



HAL
open science

Quelques problèmes issus des *Arithmetica philosophica* de Peter Roth

Erwan Penchèvre, David Rabouin

► **To cite this version:**

Erwan Penchèvre, David Rabouin. Quelques problèmes issus des *Arithmetica philosophica* de Peter Roth. 2024. hal-04403061

HAL Id: hal-04403061

<https://hal.science/hal-04403061>

Preprint submitted on 18 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelques problèmes issus des *Arithmetica philosophica* de Peter Roth

Erwan PENCHÈVRE et David RABOUIN

(draft)

Nous donnons ici traduction et commentaire de dix-sept problèmes issus du livre *Arithmetica philosophica* de Peter Roth¹. Tous ces problèmes font intervenir une équation algébrique à une inconnue, de degré 5 (*surdesolid cofß*) ou 6 (*zensicubic cofß*); en outre, quatorze d'entre eux font aussi intervenir une question de stéréométrie et une question concernant des « nombres polygonaux ». Ces quatorze problèmes sont les seuls, dans les *Arithmetica philosophica*, à faire intervenir ces trois thèmes à la fois au sein d'un même énoncé.

Chaque énoncé est précédé d'une référence. Par exemple « XXIII f. 187 » désigne le problème XXIII, folio 187. Les trois premiers problèmes nous permettent d'introduire certaines techniques. Le lecteur pressé pourra justement consulter d'emblée le problème XXIII f. 187, car c'est un bon exemple.

1 Exemples de binômes et résidus en *surdesolid cofß*

I f. 184 « $\mathfrak{f} - 12\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 10\mathfrak{c}\mathfrak{l} = 423\mathfrak{u} - 248\mathfrak{z} + 924$. *Solution* : $\mathfrak{u} = 6 \pm \sqrt{3}$. »

Commentaire Rappelons pour commencer le sens à donner aux symboles cossiques présents dans les équations des *Arithmetica philosophica* :

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{u}, & x^2 &= \mathfrak{z}, & x^3 &= \mathfrak{c}\mathfrak{l}, & x^4 &= \mathfrak{z}\mathfrak{z}, & x^5 &= \mathfrak{f}, & x^6 &= \mathfrak{z}\mathfrak{c}\mathfrak{l}, \\ x^7 &= \mathfrak{z}\mathfrak{f}, & x^8 &= \mathfrak{z}\mathfrak{z}\mathfrak{z}, & x^9 &= \mathfrak{c}\mathfrak{l}\mathfrak{c}\mathfrak{l}, & x^{10} &= \mathfrak{z}\mathfrak{f}, & x^{11} &= \mathfrak{c}\mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Posons $P(x) = x^5 - 12x^4 + 10x^3 + 248x^2 - 423x - 924$. Comme il s'agit de trouver un binôme ou un résidu qui soit racine de ce polynôme, on cherche un polynôme unitaire, facteur de degré 2 à coefficients entiers de P . Son terme constant doit diviser $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, on essaie tous les diviseurs possibles. Par

1. Voir bibliographie en fin d'article, référence [3].

exemple, puisque 33 est un diviseur, on cherche y tel que $x^2 - yx + 33$ divise P . Pour ce faire, on pose la division euclidienne. En s'aidant d'une disposition en colonnes, on peut omettre de noter les puissances de x : les notations cosquies peuvent alors plutôt servir à noter les puissances de l'indéterminée y . Pour faire que le reste de la division s'annule identiquement, il faut trouver une racine d'un polynôme en y ; comme on cherche une solution entière, une telle racine est nécessairement un facteur du terme constant si le polynôme en y est unitaire. On trouvera $y = 12$. Plus précisément $P(x) = (x + 4)(x^2 - 4x - 7)(x^2 - 12x + 33)$. *Autrement* : on pourrait d'abord avoir cherché un facteur linéaire évident (ici $x + 4$) puis avoir appliqué une des méthodes de résolution algébrique connues à cette époque pour calculer les racines du polynôme quotient de degré 4 (méthode plus simple mais moins générale).

II f. 184 « $(\text{¶} + 722)(\text{¶} + 3820) = 2769560 - 50\text{¶¶} - 4416\mathfrak{A}$. *Solution* : $\mathfrak{A} = \sqrt{10} - 2$. »

Commentaire Voir commentaire précédent. L'équation est de la forme $P(x) = 0$ avec $P(x) = x^5 + 50x^4 + 722x^3 + 3820x^2 + 4416x - 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5$. On trouve facilement un facteur quadratique car il y a trois facteurs linéaires, et $P(x) = (x + 8)^2(x + 30)(x^2 + 4x - 6)$. L'unique racine positive du polynôme $x^2 + 4x - 6$ est $\sqrt{10} - 2$.

XXI f. 187 « Soit un *corpus irregulare* inscrit dans une sphère, à 18 faces carrées et 8 faces triangulaires équilatérales régulières, tel que, quand il est posé sur un carré, la face supérieure est toujours aussi un carré. Quand on le pose sur une base triangulaire, la face supérieure est toujours parallèle à la face inférieure (c'est-à-dire la base) et c'est aussi un triangle. L'arête de ce corps à vingt-quatre sommets mesure tant d'unités que la somme des deux vraies racines cinquièmes de $71\text{¶} + 75\mathfrak{A} - 2\text{¶¶} - 78\text{¶} - 450$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite mesure-t-il? *Solution* : $\sqrt{405 + \sqrt{52488}}$. »

Commentaire Ce polyèdre semi-régulier obtenu par double troncature à partir d'un cube ou d'un octaèdre est décrit par Stévin² qui le nomme *bistruncatum cubum primum*. Il en dessine le patron et calcule le rapport entre son arête et le rayon de la sphère circonscrite³. Ce polyèdre est aussi étudié par Descartes dans [2], comme tous les polyèdres semi-réguliers obtenus par troncature : dans le commentaire de Costabel, il est noté 18[4] 8[3]. Soit d la longueur d'une arête et ρ le rayon de la sphère circonscrite, alors $(2\rho)^2 = (5 + 2\sqrt{2})d^2$. On a $d = x_0 + x_1$

2. Voir [4], définition 15 p. 51.

3. Voir [4], p. 75 et 58.

où x_0 et x_1 sont deux solutions réelles positives de l'équation

$$x^5 = 71x^3 + 75x - 2x^4 - 78x^2 - 450.$$

Posons $P(x) = x^5 + 2x^4 - 71x^3 + 78x^2 - 75x + 450$. On a $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, on cherche un facteur quadratique de la forme $x^2 - yx + 15$. On trouve que

$$P(x) = (x + 10)(x^2 + x + 3)(x^2 - 9x + 15).$$

Ses deux seules racines positives sont $\frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}$, donc $d = 9$ et $2\rho = 9\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{405 + \sqrt{52488}}$. *Remarque* : si l'on a une idée préalable de l'ordre de grandeur de la solution, si l'on sait par exemple que $d < 10$, comme la somme des deux racines du facteur quadratique doit être inférieure à dix, leur produit ne pourra être supérieur à 25. Ainsi, le terme constant du facteur quadratique devra être un diviseur de 450 *inférieur à 25*. On a le choix entre 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15 ou 18. Dans tous les problèmes de ce genre, s'il s'agit seulement de *retrouver* les calculs menant à une solution déjà connue (puisque Roth donne lui-même la solution), on peut considérablement abrégé la recherche en utilisant cette remarque.

