



**HAL**  
open science

# Modèle analytique amélioré pour les ressorts de compression cylindriques meulés en prenant en compte le défaut de parallélisme de leurs surfaces d'appui

Guillaume Cadet, Manuel Paredes, Hervé Orciere

## ► To cite this version:

Guillaume Cadet, Manuel Paredes, Hervé Orciere. Modèle analytique amélioré pour les ressorts de compression cylindriques meulés en prenant en compte le défaut de parallélisme de leurs surfaces d'appui. S-MART 2023 : 18ème Colloque national S.mart, Arts et Métiers Paristech ENSAM Aix-en-Provence, Université de Toulon [UTLN], Apr 2023, Carry-le-Rouet, France. hal-04398177

**HAL Id: hal-04398177**

**<https://hal.science/hal-04398177>**

Submitted on 16 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle analytique amélioré pour les ressorts de compression cylindriques meulés en prenant en compte le défaut de parallélisme de leurs surfaces d'appui

G.Cadet <sup>a,\*</sup>, M.Paredes <sup>b</sup>, H.Orcière <sup>a</sup>

<sup>a</sup> STRAIN, CGR International, 2 Henri Poincaré ZI les Beaudottes 93270 Sevran, France

<sup>b</sup> ICA, Université de Toulouse, UPS, INSA, ISAE-SUPAERO, MINES-ALBI, CNRS, 3 rue Caroline Aigle, 31400 Toulouse, France

\* e-mail : cadet@insa-toulouse.fr

## 1. INTRODUCTION

La loi de Hooke est la première théorie à décrire la propriété d'un ressort hélicoïdal, qui définit sa raideur comme un ratio de la force sur son déplacement. Ce ratio étant constant, le comportement du ressort est linéaire. L'équation (1), permettant de décrire le comportement mécanique des ressorts de compression, a été énoncé pour la première fois par A.M. Wahl en 1963 [1]. Elle est simple à mettre en œuvre, c'est pourquoi elle est reprise par l'ensemble des standards et normes. En revanche, elle admet beaucoup d'hypothèses simplificatrices telles que, entre autres : la force de compression est parfaitement centrée sur l'axe d'enroulement du ressort, le fil est sollicité en torsion pure, le fil se comporte comme une barre droite, les spires d'extrémité n'ont aucun effet sur le comportement du ressort, les extrémités sont parallèles, l'effet de courbure sur le ressort n'est pas pris en compte, ou encore la considération d'un cas avec uniquement des faibles déformations.

$$K = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n_a \cdot D^3} \quad (1)$$

Avec  $G$  le module de torsion,  $n_a$  le nombre de spires actives,  $d$  le diamètre de fil et  $D$  le diamètre moyen des spires.

L'*Institute of Spring Technology* rappelle que les premiers et derniers 20% de la courbe effort-longueur ne suivent pas la raideur globale du ressort et recommande d'éviter ces régions de fonctionnement. En effet, la zone finale de compression est connue pour ses fortes non linéarités dues aux différents contacts entre spires. En

revanche, les non linéarités en début de compression sont beaucoup moins justifiées dans la littérature. Les ressorts les plus touchés par cette anomalie sont les ressorts de compression cylindriques à extrémités rapprochées non meulées. La plupart du temps, le début du comportement du ressort est tronqué afin de supprimer cette zone difficile à prédire (justifié par l'application d'une précharge) ou souvent ignoré [2-6].

En 2016, M. Paredes [7] observe ces non-linéarités, non seulement sur des ressorts cylindriques à extrémités rapprochées non meulées, mais aussi sur des ressorts meulés. Il décide alors de créer un modèle empirique mathématique corrigeant les valeurs de la longueur libre et du nombre de spires actives afin de modifier la courbe de raideur de ces ressorts. Son objectif est de réussir à corréliser sa nouvelle loi linéaire avec les données expérimentales. Ses corrections, malgré leur absence de sens physique, ont tout de même le mérite de mettre en évidence ce comportement non prédit par la formule actuelle de la raideur et cela, que le ressort soit meulé ou non. Il souligne que ce phénomène se produit de manière plus prononcée chez les ressorts ayant des index (ratio  $D/d$ ) et nombre de spires actives faibles.

