

$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles holonomes sur une courbe formelle

Raoul Hallopeau

Abstract

Let \mathfrak{X} be a formal smooth quasi-compact curve over a complete discrete valuation ring \mathcal{V} of mixed characteristic $(0, p)$. We consider the sheaves of differential operators $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ with a congruence level $k \in \mathbb{N}$ and their projective limit $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. In this article, we define a characteristic variety for coadmissible modules as a closed subset of the cotangent space $T^*\mathfrak{X}$. With such a characteristic variety, one can introduce a notion of holonomic modules : a coadmissible module is holonomic if its characteristic variety has dimension less than or equal to one. We prove that a coadmissible module is holonomic if and only if it a connection module on some open subset of \mathfrak{X} . At last, we bridge holonomic modules with weakly holonomic modules.

Table des matières

1	Introduction	2
2	$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles	6
2.1	$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes	7
2.2	Microlocalisation de $\mathcal{D}_{X,k}$ pour $k \geq 1$	10
2.3	$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles	14
2.4	Modules faiblement holonomes	16
3	Variété caractéristique des modules coadmissibles	24
3.1	$\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent associé à un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent	25
3.2	$\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible	31
3.3	\mathcal{F}_{∞}^* -module associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible	39
3.4	Variété caractéristique	41
4	$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes	42
4.1	Variété caractéristique	43
4.2	Propriétés	47

1 Introduction

Un enjeu majeur dans la théorie des \mathcal{D} -modules arithmétiques réside dans la généralisation de la notion de \mathcal{D} -modules holonomes. Une catégorie constituée de tels modules permettra par exemple d'étudier les cohomologies cristalline et rigide. Des catégories de \mathcal{D} -modules arithmétiques holonomes avec Frobenius ont déjà été construites par Berthelot et Caro de deux manières différentes. Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch ont introduit dans [7] un faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ d'opérateurs différentiels surconvergeants obtenu en rajoutant des niveaux de congruence $k \in \mathbb{N}$ aux faisceaux de Berthelot. Les modules à considérer sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ ne sont plus les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules cohérents mais les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Actuellement, il n'existe pas de notion satisfaisante d'holonomie pour ces modules. L'article [2] de Ardakov-Bode-Wadsley introduit une catégorie de modules faiblement holonomes de \mathcal{D} -modules coadmissibles sur un espace analytique rigide en utilisant la caractérisation cohomologique classique des modules holonomes. Cependant, cette catégorie demeure trop vaste, car les \mathcal{D} -modules faiblement holonomes ne sont pas tous de longueur finie. Une autre approche envisageable consiste à définir une variété caractéristique pour les \mathcal{D} -modules coadmissibles. Sur un schéma formel lisse, les opérateurs différentiels considérés ne sont pas d'ordre fini. Par conséquent, la méthode classique des variétés complexes pour définir la variété caractéristique ne s'applique plus. Une autre méthode consiste à construire un microlocalisé du faisceau des opérateurs différentiels. Une telle construction dans le cas arithmétique a déjà été faite par Tomoyuki Abe dans l'article [1] pour les opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot.

Dans cette article, nous introduisons une variété caractéristique pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles lorsque \mathfrak{X} est une courbe formelle. Nous ne disposons pas à ce jour d'une variété caractéristique pour ces modules. Rappelons que les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles sont des systèmes projectifs de modules sur des anneaux s'obtenant comme sous-anneaux des opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot. Soit \mathcal{V} un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0, p)$. Notons $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$ son corps des fractions et ϖ une uniformisante. Considérons un \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathfrak{X} connexe et quasi-compact. L'objet principal que nous considérons est le faisceau des opérateurs différentiels surconvergeants $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ introduit dans l'article [7] par Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Si U est un ouvert affine de \mathfrak{X} muni d'un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_d) et si $\partial_1, \dots, \partial_d$ sont les dérivations associées, alors

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad a_\alpha \cdot \varpi^{-k|\alpha|} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

avec $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, nous retrouvons le faisceau de Berthelot $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$ de niveau $m = 0$. Notons $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} K$. Nous disposons d'inclusions d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ induisant un morphisme de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Posons

$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} := \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Localement, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est la K -algèbre de Fréchet-Stein donnée par

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} : a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} a_\alpha \cdot \eta^n = 0 \right\}.$$

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Les morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ n'induisent pas de morphismes naturels intéressants entre les différentes variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Car}(T^*X)$ introduites dans [6]. Afin d'introduire une variété caractéristique pour une courbe formelle \mathfrak{X} lisse, nous avons construit un microlocalisé \mathcal{F}_∞ de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ des opérateurs différentiels surconvergeants dans [5] vérifiant la propriété suivante. Un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$ si et seulement si

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,
2. le coefficient dominant a_d de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

La variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est alors définie comme une partie fermée du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} qui contient les variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ pour les niveaux de congruences k suffisamment grands. Le module \mathcal{M} est dit holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) \leq 1$. Nous démontrons dans la section 3, plus spécifiquement dans la proposition 3.26, que la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} vérifie l'inégalité de Bernstein : le module \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim(\text{Car} \mathcal{M}) \geq \dim \mathfrak{X} = 1$. De plus, notre catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes est une sous-catégorie abélienne des modules faiblement holonomes introduits par Ardakov-Bose-Wadsley dans l'article [2] en utilisant la caractérisation cohomologique des modules holonomes. Avec nos hypothèses sur \mathfrak{X} , les modules coadmissibles forment une catégorie abélienne équivalente à la catégorie des modules coadmissibles sur l'espace de Zariski-Riemann associé à \mathfrak{X} d'après la proposition 3.2.5 de [7]. Ainsi, ce travail permettra de définir une notion d'holonomie dans le cas des courbes analytiques rigides et donc pour la catégorie des modules coadmissibles introduite dans l'article [3] de K. Ardakov et S. Wadsley.

Les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes doivent vérifier la condition suivante afin d'être de longueur finie. Soit P un opérateur différentiel de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Le module le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ doit être holonome seulement si P est un opérateur différentiel fini. En effet, si P n'est pas un opérateur fini, alors $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est un module de longueur finie augmentant avec k . De plus, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est localement un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de dimension de plus en plus grande. Nous ne pouvons donc pas espérer avoir de bonnes propriétés de finitudes pour le module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$. Regardons maintenant ce qu'il se passe pour un opérateur $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Soit (x, ξ) un système de coordonnées locales sur T^*U associée à la coordonnée étale de U . Nous vérifions

alors pour k suffisamment grand que

$$\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P) \cap T^*U = \{(x, \xi) \in T^*U : \sigma(\bar{P})(x, \xi) = a_d(t) \cdot \xi^d = 0\}.$$

Ces variétés caractéristiques ne dépendent donc plus de k à partir d'un certain niveau de congruence. Notons x_1, \dots, x_s les zéros du coefficient dominant a_d de P dans l'ouvert U . La figure suivante trace l'allure de la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k .

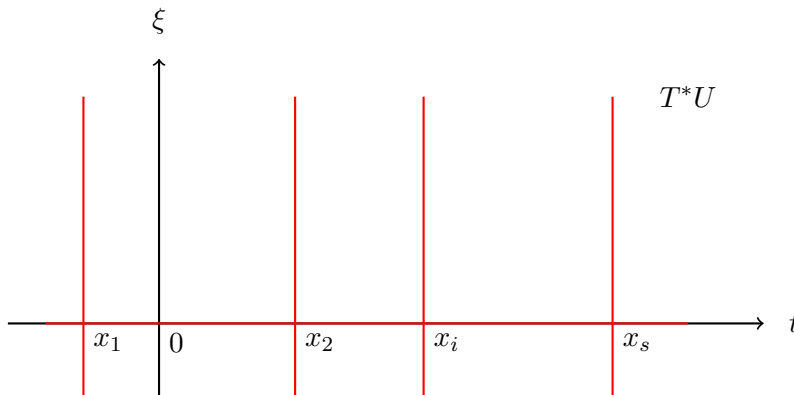


Figure 1 : $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P) \cap T^*U$

Le critère d'inversibilité de l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ est l'analogie souhaité du lemme 2.11 énoncé pour le faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ sur la fibre spéciale X de \mathfrak{X} . En effet, soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$. Nous souhaitons que le module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P$ soit holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini. Le support du module $\mathcal{M} = \mathcal{F}_\infty/P$ permet de distinguer les opérateurs infinis des opérateurs finis. Si P est un opérateur infini, alors $(\text{Supp } \mathcal{M}) \cap U = U$ puisque P n'est pas inversible dans l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(V)$ quel que soit l'ouvert $V \subset U$ (voir la preuve de la proposition 2.12). Dans ce cas, $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}) = 1$. Soit maintenant P un opérateur fini de coefficient dominant a_d dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$. D'après la proposition 2.12 et le critère d'inversibilité des éléments de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$, le support $(\text{Supp } \mathcal{M}) \cap U$ est l'union finie des zéros x_1, \dots, x_s de la fonction a_d dans l'ouvert U . Ainsi, $\dim \text{Supp } \mathcal{M} = 0$. Les points x_1, \dots, x_s du support $(\text{Supp } \mathcal{M}) \cap U$ sont les abscisses des composantes irréductibles verticales des variétés caractéristiques des modules $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ données dans la figure 1 pour k suffisamment grand. La variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ du module coadmissible \mathcal{M} introduite dans la section 4 coïncide avec les variétés caractéristiques de la figure 1 lorsque $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec P un opérateur différentiel fini. En général, nous disposerons seulement de l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Car}(\mathcal{M})$.

Détaillons maintenant le contenu de cet article. Dans la section 2, nous commençons par rappeler brièvement la définition et les principales propriétés des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$. Nous introduisons ensuite, dans la partie 2.4 les modules faiblement holonomes pour une courbe formelle comme Ardakov-Bose-Wadsley l'ont fait dans l'article [2] pour un espace analytique rigide. Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents à droite $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à droite. Nous pouvons définir le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à droite

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}).$$

Le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est alors appelé faiblement holonome si les modules $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ sont nuls pour tout entier d différent de 1. Nous démontrons qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome si et seulement si il existe un niveau de congruence à partir duquel les modules \mathcal{M}_k sont tous holonomes. Un module faiblement holonome n'est pas nécessairement de longueur finie. Par exemple, tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ avec P un opérateur différentiel infini est faiblement holonome tout en étant de longueur infinie.

Dans la section 3, nous utilisons les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$ pour définir une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Pour cela, nous introduisons à partir des microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$ des faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ de [5] sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} . Nous associons à tout module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* sur $T^*\mathfrak{X}$. Notons $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ le support du module \mathcal{M}_r^* en tant que faisceaux sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. Nous démontrons que la suite des supports $\{\text{Supp } \mathcal{M}_r^*\}_{r \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, ce qui nous permet de définir la variété caractéristique de \mathcal{M} de la manière suivante :

$$\text{Car}(\mathcal{M}) := \bigcap_{r \in \mathbb{N}^*} \text{Supp } \mathcal{M}_r^* \subset T^*\mathfrak{X}.$$

Nous nous restreignons au cas d'une courbe formelle \mathfrak{X} afin de démontrer l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles : un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) \geq 1$. La preuve ne fonctionne qu'en dimension un. Cependant, la construction des microlocalisés s'adapte à la dimension supérieure.

Dans la section 4, nous définissons enfin les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est appelé holonome si sa variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ est de dimension inférieure ou égale à un. La catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes est abélienne et non triviale. Elle contient les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ dès que P est un opérateur différentiel fini. Par ailleurs, les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules de type à connexion intégrable appartiennent à cette catégorie. Plus précisément, un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est un module à connexion intégrable si et seulement si $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$ (en identifiant \mathfrak{X} avec la section nulle du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$). Nous démontrons ensuite que tout module holonome est un module à connexion intégrable sur un certain ouvert de \mathfrak{X} . Par ailleurs, nous montrons que tout module holonome est faiblement holonome au sens de [2] et que son dual reste un

module holonome. Autrement dit, le module coadmissible

$$\mathcal{M}^d := \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right)$$

est un module holonome dès que \mathcal{M} est holonome.

Notre catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles holonomes n'est cependant pas stable pas toutes les six opérations de Grothendieck. L'image directe d'un module coadmissible n'étant pas nécessairement coadmissible, nous disposons d'exemple explicite d'image directe de modules holonomes qui ne sont même pas coadmissibles. De tels exemples dans le cas d'une courbe analytique rigide sont l'objects de l'article [4] de Bode-Bitoun. Détaillons rapidement un tel exemple. Soit $\mathfrak{X}_K = \mathrm{Sp}(\mathcal{V}\langle x \rangle)$ et $U_K = \mathfrak{X}_K \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(\mathcal{V}\langle x, x^{-1} \rangle)$ un ouvert époiné de \mathfrak{X}_K . On note ∂ la dérivation associée à x . On pose $P = \partial - x^\lambda$ avec $\lambda \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{D}}_{U_K}/P$. C'est un $\widehat{\mathcal{D}}_{U_K}$ -module coadmissible. Soit $j : U_K \hookrightarrow \mathfrak{X}_K$ l'injection canonique. Le théorème 5.2 de [4] nous dit que le module $j_*\mathcal{M}$ est coadmissible si et seulement si λ est de type positif. Il existe des scalaires λ qui ne sont pas de type positif. Puisque P est un opérateur différentiel fini, le module coadmissible $\mathcal{D}_{U,\infty}/P$ est holonome. Cependant, le module $j_*(\mathcal{D}_{U,\infty}/P)$ n'est a priori pas même coadmissible lorsque λ est de type zéro !

Notations

- \mathcal{V} est un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0, p)$, d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel κ supposé parfait. On note $|\cdot|$ la valeur absolue normalisée de \mathcal{V} , ϖ une uniformisante et $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{V})$ son corps des fractions.
- X est une κ -courbe lisse connexe quasi-compacte et $x \in X$ est un point fermé.
- \mathfrak{X} est un \mathcal{V} -schéma formel lisse relevant X , d'idéal de définition engendré par l'uniformisante ϖ et \mathfrak{X}_K est l'espace analytique rigide associé à \mathfrak{X} .
- t est un relèvement local sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ d'une uniformisante en x ($\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète puisque X est une courbe). Alors dt est une base de $\Omega_{\mathfrak{X},x}^1$. On note ∂ la dérivation associée.
- U est un ouvert affine de \mathfrak{X} contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée étale associée à x .
- Sauf mention contraire, les idéaux et les modules considérés sont tous à gauche.

2 $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles

On commence tout d'abord, dans la partie 2.1, par des rappels sur le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ pour un niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$ fixé et sur les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes introduits dans [6].