XXII f. 187 « Soit une sphère dont le diamètre mesure autant d'unités que la plus grande vraie racine *pentachilitetracosihexagonale* de $\mathfrak{b} + 3550\mathfrak{z} - 1817\mathfrak{u} + 5232 - 4\mathfrak{z}\mathfrak{z} - 84\mathfrak{c}$. On y inscrit un *corpus* irrégulier à 6 faces carrées et 8 faces hexagonales équilatérales régulières, tel que, quand il est posé sur un carré, la face supérieure est toujours aussi un carré. Quand on le pose sur une base hexagonale, la face supérieure est toujours parallèle à la face inférieure (c'est-à-dire la base) et c'est aussi un hexagone. Combien une arête de ce corps à vingt-quatre sommets inscrit dans la sphère donnée mesure-t-elle? *Solution* : $\sqrt{3 + \frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{1}{5}}$. »

Commentaire L'équation donnée dans cet énoncé est probablement erronée. C'est fâcheux, car il s'agit du premier d'une série de problèmes faisant intervenir à la fois des polyèdres, des équations algébriques, et des nombres figurés plans (le lecteur comprendra plus aisément s'il consulte d'abord le problème XXIII). Le polyèdre 8[6] 6[4] ici en question est obtenu par troncature d'un octaèdre, les arêtes étant coupées au tiers. Stevin dessine le patron de cet *octoedrum truncatum per laterum tertias*⁴, et il calcule $(2\rho)^2 = 10d^2$; d'après la

4. Voir [4] p. 78.

solution donnée par Roth, il faut donc que

$$x = \sqrt{10}d = \sqrt{10} \left(\sqrt{3 + \frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{1}{5}} \right) = 6 + \sqrt{2}.$$

Le polynôme quadratique unitaire dont ce nombre est la plus grande racine positive est $x^2 - 12x + 34$. Pour comprendre l'équation décrite dans l'énoncé, il faut savoir qu'un nombre 5406-gonal est un nombre de la forme

$$O_n(x) = \frac{n-2}{2}x^2 - \frac{n-4}{2}x,$$

avec $n = 5406$; l'équation de l'énoncé s'écrit donc

$$2702x^2 - 2701x = x^5 + 3550x^2 - 1817x + 5232 - 4x^4 - 84x^3.$$

Elle est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 - 4x^4 - 84x^3 + 848x^2 + 884x + 5232.$$

Ce polynôme n'est certes pas divisible par $x^2 - 12x + 34$; il y a donc certainement une coquille dans l'équation (on ne veut pas mettre en cause la solution donnée par Roth ni les autres données de l'énoncé, car on retrouve le même facteur quadratique dans les problèmes suivants). *Remarque* : on s'abstiendra en général de chercher à corriger de telles erreurs d'énoncé sauf les plus évidentes; mais changer *deux* coefficients suffit toujours à rendre un polynôme quelconque divisible par un facteur quadratique donné. Ici, on pourrait proposer le polynôme P suivant en remplacement de celui de l'énoncé :

$$P(x) = x^5 - 84x^3 + 96x^2 + 884x = x(x^2 + 12x + 26)(x^2 - 12x + 34).$$

XXIII f. 187 « Soit une autre sphère dont le diamètre est égal à la plus petite vraie racine *triacosiaicosihexagonale* de $\mathfrak{B} + 578\mathfrak{Z} + 7072 - 2861\mathfrak{Q} - 20\mathfrak{C} - 8\mathfrak{Z}$. On y inscrit un *corpus* irrégulier à 6 faces carrées et 8 faces triangulaires équilatérales régulières, tel que, quand il est posé sur un carré, la face supérieure est toujours aussi un carré. Quand on le pose sur une base triangulaire, la face supérieure lui est toujours parallèle et c'est aussi un triangle. Combien une arête de ce corps à douze sommets inscrit dans la sphère donnée mesure-t-elle? So-

lution : $3 - \sqrt{\frac{1}{2}}$. »

Commentaire Le polyèdre 6[4] 8[3] est obtenu par troncature à partir d'un cube ou d'un octaèdre, les arêtes étant coupées à la moitié. Stévin dessine le patron de cet *octoedrum truncatum per laterum media*⁵, et il montre que $\rho = d$. Or l'énoncé demande que ρ soit la plus petite solution positive de l'équation

$$O_{326}(x) = x^5 + 578x^2 + 7072 - 2861x - 20x^3 - 8x^4,$$

où $O_{326}(x)$ est le nombre 326-gonal de côté x défini par

$$O_n(x) = \frac{n-2}{2}x^2 - \frac{n-4}{2}x,$$

avec $n = 326$. L'équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 - 8x^4 - 20x^3 + 416x^2 - 2700x + 7072.$$

On a $7072 = 2^5 \cdot 13 \cdot 17$, on trouve un facteur quadratique de la forme $x^2 - yx + 34$ et

$$P(x) = (x + 8)(x^2 - 4x + 26)(x^2 - 12x + 34).$$

Ses seules racines positives sont $6 \pm \sqrt{2}$, donc $2\rho = 6 - \sqrt{2}$ et $d = 3 - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

XXIV f. 187 « Soit un *corpus irregulare* (inscrit dans une sphère creuse) à 20 faces hexagonales et douze faces pentagonales régulières, tel que, quand il est posé sur un pentagone, la face supérieure est toujours aussi un pentagone. Quand on le pose sur une base hexagonale, la face supérieure lui est toujours parallèle et c'est aussi un hexagone. La longueur de l'arête de ce corps à soixante sommets est la somme des deux vraies racines *heptacosihexacontapentagonales* de $\mathfrak{f} + (689 + \frac{1}{2}) \mathfrak{g} + 6188 - 9\mathfrak{h} - 4\mathfrak{i} - (2632 + \frac{1}{2}) \mathfrak{k}$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite mesure-t-il? *Solution* : le diamètre mesure $\sqrt{2088 + \sqrt{2099520}}$.