En 2021, G. Cadet et al. [8] mettent en évidence l'effet de la géométrie des spires d'extrémités sur le comportement non-linéaire de la relation effort-longueur des ressorts de compression cylindriques à extrémités rapprochées non meulées. Ils créent de manière rigoureuse un développement analytique qui permet de décrire avec précision le comportement mécanique de ces ressorts. Ces travaux prouvent l'impact de la géométrie, de la raideur et du comportement spatial des spires d'extrémités sur le ressort de manière globale. Il est alors nécessaire de comprendre ce qu'il se passe durant la

compression du ressort. Au départ, un ressort de compression cylindrique à pas constant, non meulé et guidé axialement, ne possède qu'un unique point de contact entre sa spire d'extrémité et sa surface d'appui. Le chargement axial est, par conséquent, décentré de l'axe principal du ressort et localisé sur un bord. Durant la compression, cet effort axial excentré provoque un moment, faisant fléchir le ressort jusqu'à ce qu'un autre point du fil atteigne la surface d'appui. Alors, une force de contact associée est créée. Cette force évolue, tout comme la position de ce contact, tendant vers un état d'équilibre. Il peut être considéré, après cette stabilisation, que les spires d'extrémités ont un impact limité sur la compression restante. Afin de bâtir leur modèles, ils développent la matrice de rigidité d'un élément courbe en se basant sur les travaux de R.Palatinathan et P.S.Chandrasekharan [9] et de C.Dym [10]. Ils calculent géométriquement le point de contact de la spire et montent la matrice de rigidité globale du ressort. En appliquant les bonnes conditions limites, ils obtiennent des courbes trilineaires qui se superposent aux données expérimentales. Ils soulignent également que ces phénomènes sont plus importants chez les ressorts à index et nombre de spires actives faibles.

La présente étude tente d'établir un modèle analytique similaire pour les ressorts de compression cylindriques à extrémités rapprochées et meulées. Pour ce faire, une analyse géométrique de ces ressorts va être réalisée et le modèle de Cadet va être adapté afin de prendre en compte un éventuel défaut.

## 2. ANALYSE DE LA SOURCE DE LA NON-LINEARITE

Le modèle de Cadet repose sur la définition précise de la géométrie et la non linéarité est expliquée par le non parallélisme des extrémités ce qui provoque un déséquilibre et une modification des points de contacts. Or, pour des ressorts meulés, les surfaces d'appuis sont considérées parallèles quelque soit la géométrie de la spire d'origine du fait de la méthode d'usinage.

Afin de comprendre ce qu'il se produit lors de la compression et de détecter la source de leur non-linéarité, l'ensemble des ressorts testés dans le cadre de l'étude [7] sont réétudiés avec une attention particulière aux spires d'extrémités. Les mesures d'inclinaisons des surfaces d'extrémité et tests de compression montrent alors une forte corrélation entre les ressorts adoptant un comportement non linéaire et l'inclinaison relative entre les deux surfaces meulées des ressorts. En effet, une simple inclinaison de quelques degrés entre les plans inférieur et supérieur du ressort provoquerait une forte non linéarité dans le comportement effort-longueur des ressorts ayant notamment des index et nombre de spires faibles. Soit  $\varphi$  l'angle en radians de défaut de parallélisme entre les deux plans d'appuis. L'ensemble des 36 ressorts testés ont un défaut de parallélisme  $\varphi$  variant entre 0 et 0.086rad, soit entre 0 et 4.9°.

Dans l'optique de vérifier que ce défaut est bien à l'origine de manière prépondérante sur la non linéarité de la courbe effort-longueur de ces ressorts, plusieurs

exemplaires d'un même ressort ont été fabriqués par impression 3D plastique avec un défaut plus ou moins prononcé de parallélisme. Les dimensions constantes de ces ressorts sont (en prenant la dénomination des variables de l'étude [8]  $m_a$  est le pas des spires actives) :  $D = 40\text{mm}$ ,  $d = 6\text{mm}$ ,  $m_a = 15\text{mm}$ ,  $n_a = 2$ . Afin de mettre en évidence de manière exagérée ce phénomène, les défauts sont de 0, 1, 2 et 5° (Figure 1). Le défaut est réalisé sur les modèles numériques de manière symétrique par 2 plans inclinés de  $\varphi/2$  au centre de l'axe du ressort de telle sorte que le sommet du plan se situe à l'extrémité coupée du fil. Cela correspond au cas le plus récurrent sur les ressorts testés expérimentalement.