On construit dans la partie 2.2 un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ permettant de retrouver la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents en dehors de la section nulle. Cet exemple motive la construction du microlocalisé \mathcal{F}_∞ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ faite dans [5] et permet de comprendre comment obtenir la variété caractéristique à partir d'un microlocalisé. On donne ensuite dans la partie 2.3 quelques propriétés du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ puis on rappelle la définition des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Enfin, on introduit dans la partie 2.4 les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles faiblement holonomes pour la courbe formelle \mathfrak{X} au sens de Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley donnée dans l'article [2].

2.1 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ est défini comme un sous-faisceau dépendant d'un paramètre $k \in \mathbb{N}$ appelé niveau de congruence du faisceau usuel $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$ des opérateurs différentiels sur la courbe formelle lisse \mathfrak{X} . On retrouve $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$ lorsque $k = 0$. Localement, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est la \mathcal{V} -algèbre engendrée par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et par la dérivation $\varpi^k \partial$. Plus précisément,

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad a_n = 0 \text{ pour } n \gg 0 \right\}.$$

On peut aussi voir $\mathcal{D}_{U,k}^{(0)}$ comme le \mathcal{O}_U -module libre de base les puissances de $\varpi^k \partial$:

$$\mathcal{D}_{U,k}^{(0)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_U \cdot (\varpi^k \partial)^n.$$

La dérivation $\varpi^k \partial$ est un endomorphisme \mathcal{V} -linéaire de l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$. La loi multiplicative de la \mathcal{V} -algèbre des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est la composition d'applications linéaires. En pratique, on a $(\varpi^k \partial)^n \cdot (\varpi^k \partial)^m = (\varpi^k \partial)^{n+m}$ et le crochet

$$\forall a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad [\varpi^k \partial, a] = \varpi^k \partial \cdot a - a \cdot \varpi^k \partial = \varpi^k \partial(a).$$

L'ouvert affine U de \mathfrak{X} est le spectre formel d'une \mathcal{V} -algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$. Cette dernière est intègre car la courbe formelle \mathfrak{X} est connexe et lisse. Il en découle que la norme spectrale de l'algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$, notée dans la suite $|\cdot|$, est une valuation complète non archimédienne. Soit $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} := \varprojlim_i (\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} / \varpi^{i+1} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)})$ le complété ϖ -adique de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. On dispose de la description locale suivante :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

On pose $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{V}} K$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} K$. Les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sont les opérateurs différentiels convergents à coefficients dans la K -algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. Il est démontré dans l'article [7] que ces algèbres sont noetheriennes et que les faisceaux associés sont cohérents. Pour tous entiers $k' > k$, il est clair que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. En particulier, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des opérateurs différentiels cristallins $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},0}^{(0)}(U)$. On considère les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ induit par les inclusions locales $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour tout ouvert affine U muni d'une coordonnée étale.

Définition 2.1. Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n$ un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On note

1. $|P|_k := \max_{n \geq 0} \{|a_n|\}$;
2. $\overline{N}_k(P) := \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$.

L'entier $\overline{N}_k(P)$ coïncide avec l'ordre de $\bar{P} = (\alpha P \bmod \varpi)$ dans $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ pour tout scalaire $\alpha \in K$ vérifiant $|\alpha P|_k = 1$. Par ailleurs, ces deux définitions sont indépendantes du choix de la coordonnée locale sur U . En effet, il est montré dans [6] que la norme $|\cdot|_k$ et la fonction \overline{N}_k ne dépendent pas du choix de la coordonnée locale de U . Cependant, la norme $|P|_k$ et l'entier $\overline{N}_k(P)$ dépendent du point x initial : ce sont des notions locales en x . Les deux résultats suivants sont démontrés dans la seconde partie de [6].

Proposition 2.2.

1. Les K -algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sont complètes pour la norme $|\cdot|_k$.
2. La norme induite sur tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent est complète.
3. Pour tous opérateurs différentiels P et Q de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on a

$$|PQ|_k = |P|_k \cdot |Q|_k \quad \text{et} \quad \overline{N}_k(PQ) = \overline{N}_k(P) + \overline{N}_k(Q).$$

Proposition 2.3. Un opérateur différentiel $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi \partial)^n$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ si et seulement si $\overline{N}_k(P) = 0$ et si $a_0 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$.

On note $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ϖ du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. On rappelle que \mathfrak{X} et X ont le même espace topologique ; on identifie U à un ouvert affine de X . Soit ∂_k l'image de $\varpi^k \partial$ dans $\mathcal{D}_{X,k}$. Alors

$$\mathcal{D}_{X,k}(U) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(U) \cdot \partial_k^n.$$

Lorsque $k \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative puisque l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne (proposition 3.6 de [5]). Ces propriétés ne sont pas vraies lorsque $k = 0$. Par

exemple, $[\partial, x] = 1$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}}^{(0)}(U)$ et dans $\mathcal{D}_X(U)$. On munit le faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ de la filtration croissante donnée localement par l'ordre des opérateurs différentiels :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{Fil}^m(\mathcal{D}_{U,k}) = \bigoplus_{0 \leq n \leq m} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n.$$

On note $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \text{gr}_m \mathcal{D}_{X,k}$ le gradué associé et ξ_k l'image de ∂_k dans $\text{gr}_1(\mathcal{D}_{U,k})$. Localement, $\text{gr}(\mathcal{D}_{U,k}) \simeq \mathcal{O}_U[\xi_k]$ est un anneau de polynômes en une variable sur \mathcal{O}_U . En particulier, le fibré cotangent T^*X de X est isomorphe à $\text{Spec } \text{gr}(\mathcal{D}_{X,k})$ en tant que κ -schéma. On identifie ces deux schémas dans la suite. On note $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique. Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un opérateur de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ d'ordre d . On lui associe un élément du gradué $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}(U)$ appelé *symbole principal* de P par

$$\sigma(P) := a_d \cdot \xi_k^d \in \text{gr}_d \mathcal{D}_{X,k}(U).$$

Une filtration $(\text{Fil}^\ell E)_{\ell \in \mathbb{N}}$ d'un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module quasi-cohérent à gauche E est une suite croissante $(\text{Fil}^\ell E)_\ell$ de sous- \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents de E telle que

1. $E = \bigcup_{\ell \geq 0} \text{Fil}^\ell E$;
2. $\forall n, \ell \in \mathbb{N}, (\text{Fil}^n \mathcal{D}_{X,k}) \cdot (\text{Fil}^\ell E) \subset \text{Fil}^{\ell+n} E$.

Le gradué $\text{gr } E$ pour une telle filtration est un $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}$ -module. La filtration est appelée *bonne filtration* si le gradué $\text{gr } E$ est un $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. Puisque la courbe X est quasi-compacte, tout $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent admet une bonne filtration globale. On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent E muni d'une bonne filtration globale. On associe à E le \mathcal{O}_{T^*X} -module cohérent suivant

$$\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\text{gr } \mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\text{gr } E).$$

Définition 2.4. *La variété caractéristique de E est le support du \mathcal{O}_{T^*X} -module cohérent \tilde{E} , $\text{Car } E := \text{Supp } \tilde{E}$.*

C'est une sous-variété fermée de T^*X puisque \tilde{E} est cohérent. La variété caractéristique est indépendante du choix de la bonne filtration choisie.

Soit maintenant \mathcal{E} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à gauche. Un *modèle entier* de \mathcal{E} est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{E}° sans ϖ -torsion tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} K$. Puisque \mathcal{E} est cohérent, il existe un modèle entier \mathcal{E}° . La réduction $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa$ modulo ϖ de \mathcal{E}° est un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent.

Définition 2.5. *La variété caractéristique de \mathcal{E} est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa$: $\text{Car } \mathcal{E} = \text{Car}(\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa)$.*

C'est un sous-schéma fermé du fibré cotangent T^*X de X indépendant du choix du modèle entier.

Exemple 2.6. On suppose que la courbe \mathfrak{X} est affine munie d'une coordonnée étale. On note toujours $\xi_k = \sigma(\partial_k)$ l'image de ∂_k dans le gradué $\text{gr}_1 \mathcal{D}_{X,k}$.

1. Puisque le support du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ est X tout entier, on a $\text{Car} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = T^*X$.
2. Si $\mathcal{E} = 0$, alors sa variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{E})$ est vide.
3. Soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$ un opérateur différentiel de norme un. Alors $\mathcal{E}^\circ = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}/P$ est un modèle entier de \mathcal{E} . On note $d = \overline{N}_k(P)$ et b le coefficient d'indice d de P . La réduction \bar{P} de P modulo ϖ est un opérateur de $\mathcal{D}_{X,k}(X)$ d'ordre d . Son coefficient dominant est $\bar{b} = (b \bmod \varpi) \in \mathcal{O}_X(X)$. On vérifie que $\text{gr}(\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) = \text{gr} \mathcal{D}_{X,k}/(\sigma(\bar{P}))$, où $\sigma(\bar{P}) = \bar{b} \cdot \xi_k^d$ est le symbole principal de \bar{P} . La variété caractéristique de \mathcal{E} est donc donnée par l'équation

$$\text{Car}(\mathcal{E}) = \{(x, \xi) \in T^*X : \sigma(\bar{P})(x, \xi) = \bar{b}(x) \cdot \xi^d = 0\}.$$

Tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k vérifie l'inégalité de Bernstein démontrée dans [6] : si le module \mathcal{M}_k est non nul, alors les composantes irréductibles de sa variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont de dimension au moins un.

Définition 2.7. Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est dit holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M}_k)) \leq 1$.

La proposition suivante de [6] caractérise les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes.

Proposition 2.8. Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{E} est holonome si et seulement \mathcal{E} vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. \mathcal{E} est localement de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ pour un idéal cohérent $\mathcal{J} \neq 0$;
2. \mathcal{E} est de longueur finie ;
3. \mathcal{E} est de torsion ;
4. $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ pour tout entier $d \neq 1$;
5. il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{E}|_U$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}|U}$ -module libre de rang fini. Autrement dit, $\mathcal{E}|_U$ est un module à connexion intégrable.

2.2 Microlocalisation de $\mathcal{D}_{X,k}$ pour $k \geq 1$

Cette partie est indépendante des autres. Elle permet de comprendre l'intérêt du microlocalisé et de voir son lien avec la variété caractéristique. On construit ici un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ pour tout niveau de congruence $k \geq 1$ permettant de retrouver la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents en dehors de la section nulle. Il s'agit du cas le plus simple dans lequel on peut construire un microlocalisé. En effet, pour

un niveau de congruence $k \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative : on peut appliquer les constructions classiques d'algèbre commutative pour localiser la κ -algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$.

Soit $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique. L'application π est ouverte : pour tout ouvert U de X , $V = \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de T^*X . En effet, $T^*X = \text{Spec}(\text{Sym } \Theta_X) \rightarrow X$, où Θ_X est le faisceau cotangent de X . Puisque X est lisse, Θ_X est un module localement libre de rang fini. En particulier le morphisme $T^*X \rightarrow X$ est plat de présentation finie. Il est donc ouvert d'après [8, Tag 00I1]. On note $s : X \rightarrow T^*X$ la section nulle du fibré cotangent et $T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$.

Pour un niveau de congruence $k \geq 1$ fixé, on construit un microlocalisé de $\mathcal{D}_{X,k}$ redonnant la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent en dehors de la section nulle. Le microlocalisé est un \mathcal{O}_{T^*X} -module plat L_k défini sur $T_0^*(X)$ vérifiant pour tout $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent M l'égalité

$$\text{Car}(M) \cap T_0^*(X) = \text{Supp}(L_k \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(M)).$$

Soit U un ouvert affine de X sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. On rappelle que la κ -algèbre $\mathcal{D}_{U,k} = \mathcal{O}_U[\partial_k]$ est commutative. Si ∂'_k est une dérivation donnée par une autre coordonnée locale sur U , alors $\partial'_k = \alpha \cdot \partial_k$ pour un élément inversible α de $\mathcal{O}_U(U)$. Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n = \sum_{n=0}^d a_n \cdot (\alpha \partial_k)^n \in \mathcal{O}_U[\partial'_k]$. Puisque l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative, $P = \sum_{n=0}^d (a_n \alpha^n) \cdot \partial_k^n$. Ainsi, la description de l'algèbre $\mathcal{D}_{U,k}$ comme l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_U[\partial_k]$ ne dépend pas du choix du système de coordonnée locale.

On considère le système de coordonnées locales (x, ξ) sur $V = \pi^{-1}(U) \subset T^*(X)$ associé à la coordonnée de départ sur U . Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. On lui associe une fonction de l'algèbre $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ en envoyant P sur l'élément $P(x, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n(x) \cdot \xi^n$. On note $D_k(V)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ provenant d'un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Puisque $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutatif, le produit de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ induit un produit sur $D_k(V)$ coïncidant avec le produit de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Autrement dit, $D_k(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. L'algèbre $D_k(V)$ ne dépend pas non plus du choix du système de coordonnées locales (x, ξ) . Les ouverts V de T^*X provenant d'ouverts affines U de X sur lequel on dispose d'une coordonnée locale forment une base d'ouverts de T^*X . Ainsi, les algèbres $D_k(V)$ se recollent en un faisceau D_k sur le fibré cotangent T^*X . On a $D_k(V) = \mathcal{O}(U)[\xi]$. Autrement dit, $D_k \simeq \mathcal{O}_{T^*X}$ en tant que κ -faisceaux. On identifie par la suite ces deux faisceaux. Comme pour $\mathcal{D}_{X,k}$, on munit D_k de la filtration donnée localement par l'ordre des éléments en ξ . Autrement dit,

$$\text{Fil}^\ell(D_k(V)) = \bigoplus_{n=0}^{\ell} \mathcal{O}(U) \cdot \xi^n.$$

Cette filtration est compatible avec la filtration de $\mathcal{D}_{X,k}$ via l'isomorphisme défini précédemment : $\mathcal{D}_{X,k}(U) \simeq D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Le gradué est encore un anneau de polynôme

sur $\mathcal{O}_U : \text{gr } D_k(V) \simeq \mathcal{O}(U)[\zeta]$, où ζ est l'image de ξ dans $\text{gr}_1 D_k(U)$. L'application de D_k dans son gradué $\text{gr } D_k$ est donnée par le symbole principal σ . Si $P(x, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n(x) \cdot \xi^n$ est un opérateur d'ordre d de D_k , alors $\sigma(P) = a_d \cdot \zeta^d$.

On se restreint maintenant à $T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$ où la variable ξ n'est jamais nulle. Soit donc V un ouvert affine contenu dans T_0^*X . On pose $U = \pi(V)$. On suppose que U est affine, quitte à réduire V .

Définition 2.9. On note $E_k(V)$ le localisé de $D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$ pour la partie multiplicative $\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On a $E_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\xi, \xi^{-1}]$.