« Le grand *Mathematicus* Simon Jacob, *Rechenmeister* à Francfort offre un exemple de ce *corpus* dans son *Arithmetica* (*in quarto, folio 338*). J'ai résolu son problème de bien des manières; un jour si Dieu le veut, je publierai cela avec d'autres questions sur les polyèdres issues de son livre. »

Commentaire Le polyèdre 20[6] 12[5] est obtenu par troncature à partir de l'icosaèdre, les arêtes étant coupées au tiers. Stévin dessine le patron de ce *truncatum icosaedrum per laterum tertias*⁶ qu'il affirme ne pas avoir rencontré dans les ouvrages de ses prédécesseurs⁷, et il calcule $(2\rho)^2 = \frac{29 + 9\sqrt{5}}{2}d^2$.

5. C'est ainsi que Stévin le nomme dans [4] p. 77. Cf. *cuboctahedron*, [1] § 2.3 p. 18.

6. Voir [4] p. 81.

7. Voir [4] p. 47.

L'énoncé demande que $d = x_0 + x_1$ où x_0 et x_1 sont deux racines réelles positives de l'équation

$$O_{765}(x) = x^5 + \left(689 + \frac{1}{2}\right)x^2 + 6188 - 9x^4 - 4x^3 - \left(2632 + \frac{1}{2}\right)x.$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 308x^2 - 2252x + 6188.$$

On a $6188 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$, et on trouve un facteur quadratique de la forme $x^2 - yx + 34$:

$$P(x) = (x + 7)(x^2 - 4x + 26)(x^2 - 12x + 34).$$

Les seules racines positives de P sont $6 \pm \sqrt{2}$, donc $d = 12$ et

$$2\rho = 12\sqrt{\frac{29 + 9\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{2088 + \sqrt{2099520}}.$$

XXV f. 187 « Soit un *corpus irregulare* à 12 faces pentagonales et 20 faces triangulaires régulières équilatérales, tel que, quand on le pose sur un pentagone, cette base est parallèle à la face supérieure qui est toujours aussi un pentagone. Quand on le pose sur un triangle, alors la face supérieure est toujours aussi un triangle. Le diamètre d'un cercle circonscrivant l'un des pentagones de ce *corpus* à trente sommets est égal à la différence entre les deux vraies racines sixièmes de $1\text{z}\text{c}\text{l} + 1\text{u} + 1172\text{z} + 13260 - 1\text{z}\text{z} - 132\text{c}\text{l} - 5836\text{u}$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite mesure-t-il? *Solution* : $\sqrt{20 + \sqrt{80}}$. »

Commentaire Le polyèdre 20[3] 12[5] est obtenu par troncature à partir de l'icosaèdre ou du dodécaèdre, les arêtes étant coupées à la moitié. Stevin dessine le patron de ce *truncatum icosaedrum per laterum media*⁸ qu'il affirme ne pas avoir rencontré dans les ouvrages de ses prédécesseurs, et il calcule $(2\rho)^2 = (1 + \sqrt{5})^2 d^2$. Notons r le rayon du cercle circonscrit à un pentagone de côté d , on a

$$d = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

L'énoncé demande que $2r = x_0 - x_1$ où x_0 et x_1 sont deux racines réelles positives de l'équation $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 - x^4 - 132x^3 + 1172x^2 - 5836x + 13260.$$

8. Voir [4] p. 80. Cf. *icosidodecahedron*, [1] § 2.3 p. 18.

On a $13260 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$, et on trouve un facteur quadratique (encore le même) de la forme $x^2 - yx + 34$:

$$P(x) = (x + 15)(x^2 - 4x + 26)(x^2 - 12x + 34).$$

Les seules racines positives de P sont $6 \pm \sqrt{2}$, donc $2r = 2\sqrt{2}$ et $d = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$. Finalement

$$2\rho = (1 + \sqrt{5})\sqrt{5 - \sqrt{5}} = \sqrt{20 + \sqrt{80}}.$$

XXVI f. 188 « Soit une sphère dont le diamètre est égal à la plus grande vraie racine *enneacositriacontahexagonale* de $4\frac{3}{8} + (29 + \frac{1}{2})\rho - (131 + \frac{5}{16})\rho - 1\frac{1}{8} + (371 + \frac{1}{2})\frac{3}{8} - (1141 + \frac{7}{8})$ On inscrit dans cette sphère un *corpus* irrégulier à quatre faces hexagonales et quatre faces triangulaires équilatérales, tel que, quand on le pose sur un hexagone, la face supérieure est toujours parallèle à la base et elle est triangulaire. Inversement, quand on le pose sur un triangle, la face supérieure est toujours un hexagone. Combien l'arête de ce *corpus* à douze sommets inscrit dans la sphère mesure-t-elle? *Solution* : $\sqrt{1 + \frac{3}{22}} + \sqrt{\frac{13}{88}}$. Il ne peut en être autrement. »

Commentaire Le polyèdre $4[6] 4[3]$ est obtenu par troncature à partir du tétraèdre, les arêtes étant coupées au tiers. Stevin dessine le patron de ce *truncatum tetraedrum*⁹, et il calcule $(2\rho)^2 = \frac{11}{2}d^2$. L'énoncé demande que $2\rho = x$ où x est la plus grande racine réelle positive de l'équation

$$O_{936}(x) = 4x^4 + \left(29 + \frac{1}{2}\right)x^3 - \left(131 + \frac{5}{16}\right)x - x^5 + \left(371 + \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(1141 + \frac{7}{8}\right).$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 - 4x^4 - \left(29 + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(95 + \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(334 + \frac{11}{16}\right)x + \left(1141 + \frac{7}{8}\right).$$

Les *Rechenmeister* commençaient alors habituellement par faire un changement de variable pour transformer le polynôme en un polynôme unitaire à coefficients entiers; posons donc $x = \frac{z}{2}$. On a

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = z^5 - 8z^4 - 118z^3 + 764z^2 - 5355z + 36540.$$

9. Voir [4] p. 73.

On a $36540 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$, et on trouve un facteur quadratique de la forme $z^2 - yz + 87$:

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = (z + 12)(x^2 + 35)(z^2 - 20z + 87).$$

La plus grande racine réelle positive de ce polynôme est $z = 10 + \sqrt{13}$, donc $2\rho = x = 5 + \frac{\sqrt{13}}{2}$, et

$$d = \left(5 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{11}} = 2 \times \left(\sqrt{1 + \frac{3}{22}} + \sqrt{\frac{13}{88}}\right).$$

La solution donnée par Roth est donc erronée d'un facteur $\frac{1}{2}$, certainement dû à une confusion entre rayon et diamètre de la sphère¹⁰ (ce ne peut être dû au changement de variable car une telle erreur aurait conduit à un facteur 2 et non $\frac{1}{2}$).