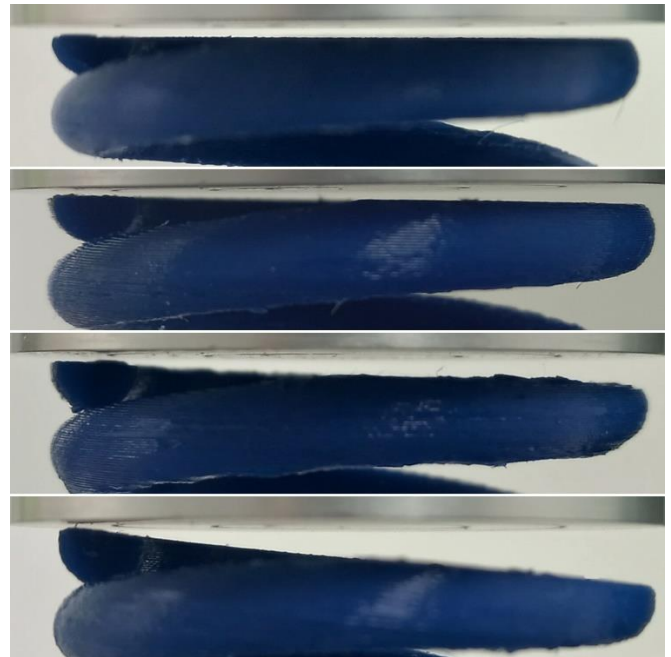


Figure 1 - Observation du défaut de parallélisme de 0, 1, 2 et 5° sur des ressorts non guidés

Des mesures par métrologie optique ont été réalisées sur un instrument de mesure topographique ALICONA avec une résolution verticale de 10nm et une justesse de 1 $\mu\text{m}$ . Elles ont permis de vérifier que les défauts de parallélisme créés sur les modèles numériques sont bien semblables à ceux après impression sur les ressorts fabriqués.

Des tests en compression ont alors été réalisés. Les résultats sont visibles sur la Figure 2.

Comme prédit, la non linéarité dans le comportement mécanique de ces ressorts est directement corrélée à l'amplitude du défaut de parallélisme entre les plans issus du meulage des extrémités. Plus l'angle de défaut augmente, plus le délai de contact est grand, et plus l'écart entre la force attendue par l'équation classique et la force réelle augmente. Cela peut poser d'importants problèmes de fiabilité du produit. En effet, le ressort avec 5° de défaut admet 18.2% d'erreur d'effort avec la courbe théorique pour  $L=25\text{mm}$  et plus de 42.7% pour  $L=38\text{mm}$ . De plus, la raideur finale, identique à tous les ressorts testés, même pour le ressort n'ayant pas de défaut de parallélisme, reste inférieure à la raideur calculée par les normes. Cela

prouve une nouvelle fois l'intérêt qui doit être apporté au choix des simplifications dans les calculs de raideurs des ressorts de compression cylindriques.

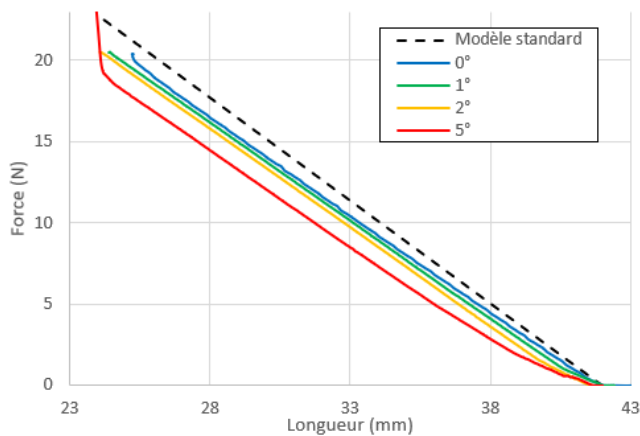


Figure 2 – Courbes effort-longueur des ressorts ayant un défaut de parallélisme de 0, 1, 2 et 5°