Les algèbres $E_k(V)$ ne dépendent pas non plus du choix des coordonnées locales. Elles se recollent pour former un faisceau E_k sur T_0^*X admettant \mathcal{O}_{T^*X} comme sous-faisceau. Localement, $E_k(V) \simeq \mathcal{O}(U)[\xi, \xi^{-1}]$. On note encore degré d'un élément $P(x, \xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) \cdot \xi^n$ de $E_k(V)$ le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ et $a_m = 0$ pour tout $m > n$. On munit $E_k(V)$ de la filtration donnée par le degré. Dans ce cas, $\text{gr}(E_k(V)) \simeq \mathcal{O}(U)[\zeta, \zeta^{-1}]$. On rappelle que $\text{gr}(D_k(V)) \simeq \mathcal{O}(U)[\zeta]$. On considère sur $E_k(V)$ la valuation v_ξ donnée par l'opposé le degré en ξ :

$$v_\xi(P(x, \xi)) = -\deg_\xi P(x, \xi).$$

Définition 2.10. On note $L_k(V)$ le complété de $E_k(V)$ pour cette valuation. Autrement dit, $L_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[[\xi^{-1}]][[\xi]]$.

Un élément Q de $L_k(V)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$Q(x, \xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) \cdot \xi^n, \quad a_n(x) \in \mathcal{O}_X(U), \quad a_n = 0 \text{ pour } n \gg 0.$$

On définit son degré comme l'opposé de sa valuation ξ -adique : $\deg Q = -v_\xi(Q)$. C'est le plus grand entier n pour lequel le coefficient a_n est non nul. On munit à nouveau $L_k(V)$ de la filtration donnée par le degré des éléments en ξ . On a

$$\text{gr}(L_k(V)) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\zeta, \zeta^{-1}] \simeq \text{gr}(E_k(V)).$$

L'application de $E_k(V)$ dans $\text{gr } L_k(V)$ est encore donnée par le symbole principal :

$$\sigma(Q) = a_{\deg Q}(t) \cdot \zeta^{\deg(Q)}.$$

On note toujours σ le symbole principal sur $L_k(V)$ puisqu'il est compatible avec les inclusions $D_k(V) \subset E_k(V) \subset L_k(V)$.

Les algèbres $L_k(V)$ se recollent en un faisceau d'algèbres L_k sur T_0^*X . Puisque \mathcal{O}_X est localement noethérien, il est clair que L_k est plat sur D_k . Le faisceau L_k est le microlocalisé recherché.

Le lemme suivant est le résultat clé permettant de faire le lien entre L_k et la variété caractéristique. Le localisé est justement construit comme le plus petit faisceau d'algèbres sur T_0^*X contenant D_k et vérifiant cette propriété.

Lemme 2.11. *Soit V un ouvert affine de T_0^*X muni de coordonnées locales $(x, \xi) \in T_0^*X$ et $P(x, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n(x) \cdot \xi^n$ un élément d'ordre d de l'algèbre $D_k(V)$. Il existe un voisinage ouvert W de (x, ξ) dans T_0^*X pour lequel P est inversible dans $L_k(W)$ si et seulement si $\sigma(P)(x, \xi) = a_d(x) \cdot \xi^d \neq 0$.*

Démonstration. Si P est inversible dans $L_k(W)$ pour un certain voisinage ouvert W de (x, ξ) , alors l'image de P dans le gradué est inversible au voisinage de (x, ξ) . Cette image est $\sigma(P) = a_d(x) \cdot \xi^d$ par définition. Il suffit qu'elle soit non nulle en (x, ξ) pour être inversible localement.

Réciproquement, on suppose que $\sigma(P)(x, \xi) = a_d(x) \cdot \xi^d \neq 0$. Puisque le terme $a_d(x) \cdot \xi^d$ est non nul évalué en (x, ξ) , il est inversible sur un voisinage $W \subset V$ de (x, ξ) (en retirant les zéros potentiels de a_n dans V). On se restreint maintenant à cet ouvert W . Alors $P \cdot (a_n \xi^n)^{-1}$ s'écrit sous la forme $1 + R$ avec R un élément de $E_k(W)$ de degré < 0 . On note $S_m = 1 + R + \dots + R^m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. C'est un élément de $E_k(W)$ de degré $\leq -m$. En particulier, la suite $(S_m)_m$ converge dans $L_k(W)$ vers un élément que l'on note S . Par ailleurs on observe que $\deg(S_m \cdot P \cdot (a_n \xi^n)^{-1} - 1) \leq -m + 1$. Ainsi, le passage à la limite $m \rightarrow +\infty$ donne $S \cdot P \cdot (a_n \xi^n)^{-1} = 1$ dans $L_k(W)$. Autrement dit, P est inversible dans le microlocalisé $L_k(W)$. \square

Soit maintenant M un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. On définit un L_k -module cohérent par

$$\tilde{M}^L := L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(M).$$

Le support de ce module coïncide avec la variété caractéristique de M en dehors de la section nulle. Pour montrer ce résultat, on va se ramener au cas où $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. On identifie I avec un idéal de $D_k = \mathcal{O}_{T^*X}$. On pose $\tilde{I} = L_k \cdot I$ l'idéal de L_k engendré par I . On munit I et \tilde{I} des filtrations obtenues par intersections de celles de D_k et L_k respectivement. On peut montrer alors que $\text{gr}(\tilde{I})$ est engendré par $\sigma(I)$: $\text{gr}(\tilde{I}) = \text{gr}(L_k) \cdot \sigma(I)$.

Proposition 2.12. *On a $\text{Car}(M) \cap T_0^*(X) = \text{Supp}(\tilde{M}^L)$.*

Démonstration. On note $\text{Car}^*(M) = \text{Car}(M) \cap T_0^*(X)$. On peut se ramener au cas où X est affine et $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. En effet, puisque M est cohérent, M est engendré par des sections globales e_1, \dots, e_r . Si $I_i = \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,k,x}}(e_i)$, alors $\mathcal{D}_{X,k,x} \cdot e_i \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}/I_i$. Comme la variété caractéristique est un support et puisque le support d'une somme est l'union des supports des termes de la somme, on a

$$\text{Car}(M) = \bigcup_{i=1}^r \text{Car}(\mathcal{D}_{X,k,x}/I_i).$$

On suppose donc que $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$. On note encore I l'image de I dans le faisceau D_k . Alors $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ en tant que D_k -module, où $\tilde{I} = L_k \cdot I$ est l'idéal de L_k engendré par I .

Soit $(x, \xi) \notin \text{Supp } \tilde{M}^L$. Cela signifie que sur un voisinage affine V de (x, ξ) , $L_{k|V} = \tilde{I}|_V$. Dans ce cas, $\sigma(\tilde{I}|_V) = \text{gr}(E_{k|V}) \cdot \sigma(I|_V) = \text{gr}(E_{k|V})$. En particulier, $I|_V$ contient un élément P tel que $\sigma(P)(x, \xi) \neq 0$. On rappelle que

$$\text{Car } M \cap T^*V = \{(x, \xi) \in T^*V : \sigma(P)(x, \xi) = 0 \quad \forall P \in I(V)\}.$$

On en déduit que $(x, \xi) \notin \text{Car}^*(M)$.

Réciproquement, on suppose que $(x, \xi) \notin \text{Car}^*(M)$. Cela signifie que I contient un élément P défini sur un voisinage affine V de (x, ξ) tel que $\sigma(P)(x, \xi) \neq 0$. Alors d'après le lemme 2.11 et quitte à réduire l'ouvert V , l'élément $P \in \tilde{I}(V)$ est inversible dans le microlocalisé $L_k(V)$. Ainsi, $\tilde{I} = L_k$ au voisinage de (x, ξ) et $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ est nul en (x, ξ) . Autrement dit, $(x, \xi) \notin \text{Supp}(\tilde{M}^L)$. \square

On rappelle que si \mathcal{M} est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent, alors $\text{Car } \mathcal{M} = \text{Car}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$ où \mathcal{M}° est un modèle entier de \mathcal{M} et $\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est un $\mathcal{D}_{X, k}$ -module cohérent. On a alors

$$\text{Car}(\mathcal{M}) \cap T_0^*(X) = \text{Supp} \left(L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) \right).$$

2.3 $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -modules coadmissibles

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. Pour tout entier naturel k , on rappelle que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k+1, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est une sous-algèbre de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On considère les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k+1, \mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ induits par ces inclusions locales. On définit le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ comme la limite projective sur k des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$.

Définition 2.13. On note $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} := \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$.

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ est un faisceau de K -algèbres sur le schéma formel \mathfrak{X} vérifiant les trois points suivants :

1. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein et sa topologie est induite par les normes $|\cdot|_k$ des algèbres de Banach $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$;
2. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_{k \geq 0} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$;
3. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n : a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \eta^n = 0 \right\}$.

Le lemme suivant, démontré dans [6], caractérise les opérateurs différentiels finis de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ à l'aide des fonctions \overline{N}_k pour tout niveau de congruence k . On en déduit les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$.

Lemme 2.14. Soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$. La suite $(\overline{N}_k(P))_{k \geq 0}$ est croissante. De plus, P est un opérateur fini de degré $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si la suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est stationnaire de valeur limite d .

Corollaire 2.15. Les éléments inversibles de la K -algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ sont exactement les fonctions inversibles : $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)^\times = \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)^\times$.

On termine cette partie en rappelant la définition des $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles et en détaillant un exemple intéressant de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible. Un tel exemple motive la construction du microlocalisé de [5] et la définition de la variété caractéristique adoptée pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles dans la section 3.

Définition 2.16. Un module coadmissible est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module \mathcal{M} isomorphe à une limite projective $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k tels que les applications de transitions $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ soient $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaires et tels que pour chaque niveau de congruence k , on dispose d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -isomorphisme induit par l'application de transition :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k.$$

Exemple 2.17. Soit $P = \prod_{n \geq 1} (1 - \varpi^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$. Alors $\overline{N}_k(P) = k$. En effet, le coefficient de ∂^n est à un signe près

$$\varpi^{1+2+\dots+n} \cdot (1 + \varpi + \varpi^2 + \dots) + \varpi^{2+3+\dots+(n+1)} \cdot (1 + \varpi + \varpi^2 + \dots) + \dots = \varpi^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot a_n$$

avec a_n un élément de \mathcal{V} de valeur absolue un. Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le coefficient d'ordre n de P est $\pm \varpi^{n(\frac{n+1}{2}-k)} \cdot a_n$. Par définition, $\overline{N}_k(P)$ est le plus grand entier n maximisant la valeur absolue $|\varpi|^{n(\frac{n+1}{2}-k)}$. On cherche donc le plus grand entier n minimisant la puissance $n(\frac{n+1}{2} - k)$. La fonction $x \mapsto x(\frac{x+1}{2} - k)$ est minimale en $x = k - \frac{1}{2}$ de valeur $-k^2 - k + \frac{3}{4}$. La puissance $n(\frac{n+1}{2} - k)$ est donc minimale pour $n = k - 1$ et $n = k$. Ceci prouve que $\overline{N}_k(P) = k$. On a de plus

$$|P_k|_k = |\varpi|^{k(\frac{k+1}{2}-k)} = |\varpi|^{-k^2/2+k/2}.$$

Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, P s'écrit $P = P_k \cdot Q_k$ avec $P_k = \prod_{1 \leq n \leq k} (1 - \varpi^n \partial)$ un opérateur fini d'ordre $\overline{N}_k(P_k) = k$ et $Q_k = \prod_{n > k} (1 - \varpi^n \partial)$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ puisque $\overline{N}_k(Q_k) = 0$ et puisque son coefficient constant est inversible. On en déduit que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Par ailleurs, $P_{k+1} = (1 - \varpi^{k+1} \partial) \cdot P_k$ avec $1 - \varpi^{k+1} \partial$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On a donc $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Autrement dit, $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P \simeq \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible.

On peut retrouver P à partir des opérateurs P_k : la suite $(P_k)_k$ converge vers P dans la K -algèbre de Fréchet-Stein $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet, il suffit de le vérifier pour toutes les normes $|\cdot|_m$. On a $P - P_k = (Q_k - 1) \cdot P_k$. Pour $k \geq m$, on observe que $\overline{N}_m(P_k) = m$ et que $|P_k|_m = |\varpi|^{-\frac{1}{2}(m^2-m)}$. Le coefficient constant de $Q_k - 1$ est nul et le coefficient de ∂^n est de la forme $\varpi^{k+(k+1)+\dots+(k+n-1)} \cdot a_n$, où $a_n \in \mathcal{V}$ est de valeur absolue 1. Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},m,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le coefficient de $(\varpi^m \partial)^n$ est $\omega^{n(k+\frac{n-1}{2}-m)} \cdot a_n$. Les coefficients de $Q_k - 1$ sont presque ceux de P_k : il suffit de remplacer k par $m + 1 - k$. La fonction $x(k + \frac{x-1}{2} - m)$ est minimale pour $x = m + 1 - k - 1/2$. Pour k assez grand, par exemple $k \geq m + 1$, ce terme est négatif. La norme de $1 - Q_k$ est donc donnée par le coefficient d'indice un : $\overline{N}_k(Q_k - 1) = 1$ et $|Q_k - 1|_m = |\varpi|^{k-m}$. Il vient

$$|P - P_k|_m = |1 - Q_k|_m \cdot |P_k|_m = |\varpi|^{k-\frac{m^2}{2}-\frac{m}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

On peut vérifier que le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ est de longueur k , et qu'il s'agit d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang k . Ainsi, le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ n'aura pas de bonnes propriétés de finitudes. On souhaite définir une notion d'holonomie pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles telle que le module $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ soit holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini. C'est ce qui motive la construction du microlocalisé \mathcal{F}_∞ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$; ce dernier ne rend inversibles que les opérateurs différentiels finis.

2.4 Modules faiblement holonomes

On définit dans cette partie les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles faiblement holonomes au sens de Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley dans l'article [2]. Un module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ sur la courbe formelle \mathfrak{X} est appelé faiblement holonome si

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0.$$

De manière équivalente, on démontre que \mathcal{M} est faiblement holonome si et seulement si les modules \mathcal{M}_k sont tous holonomes à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Puisque \mathcal{M}_k est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à gauche, on peut munir le groupe abélien $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à droite. En effet, la question étant locale, on peut supposer que \mathfrak{X} est un ouvert affine suffisamment petit afin que le module \mathcal{M}_k soit de présentation finie :

$$(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$, on en déduit que $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est un sous-module de type fini du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à droite

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n.$$

Il en découle que le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est cohérent.

Lemme 2.18. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, on dispose d'un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites :*

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \simeq \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$. On lui associe une application $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaire

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \quad P \otimes m \mapsto P \cdot \varphi(m).$$

On en déduit une application entre les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droite

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X}) &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\ \varphi \otimes Q &\mapsto \tilde{\varphi} \cdot Q \end{aligned}$$

On dispose d'une telle application sur chaque ouvert U de \mathfrak{X} . On obtient ainsi un morphisme entre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents à droite

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}).$$

On montre maintenant que ce morphisme est un isomorphisme. Il suffit de le vérifier localement. On suppose que \mathfrak{X} est affine afin que \mathcal{M}_{k+1} soit de présentation finie :

$$(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_{k+1} \rightarrow 0.$$

En tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, on obtient une présentation $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$ de \mathcal{M}_k . En appliquant les foncteurs $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$ et $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$, on

obtient le diagramme commutatif suivant entre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites :

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^m, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right)
\end{array}$$

On déduit du fait que les deux dernières flèches horizontales soient des isomorphismes que la première flèche en est aussi un. \square

On définit le $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible à droite $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty})$ par

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}).$$

Plus généralement, le groupe abélien $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ admet une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. On démontre maintenant que pour tout entier naturel d , les modules $\left\{ \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible à droite.