XXVII f. 188 « Soit un *corpus irregulare* à six faces carrées équilatérales et régulières, et douze faces triangulaires non équilatérales. On suppose que chaque hauteur abaissée d'un sommet d'une telle face triangulaire sur l'arête d'une face carrée (en son milieu) est égale à l'arête des faces carrées de ce *corpus*. Quand on le pose sur une face carrée, la face supérieure est toujours aussi un carré. Quand on le pose sur une face triangulaire, la face supérieure est toujours parallèle à la base, et c'est aussi un triangle. Le diamètre de la sphère circonscrite (telle que ce *corpus* la touche en chaque sommet) est égal à la plus petite vraie racine *chiliadiacosigonale* de $1\text{℔} + (755 + \frac{1}{2})\text{℔} + (1522 + \frac{1}{2}) - 2\text{℔} - (49 + \frac{1}{2})\text{℔} - (1207 + \frac{11}{16})\text{℔}$. Combien l'arête d'une face carrée de ce *corpus* à quatorze sommets mesure-t-elle? Et les arêtes des triangles? *Solution* : les arêtes des carrés font $\sqrt{5} - \sqrt{\frac{13}{20}}$, et les deux autres arêtes de chaque triangle font $2 + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{16}}$. »

Commentaire Le polyèdre décrit ici appartient à la famille des « diamants hexagonaux allongés ». Ce n'est pas un polyèdre semi-régulier. Roth commet ici une erreur en affirmant qu'il existe une sphère circonscrite « telle qu'il la touche en chaque sommet » (*daß es mit allen seinen spitzen darin anstößt*). Il existe en effet une unique sphère contenant les douze sommets des faces carrées, mais les deux sommets restant n'y sont pas. Notons ρ le rayon de cette sphère, d_1 l'arête des faces carrées, et d_2 la longueur de chacune des deux autres arêtes

10. Il faudra vérifier que l'erreur ne vient pas de Stévin...

des faces triangulaires. À cause de la donnée concernant les hauteurs des faces triangulaires, on a

$$d_2 = d_1 \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

On montre d'autre part que $(2\rho)^2 = 5d_1^2$. Or l'énoncé affirme que 2ρ est la plus petite racine positive de l'équation¹¹

$$O_{1200}(x) = x^5 + \left(755 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1522 + \frac{1}{2}\right) - 2x^4 - \left(49 + \frac{1}{2}\right)x^3 - \left(1107 + \frac{11}{16}\right)x.$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - \left(49 + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(156 + \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(509 + \frac{11}{16}\right)x + \left(1522 + \frac{1}{2}\right).$$

On pose $x = \frac{z}{2}$; alors

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = z^5 - 4z^4 - 198z^3 + 1252z^2 - 8155z + 48720.$$

On a $48720 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$, et on trouve un facteur quadratique de la forme $z^2 - yz + 87$ (le même que dans le problème précédent) :

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = (z + 16)(z^2 + 35)(z^2 - 20z + 87).$$

La plus petite racine réelle positive est $2\rho = 5 - \frac{\sqrt{13}}{2}$; on trouve donc bien

$$d_1 = \sqrt{5} - \sqrt{\frac{13}{20}}, \text{ et } d_2 = 2 + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{16}}.$$

XXVIII f. 188 « Soit un *corpus irregularis* à 6 faces octogonales et 8 faces triangulaires équilatérales régulières, tel que, quand on le pose sur un triangle, la face supérieure est toujours aussi un triangle. Quand on le pose sur un octogone, la face supérieure est toujours parallèle à la face inférieure et elle est aussi un octogone. Le diamètre de la sphère circonscrite à ce *corpus* est la somme des deux vraies racines *hebdomicontahenagonales* de $1\mathfrak{b} + 1\mathfrak{z}\mathfrak{z} + (282 + \frac{1}{2})\mathfrak{z} + (2093 + \frac{7}{16}) - (79 + \frac{1}{2})\mathfrak{c}\mathfrak{p} - (805 + \frac{11}{16})\mathfrak{u}$. Combien l'arête de ce *corpus* à vingt-

quatre sommets mesure-t-elle? *Solution* : $\sqrt{\frac{700 - \sqrt{320000}}{17}}$. »

11. Exceptionnellement, on s'est ici permis de corriger une coquille dans un des coefficients de l'équation : au lieu de 1107, il est en effet écrit 1207. Dans l'exemplaire que nous avons consulté (British Library), un lecteur avait d'ailleurs apporté cette correction en marge.

Commentaire Le polyèdre 6[8] 8[3] est obtenu par troncature à partir du cube, les arêtes étant coupées au tiers. Stévin dessine le patron de ce *truncatum cubum per laterum divisionis in tres partes*¹² et il calcule $(2\rho)^2 = (7 + 4\sqrt{2})d^2$. L'énoncé demande que $2\rho = x_0 + x_1$ où x_0 et x_1 sont deux racines réelles positives de l'équation

$$O_{71}(x) = x^5 + x^4 + \left(282 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(2093 + \frac{7}{16}\right) - \left(79 + \frac{1}{2}\right)x^3 - \left(805 + \frac{11}{16}\right)x.$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 + x^4 - \left(79 + \frac{1}{2}\right)x^3 + 248x^2 - \left(772 + \frac{3}{16}\right)x + \left(2093 + \frac{7}{16}\right).$$

On pose $x = \frac{z}{2}$ et on a

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = z^5 + 2z^4 - 318z^3 + 1984z^2 - 12355z + 66990.$$

On a $66990 = 2.3.5.7.11.29$ et on trouve encore un facteur quadratique de la forme $z^2 - yz + 87$:

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = (z + 22)(z^2 + 35)(z^2 - 20z + 87).$$

Finalement les deux seules racines réelles positives de P sont $5 \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, et $2\rho = 10$, donc on a bien

$$d = \frac{2\rho}{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{700 - 400\sqrt{2}}{17}}.$$

XXIX f. 188 « Soit un autre *corpus irregulare*, inscrit dans une sphère, à 20 faces triangulaires et 12 faces décagonales équilatérales régulières, tel que, quand on le pose sur un triangle, la face supérieure est toujours aussi un triangle. Quand on le pose sur un décagone, la face supérieure est toujours parallèle à la face inférieure est c'est aussi un décagone. L'arête de ce *corpus* à soixante sommets fait la différence entre les deux vraies racines *tessaracontaoctogonales* de $1\text{f} + 3\text{ff} + 332\text{f} + \left(2474 + \frac{1}{16}\right) - \left(99 + \frac{1}{2}\right)\text{ff} - \left(969 + \frac{3}{16}\right)\text{ff}$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite mesure-t-il? *Solution* : $\sqrt{1850 + \sqrt{2812500}}$. »