### 3. CREATION DU MODELE ANALYTIQUE

#### 3.1. Sélection d'un ressort particulier avec un comportement bilinéaire marqué

Parmi tous les ressorts testés dans la première étape, un ressort s'est démarqué par son défaut de parallélisme prononcé. Ce ressort a les caractéristiques suivantes :  $D = 14.36 \text{ mm}$ ,  $d = 1.8\text{mm}$ ,  $m_a = 4.69\text{mm}$ ,  $n_a = 2$ . Ses propriétés matériaux ont été estimées à  $G = 73500\text{MPa}$  et  $E = 180000\text{MPa}$ . Afin de confirmer que ce défaut est majoritaire dans l'origine de la non linéarité du comportement du ressort métallique, un ressort identique a été modélisé en 3D en prenant en compte le défaut de parallélisme des plans. Les dimensions ont été triplées afin d'amplifier la visualisation du phénomène (Figure 3), puis le ressort a été imprimé en PLA.



Figure 3 – Ressort métallique d'origine (à gauche) et sa réplique en impression 3D plastique aux dimensions triplées (à droite)

Des mesures optiques ponctuelles le long de chaque plan ont permis de vérifier que le défaut de parallélisme était semblable entre les deux ressorts. Ces mesures ont été réalisées avec le même instrument que celui utilisé en Section 2. Les tests de compression révèlent la forte

homothétie entre le comportement des ressorts, en termes de longueur relative et d'efforts respectifs (Figure 5, courbes bleue et orange). En effet, à un facteur d'échelle près, les deux courbes sont similaires et mettent en valeur le même phénomène. Cela permet de confirmer l'hypothèse selon laquelle l'origine de la bilinéarité dans le comportement effort-longueur du ressort est majoritairement issue du défaut de parallélisme des extrémités.

#### 3.2. Adaptation du modèle de G. Cadet

Afin de pouvoir prédire ce genre de phénomènes, le modèle de G. Cadet [8] a été modifié pour s'adapter aux ressorts aux extrémités rapprochées et meulées. Ainsi, plusieurs modifications ont été apportées : modifications de la longueur libre et longueur à spires jointives, adaptation du paramètre  $f$  permettant de définir la géométrie des spires d'extrémités et retrait de la phase de résolution concernant la stabilisation du point de contact.

Les longueurs  $L_0$  et  $L_c$  sont mises à jour dans le modèle, prenant désormais en compte la quantité de fil meulé à chaque extrémité.

Le facteur  $f$  ne représente plus le facteur de l'angle d'hélice des spires d'extrémités mais désormais le défaut de parallélisme et se calcule par :

$$f = \frac{D \cdot \tan \frac{\varphi}{2}}{m_e \cdot p_2} \quad (2)$$

Avec  $m_e$  le pas des spires d'extrémités (généralement égal à  $d$ ) et  $p_2$  la coordonnée angulaire du point de contact en pourcentage de la spire d'extrémité (pris égal à 0.5, soit 50%, dans le cas d'un second contact supposé en face du premier point de contact).

Le ressort ainsi modélisé par ces formulations semi-analytiques par éléments finis correspond à un ressort non meulé de mêmes dimensions que le ressort désiré, dont le facteur  $f$  permet désormais de représenter le défaut de parallélisme et dont les longueurs caractéristiques du ressort ont été ajustées. L'hypothèse est donc qu'un ressort meulé avec un défaut de parallélisme  $\varphi$  se comporte de manière identique sur une courbe effort-déflexion qu'un ressort non meulé de mêmes dimensions avec un facteur de pente de spires d'extrémité  $f$  associé, calculé selon l'équation (2).

Cette hypothèse a été vérifiée en confrontant les comportements mécaniques du ressort précédemment fabriqué, ayant un défaut de parallélisme  $\varphi = 0^\circ$ , à un ressort également imprimé en 3D et en PLA de mêmes dimensions mais non meulé avec un facteur  $f = 0$ . Leur courbes effort-déflexion sont visibles sur la Figure 4.

