



**HAL**  
open science

# Etude théorique et numérique sur l'étalement d'objets viscoplastiques bidimensionnels impactant une surface solide

Kindness Isukwem, Elie Hachem, Anselmo Soeiro Pereira

► **To cite this version:**

Kindness Isukwem, Elie Hachem, Anselmo Soeiro Pereira. Etude théorique et numérique sur l'étalement d'objets viscoplastiques bidimensionnels impactant une surface solide. Rhéologie, inPress. hal-04390672

**HAL Id: hal-04390672**

**<https://hal.science/hal-04390672v1>**

Submitted on 12 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude théorique et numérique sur l'étalement d'objets viscoplastiques bidimensionnels impactant une surface solide

Kindness Isukwem, Elie Hachem & Anselmo Pereira

*Mines Paris, Université PSL, Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF), UMR CNRS 7635, rue Claude Daunesse, 06904 Sophia-Antipolis, France*

**Résumé :** Cette étude théorique et numérique s'intéresse aux mécanismes physiques pilotant l'étalement d'objets viscoplastiques bidimensionnels millimétriques/centimétriques à la suite de leur impact sur une surface solide collante (absence de glissement). Nos simulations numériques bidimensionnelles sont basées sur une approche variationnelle multi-échelle consacrée aux écoulements multiphasiques non-newtoniens. Les résultats obtenus sont analysés à la lumière de bilans énergétiques et de lois d'échelles. Trois régimes d'étalement sont observés : le régime inertio-visqueux (résultant d'une compétition entre les contraintes inertielle et visqueuse) ; le régime inertio-plastique (émergeant d'un équilibre entre les contraintes inertielle et plastique) ; et le régime mixte inertio-visco-plastique (pour lequel les contraintes inertielle, visqueuse et plastique sont toutes les trois capitales). Ces résultats sont résumés sous la forme d'une courbe maîtresse donnant l'étalement maximal des objets viscoplastiques en fonction d'un seul nombre sans dimension appelé ici nombre d'impact.

**Mots-clés :** impact, objets bidimensionnels, viscoplasticité, fluide de Bingham, simulations numériques bidimensionnelles, lois d'échelles.

**[Abridged English version on last page]**

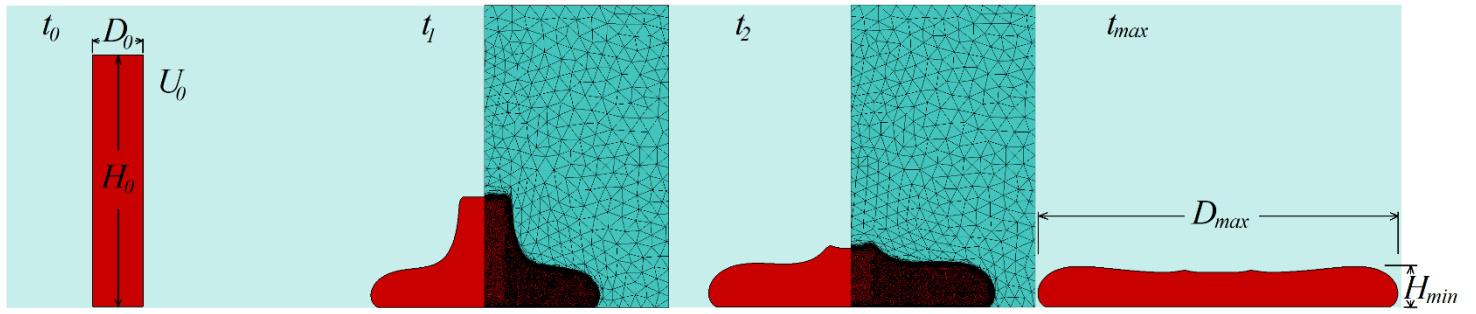
## 1. Introduction

L'étalement d'un fluide impactant sur une surface solide est un problème cardinal en rhéologie trouvant des applications dans plusieurs domaines [1,2]. Parmi ces applications, on compte la bio-impression de cellules, de tissus et d'organes via l'impact de gouttes, la décontamination nucléaire par pulvérisation, la pulvérisation de pesticides, le revêtement par pulvérisation, et la maîtrise d'incendies [1-6].

Certaines des applications mentionnées ci-dessus font appel à des fluides se comportant à la fois comme un solide parfait (non-déformable) sous une faible contrainte et un liquide non-newtonien au-delà d'une contrainte seuil  $\tau_0$ , c'est-à-dire, des fluides viscoplastiques [7-11]. Plus spécifiquement, des interactions microstructurales développées dans ces matériaux (forces attractives/répulsives intermoléculaires, frottement, pont capillaire etc.) sont traduites à l'échelle macroscopique à partir d'une contrainte seuil et une viscosité  $\eta$  dépendant de la vitesse de cisaillement associée à l'écoulement  $|\dot{\gamma}|$ . Cette viscosité est très souvent représentée par l'équation de Bingham, selon laquelle  $\eta = k + \tau_0/|\dot{\gamma}|$ , où  $k$  est la consistance du fluide [7-11]. La liste de matériaux pouvant se comporter comme un fluide de Bingham en

fonction de leur écoulement est vaste et inclut, entre autres, des suspensions minérales (bentonite, kaolin, noir de carbone, granulaires etc.), des suspensions organiques/gels (Carbopol, alginate, ketchup etc.), des émulsions (mayonnaise) et des mousses [12-18].

Contrairement aux fluides newtoniens, l'étalement de fluides viscoplastiques reste relativement peu étudié à l'heure actuelle [19-23]. En outre, la quasi-totalité des travaux consacrés aux impacts de fluides viscoplastiques reste focalisée sur des objets sphériques, alors que, dans la plupart des cas réalistes, ces objets sont non-sphériques du fait de la présence de la contrainte seuil (souvent la contrainte seuil dépasse la pression capillaire). Très récemment, Isukwem et co-auteurs [24] ont analysé l'impact de gouttes viscoplastiques prolates, prismatiques et cylindriques sur une surface solide collante (absence glissement), mettant en évidence le rôle pivot joué par la forme initiale de ces objets dans leur étalement. Cette première étude est restreinte aux objets tridimensionnels (3D) axisymétriques millimétriques/centimétriques. Elle devrait, par conséquent, être étendue à d'autres morphologies, dont celle des objets présentant une longueur beaucoup plus importante que leur épaisseur et hauteur, c'est-à-dire, des objets pouvant être considérés comme étant bidimensionnels (2D). Dans ce cadre, une



**Figure 1.** Simulation numérique multiphasique : impact et étalement typiques d'un objet bidimensionnel viscoplastique (en rouge) de hauteur initiale  $H_0$ , épaisseur initiale  $D_0$ , masse volumique  $\rho$ , consistance  $k$ , contrainte seuil  $\tau_0$ , tension de surface  $\sigma$  et vitesse d'impact  $U_0$  sur une surface solide collante. A la suite de son impact à l'instant  $t_0$ , l'objet s'étale jusqu'à atteindre un étalement maximal  $D_{max}$  et une hauteur minimale  $H_{min}$  à l'instant  $t_{max}$ . L'objet 2D et la surface solide sont tous les deux entourés par de l'air (en bleu). Le maillage (illustré par les lignes noires) est composé d'environ  $10^6$  d'éléments dont la taille minimale est de  $1\ \mu\text{m}$ .

des questions clés est la suivante : peut-on prédire l'étalement maximal atteint par un objet 2D viscoplastique à la suite de son impact sur une surface collante ? Nous y apporterons une réponse dans le présent travail.