12. Voir [4] p. 74.

Commentaire Le polyèdre 12[10] 20[3] est obtenu par troncature à partir du dodécaèdre, les arêtes étant coupées au tiers. Stévin dessine le patron de ce *truncatum dodecaedrum per laterum divisiones in tres partes*¹³ qu'il affirme ne pas avoir rencontré dans les ouvrages de ses prédécesseurs, et il calcule $(2\rho)^2 = \frac{37 + 15\sqrt{5}}{2}d^2$. L'énoncé demande de trouver les racines positives de l'équation

$$O_{48}(x) = x^5 + 3x^4 + 332x^2 + \left(2474 + \frac{1}{16}\right) - \left(99 + \frac{1}{2}\right)x^3 - \left(969 + \frac{3}{16}\right)x.$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 + 3x^4 - \left(99 + \frac{1}{2}\right)x^3 + 309x^2 - \left(947 + \frac{3}{16}\right)x + \left(2474 + \frac{1}{16}\right).$$

On pose $x = \frac{z}{2}$:

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = z^5 + 6z^4 - 398z^3 + 2472z^2 - 15155z + 79170.$$

On a $79170 = 2.3.5.7.13.29$ et on trouve encore le même facteur quadratique, de la forme $z^2 - yz + 87$:

$$32P\left(\frac{z}{2}\right) = (z + 26)(z^2 + 35)(z^2 - 20z + 87).$$

Les deux seules racines positives de P sont donc $x_0 = 5 - \frac{\sqrt{13}}{2}$ et $x_1 = 5 + \frac{\sqrt{13}}{2}$. Si, comme le demande l'énoncé, $d = x_1 - x_0$, on obtient $d = \sqrt{13}$ qui conduit à un résultat nettement inférieur à la solution donnée par Roth; mais la valeur donnée par Roth s'explique aisément, car poser $d = x_0 + x_1 = 10$ conduit précisément à cette solution :

$$2\rho = 10\sqrt{\frac{37 + 15\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{1850 + \sqrt{2812500}}.$$

Ici, il faut donc penser à une erreur de signe dans la lecture de l'énoncé de la part de celui qui a calculé la solution donnée par Roth.

XXX f. 188 « Soit un *corpus irregulare* à six faces octogonales, huit faces hexagonales et douze faces carrées équilatérales régulières, tel que, posé sur une octogone, la face supérieure est aussi un octogone; posé sur un carré, la face

13. Voir [4] p. 79.

supérieure est toujours aussi un carré ; posé sur un hexagone, la face supérieure est aussi un hexagone ; et les faces supérieures sont toujours parallèles à la base. L'arête de ce *corpus* est la somme des deux vraies racines *diacositriacontadygonales* de $1\beta + 137\zeta + 1848 - 1\zeta\zeta - 42\eta - 382\varrho$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite à ce *corpus* à quarante-huit sommets mesure-t-il? *Solution* :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1400000000} + \sqrt{320000000000000000} + 10000}{\sqrt{35000} + \sqrt{200000000} - 125 - \sqrt{5000}}}$$

ou bien

$$\sqrt{\sqrt{2240000} + \sqrt{819200000000} + 400.} \gg$$

Commentaire Le polyèdre 12[4] 8[6] 6[8] est obtenu par double troncature à partir du cube ; Descartes le connaît mais n'a pas calculé le rapport entre son arête et le diamètre de la sphère circonscrite. Stevin dessine le patron de ce polyèdre qu'il appelle *bistruncatum cubum secundum*¹⁴, et il calcule $(2\rho)^2 = (13 + 6\sqrt{2})d^2$ (*distinctio* 14 p. 58, et figure p. 61). L'énoncé demande que $d = x_0 + x_1$ où x_0 et x_1 sont deux racines réelles positives de l'équation

$$O_{232}(x) = x^5 + 137x^2 + 1848 - x^4 - 42x^3 - 382x.$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^5 - x^4 - 42x^3 + 22x^2 - 268x + 1848.$$

On a $1848 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ et on trouve un facteur quadratique de la forme $x^2 - yx + 22$:

$$P(x) = (x + 7)(x^2 + 2x + 12)(x^2 - 10x + 22).$$

Les seules racines réelles positives sont $5 \pm \sqrt{3}$, donc $d = 10$ et :

$$2\rho = 10\sqrt{13 + 6\sqrt{2}} \approx 46,35.$$

Reste à expliquer les deux expressions compliquées données par Roth comme solutions. Elles sont erronées. Après simplification des radicaux et des fractions, on trouve que ces deux expressions sont respectivement égales à :

$$20\sqrt{\frac{1 + \sqrt{14 + 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{14 + 4\sqrt{2}} - 5 - 2\sqrt{2}}}$$

14. Voir [4] p. 76.

et

$$20\sqrt{1 + \sqrt{14 + 4\sqrt{2}}}.$$

Leurs valeurs arrondies au centième près sont respectivement 45,74 et 46,62. Ces deux valeurs étant distinctes, on peut penser à une erreur, non pas dans l'énoncé ou l'équation proposée¹⁵, mais bien dans la solution (probablement dans la construction de la sphère circonscrite, problème délicat auquel Stévin avait d'ailleurs dédié une figure séparée).

2 Exemple et questions en *zensicubic cof*

If. 189 « Soit un autre *corpus* irrégulier, à vingt faces triangulaires, trente faces carrées et douze faces pentagonales, tel que, quand on le pose sur un triangle, la face supérieure est toujours parallèle à la base sur laquelle il est posé, et c'est aussi un triangle. Quand on le pose sur un carré, il y a la même propriété : la face supérieure est aussi un carré. De même pour les faces pentagonales : quand on le pose sur l'une d'elles, la face supérieure est toujours aussi un pentagone. Le diamètre de la sphère circonscrite à ce *corpus* à soixante sommets fait la différence des deux vraies racines sixièmes de $54\aleph + 482\wp + 4\aleph + 1368\aleph - 11\aleph - 22176$. Combien l'arête de ce *corpus* mesure-t-elle? *Solution*: $\sqrt{\frac{132 - \sqrt{11520}}{41}}$. »

