



HAL
open science

Critère de divisibilité des nombres impairs non multiples de 5

Mohamed Algoni

► **To cite this version:**

Mohamed Algoni. Critère de divisibilité des nombres impairs non multiples de 5. 2024. hal-04388277v3

HAL Id: hal-04388277

<https://hal.science/hal-04388277v3>

Preprint submitted on 26 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Critère de divisibilité des nombres impairs non multiples de 5

MOHAMED Algoni

Université MARIEN NGOUABI, CONGO

*E-mail : mohamedalgoni99@gmail.com

Résumé

Dans cet article nous proposons un critère de divisibilité pour les nombres impairs non multiples de 5. Pour ce faire, nous introduirons deux concepts clés qui nous permettront de démontrer ce critère de divisibilité. Il s'agit du concept de "diviseur-cross" et du concept de "nombres de $\mathcal{M.A}$ ". L'article explore en détail la méthode de démonstration de ce critère en utilisant les concepts introduits.

Mots-Clés

Critère de divisibilité; Diviseur-cross; Nombres de $\mathcal{M.A}$.

I INTRODUCTION

Les critères de divisibilité sont des outils essentiels en mathématiques permettant de déterminer si un nombre est divisible par un autre. Dans ce document, nous focalisons notre étude sur les nombres impairs non multiples de 5. Notre objectif est de proposer un critère de divisibilité simple et efficace pour ces nombres. Pour ce faire, nous introduisons initialement deux concepts clés qui joueront un rôle essentiel dans la démonstration de notre critère de divisibilité : le concept de "diviseur-cross" et celui des "nombres de $\mathcal{M.A}$ ".

II DIVISEUR-CROSS

Soient A , B et C trois entiers strictement supérieurs à 1 tels que A ne divise ni B ni C . Il existe alors r et $r' \in \{1; 2; 3; 4; \dots, A - 1\}$ tels que $B \equiv r[A]$ et $C \equiv r'[A]$.

A est un diviseur-cross de B et de C si et seulement si A ne divise ni B ni C mais divise le produit $B \times C$.

Autrement dit :

$$A \text{ est un diviseur-cross de } B \text{ et } C \Leftrightarrow (B \equiv r[A]) \wedge (C \equiv r'[A]) \wedge (B \times C \equiv 0[A])$$

$$\text{avec } r \text{ et } r' \in \{1; 2; 3; \dots, A - 1\}$$

Exemple II.1:

10 est un diviseur-cross de 15 et 2, car il ne divise ni 15 ni 2 mais divise leur produit 30.

III NOMBRES DE $\mathcal{M}.A$

Soit $A \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ tel que $A = 10A' + a$ avec A' et a respectivement la dizaine et l'unité de A .
 A est un nombre de $\mathcal{M}.A$ si et seulement si $\forall r \in \{1; 2; 3; \dots; A - 1\}, 10r \not\equiv 0[A]$

Proposition 1:

Tous les entiers impairs qui ne sont pas multiples de 5, à l'exception de 1, sont des nombres de $\mathcal{M}.A$.

Démonstration. Supposons que A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.A$, Alors il existe un entier r élément de $\{1; 2; 3; \dots, A - 1\}$ tel que $10r \equiv 0[A]$

$$\begin{aligned} 10r &\equiv 0[A] \\ \implies 10r &= k \times A \quad \text{avec } k > 0, \text{ car } r > 0 \\ \implies r &= \frac{k \times A}{10} \end{aligned}$$

Or $A = 10A' + a$

$$\begin{aligned} \implies r &= \frac{k \times (10A' + a)}{10} \\ \implies r &= k \times A' + \frac{k \times a}{10} \quad (1) \end{aligned}$$

Alors r existe (i.e. $r \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si le terme $\frac{k \times a}{10}$ est un entier.

Déterminons a et k :

— Pour a :

a désigne l'unité de A , alors $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

— Pour k :

$$\begin{aligned} r &\in \{1; 2; \dots, A - 1\} \\ \implies r &\leq A - 1 \\ \implies r &< A \\ \implies 10r &< 10A \quad \text{avec } 10r = kA \\ \implies kA &< 10A \\ \implies k &< 10 \end{aligned}$$

On a aussi $k > 0$

$$\begin{aligned} \implies 0 &< k < 10 \\ \implies 1 &\leq k \leq 9 \end{aligned}$$

Alors $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Pour résumer jusqu'ici, en partant de l'hypothèse que A n'est pas un nombre de $\mathcal{M.A}$, nous mettons en évidence l'existence d'un entier r appartenant à l'ensemble $\{1; 2; 3; \dots, A - 1\}$ tel que $10r \equiv 0[A]$, où $r = k \times A' + \frac{k \times a}{10}$, avec $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Nous allons maintenant déterminer les nombres pour lesquels r existe, i.e. les nombres pour lesquels le terme $\frac{k \times a}{10}$ est un entier. Ces nombres ne seront pas considérés comme des nombres de $\mathcal{M.A}$. En revanche, les nombres pour lesquels r n'existe pas, i.e. lorsque le terme $\frac{k \times a}{10}$ n'est pas un entier, seront classés comme des nombres de $\mathcal{M.A}$. Pour ce faire, on procédera cas par cas, on déterminera le terme $\frac{k \times a}{10}$ pour chaque valeur de a et de k .