Nous présentons ici une étude théorique et numérique consacrée aux mécanismes physiques pilotant l'étalement d'objets viscoplastiques bidimensionnels millimétriques/centimétriques à la suite de leur impact sur une surface solide collante. Nos simulations numériques bidimensionnelles sont basées sur une approche variationnelle multi-échelle consacrée aux écoulements multiphasiques non-newtoniens (chapitre 2). Les résultats obtenus sont analysés à la lumière de bilans énergétiques et de lois d'échelles (chapitre 3).

## 2. Approche théorique et numérique

Comme souligné précédemment, nous menons ici une étude théorique et numérique portant sur l'étalement d'objets viscoplastiques bidimensionnels (2D) millimétriques/centimétriques, à la suite de leur impact dans une surface solide, comme illustré sur la figure 1. Ces objets, ayant une hauteur initiale  $H_0$ , épaisseur initiale  $D_0$ , masse volumique  $\rho$ , consistance  $k$ , contrainte seuil  $\tau_0$  et tension de surface  $\sigma$ , tombent par gravité  $g$  impactant par la suite une surface solide collante à une vitesse  $U_0$  à l'instant  $t_0$ . Ils s'étaient ainsi sur la surface impactée pendant que leur énergie cinétique est à la fois convertie en énergie de surface et dissipée par des effets viscoplastiques, jusqu'à atteindre un étalement maximal  $D_{max}$  et une hauteur minimale  $H_{min}$  à un instant  $t_{max}$ . L'étalement est montré sur la figure 1 à quatre instants différents compris entre  $t_0$  (impact) et  $t_{max}$  (étalement maximal).

Les objets 2D et la surface solide sont entourés par de l'air dont la masse volumique est représentée par  $\rho_{air}$  et la viscosité est indiquée par  $\eta_{air}$ .

L'éventuel rétrécissement des objets induit par la tension de surface à la suite de l'étalement n'est pas analysé ici. Des impacts menant à des éclaboussures ne sont pas non plus considérés [5, 25].

Notre approche computationnelle est basée sur une librairie d'éléments finis massivement parallèle [CIMLIB-CFD ; 26] consacrée aux écoulements multiphasiques non-newtoniens [27-30]. Plus spécifiquement, on applique l'équation de conservation de la quantité de mouvement présentée ci-dessous à l'écoulement solénoïdal ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) décrit précédemment (voir figure 1) :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{g} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_{st}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $\nabla$  est l'opérateur gradient,  $\mathbf{g}$  est le vecteur pesanteur,  $p$  est la pression,  $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des extra-contraintes et  $\mathbf{f}_{st}$  représente la force associée à la tension de surface. Cette dernière est définie comme  $\mathbf{f}_{st} = -\sigma \kappa \Phi \mathbf{n}$ , où  $\sigma$  est la tension de surface,  $\kappa$  est la courbure de l'interface des objets 2D,  $\Phi$  est la fonction de Dirac et  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à l'interface des objets. En outre, le tenseur des extra-contraintes est défini comme  $\boldsymbol{\tau} = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , pour lequel  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  représente le tenseur vitesse de déformation  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ . Nos objets 2D sont décrits comme étant un fluide de Bingham dont la viscosité  $\eta$  est donnée par

$$\eta = k + \frac{\tau_0}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} \left( 1 - e^{-|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|/\dot{\gamma}_p} \right). \quad (2)$$

Comme observé, cette viscosité est couplée à la régularisation dite de Papanastasiou (indiquée entre parenthèses) afin d'éviter une divergence numérique lorsque la norme du tenseur vitesse de déformation  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$  tend vers zéro [31]. Grâce à ce terme de régularisation, la viscosité atteint un plateau maximal quand  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| < \dot{\gamma}_p$ , où  $\dot{\gamma}_p = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . Ce plateau maximal étant très élevé (entre  $10^5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  et  $10^{10} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ), l'objet se comporte comme un solide à l'échelle de temps caractéristique de nos écoulements ( $\sim 1\text{-}10\text{ms}$ ).

Les méthodes numériques utilisées ici sont basées sur une approche variationnelle multi-échelle (en anglais *Variational Multiscale Method* ou *VMS*) couplée à une méthode d'adaptation de maillages anisotropes. Les maillages utilisés sont composés d'environ  $10^6$  d'éléments dont la taille minimale est égale à  $1\mu\text{m}$  [voir les lignes noires sur la figure 1 ; 27-30]. L'évolution de l'interface des objets 2D au fil du temps est décrite en utilisant une fonction de type *Level-Set* [32].

Dans le présent travail, les objets 2D sont millimétriques/centimétriques. Leur facteur de forme  $H_0/D_0$  varie entre 1 et 7, tandis que leur vitesse à l'impact  $U_0$  est comprise entre 1m/s et 10m/s. En outre, nous explorons un large éventail de contraintes seuils :  $0.1\text{Pa} \leq \tau_0 \leq 10000\text{Pa}$ . La consistance et la masse volumique des objets 2D sont fixées à  $k = 1\text{Pa}\cdot\text{s}$  et  $\rho = 1000\text{kg}/\text{m}^3$ . La viscosité et la masse volumique de l'air sont fixées à  $\eta_{air} = 10^{-5}\text{Pa}\cdot\text{s}$  et  $\rho_{air} = 1\text{kg}/\text{m}^3$ . Enfin, une condition de non-glissement est imposée entre les objets 2D et la surface solide, tandis que des contraintes normales nulles sont imposées au niveau des parois du domaine de calcul [similaire à 24].