Commentaire Le polyèdre 20[3] 12[5] 30[4] est obtenu par double troncature à partir de l'icosaèdre ou du dodécaèdre. Stévin ne le mentionne pas dans [4]. On l'appelle aujourd'hui « rhombicosidodécaèdre ». On peut montrer que¹⁶ $(2\rho)^2 = (11 + 4\sqrt{5})d^2$. L'énoncé demande que $2\rho = x_0 - x_1$ où $x_0 > x_1$ sont deux racines positives de l'équation $P(x) = 0$, avec

$$P(x) = x^6 + 11x^5 - 54x^4 - 482x^3 - 4x^2 - 1368x + 22176.$$

On a $22176 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, et on trouve un facteur quadratique de la forme $x^2 - yx + 22$ (le même que dans le problème précédent) :

$$P(x) = (x + 7)(x + 12)(x^2 + 2x + 12)(x^2 - 10x + 22).$$

15. L'équation est hors de doute car le problème suivant contient le même facteur quadratique...

16. Les coordonnées des sommets d'un rhombicosidodécaèdre d'arête $d = 2\varphi^{-1}$, où $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, sont données par Coxeter [1] tabl. V (iv) p. 299. Ces coordonnées permettent de calculer aisément $\left(\frac{2\rho}{d}\right)^2 = 5\varphi^2 + \varphi^4 = 7 + 8\varphi = 11 + 4\sqrt{5}$.

Les deux seules racines réelles positives sont $5 \pm \sqrt{3}$, donc $2\rho = 2\sqrt{3}$, et $d = \sqrt{\frac{132 - \sqrt{11520}}{41}}$ comme annoncé.

II f. 189 « Il existe encore un ingénieux et surprenant *corpus* irrégulier à six faces carrées et 32 faces triangulaires équilatérales régulières, tel que, quand on le pose sur un carré, la face supérieure lui est toujours parallèle et c'est aussi un carré (mais ils sont de biais l'un par rapport à l'autre, de sorte qu'une perpendiculaire abaissée d'un des sommets de la face carrée supérieure sur la face carrée inférieure ne tombera pas loin du milieu d'une arête de cette face inférieure). Quand on le pose sur une face triangulaire à laquelle sont attachées trois faces triangulaires semblables, la face supérieure est toujours parallèle à la face inférieure et elle est aussi triangulaire; lui sont aussi attachées trois faces triangulaires. Chaque arête de ce *corpus* à vingt-quatre sommets est égale à la somme des deux vraies racines *dischilipentacositriacontahexagonales* de $1\text{ } \mathfrak{C} + 11\text{ } \mathfrak{B} + (2911 + \frac{5}{16})\text{ } \mathfrak{Z} + (9756 + \frac{1}{2}) - (81 + \frac{1}{2})\text{ } \mathfrak{S} - 573\text{ } \mathfrak{C} - (4235 + \frac{15}{16})\text{ } \mathfrak{U}$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite mesure-t-il? *Solution* : le diamètre de la sphère mesure

$$\sqrt{\frac{2666 + \frac{2}{3} - \sqrt[3]{703648148 + \frac{4}{27}} - \sqrt{407329221193415637 + \frac{209}{243}} - \sqrt[3]{703648148 + \frac{4}{27}} + \sqrt{407329221193415637 + \frac{209}{243}}}{16 + \frac{2}{3} - \sqrt[3]{703 + \frac{35}{54}} - \sqrt{407329 + \frac{215}{972}} - \sqrt[3]{703 + \frac{35}{54}} + \sqrt{407329 + \frac{215}{972}}}}$$

Commentaire Le polyèdre 6[4] 32[3] ne peut être obtenu par troncature à partir des polyèdres réguliers. Stévin en détient la connaissance de Dürer, et il en dessine le patron¹⁷. Kepler le nommera *cubus simus*. Puisque c'est le dernier polyèdre semi-régulier décrit par Roth dans les *Arithmetica philosophica*, il faut remarquer qu'il en omet donc deux :

- un polyèdre 30[4] 20[6] 12[10], obtenu par double troncature à partir de l'icosaèdre ou du dodécaèdre; Descartes le connaît mais n'a pas calculé le rapport entre son arête et le diamètre de la sphère circonscrite; Stévin ne le mentionne pas dans [4];
- un polyèdre 12[5] 80[3], qui ne peut être obtenu par troncature à partir des polyèdres réguliers, mais qui est au dodécaèdre ce que le *cubus simus* est au cube; Descartes ne mentionne pas ce polyèdre, Stévin non plus (**et donc Dürer non plus, je suppose**).

Revenons au *cubus simus*. Stévin écrivait en 1583 : « Faute de savoir comment l'obtenir par troncature, c'est-à-dire d'en connaître la véritable origine, nous n'avons pu le construire en l'inscrivant par la Géométrie dans une sphère donnée comme on l'a fait pour les autres polyèdres. » Et pour cause, il s'agit là d'un

17. Voir [4] p. 83.

problème solide (non résoluble à la règle et au compas). Stévin n'a donc pas pu calculer le rapport entre l'arête et le rayon de la sphère circonscrite. Quant à Descartes, il ne mentionne même pas ce polyèdre dans [2]. Notons comme d'habitude d l'arête du polyèdre et ρ le rayon de la sphère circonscrite. Rappelons que, si l'on pose

$$t = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} \right),$$

on a¹⁸

$$2\rho = d\sqrt{\frac{3-t}{2-t}},$$

mais $\mathbb{Q}(t)$ n'est pas décomposable en un tour d'extensions quadratiques sur \mathbb{Q} , c'est-à-dire que le rapport $\frac{2\rho}{d}$ n'est pas constructible à la règle et au compas.

Dans l'énoncé, Roth demande que $d = x_0 + x_1$ où x_0 et x_1 sont deux racines positives de l'équation

$$O_{2536}(x) = x^6 + 11x^5 - \left(81 + \frac{1}{2}\right)x^4 - 573x^3 + \left(2911 + \frac{5}{16}\right)x^2 - \left(4235 + \frac{15}{16}\right)x + \left(9756 + \frac{1}{2}\right).$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^6 + 11x^5 - \left(81 + \frac{1}{2}\right)x^4 - 573x^3 + \left(1644 + \frac{5}{16}\right)x^2 - \left(2969 + \frac{15}{16}\right)x + \left(9756 + \frac{1}{2}\right).$$

On pose $x = \frac{z}{2}$; alors

$$64P\left(\frac{z}{2}\right) = z^6 + 22z^5 - 326z^4 - 4584z^3 + 26309z^2 - 95038z + 624416.$$