Pour tout entier $d \geq 2$ et pour tout niveau de congruence k , il a été vu dans la preuve de la proposition 3.28 de [6] que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Ainsi, pour $d \geq 2$, on peut définir le module $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty})$ simplement par

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$$

pour les morphismes de transition triviaux. Le cas $d = 0$ correspond au lemme 2.18. Il reste donc à traiter le cas $d = 1$.

Proposition 2.19. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, le morphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites*

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

induit par le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaire

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

du lemme 2.18 est un isomorphisme. De plus, le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est cohérent.

Démonstration. On vérifie localement que le morphisme

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

est un isomorphisme. Soit $x \in \mathfrak{X}$ et U un ouvert affine de \mathfrak{X} contenant x sur lequel \mathcal{M}_{k+1} est de présentation finie. On va montrer que le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{M}_{k+1} admet localement, sur un certain voisinage ouvert V de x , une résolution projective de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_V \longrightarrow 0$$

avec P un $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module projectif et L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules libres de rang fini. On sait d'après la proposition 3.25 de [6] que le module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est de longueur cohomologique inférieure ou égale à trois. Ainsi, $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d((\mathcal{M}_{k+1})_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d > 3$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un certain voisinage ouvert W de x . Comme \mathcal{M}_{k+1} est de présentation finie sur l'ouvert U , il existe un $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module libre de rang fini L^0 et un $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent K tels que l'on ait une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_U \longrightarrow 0.$$

Comme L^0 est un module libre de rang fini, on a $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(L_x^0, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte précédente, on obtient

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{N}, \quad \text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(K_x, \mathcal{N}_x) \simeq \text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^{d+1}((\mathcal{M}_{k+1})_x, \mathcal{N}_x).$$

En particulier, $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(K_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout $d > 2$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . Par une récurrence finie, et quitte à réduire l'ouvert U contenant x , on obtient une résolution locale de \mathcal{M}_{k+1} de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_U \longrightarrow 0$$

avec L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules libres de rangs finis et $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^x}^d(P_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d > 0$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . Autrement dit, le $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent P est projectif quitte à réduire l'ouvert U contenant x .

On écrit $L^i \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_i}$ avec $n_i \in \mathbb{N}$. Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$, on obtient la suite exacte suivante en tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} P \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0} \longrightarrow (\mathcal{M}_k)|_U \longrightarrow 0.$$

Soit $0 \longrightarrow P^3 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ une résolution projective finie du $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} P$ sur ouvert contenant x que l'on note encore U . On en déduit la résolution projective suivante du module $(\mathcal{M}_k)|_U$:

$$\begin{array}{ccccccc} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2} & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1} & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0} & \longrightarrow & (\mathcal{M}_k)|_U \longrightarrow 0 \\ \uparrow & & & & & & \\ P^0 & \longleftarrow & P^1 & \longleftarrow & P^2 & \longleftarrow & P^3 \longleftarrow 0. \end{array}$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{X} = U$ pour simplifier. On obtient finalement le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est donné par les morphisme φ et ψ . Le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est quant à lui donné par les morphismes $\varphi \otimes \text{id}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}$ et $\psi \otimes \text{id}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}$. On en déduit que

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}).$$

Enfin, les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droite $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ sont cohérents car ce sont localement des quotients du module $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n$. \square

Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ et pour tout entier naturel d , on note $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à droite limite projective des modules $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$:

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}).$$

Pour tout entier $d \geq 2$, on rappelle que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$.

Définition 2.20. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est appelé faiblement holonome si $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$.

De manière équivalente, un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est faiblement holonome si et seulement si $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$ pour tout entier $d \neq 1$. Dans l'article [2], Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley définissent les modules faiblement holonomes de la manière suivante. Soit X_K un espace analytique rigide lisse de dimension n . Un $\widehat{\mathcal{D}}$ -module coadmissible \mathcal{M} sur X_K est faiblement holonome si les groupes de cohomologie $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}}^d(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}})$ sont nuls pour tout entier $d \neq n$. La définition 2.20 correspond aux modules faiblement holonomes en considérant une courbe formelle à la place d'un espace analytique rigide.

Proposition 2.21. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome si et seulement si il existe un niveau de congruence k_0 à partir duquel les modules \mathcal{M}_k sont tous holonomes.

Démonstration. Si les modules \mathcal{M}_k cohérents sont holonomes, alors $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ d'après la proposition 3.28 de [6]. Il en découle que

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0.$$

Réciproquement, on suppose que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$. Comme ce module est coadmissible, on a $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = 0$. On en déduit que \mathcal{M}_k est holonome toujours la proposition 3.28 de [6]. \square

On en déduit immédiatement que la catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne. Elle est de plus non triviale. Elle contient par exemple les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules cohérents de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/\mathcal{J}$ avec \mathcal{J} un idéal cohérent non nul de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$.

Corollaire 2.22. *La catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne.*

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Alors pour tout niveau de congruence k , on dispose d'une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0 .$$

D'après la proposition 3.16 de [6], le module \mathcal{N}_k est holonome si et seulement si \mathcal{M}_k et \mathcal{L}_k le sont. On en déduit que les modules \mathcal{N}_k sont holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k si et seulement les modules \mathcal{M}_k et \mathcal{L}_k le sont aussi. La proposition 2.21 implique enfin que \mathcal{N} est faiblement holonome si et seulement \mathcal{M} et \mathcal{L} sont faiblement holonomes. \square

Remarque 2.23. *Lorsque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome, on dispose localement d'une résolution libre finie des modules \mathcal{M}_k donnée par la proposition 2.20 de [6]. En effet, le module \mathcal{M}_k est holonome pour k suffisamment grand. Il existe donc un idéal cohérent non nul \mathcal{J}_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$. Soit $x \in \mathfrak{X}$. Une base de division relativement au point x fournit une présentation explicite de \mathcal{J}_k sur un voisinage U de x :*

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^r \longrightarrow \mathcal{J}_{k|U} \longrightarrow 0 .$$

La matrice R s'exprime entièrement en fonction de la base de division. Combinée avec la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$, on obtient la présentation suivante du module \mathcal{M}_k sur l'ouvert U :

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^r \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{M}_{k|U} \longrightarrow 0 .$$

On retrouve bien que $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ pour tout entier $d \geq 2$. Par ailleurs, cette résolution permet de calculer explicitement le groupe $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ au voisinage de x en fonction d'une base de division relativement au point x .

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible et d un entier naturel. Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents à gauche $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{0_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module

coadmissible à gauche. En effet, cela résulte du lemme 2.2 de la partie I de l'article [9] de Anne Virrion :

$$\begin{aligned}
& \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d (\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1} \right) \\
& \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d (\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1} \right) \\
& \simeq \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d (\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1} \\
& \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d (\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1}.
\end{aligned}$$

On note \mathcal{M}_k^d le dual du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k :

$$\mathcal{M}_k^d := \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d (\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1}.$$

Il a été vu dans la partie 3.5 de [6] que si le module \mathcal{M}_k est holonome, alors son dual \mathcal{M}_k^d est aussi holonome. Par ailleurs, on dispose d'un isomorphisme naturel de bidualité $(\mathcal{M}_k^d)^d \simeq \mathcal{M}_k$.

Définition 2.24. *Le dual d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est le module coadmissible*

$$\mathcal{M}^d := \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1 (\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1} \right).$$

On démontre maintenant que si le $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est faiblement holonome, alors son dual \mathcal{M}^d l'est aussi.

Proposition 2.25. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible faiblement holonome. Alors son dual \mathcal{M}^d est aussi un module faiblement holonome. De plus, on dispose d'un isomorphisme de bidualité : $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible faiblement holonome. Par définition, il existe un niveau de congruence k_0 tel que \mathcal{M}_k soit un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome pour tout entier $k \geq k_0$. Alors $\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d (\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1}$ est un module holonome d'après la proposition 3.28 de [6]. La proposition 2.21 implique ensuite que le $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \mathcal{M}_k^d$ est faiblement holonome. Enfin, les isomorphismes naturels de bidualité $(\mathcal{M}_k^d)^d \simeq \mathcal{M}_k$ pour chaque niveau de congruence $k \geq k_0$ induisent un isomorphisme $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$ en prenant la limite projective. \square

3 Variété caractéristique des modules coadmissibles

On note $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ le fibré cotangent de \mathfrak{X} et $s : \mathfrak{X} \rightarrow T^*\mathfrak{X}$ la section nulle. Le morphisme π est ouvert. En, effet la propriété d'être ouvert étant topologique, il suffit de le vérifier sur la fibre spéciale et de voir que le morphisme $T^*X = \text{Spec}(\text{Sym } \Theta_X) \rightarrow X$ est ouvert, ce qui a déjà été fait dans la partie 2.2.

Dans cette section et la suivante, le niveau de congruence k sera toujours supposé supérieur ou égale à un. Lorsque $k \geq 1$, les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sont quasi-abéliennes et l'on peut construire des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}^*$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ pour tout entier $r \in \{1, \dots, k\}$. Cette construction ne fonctionne pas pour le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},0,\mathbb{Q}}^{(0)} = \widehat{\mathcal{D}}_{k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Pour des entiers naturels $k \geq r \geq 1$, le faisceau microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ de [5] s'obtient en inversant localement la dérivation ∂ de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Les sections du faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ sur un ouvert affine U muni d'une coordonnée étale sont données par

$$\mathcal{F}_{k,r}(U) = \left\{ S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n}, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U), \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \right\}.$$

L'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est dotée d'une norme $\|\cdot\|_{k,r}$ complète pour la topologie ϖ -adique et sous-multiplicative définie par $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} (|a_n|)$. On dispose d'un morphisme isométrique et injectif de K -algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*(U)$; on identifie donc $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ à une sous-algèbre de Banach du microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}^*(U)$. On rappelle ci-dessous la proposition 3.26 de [5] caractérisant les opérateurs différentiels de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{k,r}^*(U)$.

Proposition 3.1. *Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n$ un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x tel que P soit inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ si et seulement si*

1. $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$,
2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, |a_n| \cdot p^{(k-r)(d-n)} < |a_d|$.

On associe au faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ un faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} dans la partie 3.1 de la manière suivante. Pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$, on pose

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(V) := \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

L'image $\pi(V)$ de V est un ouvert de \mathfrak{X} puisque le morphisme $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ est ouvert. On construit un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent à partir de tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent. En effet, soit

\mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent et $r \in \{1, \dots, k\}$. On associe à \mathcal{M}_k le $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent

$$\mathcal{M}_{k,r}^* := \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_k).$$

On note $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant que faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. On démontre dans la partie 3.1 l'inégalité de Bernstein pour le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$: un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{M}_k est non nul si et seulement si $\dim \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$. On considère ensuite dans les parties suivantes un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour $r \geq 1$ fixé et pour tout niveau de congruence $k \geq r$, les modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}^*$ -linéaires $\mathcal{M}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*$, induits par les morphismes de transition initiaux $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$. On définit dans la partie 3.2 le faisceau limite projective \mathcal{M}_r^* des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$; c'est un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible. Le support du module \mathcal{M}_r^* coïncide avec la fermeture de l'union croissante des supports des faisceaux $\mathcal{M}_{k,r}^*$:

$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*} \subset T^*\mathfrak{X}.$$

On démontre dans la partie 3.2 que le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible \mathcal{M}_r^* vérifie lui aussi l'inégalité de Bernstein. Dans la partie 3.3, on étudie les liens entre les modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* pour $r \geq 1$ variable. La variété caractéristique de \mathcal{M} est définie dans la partie 3.4 comme l'intersection sur $r \geq 1$ des supports des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* .

3.1 $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent associé à un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent

On fixe dans cette partie les entiers $k \geq r \geq 1$. On fera varier le niveau de congruence k dans la partie 3.2 puis l'entier r dans la partie 3.3.

Le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$

On définit le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ à partir du microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} comme expliqué ci-dessus.

Définition 3.2. Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. On pose

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Il est clair que $\mathcal{F}_{k,r}^*(V)$ une K -algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et multiplicative dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. On désigne la norme de $\mathcal{F}_{k,r}^*(V)$ toujours par $\|\cdot\|_{k,r}$. Si $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, il s'agit de la norme de $\mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$. Sinon pour $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\|\cdot\|_k$ est la norme multiplicative $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$.

On vérifie que $\mathcal{F}_{k,r}^*$ est un préfaisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. En effet, soient $W \subset V$ deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$. Si V et W n'interceptent pas la section nulle $s(\mathfrak{X})$, ou s'ils l'interceptent tous les deux, alors les morphismes de restrictions sont respectivement ceux du faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ ou ceux de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On suppose maintenant que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ mais que $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Par définition,

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(W) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)).$$

L'inclusion $W \subset V$ implique que $\pi(W) \subset \pi(V)$. Le morphisme de restriction d'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}^*(V) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*(W)$ est simplement le morphisme composé

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(W)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)).$$

La condition de recollement est claire puisque $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}_{k,r}$. Ainsi, $\mathcal{F}_{k,r}^*$ définit bien un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} .

Les modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$

Soit $\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*$ le morphisme de K -algèbres induit sur les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$ par les inclusions

$$\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})(V) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ce morphisme induit une structure de $\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ -module pour le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$. On considère maintenant un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k . On associe au $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k un $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent en posant $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} := \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$.

Définition 3.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \dots, k\}$. On associe à tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k le $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent $\mathcal{M}_{k,r}^* := \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$.

Soit (x, ξ) un point du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. Ce point est sur la section nulle de $T^*\mathfrak{X}$ si et seulement si $\xi = 0$. La définition du faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ permet d'obtenir les isomorphismes

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} &\simeq (\mathcal{F}_{k,r})_{(x,\xi)} \otimes_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_{(x,\xi)}} (\mathcal{M}_k)_{(x,\xi)} \\ &\simeq \begin{cases} (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \simeq (\mathcal{F}_{k,r})_x \otimes_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x} (\mathcal{M}_k)_x & \text{si } \xi \neq 0 \\ (\mathcal{M}_k)_x \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x \otimes_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x} (\mathcal{M}_k)_x & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On note $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant que faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. C'est un fermé de $T^*\mathfrak{X}$ d'après le lemme suivant puisque $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent.