Les nombres sans dimension dominant le problème en question  $\Pi_i$  sont mis en évidence à partir du théorème de Vaschy-Buckingham [où simplement théorème- $\Pi$  ; 24] dont les variables physiques sont  $H_0$ ,  $D_0$ ,  $U_0$ ,  $\rho$ ,  $k$ ,  $\tau_0$ ,  $\sigma$  et  $g$ , tandis que les unités fondamentales sont la masse [kg], la distance [m] et le temps [s]. Cela nous mène à cinq quantités sans dimension importantes :

$$\Pi_1 = \frac{H_0}{D_0}, \quad (3)$$

$$\Pi_2 = \frac{k(U_0/D_0)}{\rho U_0^2}, \quad (4)$$

$$\Pi_3 = \frac{\tau_0}{\rho U_0^2}, \quad (5)$$

$$\Pi_4 = \frac{\rho g D_0}{\rho U_0^2}, \quad (6)$$

$$\Pi_5 = \frac{\sigma/D_0}{\rho U_0^2}, \quad (7)$$

où  $\Pi_2 = 1/\text{Re}$  (Re représentant le nombre de Reynolds),  $\Pi_3 = \text{Pl}$  (Pl dénotant le nombre plastique),  $\Pi_4 = 1/\text{Fr}$  (Fr indiquant le nombre de Froude) et  $\Pi_5 = 1/\text{We}$  (We étant le nombre de Weber). Nos objets viscoplastiques étant millimétriques et/ou centimétriques,  $\rho g D_0$  et  $\sigma/D_0$  deviennent négligeables face aux contraintes inertielle  $\rho U_0^2$ , visqueuse  $k(U_0/D_0)$  et seuil  $\tau_0$  (on montrera cela plus en détail dans le chapitre 3). Par conséquent, notre problème n'est dominé que par trois nombres sans dimension :

$$\frac{H_0}{D_0}, \quad (\text{facteur de forme}) \quad (8)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho U_0^2}{k(U_0/D_0)}, \quad (\text{nombre de Reynolds}) \quad (9)$$

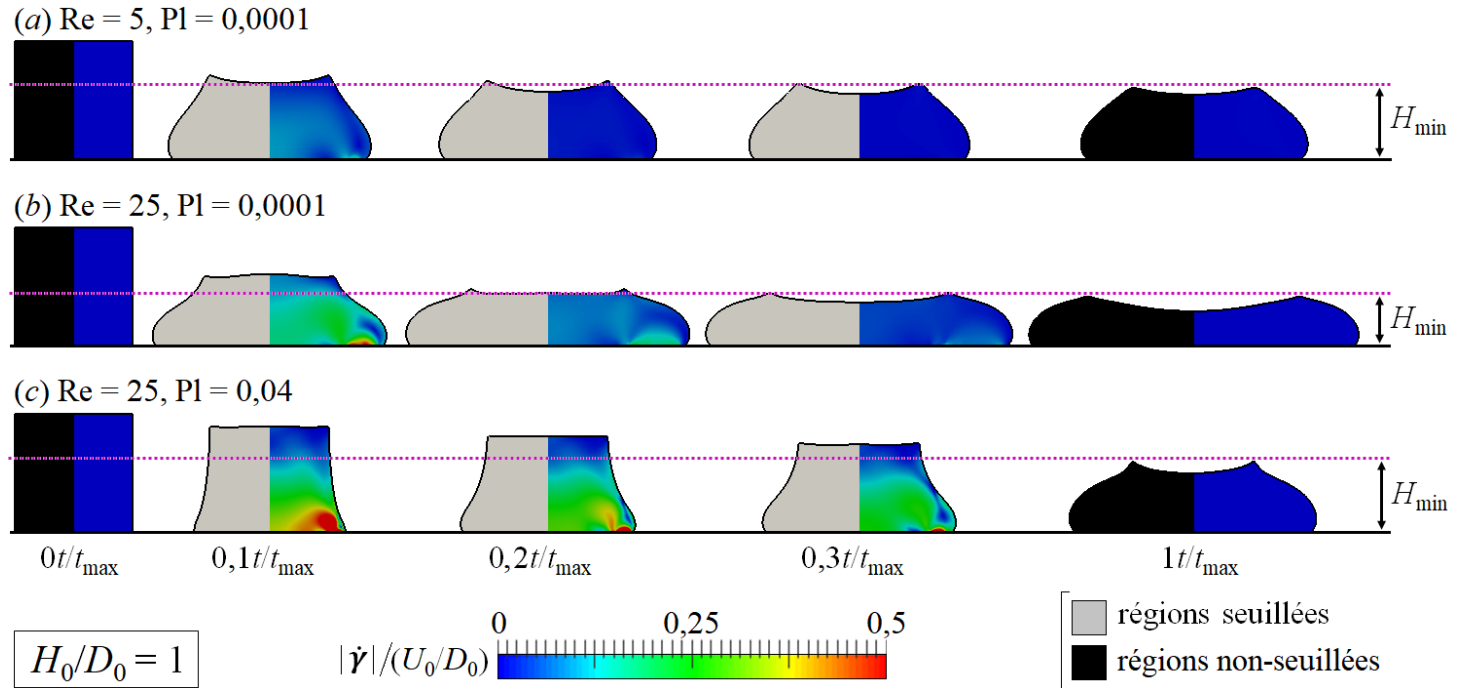
$$\text{Pl} = \frac{\tau_0}{\rho U_0^2}. \quad (\text{nombre plastique}) \quad (10)$$

Les effets de ces trois nombres sans dimension sur l'étalement des objets 2D sont mis en lumière dans le chapitre 3. Autrement dit, nos résultats sont présentés en fonction de ces trois nombres sans dimension.

### 3. Résultats et discussions

La figure 2 illustre l'étalement d'objets bidimensionnels dont  $H_0/D_0 = 1$ , à la suite de leur impact dans une surface solide à trois couples Re-Pl différents : Re = 5, Pl = 0,0001 (figure 2a) ; Re = 25, Pl = 0,0001 (figure 2b) ; et Re = 25, Pl = 0,04 (figure 2c). Chaque sous-figure est composée de cinq images illustrant l'expansion de l'objet 2D à cinq instants différents, de l'impact ( $t/t_{max} = 0$ ) à l'étalement maximal ( $t/t_{max} = 1$ ). Ces images montrent non seulement la morphologie instantanée des objets 2D, mais aussi les zones non-seuillées ( $|\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_0$  ; zones noires se comportant comme un solide parfait) et seuillées ( $|\boldsymbol{\tau}| > \tau_0$  ; zones grises se comportant comme un liquide non-newtonien) à gauche, ainsi que les contours de la vitesse de déformation  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$  normée par  $U_0/D_0$  à droite.

Comme observé en confrontant les figures 2(a) et 2(b), l'accentuation de la contrainte inertielle face à la contrainte visqueuse à partir de l'augmentation de Re conduit à un plus grand étalement relatif  $D_{max}/D_0$ . L'effet opposé se produit en majorant Pl, comme illustré en comparant les figures 2(b) et 2(c). Ces tendances sont également mises en évidence sur la figure 3, pour laquelle les expériences numériques de la figure 2 sont reprises pour des objets 2D avec  $H_0/D_0 = 5$ . Il est toutefois important de souligner que l'augmentation du facteur de forme mène à des niveaux d'étalements relatifs  $D_{max}/D_0$  plus accentués, ce qui peut être observé en comparant les figures 2 et 3. Cela confirme que l'étalement dépend non seulement de Re et Pl, mais aussi de  $H_0/D_0$ , comme annoncé dans le chapitre précédent. De plus, l'augmentation de  $H_0/D_0$  favorise le développement de régions non-seuillées, surtout dans les portions des objets 2D éloignées de la surface solide où la vitesse de déformation (et par conséquent le cisaillement) est peu prononcée (voir les figures 2c et 3c). Il est également important de préciser que les valeurs les plus prononcées de  $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|/(U_0/D_0)$  se développent à l'intérieur d'une couche dont l'épaisseur est comparable à  $H_{min}$ , comme signalé par les lignes pointillées magenta sur les figures 2 et 3. Autrement dit,  $H_{min}$  correspond approximativement à l'épaisseur de la couche de fluide non-newtonien (proche de la paroi) à l'intérieur de laquelle se concentre le mécanisme de dissipation énergétique via le cisaillement.