On a $624416 = 2^5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 79$, et on trouve un facteur quadratique de la forme $z^2 - yz + 79$:

$$64P\left(\frac{z}{2}\right) = (z + 16)(z + 26)(z^2 + 19)(z^2 - 20z + 79).$$

Ainsi, le polynôme P a seulement deux racines réelles positives $\frac{10 \pm \sqrt{21}}{2}$, et leur somme fait $d = 10$; on a donc

$$2\rho = 10\sqrt{\frac{9-3t}{6-3t}}.$$

18. Voir par exemple [5]. Il est d'ailleurs remarquable qu'en 2002 les deux auteurs de cet article semblent n'avoir pu nulle part retrouver ce résultat *exact* dans la littérature moderne sur les polyèdres. Ils écrivent : « In the literature, one can find relatively exact values for $[2\rho/d]$ (or values coinciding with it up to a factor), or more rough estimates of $[2\rho/d]$ are given. But one cannot find explanations how these estimates are obtained. This shows that a mathematical problem, clearly formulated in Euclid's Book XIII, was no longer in the center of interests. »

La solution donnée par Roth est-elle juste? Son expression algébrique avec les quatre racines cubiques ne laisse aucun doute quant au fait que l'auteur de cette solution l'a trouvée en appliquant les formules de Cardan à la construction de la sphère circonscrite. Normalisons numérateur, dénominateur et radicandes dans notre solution, à la manière de Roth, nous trouvons :

$$10\sqrt{\frac{9-3t}{6-3t}} = \sqrt{\frac{2666+\frac{2}{3}-\sqrt[3]{703703703+\frac{19}{27}}-\sqrt{407407407407407+\frac{11}{27}}-\sqrt[3]{703703703+\frac{19}{27}}+\sqrt{407407407407407+\frac{11}{27}}}{16+\frac{2}{3}-\sqrt[3]{703+\frac{19}{27}}-\sqrt{407407+\frac{11}{27}}-\sqrt[3]{703+\frac{19}{27}}+\sqrt{407407+\frac{11}{27}}}} \approx 26,8743.$$

C'est légèrement différent du résultat donné par Roth (arrondi au millième, le résultat donné par Roth vaut 26,8728). Tout se passe comme si l'auteur de la solution donnée dans les *Arithmetica philosophica* n'avait gardé que les trois premiers chiffres des valeurs dans les radicandes, et rempli un peu au hasard les autres rangs décimaux. Ainsi au dénominateur, au lieu de

$$703 + \frac{19}{27} = 703,703703703\overline{703}$$

il aurait écrit

$$703 + \frac{35}{54} = 703,648148148\overline{148},$$

et au lieu de

$$407407 + \frac{11}{27} = 407407,407407\overline{407}$$

il aurait écrit

$$407329 + \frac{215}{972} = 407329,22\overline{119341563786008230452674897}.$$

Les nombres dans les radicandes du numérateur ne sont que des multiples de ces deux nombres par des puissances de dix. On peut donc penser que l'erreur commise n'est peut-être pas vraiment une faute, mais seulement un choix arbitraire quant à la précision retenue. Le calculateur aurait négligé les décimales suivantes, ou bien les aurait calculées avec beaucoup moins d'attention, sans se relire.

Il faut conclure que l'auteur de la solution connaissait en 1608 l'expression exacte du rapport entre arête et diamètre de la sphère circonscrite au *cubus simus*.

III f. 189 « Soit un *corpus irregulare* à 8 faces triangulaires et 18 faces carrées équilatérales régulières, ainsi que 24 faces quadrilatères irrégulières (non équilatérales), tel que chaque arête d'une face carrée s'attache à une face quadrilatère irrégulière. Quand on le pose sur n'importe laquelle de ses faces triangulaires, la face supérieure lui est toujours parallèle, et c'est aussi un triangle. Chaque arête des faces carrées de ce *corpus* est en *proportione dupla*

avec chaque arête des faces triangulaires¹⁹. Parmi les arêtes de chaque face quadrilatère irrégulière, il y en a trois qui sont chacune une arête d'une face carrée, et la quatrième est une arête d'une face triangulaire. L'arête des faces carrées de ce *corpus* est égale au produit des deux vraies racines *enneacosites-saracontaoctogonales* de $1\text{z}\text{c}\text{p} + 22\text{f} - 13\text{z}\text{z} - 106\text{c}\text{p} - 1110\text{z} - 5657\text{u}$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite mesure-t-il? *Solution* : le diamètre de la sphère mesure $\sqrt{288 + \sqrt{41472}}$. »

Commentaire Ce polyèdre irrégulier est obtenu par troncature à partir du *bis-truncatum cubum primum* (objet de la question XXI p. 2 ci-dessus), les arêtes étant coupées à la moitié. L'énoncé demande que l'arête des faces carrées mesure $d = x_0 \times x_1$ où x_0 et x_1 sont deux racines réelles positives de l'équation

$$O_{948}(x) = x^6 + 22x^5 - 13x^4 - 106x^3 - 1110x^2 - 5657x.$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^6 + 22x^5 - 13x^4 - 106x^3 - 1583x^2 - 5185x.$$

Mais la règle des signes, dite de Descartes²⁰, montre aisément que ce polynôme n'a qu'une seule racine réelle positive (sans compter la racine nulle). Il doit donc y avoir une erreur d'énoncé. *Remarque* : dans le polyèdre irrégulier décrit par Roth, on peut montrer que $2\rho = 2d\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Or la solution donnée par Roth vaut $2\rho = \sqrt{288 + \sqrt{41472}} = 12\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Il faut donc que $d = x_0 \times x_1 = 6$: **pour corriger l'énoncé, on pourrait chercher une équation qui ressemble à celle de l'énoncé, mais qui soit factorisable sur \mathbb{Z} comme les précédentes, qui ait deux racines positives, et dont le terme constant soit divisible par 6.**

IV f. 189 « Soit un autre beau *corpus irregulare* à 20 faces triangulaires et 12 faces pentagonales équilatérales régulières, ainsi que 30 faces rectangulaires oblongues. Le rapport entre l'arête d'une face pentagonale et l'arête d'une face triangulaire est comme le rapport de $\sqrt{72}$ à $\sqrt{27 - \sqrt{45}}$. Les arêtes des faces triangulaires sont égales aux plus petites arêtes des faces rectangulaires, et les plus grandes arêtes des faces rectangulaires sont égales aux arêtes des faces pentagonales. L'arête d'une face pentagonale fait la somme des deux vraies racines *hexachilidiacosiaicosigonales* de $1\text{z}\text{c}\text{p} + 27\text{f} + 3572\text{z} + 22950 - 113\text{z}\text{z} - 669\text{c}\text{p} - 7353\text{u}$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite à ce *corpus* à soixante sommets mesure-t-il? *Solution* : $\sqrt{567 + \sqrt{131220}}$. »