Lemme 3.4. *Le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie fermée de $T^*\mathfrak{X}$.*

Démonstration. On rappelle que le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compact et que le $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est cohérent. Soit V_1, \dots, V_n un recouvrement ouvert affine fini de $T^*\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{k,r|V_i}^*$ soit un $\mathcal{F}_{k,r|V_i}^*$ -module de type fini pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. Il existe des sections e_1, \dots, e_s de $\mathcal{M}_{k,r}^*(V_i)$ telles que $\mathcal{M}_{k,r|V_i}^* = \mathcal{F}_{k,r|V_i}^* \cdot e_1 + \dots + \mathcal{F}_{k,r|V_i}^* \cdot e_s$. Par ailleurs, comme $\text{Supp}(\mathcal{F}_{k,r}) = \text{Supp}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = \mathfrak{X}$, le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ est supporté par $T^*\mathfrak{X}$ tout entier. On en déduit que

$$\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cap V_i = \bigcup_{j=1}^s \text{Supp}(e_j).$$

Le support $\text{Supp}(e_j)$ d'une section e_j de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est fermé dans $T^*\mathfrak{X}$ d'après [8, Tag 01AU]. On en déduit que $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cap V_i$ est fermé car union finie de fermés. Puisque les V_i recouvrent $T^*\mathfrak{X}$, le support $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie fermée de $T^*\mathfrak{X}$. \square

Lien entre $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ et $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$

Soit $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à gauche avec \mathcal{J}_k un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On note \mathcal{J}_k° l'ensemble des éléments du faisceau d'idéaux \mathcal{J}_k de norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un :

$$\mathcal{J}_k^\circ(U) = \{P \in \mathcal{J}_k(U) : |P|_k \leq 1\}.$$

C'est un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. En effet, \mathcal{J}_k est localement sur tout ouvert suffisamment petit U de \mathfrak{X} un idéal de type fini engendré par des opérateurs différentiels P_1, \dots, P_s de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Quitte à normaliser les P_i , on peut supposer que $P_1, \dots, P_s \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$. Il est clair que l'idéal $\mathcal{J}_k^\circ|_U$ est aussi engendré par les sections P_1, \dots, P_s . Ainsi, \mathcal{J}_k° est localement un idéal de type fini. Comme le faisceau d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ est cohérent, l'idéal \mathcal{J}_k° est cohérent. On identifie U à un ouvert affine de la fibre spéciale X de \mathfrak{X} . On munit $T^*U \subset T^*X$ du système de coordonnées locales (x, ξ) associé à la coordonnée étale de U . Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n$ un élément de $\mathcal{J}_k^\circ(U)$. On associe à P l'élément du fibré cotangent T^*U donné par

$$\sigma(P) = \sigma_k(P) = \bar{a}_{\bar{N}_k(P)} \cdot \xi^{\bar{N}_k(P)}$$

où $\bar{a}_{\bar{N}_k(P)} \in \mathcal{O}_X(U)$ est la réduction modulo ϖ de $a_{\bar{N}_k(P)}$. On a $\sigma(P) = \sigma(\bar{P})$, où $\sigma(\bar{P})$ est le symbole principal de $\bar{P} \in (\mathcal{J}_k^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa)(U)$. On appelle encore $\sigma(P)$ le symbole principal de P ; il dépend du niveau de congruence k . Avec cette notation, on a

$$\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T^*U = \{(x, \xi) \in T^*U : \sigma(P)(x, \xi) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{J}_k^\circ(U)\}.$$

On rappelle que le localisé \mathcal{E}_k du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ introduit dans [5] est défini localement par les sections

$$\mathcal{E}_k(U) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U), \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \right\}.$$

C'est une K -algèbre de Banach contenant le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}^*(U)$ en tant que sous-algèbre. Il est démontré dans [5], proposition 3.14, qu'un opérateur différentiel P de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si P admet un unique coefficient a_n de norme spectrale maximale et si a_n est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. Ce résultat sert dans la preuve de la proposition suivante : la variété caractéristique du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est contenue dans le support du $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant que parties fermées de l'espace topologique $|T^*\mathfrak{X}| = |T^*X|$.

Proposition 3.5. *Pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k et pour tout entier $r \in \{1, \dots, k\}$, on dispose de l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ d'espaces topologiques.*

Démonstration. On peut supposer que la courbe formelle \mathfrak{X} est affine munie d'une coordonnée locale. On se ramène au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ pour un idéal cohérent \mathcal{J} de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ comme dans la preuve de la proposition 2.12. Alors $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \simeq \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$, où $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$ est l'idéal à gauche de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par \mathcal{J} .

On commence par établir que $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ et $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ coïncident au niveau de la section nulle du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. On rappelle que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\mathcal{M}_k)_x$ et $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_k)_x$ pour $\xi \neq 0$. L'idéal cohérent \mathcal{J}° de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ est constitué des éléments de \mathcal{J} norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un. Soit $I = \mathcal{J}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa$ la réduction modulo ϖ de \mathcal{J}° . C'est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathbb{V}} \kappa$. Soit P_1, \dots, P_s des éléments de l'idéal $\mathcal{J}^\circ(U)$ tels que $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_s)$ engendrent le gradué $\text{gr } I$. Alors P_1, \dots, P_s engendrent l'idéal \mathcal{J} . De plus,

$$\begin{aligned} \text{Car}(\mathcal{M}_k) &= \text{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I) = \{(x, \xi) \in T^*X : \sigma(P)(x, \xi) = 0 \quad \forall P \in I\} \\ &= \{(x, \xi) \in T^*X : \sigma(P_1)(x, \xi) = \dots = \sigma(P_s)(x, \xi) = 0\}. \end{aligned}$$

On écrit $\sigma(P_i) = \sigma(\bar{P}_i) = a_i \cdot \xi^{d_i} \in \text{gr } I(X)$. La section nulle est une composante irréductible de la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ si et seulement si les ordres d_1, \dots, d_s des opérateurs P_1, \dots, P_s sont tous supérieurs ou égaux à un. Puisque l'idéal $\text{gr } I$ est engendré par les monômes $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_s)$, l'idéal $\text{gr } I$ ne contient pas de terme d'ordre zéro en ξ . On en déduit que l'idéal \mathcal{J} ne contient pas d'opérateur P vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$. Dans le cas contraire, $\sigma(P)$ serait un élément d'ordre $\overline{N}_k(P) = 0$ en ξ de $\text{gr } I$. Les points du support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ interceptant la section nulle sont donnés par le support du module $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$. Puisque tout élément P de l'idéal $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$ vérifie $\overline{N}_k(P) \geq 1$, aucun élément de \mathcal{J} n'est inversible dans $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x$ pour chaque point x de \mathfrak{X} d'après la proposition 2.3. Ainsi,

$(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J})_x \neq 0$ en tout point x de \mathfrak{X} . Autrement dit, $\text{Supp}(\mathcal{M}_k) = \mathfrak{X}$ et le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ contient la section nulle du fibré cotangent.

Réciproquement, le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ n'est pas \mathfrak{X} tout entier si et seulement si l'idéal $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$ contient un opérateur P vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$. Dans ce cas, le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ consiste en un nombre fini de points contenus dans l'ensemble des zéros du coefficient constant a_0 de P . Par ailleurs, $\sigma(P) = \bar{a}_0$ est un élément du gradué $\text{gr } I(U)$. La variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I)$ ne contient donc pas la section nulle. On vérifie, en raisonnant de manière analogue à ce que l'on a fait dans le paragraphe précédent, que la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ intercepte la section nulle exactement en les points du support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$, autrement dit parmi les zéros du coefficient constant a_0 de P .

On regarde maintenant ce qu'il se passe en dehors de la section nulle. On reprend les notations de la partie 2.2 pour le microlocalisé L_k du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ sur le fibré cotangent T^*X de X . Soit $P \in \mathcal{J}(\mathfrak{X})$ un opérateur différentiel de norme un. On rappelle que l'opérateur fini $\bar{P} = (P \bmod \varpi)$ est inversible dans le microlocalisé L_k au voisinage d'un point (x, ξ) de $T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$ si et seulement si $\sigma(P)(x, \xi) \neq 0$. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante, pour que P soit inversible dans le microlocalisé $(\mathcal{E}_k)_x$ de [5]. En effet, cette condition implique seulement que le coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ de P est inversible dans $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})_x$. D'après la proposition 3.14 de [5], il faut de plus que le coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ de P soit l'unique coefficient de norme maximale de P pour que P soit inversible dans $(\mathcal{E}_k)_x$. Ainsi, si \bar{P} est non inversible dans $L_k(W)$ pour tout voisinage ouvert W du point (x, ξ) dans T_0^*X , alors P n'est pas inversible dans $(\mathcal{E}_k)_x$ et donc à fortiori dans $(\mathcal{F}_{k,r})_x$.

On se donne un point (x, ξ) de $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$. On rappelle que (x, ξ) appartient à la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$ si et seulement si pour tout opérateur P de $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$ de norme un, $\sigma(P)(x, \xi) = 0$. On en déduit qu'aucun élément P de l'idéal $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$ n'est inversible dans $(\mathcal{E}_k)_x$. En effet, le coefficient dominant a de tout opérateur P de $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$ s'annule en x puisque le point (x, ξ) n'appartient pas à la section nulle du fibré cotangent : $\xi \neq 0$ et $\sigma(P) = \bar{a}(x) \cdot \xi^{\overline{N}_k(P)} = 0$ implique $a(x) = 0$. D'après le lemme 3.16 de [6], l'idéal $\mathcal{E}_k \cdot \mathcal{J}$ de \mathcal{E}_k engendré par l'idéal \mathcal{J} ne contient pas d'élément inversible au voisinage de x . Autrement dit, $\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J}(W) \subsetneq \mathcal{E}_k(W)$ pour tout ouvert affine W de \mathfrak{X} . Il en découle que l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$ de $\mathcal{F}_{k,r}$ ne contient aucun élément inversible dans $(\mathcal{F}_{k,r})_x$. Dans le cas contraire, il existerait un voisinage ouvert W de x pour lequel $\mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{F}_{k,r}(W)$. Alors

$$\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) = \mathcal{E}_k(W).$$

Ainsi, $\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{E}_k(W)$ et $\mathcal{J}(W)$ contiendrait un opérateur inversible au voisinage de x d'après le lemme 3.16 de [6]. Il en découle qu'aucun élément de l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$ n'est inversible dans le microlocalisé $(\mathcal{F}_{k,r})_x$. On en déduit que $(\mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J})_x \neq 0$ et que $(x, \xi) \in \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$. On a donc démontré l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ en dehors de la section nulle. \square

Remarque 3.6. Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent et $r \in \{1, \dots, k\}$. On a démontré que la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ et que le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ coïncident au niveau de

la section nulle. Cependant, l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ peut être stricte en dehors de la section nulle. Cela provient du fait qu'il est plus « difficile » d'être inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ que dans le microlocalisé L_k de $\mathcal{D}_{X,k}$. Pour exemple, soit P un opérateur différentiel infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ sont toutes de dimension un, mais $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = T^*\mathfrak{X}$ pour r et k suffisamment grands d'après l'exemple 3.18.

Inégalité de Bernstein

Puisque \mathfrak{X} est une courbe formelle lisse connexe et quasi-compact, on dispose de l'inégalité de Bernstein pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents démontrée dans [6] : un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est non nul si et seulement si $\dim \text{Car} \mathcal{M}_k \geq 1$. On fixe dans la suite un entier $r \in \{1, \dots, k\}$. On déduit de la proposition 3.5 que l'égalité $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ implique $\dim(\text{Car} \mathcal{M}_k) = 1$. En effet, il suffit de vérifier que $\mathcal{M}_k \neq 0$. Si $\mathcal{M}_k = 0$, alors $\mathcal{M}_{k,r}^* = 0$ et $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = \emptyset$. Autrement dit, si $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, alors \mathcal{M}_k est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome non nul. Réciproquement, soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent non nul. Alors $\dim(\text{Car} \mathcal{M}_k) \geq 1$ et la proposition 3.5 montre que $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$. On en déduit l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents énoncée dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.7. *Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est non nul si et seulement si pour un certain $r \in \{1, \dots, k\}$, $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$. Dans ce cas, cette inégalité est vérifiée pour tout entier $r \in \{1, \dots, k\}$.*

Comme la courbe formelle \mathfrak{X} est connexe et lisse, elle est irréductible et le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ est aussi irréductible. Comme $\dim(T^*\mathfrak{X}) = 2$, si le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est de dimension deux, alors $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = T^*\mathfrak{X}$. Lorsque $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, la proposition suivante montre que le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie conique de $T^*\mathfrak{X}$ constituée de composantes irréductibles verticales et potentiellement d'une composante irréductible horizontale d'équation $\xi = 0$.

Proposition 3.8 (Inégalité de Bernstein). *Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent non nul. Si $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) = 2$, alors $\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$. Sinon, $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ et les composantes irréductibles du support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ sont toutes de dimension un.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$. Comme pour la preuve de la proposition 2.12, on peut se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$ avec \mathcal{J}_k un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$, où $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$ est l'idéal de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par \mathcal{J}_k . On peut supposer que \mathfrak{X} est affine muni d'une coordonnée locale. Il a été vu dans la proposition 3.5 que le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ et la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ coïncident au niveau de la section nulle et que $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$. Puisque les composantes irréductibles de

$\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont toutes de dimension un, le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ n'a pas de point isolé sur la section nulle. Il reste à regarder ce qu'il se passe en dehors de la section nulle.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$. On rappelle que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x$. On en déduit que si $(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$, alors le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la droite verticale passant par x sauf potentiellement pour le point situé sur la section nulle. Il faut donc élucider ce qu'il se passe au niveau de la section nulle. Si le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle, il n'y a rien à montrer. Dans ce cas, le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ consiste en une composante irréductible horizontale d'équation $\xi = 0$ et en un nombre fini de composantes verticales.

On suppose maintenant que la section nulle n'est pas une composante irréductible du support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$. Il faut montrer que si $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour tout $\xi \neq 0$, alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Autrement dit, il faut prouver qu'aucun opérateur P de l'idéal $\mathcal{J}_k(U)$, pour U un voisinage ouvert affine de x dans \mathfrak{X} , n'est inversible dans $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x$. Si $\overline{N}_k(P) \geq 1$, alors la proposition 2.3 montre que P n'est jamais inversible dans $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x$. Néanmoins, il a été vu dans la preuve de la proposition 3.5 que l'idéal $\mathcal{J}_k(U)$ contient des opérateurs différentiels P vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$ lorsque la section nulle n'est pas une composante irréductible de la variété caractéristique $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k)$. Soit P un tel élément et (x, ξ) un point du fibré cotangent tel que $\xi \neq 0$. L'hypothèse $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ implique que le coefficient constant a_0 de P s'annule en x . Autrement, P serait inversible dans le microlocalisé $(\mathcal{F}_{k,r})_x$ d'après la proposition 3.1. En effet, $\overline{N}_k(P) = 0$ et a_0 est inversible au voisinage de x puisque a_0 ne s'annule pas en x . Ceci impliquerait en particulier que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x = 0$. Ainsi, aucun opérateur différentiel P de l'idéal $\mathcal{J}_k(U)$ vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$ n'est inversible dans $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x$ lorsque $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ d'après la proposition 2.3. On en déduit que $(\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient donc la droite verticale d'abscisse x . \square

3.2 $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible

On associe maintenant à tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible \mathcal{M}_r^* , où $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ est la limite projective sur $k \geq r$ des faisceaux d'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}^*$. Le module \mathcal{M}_r^* est simplement la limite projective sur k des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$. L'inégalité de Bernstein pour le support $\text{Supp} \mathcal{M}_r^*$ découle directement des inégalités de Bernstein pour les $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$.