**Figure 2.** Etallement d'objets bidimensionnels dont  $H_0/D_0 = 1$ , à la suite de leur impact dans une surface solide à trois couples  $Re-Pl$  différents :  $Re = 5, Pl = 0,0001$  (figure 2a) ;  $Re = 25, Pl = 0,0001$  (figure 2b) ; et  $Re = 25, Pl = 0,04$  (figure 2c). Chaque sous-figure est composée de cinq images illustrant l'expansion de l'objet à cinq instants différents, de l'impact ( $t/t_{max} = 0$ ) à l'étalement maximal ( $t/t_{max} = 1$ ). Ces images montrent non seulement la morphologie instantanée des objets 2D, mais aussi les zones non-seuillées ( $|\tau| \leq \tau_0$ ; zones noires se comportant comme un solide parfait) et seuillées ( $|\tau| > \tau_0$ ; zones grises se comportant comme un liquide non-newtonien) à gauche, ainsi que les contours de la vitesse de déformation normée par  $U_0/D_0$  ( $|\dot{\gamma}|/(U_0/D_0)$ ) à droite.

Afin de mieux comprendre les mécanismes physiques pilotant l'étalement, on analyse sur la figure 4 le transfert d'énergie au cours de l'expansion des objets 2D impactant à trois couples  $Re-Pl$  différents pour deux valeurs de  $H_0/D_0$  :  $Re = 5, Pl = 0,0001$  et  $H_0/D_0 = 1$  (figure 4a) ;  $Re = 25, Pl = 0,04$  et  $H_0/D_0 = 1$  (figure 4b) ;  $Re = 20, Pl = 0,625$  et  $H_0/D_0 = 1$  (figure 4c) ;  $Re = 5, Pl = 0,0001$  et  $H_0/D_0 = 5$  (figure 4d) ;  $Re = 25, Pl = 0,04$  et  $H_0/D_0 = 5$  (figure 4e) ;  $Re = 20, Pl = 0,625$  et  $H_0/D_0 = 5$  (figure 4f). Les termes d'énergie (par unité de longueur) sont définis ci-après :

$$G = \int_V \rho g y dS, \quad (\text{énergie gravitationnelle}) \quad (11)$$

$$KE = \int_t \int_V \frac{\rho |u|^2}{2} dS dt, \quad (\text{énergie cinétique}) \quad (12)$$

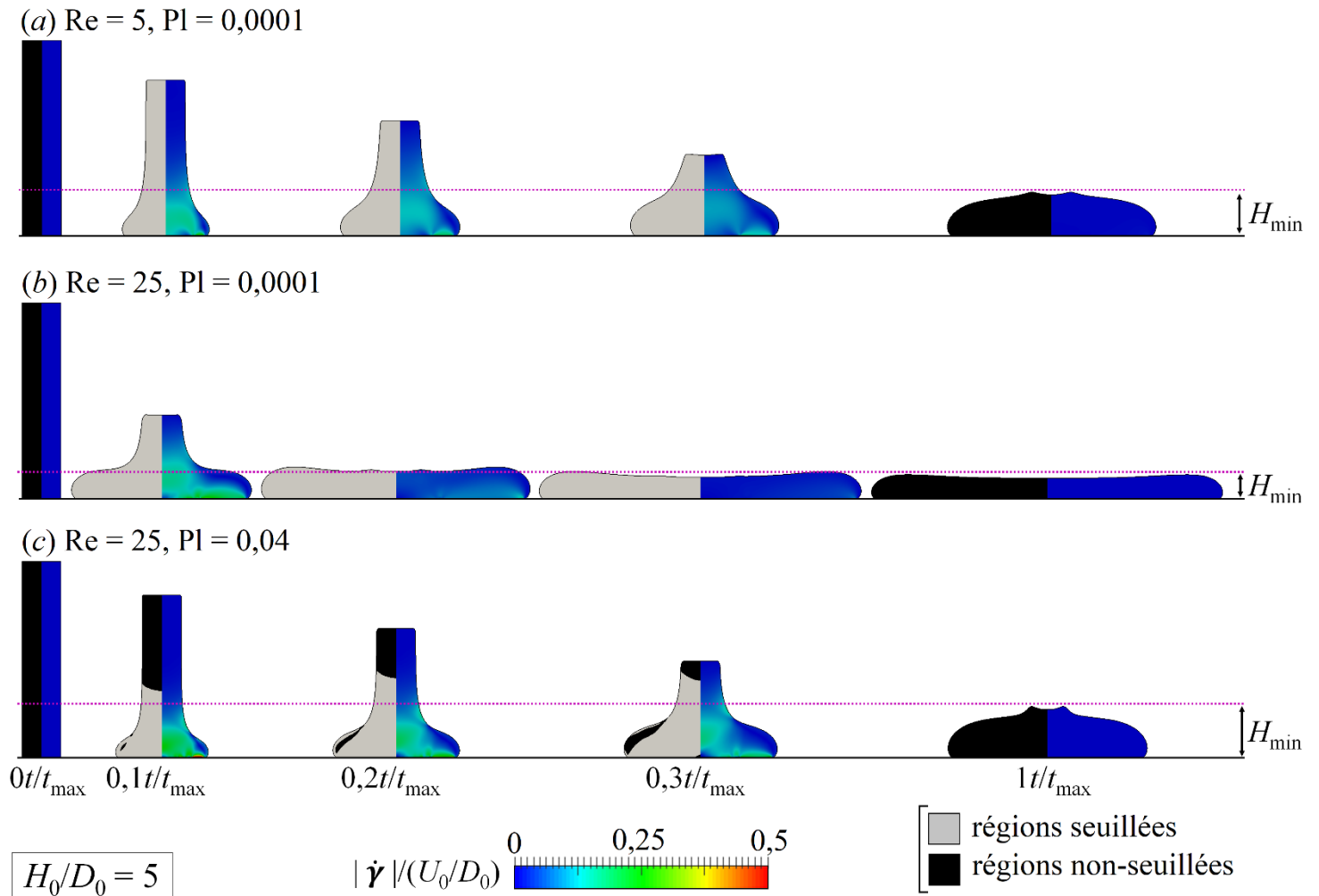
$$W = \int_V (k|\dot{\gamma}| + \tau_0)|\dot{\gamma}| dS, \quad (\text{énergie dissipée}) \quad (13)$$