19. Probablement que A est en *proportione dupla* avec B si $A = B\sqrt{2}$.

20. La règle des signes était aussi connue des *Rechenmeister*; Faulhaber la publie dès 1622.

Commentaire Le polyèdre ici en question n'est pas semi-régulier, mais il est très apparenté au rhombicosidodécaèdre de la question I p. 13 ci-dessus. En fait il existe une famille continue de polyèdres convexes 20[3] 12[5] 30[4] inscriptibles dans des sphères et obtenues par double troncature à partir du dodécaèdre ou de l'icosaèdre, les faces triangulaires et les faces pentagonales étant toutes régulières, et le rapport entre la largeur et la longueur des faces rectangulaires pouvant être quelconque. Notons d_1 l'arête des faces pentagonales et d_2 l'arête des faces triangulaires. Ici Roth pose

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{72}{27 - \sqrt{45}}}.$$

L'énoncé demande que $d_1 = x_0 + x_1$ où x_0 et x_1 sont deux racines positives de l'équation

$$O_{6220}(x) = x^6 + 27x^5 + 3572x^2 + 22950 - 113x^4 - 669x^3 - 7353x.$$

Cette équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^6 + 27x^5 - 113x^4 - 669x^3 + 463x^2 - 4245x + 22950.$$

On a $22950 = 2.3^3.5^2.17$, et on trouve un facteur quadratique de la forme $x^2 - yx + 17$:

$$P(x) = (x + 5)(x + 30)(x^2 + x + 9)(x^2 - 9x + 17).$$

Les deux seules racines réelles positives sont $\frac{9 \pm \sqrt{13}}{2}$, donc $d_1 = 9$. Si la valeur donnée par Roth comme solution s'avère exacte, il faut donc que

$$\frac{(2\rho)^2}{d_1^2} = \frac{567 + \sqrt{131220}}{81} = 7 + 2\sqrt{5} \simeq 11,5.$$

Hélas, nous avons calculé que²¹

$$\frac{(2\rho)^2}{d_1^2} = 3 + 3\varphi + (2 + 4\varphi)\frac{d_2}{d_1} + (2 + \varphi)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \simeq 13,4.$$

Vf. 190 « Soit un autre *corpus irregulare*, beau, ingénieux et bien proportionné, à 12 faces pentagonales et 20 faces hexagonales équilatérales régulières, ainsi que 60 faces triangulaires scalènes, tel qu'à chaque arête des faces pentagonales est attaché une face triangulaire, et tel que, quand on pose ce *corpus*

21. Reste à rédiger ce calcul, ou à trouver une référence qui contienne le résultat...

sur n'importe quelle face triangulaire, la face supérieure lui est toujours parallèle, et c'est aussi un triangle. Le rapport entre l'arête d'une face pentagonale et l'arête d'une face hexagonale est comme le rapport de $\sqrt{18 + \sqrt{180}}$ à 6. L'arête des faces pentagonales est égale à la plus petite arête des faces triangulaires, mais les deux autres arêtes des faces triangulaires, plus longues, sont chacune égale à l'arête des faces hexagonales. L'arête des faces hexagonales mesure une unité de moins que le produit des deux vraies racines *myripentachilihexasihebdomicontadygonales* de $x^6 + 8x^5 + 7899x^4 + 8415x^3 - 56x^2 - 232x - 8906$. Combien le diamètre de la sphère circonscrite à ce *corpus* à quatre-vingt-dix sommets mesure-t-il? *Solution* : $\sqrt{5832 + \sqrt{18895680}}$. »

Commentaire Le polyèdre ici décrit n'est pas semi-régulier; on l'obtient par troncature du *truncatum icosaedrum per laterum tertias* rencontré dans la question XXIV p. 5 ci-dessus, les arêtes étant coupées à la moitié. Le polyèdre 12[5] 20[6] 60[3] ainsi obtenu est bien inscriptible dans une sphère mais ses faces triangulaires ne sont pas équilatérales. Notons d_1 l'arête des faces pentagonales et d_2 l'arête des faces hexagonales. Roth affirme que

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}{6}.$$

Nous avons vérifié ce rapport²². L'énoncé demande ensuite que $d_2 = x_0x_1 - 1$ où x_0 et x_1 sont deux racines réelles positives de l'équation

$$O_{15672}(x) = x^6 + 8x^5 - 56x^4 - 232x^3 + 7899x^2 - 8906x + 8415,$$

mais la solution donnée est erronée. Elle serait juste si l'énoncé demandait que d_2 soit égal à $x_0x_1 + 1$. C'est ce qu'on va montrer. L'équation est de la forme $P(x) = 0$ avec

$$P(x) = x^6 + 8x^5 - 56x^4 - 232x^3 + 64x^2 - 1072x + 8415.$$

On a $8415 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$ et on trouve un facteur quadratique de la forme $x^2 - yx + 17$ (déjà rencontré dans les questions précédentes) :

$$P(x) = (x + 5)(x + 11)(x^2 + x + 9)(x^2 - 9x + 17).$$

Les deux seules racines réelles positives sont $\frac{9 \pm \sqrt{13}}{2}$, et on a donc $d_2 = x_0x_1 + 1 = 17 + 1 = 18$. Or la sphère circonscrite à ce polyèdre n'est autre que la sphère

22. Voir note 24 ci-dessous.

tangente aux arêtes de l'icosaèdre d'arête $3d$, où $d_2 = \frac{d\sqrt{3}}{2}$; mais²³ $\frac{2\rho}{3d} = \varphi$. On en déduit $\left(\frac{2\rho}{d_2}\right)^2 = 6(3 + \sqrt{5})$ et

$$(2\rho)^2 = 18^2 \times 6(3 + \sqrt{5}) = 5832 + \sqrt{18895680},$$

comme annoncé²⁴.

Références

- [1] COXETER, Harold Scott MacDonald, *Regular Polytopes*, Londres, Methuen & Co., 1948.
- [2] DESCARTES, *Exercices pour les éléments des solides*, édition critique avec introduction, traduction, notes et commentaires par Pierre Costabel, Presses universitaires de France, 1987.
- [3] ROTH, Peter, *Arithmetica philosophica, oder schöne neue wolgegründte vberauß künstliche Rechnung der Coß oder Algebraë*, Nuremberg, Johann Lanßenberger, 1608.
- [4] STÉVIN, Simon, *Problematum geometricorum libri V*, Anvers, 1583.
- [5] WEISSBACH, Bernulf, MARTINI, Horst, « On the Chiral Archimedean Solids », *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, vol. 43 (2002), n° 1, p. 121-133.

23. Voir [1] tabl. I p. 293.

24. En passant, on remarque que, puisque $d_1 = \frac{\varphi d}{2}$, on a bien $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$, comme annoncé par Roth dans l'énoncé.