Le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$

On considère les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*$ induits localement sur les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$ par l'inclusion $\mathcal{F}_{k+1,r}(\pi(V)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$ lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et par l'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$ dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Comme pour le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$ de [5], on définit le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ comme la limite projective sur $k \geq r$ des

faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}^*$. On rappelle la description suivante de l'algèbre de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$:

$$\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \left\{ P + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n} : P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U), a_{-n} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{-n} = 0 \right\}.$$

On déduit de la proposition 3.23 de [5] et du corollaire 2.2.20 de [7] que les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*$ sont plats à gauche et à droite.

Définition 3.9. On pose $\mathcal{F}_{\infty,r}^* := \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}^*$.

On vérifie que $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ est un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ défini localement par les algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$:

$$\mathcal{F}_{\infty,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\infty,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

On dispose pour le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}$ du théorème suivant démontré dans [5].

Théorème 3.10. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors P est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(V)$ pour un ouvert $V \subset U$ contenant x si et seulement si

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(V)$,
2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}$, $|a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$.

Les $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour tout $k \geq r \geq 1$, on rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est le $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$. On note g_k le morphisme de transition $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ et $i_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ le morphisme donné localement par l'inclusion de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On considère le morphisme de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}$ -linéaire $g_{k,r} = i_{k,r} \otimes g_k : \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Pour ces morphismes de transition, on pose

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} := \varprojlim_{k \geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}.$$

Proposition 3.11. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$. Autrement dit, $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible.

Démonstration. L'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est naturellement un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ -module via la composition des morphismes d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Ainsi, $\mathcal{F}_{k,r}$ est

un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module. On dispose de l'isomorphisme suivant de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \widetilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} &= \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \mathcal{F}_{k+1,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \end{aligned}$$

La structure de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules prolonge celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Cet isomorphisme est donc un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules. Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k = \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r} \end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules, c'est aussi un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules. On obtient donc l'isomorphisme souhaité de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules :

$$\mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \widetilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \simeq \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}.$$

□

On note $\text{Supp}(\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r})$ le support de $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ comme faisceau sur le schéma formel \mathfrak{X} . Puisque le $\mathcal{F}_{k,r}$ -module $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est cohérent, il s'agit d'un fermé de \mathfrak{X} . Pour $x \in \mathfrak{X}$, l'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \widetilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$ induit un isomorphisme

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \simeq (\mathcal{F}_{k,r})_x \otimes_{(\mathcal{F}_{k+1,r})_x} (\widetilde{\mathcal{M}}_{k+1,r})_x.$$

En particulier, $\text{Supp}(\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}) \subset \text{Supp}(\widetilde{\mathcal{M}}_{k+1,r})$. On note $\text{Supp}(\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})$ le support de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ en tant que faisceau sur le schéma \mathfrak{X} .

Lemme 3.12. *Le support de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ coïncide avec la fermeture de l'union croissante des supports des $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$:*

$$\text{Supp } \widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{X}$. On montre que $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x \neq 0$ si et seulement si $(\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour les niveaux de congruences k suffisamment grand. L'égalité des supports s'obtient ensuite en prenant la fermeture de l'union des supports des modules $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Il est clair que $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x \neq 0$ implique $(\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour k suffisamment grand. Comme $\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un module coadmissible, on a $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k+1,r} \otimes_{\mathcal{F}_{\infty,r}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$. Il en découle que

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \simeq (\mathcal{F}_{k+1,r})_x \otimes_{(\mathcal{F}_{\infty,r})_x} (\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x.$$

On en déduit que $(\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x = 0$ implique $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x = 0$. On a donc démontré l'équivalence souhaitée. □

Exemple 3.13. On suppose que la courbe formelle \mathfrak{X} est affine munie d'une coordonnée locale. Soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$. C'est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors P n'est jamais inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(\mathfrak{X})$ d'après le théorème 3.10. Ceci implique que P n'est pas inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$ pour k suffisamment grand. Ainsi, $\text{Supp}(\mathcal{F}_{k,r}/P) = \mathfrak{X}$ pour k assez grand. On en déduit que $\text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}) = \mathfrak{X}$. Prenons par exemple $P = \prod_{n \geq 1} (1 - a_n \cdot \varpi^n \cdot \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X})$ de norme un. Alors P s'écrit

$$P = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \varpi^{n(n+1)/2} \cdot \partial^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \varpi^{n((n+1)/2-k)} \cdot (\varpi^k \partial)^n$$

avec $\beta_n = \varepsilon_n \cdot a_1 \dots a_n + \alpha_n$ où $\varepsilon_n \in \mathcal{V}^{\times}$ et $|\alpha_n| < 1$. On a donc $|\beta_n| = 1$. On observe que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k$. De plus, pour que P soit inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$, on doit avoir d'après proposition 3.1 :

$$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad |\varpi|^{n((n+1)/2-k)} \cdot p^{(k-r)(k-n)} < |\varpi|^{k((k+1)/2-k)}.$$

Cette condition se réécrit

$$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad \frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + r(n-k) < 0.$$

Pour $n = 0$, on obtient $\frac{k(k+1)}{2} - rk < 0$. Ce n'est possible que pour $\frac{k+1}{2} < r$. Ainsi, dès que k est supérieur ou égale à $2r - 1$, l'opérateur P n'est jamais inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$ et $\text{Supp}(\mathcal{F}_{k,r}/P) = \mathfrak{X}$.

2. On suppose maintenant que $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d . Pour k suffisamment grand, disons $k \geq k_0$, $\overline{N}_k(P) = d$. Pour r assez grand, disons $r \geq r_0$, et pour $k \geq k'_0 = \max\{k_0, r_0\}$, P vérifie la condition 3 de la proposition 3.1 :

$$\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| \cdot p^{r(d-n)} < |a_d|.$$

Ainsi, pour tout entier $k \geq k'_0$ et pour tout entier $r \geq r_0$, P est inversible dans le microlocalisé $(\mathcal{F}_{k,r})_x$ si et seulement si son coefficient dominant a_d est inversible au voisinage de x toujours d'après proposition 3.1. Dans ce cas, $\text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}) = V(a_d)$. On en déduit que $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout entier $r \geq r_0$. Pour les autres valeurs de r , P n'est jamais inversible. Donc $\text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}) = \mathfrak{X}$ pour tout k dès que $r < r_0$ en prenant r_0 minimal. Ainsi, $\text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}) = \mathfrak{X}$ pour $r < r_0$.

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^*

On considère toujours un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour tous les entiers $k \geq r \geq 1$, les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, $\mathcal{F}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*$ et $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow$

\mathcal{M}_k induisent des morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*$. En effet, ces morphismes fournissent des morphismes de transition $\pi^{-1}(\mathcal{M}_{k+1}) \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$ et $\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$, où $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ désigne encore la projection canonique. On rappelle que

$$\mathcal{M}_{k,r}^* = \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_k).$$

Le morphisme $\mathcal{M}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*$ est alors induit par les trois morphismes de transition explicites ci-dessus. On définit maintenant un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^* à partir de \mathcal{M} en prenant la limite projective sur k des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$. Ce module va être coadmissible.

Définition 3.14. On pose $\mathcal{M}_r^* := \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{M}_{k,r}^*$.

Pour tout point (x, ξ) de $T^*\mathfrak{X}$, on vérifie que

$$(\mathcal{M}_r^*)_{(x,\xi)} \simeq \begin{cases} (\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x & \text{si } \xi \neq 0 \\ (\mathcal{M})_x & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Comme $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible et comme \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible, le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^* va être coadmissible.

Proposition 3.15. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^* est coadmissible.

Démonstration. On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. On dispose de l'isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}^*} \mathcal{M}_{k+1,r}^* &= \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}^*} \mathcal{F}_{k+1,r}^* \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_{k+1}) \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_{k+1}). \end{aligned}$$

Le morphisme de transition $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ induit un morphisme de transition $\pi^{-1}(\mathcal{M}_{k+1}) \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$ et donc un morphisme $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -linéaire

$$\mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}^*} \mathcal{M}_{k+1,r}^* \simeq \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_{k+1}) \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^* = \mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_k).$$

On vérifie ensuite que ce morphisme est un isomorphisme sur les germes. En effet, comme les modules \mathcal{M} et $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ sont coadmissibles, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}^*} \mathcal{M}_{k+1,r}^*)_{(x,\xi)} &\simeq \\ &\begin{cases} (\mathcal{F}_{k,r})_x \otimes_{(\mathcal{F}_{k+1,r})_x} (\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r})_x \simeq (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \simeq (\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} & \text{si } \xi \neq 0 \\ (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x \otimes_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})_x} (\mathcal{M}_{k+1})_x \simeq (\mathcal{M}_k)_x \simeq (\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{F}_{k,r}^* \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}^*} \mathcal{M}_{k+1,r}^* \simeq \mathcal{M}_{k,r}^*$. Autrement dit, le module \mathcal{M}_r^* est coadmissible. \square

Remarque 3.16. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. On suppose qu'il existe un morphisme de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ et un entier $r \geq 1$ tels que $\mathcal{M}_r^* \simeq \mathcal{N}_r^*$ pour le morphisme induit. Alors $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$. En effet, l'hypothèse $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ implique que $(\mathcal{M}_r^*)_{(x,0)} \simeq \mathcal{M}_x \simeq (\mathcal{N}_r^*)_{(x,0)} \simeq \mathcal{N}_x$ pour tout point x de \mathfrak{X} . Le morphisme initial $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est donc un isomorphisme de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles.

On a vu que la suite des supports $(\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_{k \geq r}$ est croissante. On montre de manière analogue que la suite des supports $(\text{Supp } \mathcal{M}_k)_{k \geq 1}$ est elle aussi croissante. On en déduit que la suite des supports des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est croissante. Soit $\text{Supp}(\mathcal{M}_r^*)$ le support de \mathcal{M}_r^* en tant que faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. On démontre exactement comme dans le lemme 3.12 le résultat suivant.

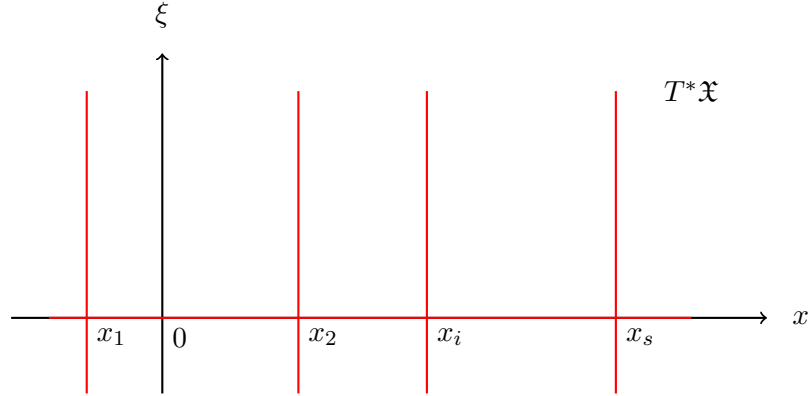
Lemme 3.17. Le support du module \mathcal{M}_r^* est égal à la fermeture de l'union croissante des supports des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$:

$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*} \subset T^*\mathfrak{X}.$$

Lorsque \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul, les supports $\text{Supp}(\mathcal{M}_r^*)$ sont des parties fermées coniques de $T^*\mathfrak{X}$. On en déduit que le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_r^*)$ est une aussi une partie fermée conique du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$.

Exemple 3.18. On suppose que la courbe formelle \mathfrak{X} est affine munie d'une coordonnée étale. On rappelle que T^*X et $T^*\mathfrak{X}$ ont le même espace topologique. On note (x, ξ) les coordonnées locales de $T^*\mathfrak{X}$ associées à la coordonnée étale de \mathfrak{X} . Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On considère le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$, $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} \simeq (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x$ si $\xi \neq 0$ et $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} \simeq (\mathcal{M}_k)_x$ si $\xi = 0$.

1. On suppose tout d'abord que $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d . Pour k assez grand, $\overline{N}_k(P) = d$. A partir de ce rang là et pour r suffisamment grand, le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ coïncide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$. En effet, pour r et k assez grand, le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est donné par



$\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$

Ici x_1, \dots, x_s sont les zéros du coefficient dominant a_d de P . Ce support admet la section nulle comme composante irréductible si et seulement si $d > 0$.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X}$. Si $(x, \xi) \in s(\mathfrak{X})$, alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x$. Si $d > 0$, alors P n'est jamais inversible dans $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x$. En effet, pour que P soit inversible dans $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x$, une condition nécessaire est d'avoir $\overline{N}_k(P) = 0$ d'après la proposition 2.3. Mais pour k suffisamment grand, $\overline{N}_k(P) = d > 0$. On en déduit que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x \neq 0$. Autrement dit, le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle. Les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ la contiennent aussi. Si $d = 0$, alors $P = a$ est une fonction de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/a$ est l'ensemble des zéros de a (en dehors de ces zéros, a est inversible dans l'algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$). Dans ce cas, le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ coupe la section nulle seulement en les zéros x_1, \dots, x_s de a . La section nulle n'est donc pas dans le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$. Lorsque $d = 0$, la section nulle n'est pas non plus une composante irréductible des variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k suffisamment grand.

On suppose maintenant que $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$. Alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x$. On a déjà vu dans l'exemple 3.13 que pour r et k assez grands, $(\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ si et seulement si x est un zéro du coefficient dominant a_d de P . Le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient ainsi les droites verticales d'équations $x = x_i$, où x_1, \dots, x_s sont les zéros de a_d , auxquelles on a retiré les points de la section nulle. Mais ces points de la section nulle sont compris dans le cas traité précédemment.

Les supports $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ ne dépendent donc plus de k pour k suffisamment grand et $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = \text{Car}(\mathcal{M}_k)$ en tant qu'espace topologique. On en déduit que pour r suffisamment grand, le support du module \mathcal{M}_r^* est donné par l'ensemble des points $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X}$ vérifiant $a_d(x) \cdot \xi^d = 0$.