$$SE = \int_S \sigma dl, \quad (\text{énergie de surface}) \quad (14)$$

où  $S$  et  $l$  dénotent respectivement la surface et la périmètre des objets 2D. L'énergie dissipée (par unité de longueur) est divisée entre les contributions visqueuse  $W_v = \int_V k|\dot{\gamma}|^2 dS$  et plastique  $W_{\tau_0} = \int_V \tau_0|\dot{\gamma}| dS$ . En outre, l'intégralité des termes énergétique est normée par l'énergie totale du système  $E_0$  [ $E_0 = G(t = t_0) + KE(t = t_0) + SE(t = t_0)$ ] et donnée en

pourcentage :  $G^* = G/E_0 \times 100[\%]$ ,  $KE^* = KE/E_0 \times 100[\%]$ ,  $W^* = W/E_0 \times 100[\%]$ ,  $W_v^* = W_v/E_0 \times 100[\%]$ ,  $W_{\tau_0}^* = W_{\tau_0}/E_0 \times 100[\%]$  et  $SE^* = SE/E_0 \times 100[\%]$ . Ces termes d'énergie sont enfin tracés en fonction du temps normé  $t/t_{max}$ .

Pour les deux valeurs de facteur de forme considérées sur la figure 4 ( $H_0/D_0 = 1$  sur la ligne supérieur et  $H_0/D_0 = 5$  sur la ligne inférieure), on observe les mêmes tendances : l'énergie cinétique des objets 2D est majoritairement dissipée au cours de leur étalement ( $G^*$  et  $SE^*$  sont tous les deux marginaux comparés aux autres termes d'énergie). A faible  $Pl$ , le mécanisme de dissipation est essentiellement dominé par  $W_v^*$  (figures 4a et 4d), i.e.,  $W_v^* > W_{\tau_0}^*$ . Néanmoins, lorsque  $Pl$  devient plus prononcé,  $W_{\tau_0}^*$  dépasse  $W_v^*$  et, par conséquent, la dissipation est pilotée par des effets plastiques. En comparant les figures 4(b) et 4(d), on peut encore observer que l'augmentation de  $H_0/D_0$  favorise l'accroissement de la contribution plastique à la dissipation, ce qui est en phase avec l'augmentation des zones seuillées induites par l'augmentation de  $Pl$  illustrée sur la figure 3. L'interface des régions non-seuillées et seuillées étant caractérisée par des faibles vitesses de déformations, elle est naturellement dominée par  $W_{\tau_0}^*$  (à noter que  $W_v^* \propto |\dot{\gamma}|^2$ , alors que  $W_{\tau_0}^* \propto |\dot{\gamma}|$ ). Ainsi, la croissance de zones seuillées via



**Figure 3.** Etallement d'objets bidimensionnels dont  $H_0/D_0 = 5$ , à la suite de leur impact dans une surface solide à trois couples Re-Pl différents : Re = 5, Pl = 0,0001 (figure 3a) ; Re = 25, Pl = 0,0001 (figure 3b) ; et Re = 25, Pl = 0,04 (figure 3c). Chaque sous-figure est composée de cinq images illustrant l'expansion de l'objet à cinq instants différents, de l'impact ( $t/t_{max} = 0$ ) à l'étalement maximal ( $t/t_{max} = 1$ ). Ces images montrent non seulement la morphologie instantanée des objets 2D, mais aussi les zones non-seuillées ( $|\tau| \leq \tau_0$ ; zones noires se comportant comme un solide parfait) et seuillées ( $|\tau| > \tau_0$ ; zones grises se comportant comme un liquide non-newtonien) à gauche, ainsi que les contours de la vitesse de déformation normée par  $U_0/D_0$  [ $|\dot{\gamma}|/(U_0/D_0)$ ] à droite.

l'augmentation de  $H_0/D_0$  engendre l'accentuation de  $W_{\tau_0}^*$  au détriment de  $W_v^*$ .

Les bilans énergétiques illustrés sur la figure 4 pointent vers l'existence d'au moins deux régimes d'étalement : le régime inertio-visqueux (figures 4a et 4d) ; et le régime inertio-plastique (figures 4c et 4f). Pour le régime inertio-visqueux l'énergie cinétique des objets 2D à l'impact [ $\sim \rho U_0^2 H_0 D_0$ ] est essentiellement dissipée par des effets visqueux [ $\sim k(U_0/H_{min})D_{max}^2$ , où  $H_{min}$  représente l'échelle dissipative mise en évidence par les figures 2 et 3]. Pour le régime inertio-plastique, l'énergie cinétique est dissipée par des effets plastiques ( $\sim \tau_0 D_{max}^2$ ). En égalisant les termes d'énergie mentionnés, sachant que  $H_{min} \sim H_0 D_0 / D_{max}$  par le principe de conservation de la masse, on trouve :

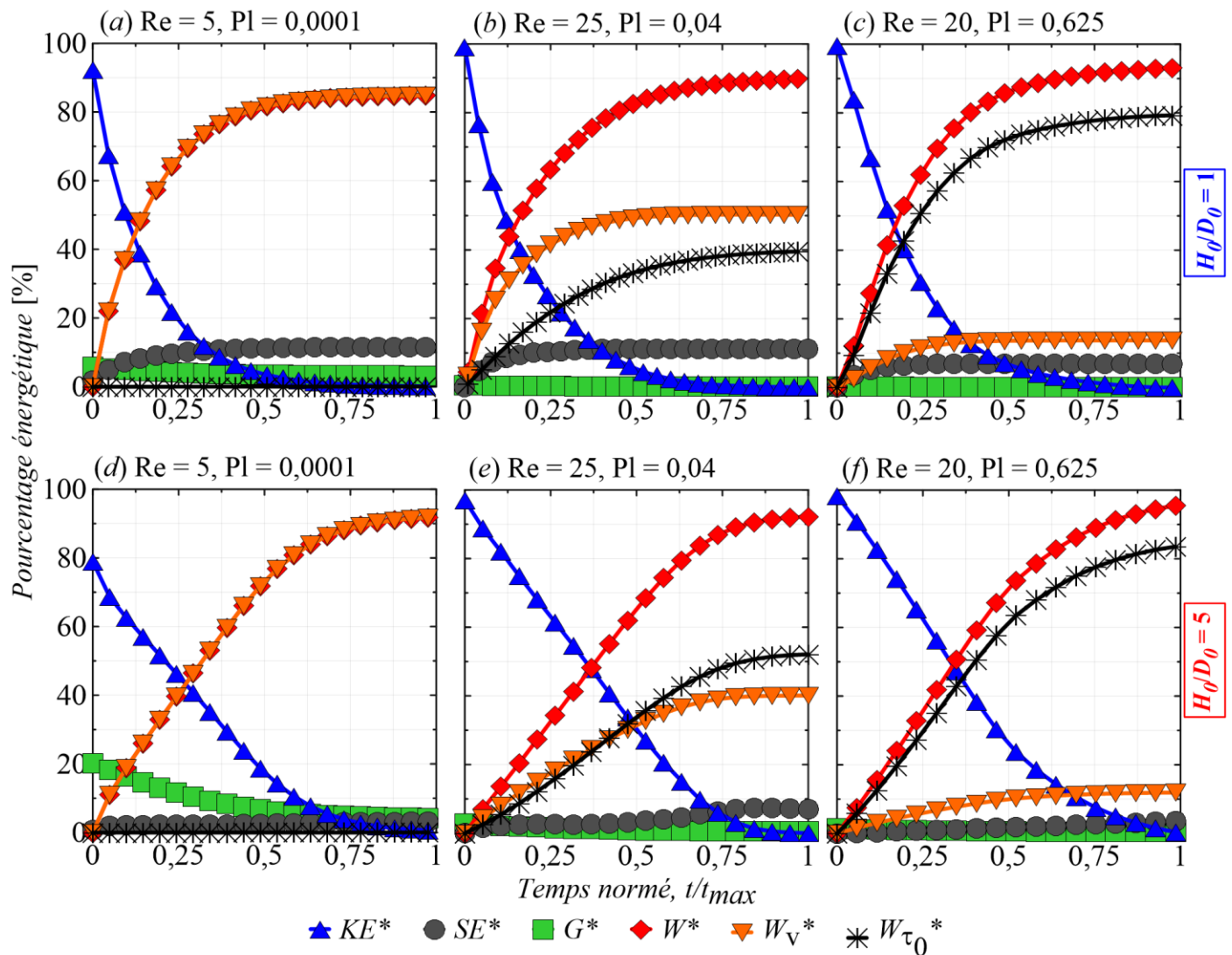
$$\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left[ \left( \frac{H_0}{D_0} \right)^2 \text{Re} \right]^{1/3}, \text{ (régime inertio-visqueux) } \quad (15)$$