Aussi, la deuxième phase de résolution du modèle d'origine a été supprimée. En effet, il est inutile de simuler une phase de stabilisation du point de contact dans le cas d'une mise en contact plan. Il est donc ici supposé que les plans meulés sont parfaits géométriquement. Le ressort dans le modèle est donc guidé axialement, et uniquement



les extrémités des spires sont en contact avec la surface d'appui. La force de compression est donc excentrée de l'axe d'enroulement du ressort. Cette force crée un moment qui fait fléchir le ressort jusqu'à ce que le plan meulé vienne en contact avec la surface d'appui. D'ici, le ressort peut alors être comprimé jusqu'à sa longueur à spires jointives.

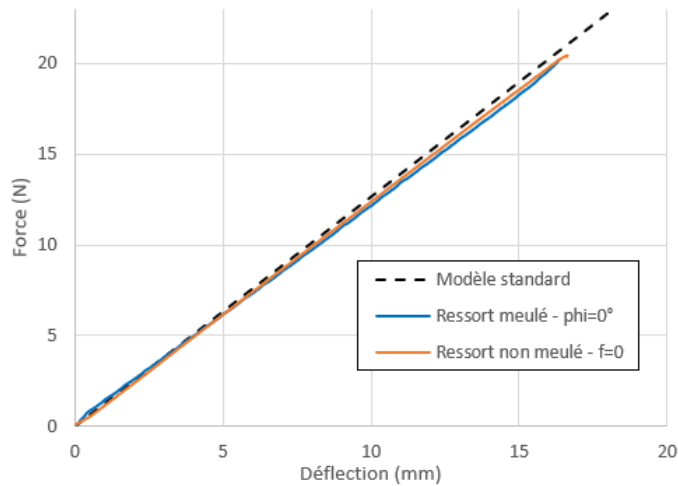


Figure 4 - Courbes effort-déflexion d'un ressort meulé et non meulé à géométries équivalentes

#### 4. RESULTATS

Le modèle analytique ainsi mis à jour a été lancé avec comme paramètres d'entrée ceux du ressort d'origine

