] M. KONTSEVICH et D. ZAGIER : Periods. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 771–808. Springer, Berlin, 2001.
- [Lê20] F. LÊ : “Are the *genre* and the *Geschlecht* one and the same number?” An inquiry into Alfred Clebsch's *Geschlecht*. *Historia Mathematica*, 53:71–107, 2020.
- [Lev98] M. LEVINE : *Mixed motives*, volume 57 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Man68] Yu. I. MANIN : Correspondences, motifs and monoidal transformations. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77 (119):475–507, 1968.

- [MNP13] J. P. MURRE, J. NAGEL et C. A. M. PETERS : *Lectures on the theory of pure motives*, volume 61 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [Nor00] M. NORI : Lectures at TIFR, 2000.
- [PER24] *Harinck, P. and Plagne, A. and Sabbah, C., éditeurs. Périodes et transcendance, Journées mathématiques X-UPS 2019*. Éditions de l'École polytechnique, à paraître, 2024.
- [PP16] P. POPESCU-PAMPU : *What is the genus?* Numéro 2162 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2016.
- [Sch31] F. K. SCHMIDT : Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik  $p$ . *Math. Z.*, 33(1):1–32, 1931.
- [Ser60] J.-P. SERRE : Analogues kähleriens de certaines conjectures de Weil. *Ann. of Math. (2)*, 71:392–394, 1960.
- [SGA73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tomes 1, 2, 3*. Numéro 269 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [SR72] N. SAAVEDRA RIVANO : Catégories tannakiennes. *Bull. Soc. Math. France*, 100:417–430, 1972.
- [Voe00] V. VOEVODSKY : Triangulated categories of motives over a field. In *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, volume 143 de *Ann. of Math. Stud.*, pages 188–238. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.
- [Voe11] V. VOEVODSKY : On motivic cohomology with  $\mathbb{Z}/l$ -coefficients. *Ann. of Math. (2)*, 174(1):401–438, 2011.
- [Wei40] A. WEIL : Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 210:592–594, 1940.
- [Wei49] A. WEIL : Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:497–508, 1949.
- [Wei56] A. WEIL : Abstract versus classical algebraic geometry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III*, pages 550–558. Erven P. Noordhoff N. V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.
- [Wüs86] G. WÜSTHOLZ : Algebraic groups, Hodge theory and transcendence. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, California, 1986)*, pages 476–483. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

INSTITUT MONTPELLIÉRAIN ALEXANDER GROTHENDIECK, UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER, CNRS, MONTPELLIER, FRANCE

*Email address:* clement.dupont@umontpellier.fr