$$\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left( \frac{H_0}{D_0} \frac{1}{\text{Pl}} \right)^{1/2}. \text{ (régime inertio-plastique) } \quad (16)$$

La transition entre ces deux régimes pourrait être trouvée en égalisation des équations 15 et 16, ce qui donne  $\left( \frac{1}{\text{Pl}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\text{Re}} \right)^{1/3} \left( \frac{H_0}{D_0} \right)^{-1/6} \sim 1$ . Ce nombre sans dimension est appelé ici nombre d'impact  $I = \left( \frac{1}{\text{Pl}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\text{Re}} \right)^{1/3} \left( \frac{H_0}{D_0} \right)^{-1/6}$ . Lorsque  $I \sim 1$ , la transition entre les régimes inertio-visqueux et inertio-plastique devrait émerger.

L'argument théorique développé ci-dessus est validé sur la figure 5(a) sur laquelle  $(D_{max}/D_0) / \left[ \left( \frac{H_0}{D_0} \right)^2 \text{Re} \right]^{1/3}$



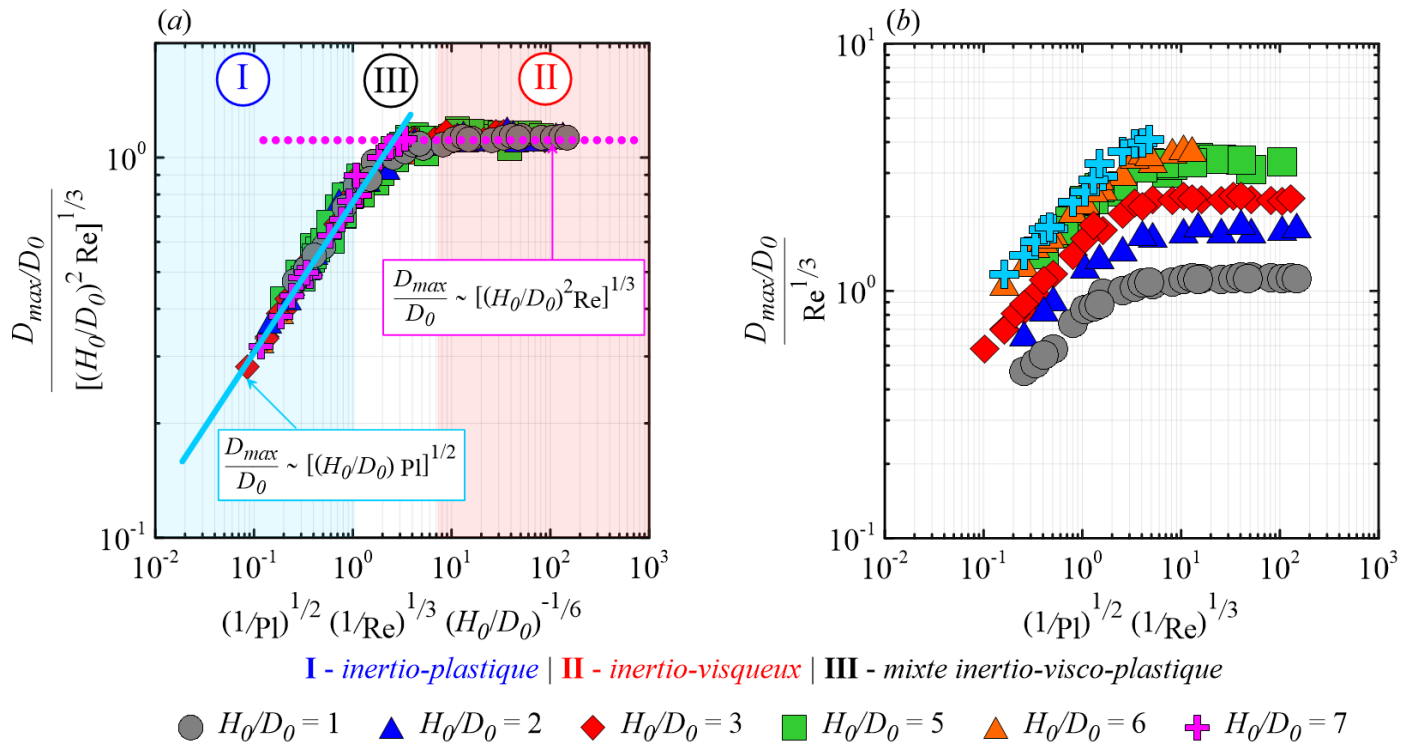


**Figure 4.** Pourcentage d'énergie au cours de l'expansion des objets 2D impactant à trois couples Re-PI différents pour deux valeurs de  $H_0/D_0$  :  $Re = 5, PI = 0,0001$  et  $H_0/D_0 = 1$  (figure 4a) ;  $Re = 25, PI = 0,04$  et  $H_0/D_0 = 1$  (figure 4b) ;  $Re = 20, PI = 0,625$  et  $H_0/D_0 = 1$  (figure 4c) ;  $Re = 5, PI = 0,0001$  et  $H_0/D_0 = 5$  (figure 4d) ;  $Re = 25, PI = 0,04$  et  $H_0/D_0 = 5$  (figure 4e) ;  $Re = 20, PI = 0,625$  et  $H_0/D_0 = 5$  (figure 4f).