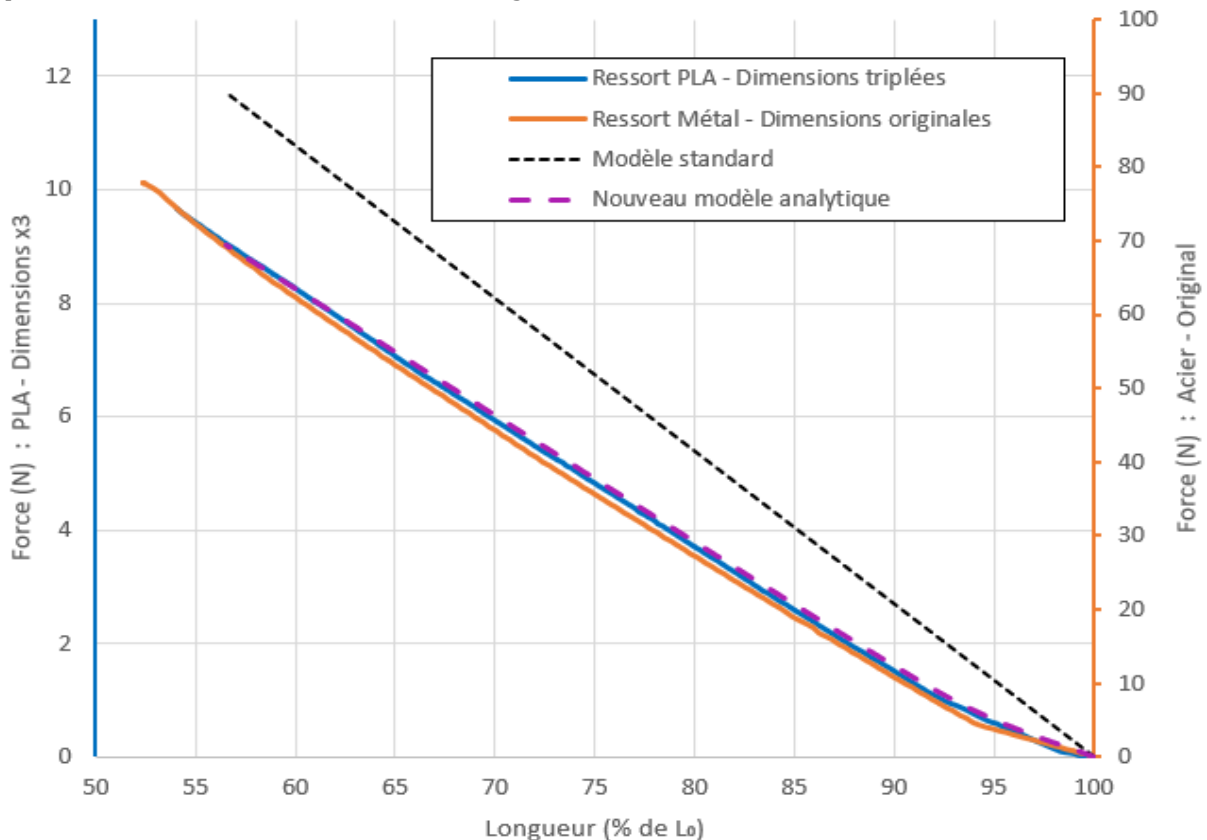


Figure 5- Ressort métallique d'origine (à gauche) et sa réplique en impression 3D plastique aux dimensions triplées (à droite)

dont les propriétés matériaux sont davantage maîtrisées que celles du ressort issu d'impression 3D. En résulte une courbe bilinéaire visible sur la Figure 5. Elle se superpose avec succès avec les données expérimentales du ressort métallique et plastique, tandis que le modèle analytique issu des standards reste très éloigné du comportement réel des ressorts.

Ce modèle primaire standard ne permet pas de décrire le comportement mécanique réel des ressorts de compression cylindriques à pas constant à extrémités meulées et rapprochées en négligeant l'influence de la géométrie des spires d'extrémités, les défauts de fabrication, le comportement spatial des différentes spires et les efforts engendrés par l'application d'une force axiale non coaxiale à l'axe principal du ressort.

Le modèle présenté ici, fondé sur les travaux préliminaires de G. Cadet et al. [8], considère l'ensemble de ces paramètres et ne s'autorise que des hypothèses simplificatrices particulières qui ont été prouvées expérimentalement comme justifiées. Il dissocie deux phases de compression : lorsque la charge n'est appliquée qu'en deux points du ressort situés à ses extrémités, excentrées de l'axe du ressort, jusqu'à la mise en contact complète des plans meulés des spires d'extrémités, où la compression est mieux équilibrée, et ce, jusqu'à la longueur à spires jointives.

## 5. CONCLUSION

Depuis plusieurs décennies, l'équation régissant le comportement mécanique des ressorts de compression cylindriques est connue. Elle est adoptée par l'ensemble des normes et standards. Néanmoins, elle admet beaucoup de simplifications qui retirent un nombre important de paramètres. Aussi, il a été régulièrement relevé que pour les ressorts à index et nombre de spires actives faibles, cette formule admet une erreur de raideur élevée. Or, dans les applications spatiales, médicales ou aéronautiques, augmenter la précision sur le comportement et caractéristiques mécaniques des ressorts devient un enjeu primordial, permettant d'assurer un haut niveau de performance et permettant de meilleures optimisations de masse ou de volume. De récents travaux ont permis de modéliser avec succès de manière plus précise les phénomènes mis en jeu lors de la compression des ressorts à extrémités rapprochées non meulées. Malheureusement, ce phénomène semble aussi présent chez les ressorts meulés.

Une démarche scientifique a donc été menée afin d'analyser les éventuelles sources de cette non linéarité chez cette dernière catégorie de ressorts. Ces recherches ont révélé une forte corrélation entre la présence de non linéarité et le défaut de parallélisme des surfaces meulées du ressort. Puis, une proportionnalité remarquable a permis de prouver que plus le ressort possède un défaut important, plus sa bilinéarité sera marquée. Enfin, la création d'une réplique d'un ressort métallique comportant un défaut important de parallélisme et sa confrontation au comportement initial ont permis de révéler que ce paramètre est majoritairement responsable de ce phénomène. Il en a donc été déduit que la prise en compte de ce défaut permet à lui seul, intégré dans le bon modèle, de prédire le comportement mécanique du ressort avec une précision grandement améliorée par rapport aux formules usuelles.