2. On traite maintenant le cas d'un opérateur différentiel infini P . Pour $(x, 0) \in s(\mathfrak{X})$, on a $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x$. La suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante et diverge vers $+\infty$. Pour k suffisamment grand, P n'est donc pas inversible dans $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x$. Autrement dit, $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x \neq 0$. Ainsi, le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle pour k assez grand. Enfin, pour tout point $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$ et pour k suffisamment grand, $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ d'après l'exemple 3.13. On en déduit que $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = T^*\mathfrak{X}$ pour k suffisamment grand. Donc si P est infini, alors $\text{Supp}(\mathcal{M}_r^*) = T^*\mathfrak{X}$ quelque soit l'entier $r \in \mathbb{N}^*$.

Inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible et r un entier supérieur ou égale à un. Si $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 1$, alors $\mathcal{M} \neq 0$. Dans ce cas $\mathcal{M}_k \neq 0$ pour k assez grand. On a donc $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ pour k suffisamment grand d'après le corollaire 3.7 puisque $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*) \leq \dim(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 1$. On en déduit que les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k sont holonomes pour k suffisamment grand. En effet, d'après la proposition 3.5, $\text{Car} \mathcal{M}_k \subset \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ et donc $\dim(\text{Car} \mathcal{M}_k) \leq 1$. La réciproque est néanmoins fautive. Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k peuvent être tous holonomes pour tout niveau de congruence k , ie $\dim(\text{Car} \mathcal{M}_k) \leq 1$, tout en ayant $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 2$. C'est le cas par exemple pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ dès que P est un opérateur différentiel infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet, on a vu dans l'exemple 3.18 que $\text{Supp} \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$. Cependant, d'après la proposition 2.8, le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est holonome pour tout niveau de congruence k .

On déduit du corollaire 3.7 l'inégalité de Bernstein pour le support du $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible \mathcal{M}_r^* . On rappelle que son support vérifie l'égalité suivante

$$\text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*}.$$

Proposition 3.19 (Inégalité de Bernstein). *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*) \geq 1$.*

Le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} est noethérien. Ainsi, les supports des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On déduit le résultat suivant de la proposition 3.8.

Proposition 3.20. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 2$, alors $\text{Supp} \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$. Sinon $\dim(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 1$ et $\text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour k suffisamment grand. En particulier, les composantes irréductibles du support $\text{Supp} \mathcal{M}_r^*$ sont toutes de dimension un.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si la dimension du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ est deux, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ puisque le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ est irréductible. On suppose maintenant que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$. On a vu que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ pour k suffisamment grand. On ne considère maintenant que ces niveaux de congruences k . Le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Elles sont toutes de dimension un. En effet, si une composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ est réduite à un point, alors ce point appartient à l'un des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour k suffisamment grand. Mais les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sont toutes de dimension un d'après la proposition 3.8. Comme $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$, le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ contient cette composante de dimension un. Ainsi, ce point ne peut être une composante irréductible du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

Les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ et du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont donc toutes de dimension un. Pour une raison de dimension, les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sont des composantes irréductibles du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. On en déduit que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ à partir d'un certain niveau de congruence $k \geq r$. En effet, puisque le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, les supports sont nécessairement égaux à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand. \square

3.3 \mathcal{F}_∞^* -module associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible

Les morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r} \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}$ et $\text{id} : \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}^*$. Comme le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compact et comme les morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}^*$ sont localement injectifs, la limite inductive des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ définit un faisceau \mathcal{F}_∞^* sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$.

Définition 3.21. On définit un faisceau microlocalisé sur $T^*\mathfrak{X}$ par $\mathcal{F}_\infty^* := \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_\infty^*$.

Pour tout ouvert V du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$, on vérifie que

$$\mathcal{F}_\infty^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_\infty(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Pour tout entier $k \geq r$, on rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible. Pour $k \geq r+1$, on note $j_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r+1}$ le morphisme induit localement par les inclusions $\mathcal{F}_{k,r}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r+1}(U)$. Les morphismes

$$j_{k,r} \otimes \text{id} : \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} = \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$$

sont $\mathcal{F}_{k,r}$ -linéaires. Ils commutent avec les morphismes de transition. En effet, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} & \xrightarrow{j_{k,r} \otimes \text{id}} & \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \\
g_{k,r} \downarrow & & \downarrow g_{k,r+1} \\
\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} & \xrightarrow{j_{k+1,r} \otimes \text{id}} & \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r+1} \quad .
\end{array}$$

En passant à la limite projective sur $k \geq r+1$, on obtient un morphisme continu $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -linéaire $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} &= \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \\
&\simeq \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \\
&\simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}
\end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r+1}$ -modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r+1}$ -modules

$$\mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}.$$

On en déduit que $\text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}) \subset \text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})$. Donc

$$\text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}) \subset \text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}).$$

On note $\mathcal{F}_{\infty} := \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$. La limite inductive sur r des modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ pour les morphismes $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ est un préfaisceau $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty}$ de \mathcal{F}_{∞} -modules.

Soit toujours \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. De manière analogue, on définit pour les $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* des morphismes de transition induits par les morphismes $\mathcal{F}_{k,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{k,r+1}^*$ pour chaque niveau de congruence $k \geq r+1$. On observe pour tout point (x, ξ) du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ que le morphisme $(\mathcal{M}_r^*)_{(x,\xi)} \rightarrow (\mathcal{M}_{r+1}^*)_{(x,\xi)}$ correspond au morphisme

$$\begin{cases}
(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x \rightarrow (\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1})_x & \text{si } \xi \neq 0 \\
\text{id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} & \text{si } \xi = 0.
\end{cases}$$

Les inclusions $\text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}) \subset \text{Supp}(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})$ permettent d'obtenir les inclusions $\text{Supp}(\mathcal{M}_r^*) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{r+1}^*)$.

Définition 3.22.

1. On associe un \mathcal{F}_∞^* -module \mathcal{M}_∞^* à \mathcal{M} en prenant le faisceautisé du préfaisceau de \mathcal{F}_∞^* -modules $\varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{M}_r^*$.
2. On définit le support du module \mathcal{M}_∞^* comme l'intersection décroissante des supports des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* :

$$\text{Supp}(\mathcal{M}_\infty^*) := \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp}(\mathcal{M}_r^*).$$

Exemple 3.23. On reprend l'exemple 3.18 : \mathfrak{X} est affine et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour un opérateur $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r \geq 1$ d'après l'exemple 3.18. Ainsi, $\text{Supp}(\mathcal{M}_\infty^*) = T^*\mathfrak{X}$.
2. Si $P = \sum_{v=0}^d a_v \cdot \partial^v$ est un opérateur fini d'ordre d , alors il existe un rang r_0 tel que $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout $r \geq r_0$ et $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r < r_0$. Pour $r \geq r_0$, ces supports sont l'ensemble des abscisses des composantes irréductibles des variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k assez grand. L'exemple 3.18 montre que pour r suffisamment grand, le support de \mathcal{M}_r^* coïncide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ pour k suffisamment grand. Ainsi, le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_\infty^*) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp}(\mathcal{M}_r^*)$ redonne les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k suffisamment grand.

3.4 Variété caractéristique

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On rappelle que la suite des supports $(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*)_r$ est décroissante. L'objet qui nous intéresse est l'intersection de ces supports. C'est une partie fermée du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} . On définit la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} comme cette intersection. L'inégalité de Bernstein est vérifiée par cette variété caractéristique : $\mathcal{M} \neq 0$ si et seulement si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Définition 3.24. On définit la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} par

$$\text{Car}(\mathcal{M}) := \text{Supp}(\mathcal{M}_\infty^*) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp}(\mathcal{M}_r^*) \subset T^*\mathfrak{X}.$$

Exemple 3.25. On continue l'exemple 3.23. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine, que $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$.

1. Si $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d , alors pour k suffisamment grand,

$$\text{Car} \mathcal{M} = \left\{ (x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} : a_d(x) \cdot \xi^d = 0 \right\} = \text{Car}(\mathcal{M}_k).$$

2. Si P est un opérateur différentiel infini, alors $\text{Car} \mathcal{M} = T^*\mathfrak{X}$.

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 2$ pour tout $r \geq 1$, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ et donc $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon, $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un rang r_0 et $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \leq 1$. On montre dans la proposition suivante que $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$. Il s'agit de l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules codamissibles : un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Proposition 3.26. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Il existe un rang $r \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. Si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) = 2$, alors $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon, $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) = 1$. On rappelle que pour les niveaux de congruence $k \geq r$ suffisamment grands (dépendant de r), $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un certain rang r_0 . On ne considère maintenant que les rangs r plus grands que r_0 . Puisque $\text{Supp } \mathcal{M}_{r+1}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ et comme les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont toutes de dimension un, les composantes irréductibles de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r+1}^*$ sont des composantes irréductibles de $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

On suppose que $\dim\left(\bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*\right) = 0$. Soit L une composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$. Elle est de dimension un. Si L est une composante irréductible de tous les $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$, alors L est aussi une composante irréductible de $\text{Car}(\mathcal{M}) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. Cela contredit l'hypothèse $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) = 0$. On en déduit que L n'est plus une composante irréductible des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ pour r assez grand. Enfin, comme le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, aucune composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$ n'est une composante irréductible des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ pour un rang r suffisamment grand. Il en découle que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 0$. Alors $\mathcal{M} = 0$ d'après la proposition 3.20. Puisque $\mathcal{M} \neq 0$, on en déduit que $\dim(\text{Car } \mathcal{M}) = 1$ et que les composantes irréductibles de $\text{Car } \mathcal{M}$ sont les composantes irréductibles communes à tous les supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

Les supports des modules \mathcal{M}_r^* et la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ à partir d'un certain rang r . Enfin, on sait toujours d'après la proposition 3.20 que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour un niveau de congruence k suffisamment grand. \square

4 $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes

On démontre dans cette section quelques propriétés vérifiées par les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles holonomes. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est appelé holonome si sa variété caractéristique est de dimension inférieure ou égale à un. De manière équivalente, \mathcal{M} est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion intégrable. Cette caractérisation n'est vraie qu'en dimension un. Un tel module va être faiblement holonome. On démontre enfin que le dual d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome reste holonome.

4.1 Variété caractéristique

On introduit maintenant la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles holonomes. On démontre que cette catégorie est abélienne. De plus, elle contient les connexions intégrables et les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour P un opérateur différentiel fini.

Définition 4.1. *Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est dit holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) \leq 1$.*

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible holonome. D'après l'inégalité de Bernstein (proposition 3.26), ou bien $\mathcal{M} = 0$ et $\text{Car}(\mathcal{M}) = \emptyset$, ou bien $\mathcal{M} \neq 0$ et $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) = 1$. Par ailleurs, si $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, alors les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k sont tous holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k . En effet, $\text{Car } \mathcal{M}_k \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,k}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_k^* = \text{Car}(\mathcal{M})$ pour k suffisamment grand. Il en découle que $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \leq 1$.

Exemple 4.2. D'après l'exemple 3.25, le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ est holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini.

On établit dans la suite de cette partie que la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes est abélienne. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. La proposition 4.5 assure que $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. Il en résulte que le module \mathcal{N} est holonome si et seulement les modules \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont.

Cette égalité des supports n'est pas immédiate. En effet, bien que le morphisme de faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ soit probablement plat à gauche et à droite, il faut se passer du fait qu'une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents reste exacte après tensorisation par le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$. On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Par définition, \mathcal{M}_k , \mathcal{N}_k et \mathcal{L}_k sont des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents. La suite exacte précédente induit une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules pour tout niveau de congruence k :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0 .$$

On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$, $\tilde{\mathcal{N}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{N}_k$ et $\tilde{\mathcal{L}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{L}_k$. On dispose alors de la suite exacte suivante de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules cohérents

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r} \longrightarrow 0 .$$

Ainsi, on ne sait pas si la première flèche de la suite exacte de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents

$$\mathcal{M}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r}^* \longrightarrow 0$$

est injective. On en déduit seulement que

$$\text{Supp}(\mathcal{N}_{k,r}^*) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*).$$

Le module \mathcal{N} est donc holonome dès que \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont. Il reste à démontrer la réciproque. Pour cela, on utilise le fait qu'un module coadmissible \mathcal{M} est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion intégrable, ie $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset \mathfrak{X}$. Cette caractérisation des modules holonomes n'est vraie que lorsque \mathfrak{X} est de dimension un.

On identifie dans la suite le schéma \mathfrak{X} avec la section nulle $s : \mathfrak{X} \rightarrow T^*\mathfrak{X}$ du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} .

Définition 4.3. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On dit que \mathcal{M} est un module à connexion intégrable si $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$.*

On démontrera dans la section suivante que tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini. La proposition suivante fait le lien entre les modules à connexion intégrable et les modules holonomes.

Proposition 4.4. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion intégrable.*

Démonstration. On suppose dans un premier temps que \mathcal{M} est holonome. La variété caractéristique de \mathcal{M} a un nombre fini de composantes irréductibles verticales. On note U l'ouvert de \mathfrak{X} obtenu en ôtant à \mathfrak{X} les abscisses des composantes verticales de $\text{Car}(\mathcal{M})$. Par construction de U , on a $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. Autrement dit, $\mathcal{M}|_U$ est un module à connexion par définition.

Réciproquement, soit U un ouvert non vide de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion. Par définition, $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. Si \mathcal{M} n'est pas holonome, alors $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$ d'après la proposition 3.26. On aurait alors $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) = T^*U$. Cela contredit l'hypothèse $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. On en déduit que le module \mathcal{M} est holonome. \square

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un module à connexion intégrable : $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset |\mathfrak{X}| = |X|$. D'après l'inégalité de Bernstein, ou bien $\text{Car}(\mathcal{M}) = \emptyset$ et $\mathcal{M} = 0$, ou bien $\text{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. On suppose que le module \mathcal{M} est non nul. Il existe un rang $r \geq 1$ à partir duquel $\text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \text{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. Ainsi, pour tout entier $k \geq r$, $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. Puisque \mathcal{M} est non nul, les modules \mathcal{M}_k sont non nuls pour k suffisamment grand. L'hypothèse $\text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$ implique donc que $\text{Car}(\mathcal{M}_k) = X$ à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand. Autrement dit, il existe un niveau de congruence à partir duquel les modules \mathcal{M}_k sont tous des modules à connexion intégrable. On sait alors d'après le lemme 3.23 de [6] que le module \mathcal{M}_k est localement de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$, pour P un opérateur différentiel fini unitaire. Cette propriété sert dans la preuve de la proposition 4.5.