est tracé en fonction du nombre d'impact  $I = \left(\frac{1}{PI}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{Re}\right)^{1/3} \left(\frac{H_0}{D_0}\right)^{-1/6}$ . Comme observé, les résultats numériques sont distribués tout au long d'une courbe maîtresse divisée en trois régions : la bleue, relative au régime inertio-plastique pour lequel  $\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left(\frac{H_0}{D_0} \frac{1}{PI}\right)^{1/2}$  (ligne droite noire) ; la rouge, liée au régime inertio-visqueux, selon lequel  $\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left[\left(\frac{H_0}{D_0}\right)^2 Re\right]^{1/3}$  (ligne pointillée noire) ; et enfin, la région blanche faisant référence à un régime mixte inertio-visco-plastique pour lequel les contraintes inertielle, visqueuse et seuil sont toutes les trois capitales (pour ce dernier,  $W_v^* \approx W_{\tau_0}$ , comme montré dans les figures 4b et 4e).

Enfin, pour montrer l'importance de la prise en compte des effets de facteur de forme sur l'étalement des objets

2D viscoplastiques, nous traçons sur la figure 5(b)  $(D_{max}/D_0)/Re^{1/3}$  ( $D_{max}$  sans la prise en compte du facteur de forme, i.e.,  $H_0/D_0 = 1$ ) en fonction de  $\left(\frac{1}{PI}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{Re}\right)^{1/3}$  (nombre d'impact sans la prise en compte du facteur de forme, i.e.,  $H_0/D_0 = 1$ ). Comme observé, dès que l'effet de forme est supprimé, les résultats ne se superposent plus. Autrement dit, tout comme l'inertie et la dissipation, la morphologie des objets viscoplastiques (e.g.,  $H_0/D_0$ ) joue un rôle cardinal dans leur étalement, ne pouvant pas ainsi être négligée. Ce constat est en phase avec les analyses expérimentales-numériques-théoriques récemment rapportées et consacrées à des gouttes viscoplastiques prolates, cylindriques et prismatiques [24]. Néanmoins, il est important de souligner que les lois d'échelles mises en lumière par le travail en question



**Figure 5.** (a)  $(D_{max}/D_0)/\left[\left(\frac{H_0}{D_0}\right)^2 \text{Re}\right]^{1/3}$  tracé en fonction du nombre d'impact  $\left(\frac{1}{\text{Pl}}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\text{Re}}\right)^{1/3} \left(\frac{H_0}{D_0}\right)^{-1/6}$ . Les résultats numériques sont distribués tout au long d'une courbe maîtresse divisée en trois régions : la bleue, relative au régime inertio-plastique ; la rouge, liée au régime inertio-visqueux ; et enfin, la région blanche faisant référence à un régime mixte inertio-visco-plastique. (b)  $(D_{max}/D_0)/\text{Re}^{1/3}$  tracé en fonction de  $\left(\frac{1}{\text{Pl}}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\text{Re}}\right)^{1/3}$ .

$\left[\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left[\left(\frac{H_0}{D_0}\right)^2 \text{Re}\right]^{1/5}$  pour le régime inertio-visqueux  
 et  $\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left(\frac{H_0}{D_0} \frac{1}{\text{Pl}}\right)^{1/3}$  pour le régime inertio-plastique]

sont différentes de celles présentées ici en conséquence du caractère bidimensionnel de nos objets. Cette différence nous permet donc de supposer l'existence d'un changement de lois d'échelles induite par le passage des objets 3D au 2D. Cette transition reste pourtant à être étudiée en profondeur dans de travaux futurs.

#### 4. Conclusions et perspectives

Nous avons présenté ici une étude théorique et numérique consacrée aux mécanismes physiques pilotant l'étalement d'objets viscoplastiques bidimensionnels millimétriques/centimétriques à la suite de leur impact sur une surface solide collante (absence de glissement). Nos simulations numériques bidimensionnelles ont été basées sur une approche variationnelle multi-échelle consacrée aux écoulements multiphasiques non-newtoniens. Les résultats obtenus ont été analysés à la lumière de bilans énergétiques et lois d'échelles.

Trois régimes d'étalement ont été mis en évidence : le régime inertio-visqueux, résultant d'une compétition entre les contraintes inertielle et visqueuse, pour lequel  $\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left[\left(\frac{H_0}{D_0}\right)^2 \text{Re}\right]^{1/3}$  ; le régime inertio-plastique, émergeant d'un équilibre entre les contraintes inertielle et plastique, pour lequel  $\frac{D_{max}}{D_0} \sim \left(\frac{H_0}{D_0} \frac{1}{\text{Pl}}\right)^{1/2}$  ; et le régime mixte inertio-visco-plastique, pour lequel les contraintes inertielle, visqueuse et plastique sont toutes les trois importantes. Ces résultats ont été synthétisés sous la forme d'une courbe maîtresse donnant l'étalement maximal des objets viscoplastiques en fonction d'un seul nombre sans dimension appelé nombre d'impact  $I = \left(\frac{1}{\text{Pl}}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\text{Re}}\right)^{1/3} \left(\frac{H_0}{D_0}\right)^{-1/6}$  reliant les trois paramètres sans dimension importants du problème, à savoir  $\text{Re}$ ,  $\text{Pl}$  et  $H_0/D_0$ .

Les lois échelles présentées ici étant différentes de celles associées à l'étalement de gouttes 3D prolates, cylindriques et prismatiques [24], il serait intéressant d'analyser dans de futurs travaux les mécanismes physiques dominant l'étalement lors du passage des objets 3D au 2D (transition 3D-2D). Enfin, il serait également intéressant d'étudier dans de futurs travaux



Rhéologie, Vol. XXX (2023)

l'effet d'autres composants non-newtoniens sur l'étalement, dont la thixotropie et l'élasticité.

## Remerciements

Nous remercions Edith Peuvrel-Disdier (Chargée de Recherche CNRS, Cemef, Mines Paris PSL) pour ces commentaires et suggestions fructueux lors de l'écriture de ce travail.

Nous remercions également les soutiens financiers qui nous ont été accordés par l'IdEx UCA<sup>JEDI</sup> (Université Côte d'Azur) et l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) à travers le programme 'Investissements d'Avenir' (ANR-10-IDEX-001-02 PSL) et le projet ANR JCJC INNpact. Enfin, nous remercions le Groupe Français de Rhéologie, grâce auquel Kindness Isukwem a pu présenter une partie des résultats figurant dans ce travail lors du dernier Congrès International de Rhéologie à Athènes (29 juillet - 4 août 2023).