Puis, un nouveau modèle analytique a été élaboré en prenant l'ensemble de la géométrie du ressort : son diamètre moyen  $D$ , son diamètre de fil  $d$ , le pas  $m_a$  et le nombre  $n_a$  de ses spires actives, ses modules de cisaillement  $G$  et d'Young  $E$ , ainsi que son défaut de parallélisme  $\varphi$ . Le ressort modélisé par des formulations semi-analytiques par éléments finis correspond ainsi à un ressort à extrémités rapprochées non meulées de mêmes dimensions que le ressort désiré, dont le facteur  $f$  permet de représenter le défaut de parallélisme et dont les longueurs caractéristiques du ressort ont été ajustées. Ce modèle suppose que les plans meulés sont parfaits géométriquement et que le ressort est guidé axialement, et uniquement les extrémités des spires sont en contact avec la surface d'appui en début de compression. La force de compression est donc excentrée de l'axe d'enroulement du ressort. Cette force crée un moment qui fait fléchir le ressort jusqu'à ce que le plan meulé vienne en contact avec la surface d'appui. D'ici, le ressort peut alors être comprimé jusqu'à sa longueur à spires jointives.

Ce modèle a été confronté avec succès avec des résultats expérimentaux. La courbe bilinéaire analytique

se superpose parfaitement aux courbes expérimentales, tandis que la droite issue des standards admet une erreur importante tout le long de la compression. Cela prouve une nouvelle fois que la géométrie des spires d'extrémités ne doit plus être négligée.

Cet outil peut simplifier la phase de dimensionnement des ressorts de compression en évitant aux chercheurs et ingénieurs de devoir utiliser des logiciels à éléments finis gourmands en temps de calculs. Cela met également en garde les fabricants de ressorts sur l'attention qui doit être apportée au défaut de parallélisme des surfaces meulées afin d'assurer une chaîne de production fiable.

Ces travaux peuvent être améliorés en étudiant par exemple des ressorts meulés mais à nombre de spires non entier ou avec des défauts non symétriques. En effet, les défauts considérés dans cette étude sont symétriques et modélisés de telle sorte que le sommet de chaque plan se situe à l'extrémité du fil. Des défauts non symétriques pourraient amener à des comportements plus complexes. De plus, la raideur des éléments du modèle des spires d'extrémités ne prend pas en compte la diminution de rigidité due à l'enlèvement de matière liée au meulage. Cela ne semble pas créer d'incohérences mais cela pourrait devenir un prochain axe de recherche. Enfin, le modèle n'a été comparé qu'à une géométrie de ressort. Même s'il se trouve que ce ressort était celui qui comportait le plus grand défaut de parallélisme de l'ensemble de l'échantillon des 36 ressorts testés, une campagne de fiabilité pourrait également être menée sur un nombre de comparaisons plus important.

## RÉFÉRENCES

- [1] Wahl A.M., Mechanical Springs, Deuxième édition. McGraw-Hill Book Company, 1963.
- [2] Saleh M.A.E., Ragab A.E., Ti-6Al-4V Helical Spring Manufacturing via SLM: Effect of Geometry on Shear Modulus. Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, 2, 2013.
- [3] Gubeljak N., Vejborný V., Mechanical springs. Maribor University.
- [4] Ekert E.C., Effects on Rate Due to End Turns in Automotive Suspension Coil Springs. Journal of passenger cars, SAE International, 98(6):277-283, 1989.
- [5] Patil R.V., Reddy P.R., Laxminarayana P., Comparison of Cylindrical and Conical Helical Springs for their Buckling Load and Deflection. International Journal of Advanced Science and Technology, 73:33-50, 2014.
- [6] Shimoseki M., Hamano T., Imaizumi T., FEM for Springs. Springer-Verlag Berlin, 2003.
- [7] Paredes M., Enhanced Formulae for Determining Both Free Length and Rate of Cylindrical Compression Springs. Journal of Mechanical Design, 138, 2016.
- [8] Cadet G., Paredes M., Orciere H., Improved analytical model for cylindrical compression springs not ground considering end behavior of end coils. Mechanics & Industry, 22(50), 2021.
- [9] Palaninathan R., Chandrasekharan P.S., Curved beam element stiffness matrix formulation. Comput. Struct., 21:663-669, 1985.
- [10] Dym C., Consistent derivations of spring rates for helical springs. ASME Journal of Mechanical Design, 131, 2009.