Proposition 4.5. *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Alors $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. En particulier, \mathcal{N} est holonome si et seulement si \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont aussi.*

Démonstration. On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Pour $k \geq r$, on rappelle qu'on dispose d'une suite exacte de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents

$$\mathcal{M}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r}^* \longrightarrow 0 \quad (1)$$

En prenant les supports de ces modules, on obtient l'inclusion

$$\text{Supp}(\mathcal{N}_{k,r}^*) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*) \quad (2)$$

On suppose dans un premier temps que les modules \mathcal{M} et \mathcal{L} sont tous deux holonomes. D'après la proposition 3.26, il existe un rang $r \geq 1$ pour lequel $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_r^*$, $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_r^*$ et $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_r^*$. De plus, il existe un niveau de congruence $k_r \geq r$ tel que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ et $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_r^* = \text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ pour tout entier $k \geq k_r$. La relation 2 montre que pour tout $k \geq k_r$,

$$\text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^* \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}).$$

On en déduit que

$$\text{Supp} \mathcal{N}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^*} \subset \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}).$$

Il en découle que

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp} \mathcal{N}_r^* \subset \text{Supp} \mathcal{N}_r^* \subset \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}).$$

On obtient donc l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{N}) \subset \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. Autrement dit, \mathcal{N} est holonome dès que \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont.

On suppose maintenant que le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{N} est holonome. Si $\mathcal{N} = 0$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{L} = 0$ et il n'y a rien à faire. On considère que $\mathcal{N} \neq 0$. On sait d'après la proposition 3.26 que $\dim \text{Car}(\mathcal{N}) = 1$ et que $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^*$ pour k et r suffisamment grands. Le support $\text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ est contenu dans la variété caractéristique $\text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^* = \text{Car}(\mathcal{N})$ d'après la suite exacte 1. Puisque ces inclusions sont vérifiées pour tous les niveaux de congruence k suffisamment grands, on a $\text{Supp}(\mathcal{L}_r^*) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$. Il en découle que $\text{Car}(\mathcal{L}) \subset \text{Supp}(\mathcal{L}_r^*) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$. Ainsi, la dimension de la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{L})$ est inférieure ou égale à la dimension de $\text{Car}(\mathcal{N})$. Autrement dit, \mathcal{L} est holonome car $\dim \text{Car}(\mathcal{N}) = 1$.

On note U l'ouvert de \mathfrak{X} obtenu en retirant les abscisses des composantes verticales de la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{N})$. On sait d'après la proposition 4.4 que $\text{Car}(\mathcal{N}|_U) \subset U$.

On note $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ la projection canonique. Soient toujours $r \geq 1$ et $k_r \geq r$ tels que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$, $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp } \mathcal{L}_r^* = \text{Supp } \mathcal{L}_{k,r}^*$ et $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp } \mathcal{N}_r^* = \text{Supp } \mathcal{N}_{k,r}^*$ pour tout entier $k \geq k_r$. En vertu de la proposition 3.5, on a

$$\text{Car}(\mathcal{L}_{k|U}) \subset \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*) = \text{Car}(\mathcal{L}_{|U}) \subset \text{Car}(\mathcal{N}_{|U}) \subset U.$$

Ainsi, pour tout entier $k \geq k_r$, $\mathcal{L}_{k|U}$ est un module à connexion intégrable. Le lemme 3.23 de [6] implique que localement, sur un voisinage $V \subset U$ de tout point donné de U , le module $\mathcal{L}_{k|V}$ est de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ pour un certain opérateur P_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$. On a

$$\text{Tor}_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{F}_{k,r|V}, \mathcal{L}_{k|V}) \simeq \mathcal{F}_{k,r|V} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{L}_{k|V} = \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V} \simeq \mathcal{F}_{k,r|V}/P_k.$$

On rappelle que $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(V)$ et que la norme de $|\cdot|_k$ de $\mathcal{E}_k(V)$ est multiplicative. Ainsi, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est intègre. La multiplication par P dans $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est donc injective. On en déduit que

$$\text{Tor}_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{F}_{k,r|V}, \mathcal{L}_{k|V}) = 0.$$

En effet, une résolution projective de $\tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V}$ en tant que $\mathcal{F}_{k,r|V}$ -module à gauche est donnée par la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k,r|V} \xrightarrow{\times P} \mathcal{F}_{k,r|V} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V} \simeq \mathcal{F}_{k,r|V}/P_k \longrightarrow 0.$$

On obtient finalement la suite exacte courte suivante de $\mathcal{F}_{k,r|U}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r|U} \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{k,r|U} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|U} \longrightarrow 0.$$

Il en résulte que la suite de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^* \longrightarrow 0$$

est exacte. Autrement dit, $\text{Car}(\mathcal{N}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*) = \text{Car}(\mathcal{M}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*) \cup \text{Car}(\mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$. Comme $\text{Car}(\mathcal{M}_{|U}) = \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$, $\text{Car}(\mathcal{L}_{|U}) = \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$ et $\text{Car}(\mathcal{N}_{|U}) = \text{Supp}(\mathcal{N}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$ pour tout entier $k \geq k_r$, il en découle que

$$\text{Car}(\mathcal{N}_{|U}) = \text{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}_{|U}) \subset U.$$

On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \subset U$ et donc \mathcal{M} est holonome d'après la proposition 4.4. De plus, l'égalité des variétés caractéristiques sur U implique que les composantes irréductibles verticales de $\text{Car}(\mathcal{M})$ et de $\text{Car}(\mathcal{L})$ sont parmi celles de $\text{Car}(\mathcal{N})$. Comme ces variétés caractéristiques coïncident au niveau de la section nulle, on obtient l'inclusion

$$\text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}) \subset \text{Car}(\mathcal{N}).$$

Enfin, puisque \mathcal{M} et \mathcal{L} sont holonomes, l'inclusion réciproque est vérifiée. Ainsi, dès que \mathcal{N} est holonome ou dès que \mathcal{L} et \mathcal{M} sont holonomes, on a

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}).$$

On a donc démontré que \mathcal{N} est holonome si et seulement si \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont aussi. Si \mathcal{N} n'est pas holonome et si \mathcal{M} ou \mathcal{L} n'est pas holonome, alors la proposition 3.26 implique que

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = T^*\mathfrak{X} = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}).$$

Autrement dit, l'égalité des supports tient dans tous les cas possibles! □

4.2 Propriétés

On rappelle qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est un module à connexion intégrable si $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$. On démontre dans cette section que les modules à connexion sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres de rang fini. Enfin, on établit une caractérisation cohomologique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion intégrable. Il a été vu dans la section précédente que $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset X$ pour un niveau de congruence k suffisamment grand. On sait alors, d'après le lemme 3.23 de [6], que chaque \mathcal{M}_k est localement un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini. On démontre que les rangs des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres \mathcal{M}_k ne dépendent pas de k . On en déduit ensuite que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini.

Lemme 4.6. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome tel que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. Alors pour k suffisamment grand, les \mathcal{M}_k sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres de même rang fini.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un rang pour lequel $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. On ne considère maintenant que les niveaux de congruences $k \geq r$ pour lesquels $\text{Car}(\mathcal{M}_k) = X$. Soit x un point de \mathfrak{X} . Quitte à étendre les scalaires par une extension finie de K , on peut supposer que x est un point κ -rationnel. D'après le lemme 3.23 de [6], il existe un voisinage ouvert U_k de x dans \mathfrak{X} et un opérateur différentiel P_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U_k)$ fini dominant tel que $\mathcal{M}_k|_{U_k} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k,k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Si d_k est l'ordre de P_k , alors \mathcal{M}_k est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang d_k . Il suffit de montrer que le degré d_k ne dépend pas de k . Puisque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible, on a

$$\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k.$$

Autrement dit,

$$\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k.$$

Le corollaire 2.16 de [6] implique que $\overline{N}_k(P_k) = \overline{N}_k(P_{k+1})$. De plus, on sait par le lemme 2.14 que $\overline{N}_{k+1}(P_{k+1}) \geq \overline{N}_k(P_{k+1})$. On en déduit que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ est croissante. Il faut prouver qu'elle est stationnaire.

On suppose par l'absurde que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ diverge vers l'infini. Soit $k \geq r$ un entier tel que $d_k = \overline{N}_k(P_k) > d_{k-1} = \overline{N}_{k-1}(P_k) = \overline{N}_{k-1}(P_{k-1})$. L'hypothèse

$$\text{Supp}((\mathcal{M}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)}) = \text{Supp}((\mathcal{F}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)}/P_k) \subset \text{Car}((\mathcal{M})_{|U_k}) = U_k$$

implique que P_k est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U_k)$. Autrement le support du module $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)}$ contiendrait des composantes irréductibles verticales. On écrit $P_k = \sum_{n=0}^{d_k} a_n \cdot \partial^n$, où $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U_k)$. On rappelle que $P_k \in (\mathcal{F}_{k,r}(U_k))^\times$ si et seulement si $\overline{N}_k(P_k) = \overline{n}_k(P_k) = d_k$ et

$$\forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - n)}.$$

Pour $n = d_{k-1}$, on obtient

$$|a_{d_{k-1}}| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - d_{k-1})}.$$

La condition $d_{k-1} < d_k$ implique

$$|a_{d_{k-1}}| > |a_{d_k}| \cdot p^{(k-1)(d_k - d_{k-1})}.$$

Comme la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ n'est pas bornée, on peut choisir $k > r+1$. Sous cette hypothèse, les deux inégalités précédentes sont incompatibles! On en déduit par l'absurde que la suite $(d_k)_k$ est stationnaire. \square

Ce lemme permet d'obtenir l'équivalence suivante : les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules à connexion intégrable sont exactement les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles qui sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres de rang fini.

Proposition 4.7. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est un module à connexion intégrable si et seulement si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini.*

Démonstration. On peut se ramener au cas où \mathfrak{X} est affine muni d'une coordonnée locale. On suppose tout d'abord que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre non nul de rang $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe des sections e_1, \dots, e_n de $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ telles que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \cdot e_n$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module. Les sections e_1, \dots, e_n engendrent aussi \mathcal{M} en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module : $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_1 + \dots + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_n$. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_i)$. Il suffit de montrer que $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_i) \subset \mathfrak{X}$ pour chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut donc se ramener au cas $n = 1$: \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang un engendré par une section e . Puisque $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \cdot e$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module, la famille $\{\partial^n \cdot e\}_{n \in \mathbb{N}}$ est liée sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Il existe donc un opérateur différentiel unitaire $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ tel que $P \cdot e = 0$. En particulier, P appartient à l'idéal annulateur de e et \mathcal{M} est sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P)$. Comme P est un opérateur fini de coefficient dominant unitaire, on a $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P) = \mathfrak{X}$. Donc $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e) \subset \mathfrak{X}$.

Réciproquement, on suppose que $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un module à connexion non nul. D'après le lemme 4.6, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un niveau de congruence $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que \mathcal{M}_k soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang n pour tout niveau de congruence $k \geq k_0$. Alors \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini n d'après le lemme 4.13 de [6]. \square

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion intégrable. On sait par la proposition 4.7 que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini $r \in \mathbb{N}$. Pour k assez grand, \mathcal{M}_k est aussi un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang r . D'après le lemme 3.24 et le corollaire 3.11 de [6], les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k n'ont qu'une multiplicité non nulle égale à r . On rappelle la proposition 4.15 de [6] : tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion intégrable \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module de longueur finie inférieure ou égale au rang $\text{rg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{M})$.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Si \mathcal{M} est holonome, alors les modules \mathcal{M}_k sont holonomes pour k suffisamment grand. En particulier, \mathcal{M} est faiblement holonome d'après la proposition 2.21. Son dual \mathcal{M}^d est un module faiblement holonome. On montre maintenant que si \mathcal{M} est holonome, alors son dual \mathcal{M}^d reste holonome.

Proposition 4.8. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est holonome si et seulement si \mathcal{M} est faiblement holonome et si son dual \mathcal{M}^d est holonome.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si \mathcal{M} est holonome, alors son dual \mathcal{M}^d l'est aussi. L'équivalence énoncée provient ensuite de l'isomorphisme de bidualité. On suppose donc que \mathcal{M} est un module holonome. D'après la proposition 4.4, il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion. On peut donc supposer que \mathfrak{X} est affine et que \mathcal{M} est un module à connexion de rang n . Toujours d'après la proposition 4.4, on peut se ramener à montrer que \mathcal{M}^d est aussi un module à connexion intégrable. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Comme \mathcal{M} est un module à connexion intégrable, les modules \mathcal{M}_k sont des modules à connexion intégrable de rang n pour k suffisamment grand. Il reste à prouver que

$$\mathcal{M}_k^d = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$$

est un module à connexion de rang n . D'après le lemme 3.23 de [6], on peut se ramener au cas où \mathfrak{X} est affine tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec P un opérateur différentiel fini unitaire. Il suffit de vérifier que \mathcal{M}_k^d est aussi de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P^t$ avec P^t fini unitaire. On considère la suite exacte courte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{\times P} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow 0.$$

Puisque $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$, on obtient la suite exacte courte suivante de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -

modules à droites en prenant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Comme les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sont intègres et $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec P non nul, on a $\mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Par ailleurs, $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. Le morphisme $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ ci dessus correspond via cette correspondance au morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{P \times} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ multiplication à gauche par P . La suite exacte précédente s'écrit donc

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{P \times} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \longrightarrow 0.$$

On en déduit que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \cdot \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. On écrit $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot (\omega^k \partial)^\ell \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$. On définit son adjoint formel P^t par $P^t = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \cdot (\omega^k \partial) \cdot a_\ell$. On vérifie alors que

$$\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P^t.$$

Comme P est unitaire d'ordre n , P^t est aussi unitaire d'ordre n . Ainsi, \mathcal{M}_k^d est un module à connexion de rang n . Enfin le lemme 4.13 de [6] implique que

$$\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right)$$

est un module à connexion de rang n . □

Références

- [1] Tomoyuki Abe. Rings of microdifferential operators for arithmetic \mathcal{D} -modules. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 131(1) :89–149, 2014.
- [2] Konstantin Ardakov, Andreas Bode, and Simon Wadsley. \widehat{D} -modules on rigid analytic spaces III : Weak holonomicity and operations. *Compositio Mathematica*, 157(12) :2553–2584, 2021.

- [3] Konstantin Ardakov and Simon J Wadsley. \widehat{D} -modules on rigid analytic spaces I. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019(747) :221–275, 2019.
- [4] Thomas Bitoun and Andreas Bode. Extending meromorphic connections to coadmissible \widehat{D} -modules. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2021(778) :97–118, 2021.
- [5] Raoul Hallopeau. Microlocalisation d’opérateurs différentiels arithmétiques sur une schéma formel lisse. working paper or preprint, August 2023.
- [6] Raoul Hallopeau. $\widehat{D}_k^{(0)}$ -modules holonomes sur une courbe formelle. working paper or preprint, May 2023.
- [7] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic structures for differential operators on formal schemes. *Nagoya Mathematical Journal*, 243 :157–204, 2021.
- [8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [9] Anne Virrion. Dualité locale et holonomie pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 128(1) :1–68, 2000.