## Références

- [1] Worthington, A. M. [On impact with a liquid surface](#). *Proceedings of the Royal Society of London* 34, 217-230 (1883)
- [2] Rein, M. [Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces](#). *Fluid Dynamics Research* 12, 61-93 (1993)
- [3] Yarin, A. L. 2006 [Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing ...](#). *Annual Review of Fluid Mechanics* 38, 159-192 (2006)
- [4] Andrade, R., Osorio, F. & Skurtys, O. [Drop impact behavior on food using spray coating: Fundamentals and applications](#). *Food Research International* 54, 397-405 (2013)
- [5] Josserand, C. & Thoroddsen, S. T. [Drop impact on a solid surface](#). *Annual Review of Fluid Mechanics* 48, 365-391 (2016)
- [6] Clanet, C., Beguin, C., Richard, D. & Quéré, D. [Maximal deformation of an impacting drop](#). *Journal of Fluid Mechanics* 517, 199208 (2004)
- [7] Balmforth, N.J., Frigaard, I. & Ovarlez, G. 2014 [Yielding to stress: recent developments in viscoplastic fluid mechanics](#). *Annual Review of Fluid Mechanics* 46, 121-146 (2014)
- [8] Valette, R., Pereira, A., Riber, S., Sardo, L., Larcher, A. & Hachem, E. [Viscoplastic dam-breaks](#). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 287, 1-2 (2021)
- [9] Thompson, R. L. & Soares, E. J. [Viscoplastic dimensionless numbers](#). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 238, 57 (2016)
- [10] Bingham, E., [An investigation of the law of plastic flows](#). *Bulletin of the Bureau of Standards* 13, 309-353 (1916)
- [11] Bingham, E. [Fluidity and plasticity](#). *Mcgraw-Hill Book Company* (1922)
- [12] Jalaal, M., Kemper, D. & Lohse, D. 2019 [Viscoplastic water entry](#). *Journal of Fluid Mechanics* 864, 596-613 (2019)
- [13] Coussot, P. [Rheometry of pastes, suspensions and granular materials](#). *Wiley Interscience* (2005)
- [14] Coussot, P. [Rheophysics of pastes: a review of microscopic modelling approaches](#). *Soft Matter* 3, 528-540 (2007)
- [15] Coussot, P. & Gaulard, F. [Gravity flow instability of viscoplastic materials: the ketchup drip](#). *Physical Review E* 72 (031409), 1-5 (2005)
- [16] Coussot, P., Roussel, N., Jarny, S. & Chanson, H. [Continuous or catastrophic solid-liquid transition in jammed systems](#). *Physics of Fluids* 17, 011704 (2005)
- [17] Guazzelli, E. & Pouliquen, O. [Rheology of dense granular suspensions](#). *Journal of Fluid Mechanics* 852, 1-61 (2018)
- [18] Cohen-Addad, S., Reinhard, H. & Pitois, O. [Flow in foams and flowing foams](#). *Annual Review of Fluid Mechanics* 45, 241-267 (2013)
- [19] Luu, L-H & Forterre, Y. [Drop impact of yield-stress fluids](#). *Journal of Fluid Mechanics* 632, 301-327 (2009)
- [20] Luu, L-H & Forterre, Y. [Giant drag reduction in complex fluid drops on rough hydrophobic surfaces](#). *Physical Review Letters* 110, 184501 (2014)
- [21] Blackwell, B. C., Deetjen, M. E., Gaudio, J. E. & Ewoldt, R. H. [Sticking and splashing in yield-stress fluid drop impacts on coated surfaces](#). *Physics of Fluids* 27, 043101 (2015)
- [22] Oishi, C. M., Thompson, R. L. & Martins, F. P. 2019 [Normal and oblique drop impact of yield stress fluids with thixotropic effects](#). *Journal of Fluid Mechanics* 876, 642-679 (2019)
- [23] Jørgensen, L., Forterre, Y. & Lhuissier, H. [Deformation upon impact of a concentrated suspension drop](#). *Journal of Fluid Mechanics* 896, 1-1 (2020)
- [24] Isukwem, K., Godefroid, J., Monteux, C., Bouttes, D., Castellani, R., Hachem, E., Valette, R. & Pereira, A. [The role of viscoplastic drop shape in impact](#). *Journal of Fluid Mechanics*, Acceptée (2023)
- [25] Peters, I. R., Xu, Q. & Jaeger, H. M. 2013 [Splashing onset in dense suspension droplets](#). *Physical Review Letters* 111, 028301 (2013)
- [26] Coupez, T. & Hachem, E. [Solution of high-Reynolds incompressible flow with stabilized finite element and adaptive anisotropic meshing](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 267, 65-85 (2013)
- [27] Riber, S., Valette, R., Mesri, Y. & Hachem, E. [Adaptive variational multiscale method for Bingham flows](#). *Computers and Fluids* 138, 51-60 (2016)
- [28] Valette, R., Hachem, E., Khalloufi, M., Pereira, A.S., Mackley, M.R. & Butler, S.A. [The effect of viscosity, yield stress, and surface tension on the deformation and breakup profiles of fluid filaments stretched at very high velocities](#). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 263, 130-139 (2019)

Rhéologie, Vol. XXX (2023)

[29] Pereira, A., Hachem, E. & Valette, R. [Inertia-dominated coiling instabilities of power-law fluids](#). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 282, 104321 (2020)

[30] Pereira, A., Larcher, A., Hachem, E. & Valette, R. [Capillary, viscous, and geometrical effects on the buckling of power-law fluid filaments under compression stresses](#). *Computers & Fluids* 190, 514-519 (2019)

[31] Papanastasiou, T.C. [Flows of materials with yield](#). *Journal of Rheology* 31, 385-404 (1987)

[32] Hachem, E., Khalloufi, M., Bruchon, J., Valette, R. & Mesri, Y. [Unified adaptive variational multiscale method for two phase compressible and incompressible flows](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 308, 238-255 (2016)

## Numerical and theoretical study on the spreading of viscoplastic bidimensional objects impacting a solid surface

Kindness Isukwem, Elie Hachem & Anselmo Pereira

*Mines Paris, Université PSL, Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF), UMR CNRS 7635, rue Claude Daunesse, 06904 Sophia-Antipolis, France*

**Abstract:** This theoretical and numerical study focuses on the physical mechanism driving the spreading of viscoplastic bidimensional (2D) millimetric/centimetric objects after they impact onto a solid surface under no-slip conditions. The bidimensional numerical simulations are based on a variational Multi-Scale approach devoted to multiphase non-Newtonian fluid flows. The obtained results are analysed in light of energy budgets and scaling laws. They show that, under negligible capillary effects, the impacting kinetic energy of the 2D objects is dissipated through viscoplastic effects during the spreading process, giving rise to three flow regimes: inertio-viscous; inertia-plastic; and mixed inertio-visco-plastic. These regimes are deeply affected by the initial aspect ratio of the object, which in turn reveals the possibility of using shape to control spreading. Lastly, the results are summarised in a two-dimensional diagram linking the object's maximum spreading with different spreading regimes through a single dimensionless parameter called impact number.

**Keyword:** impact, bidimensional object, viscoplasticity, Bingham fluid, bidimensional numerical simulations, scaling laws