-Pour $a = 0$:

$A = 10A'$, Il s'agit des multiples de 10

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 0; 2 \times 0; 3 \times 0; 4 \times 0; 5 \times 0; 6 \times 0; 7 \times 0; 8 \times 0; 9 \times 0\}$$

$$\Rightarrow k \times a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \mathbb{N}$$

Alors r existe quelque soit k

Valeur de r :

$$r = k \times A' + \frac{k \times a}{10} \text{ avec } a = 0$$

$$\Rightarrow r = k \times A'$$

On a aussi $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$$\Rightarrow k \times A' \in \{A'; 2A'; 3A'; 4A'; 5A'; 6A'; 7A'; 8A'; 9A'\}$$

Ainsi, $r \in \{A'; 2A'; 3A'; 4A'; 5A'; 6A'; 7A'; 8A'; 9A'\}$

Donc aucun multiple de 10 n'est un nombre de $\mathcal{M.A}$ car r existe.

-Pour $a = 1$:

$A = 10A' + 1$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 1

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 1; 2 \times 1; 3 \times 1; 4 \times 1; 5 \times 1; 6 \times 1; 7 \times 1; 8 \times 1; 9 \times 1\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}; \frac{4}{10}; \frac{5}{10}; \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \notin \mathbb{N}$$

Alors r n'existe pas quelque soit k

Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 1 sont des nombres de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 2$:

$A = 10A' + 2$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 2

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 2; 2 \times 2; 3 \times 2; 4 \times 2; 5 \times 2; 6 \times 2; 7 \times 2; 8 \times 2; 9 \times 2\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1; \frac{6}{5}; \frac{7}{5}; \frac{8}{5}; \frac{9}{5} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \mathbb{N} \text{ pour } k = 5$$

Alors r existe pour $k = 5$

Valeur de r :

$$r = k \times A' + \frac{k \times a}{10} \text{ avec } a = 2 \text{ et } k = 5$$

$$\Rightarrow r = 5A' + 1$$

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 2 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 3$:

$A = 10A' + 3$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 3

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 3; 2 \times 3; 3 \times 3; 4 \times 3; 5 \times 3; 6 \times 3; 7 \times 3; 8 \times 3; 9 \times 3\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{3}{10}; \frac{6}{10}; \frac{9}{10}; \frac{12}{10}; \frac{15}{10}; \frac{18}{10}; \frac{21}{10}; \frac{24}{10}; \frac{27}{10} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \notin \mathbb{N}$$

Alors r n'existe pas quelque soit k

Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 3 sont des nombres de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 4$:

$A = 10A' + 4$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 4

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 4; 2 \times 4; 3 \times 4; 4 \times 4; 5 \times 4; 6 \times 4; 7 \times 4; 8 \times 4; 9 \times 4\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 2, \frac{12}{5}, \frac{14}{5}, \frac{16}{5}, \frac{18}{5} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \mathbb{N} \text{ pour } k = 5$$

Alors r existe pour $k = 5$

Valeur de r :

$$r = k \times A' + \frac{k \times a}{10} \text{ avec } a = 4 \text{ et } k = 5$$

$$\Rightarrow r = 5A' + 2$$

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 4 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 5$:

$A = 10A' + 5$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 5

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 5; 2 \times 5; 3 \times 5; 4 \times 5; 5 \times 5; 6 \times 5; 7 \times 5; 8 \times 5; 9 \times 5\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3; \frac{7}{2}; 4; \frac{9}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \mathbb{N} \text{ pour } k \in \{2; 4; 6; 8\}$$

Alors r existe pour $k \in \{2; 4; 6; 8\}$

Valeur de r :

$$r = k \times A' + \frac{k \times a}{10} \text{ avec } a = 5 \text{ et } k \in \{2; 4; 6; 8\}$$

$$\Rightarrow r \in \{2A' + 1; 4A' + 2; 6A' + 3; 8A' + 4\}$$

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 5 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 6$:

$A = 10A' + 6$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 6

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 6; 2 \times 6; 3 \times 6; 4 \times 6; 5 \times 6; 6 \times 6; 7 \times 6; 8 \times 6; 9 \times 6\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{12}{5}; 3; \frac{18}{5}, \frac{21}{5}, \frac{24}{5}, \frac{27}{5} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \mathbb{N} \text{ pour } k = 5$$

Alors r existe pour $k = 5$

Valeur de r :

$$r = k \times A' + \frac{k \times a}{10} \quad \text{avec } a = 6 \text{ et } k = 5$$

$$\Rightarrow r = 5A' + 3$$

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 6 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 7$:

$A = 10A' + 7$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 7

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 7; 2 \times 7; 3 \times 7; 4 \times 7; 5 \times 7; 6 \times 7; 7 \times 7; 8 \times 7; 9 \times 7\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{7}{10}, \frac{14}{10}, \frac{21}{10}, \frac{28}{10}, \frac{35}{10}, \frac{42}{10}, \frac{49}{10}, \frac{56}{10}, \frac{63}{10} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \notin \mathbb{N}$$

Alors r n'existe pas quelque soit k

Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 7 sont des nombres de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 8$:

$A = 10A' + 8$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 8

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 8; 2 \times 8; 3 \times 8; 4 \times 8; 5 \times 8; 6 \times 8; 7 \times 8; 8 \times 8; 9 \times 8\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}, 4, \frac{24}{5}, \frac{28}{5}, \frac{32}{5}, \frac{36}{5} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \mathbb{N} \quad \text{pour } k = 5$$

Alors r existe pour $k = 5$

Valeur de r :

$$r = k \times A' + \frac{k \times a}{10} \quad \text{avec } a = 8 \text{ et } k = 5$$

$$\Rightarrow r = 5A' + 4$$

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 8 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

-Pour $a = 9$:

$A = 10A' + 9$, Il s'agit des nombres ayant pour unité 9

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow k \times a \in \{1 \times 9; 2 \times 9; 3 \times 9; 4 \times 9; 5 \times 9; 6 \times 9; 7 \times 9; 8 \times 9; 9 \times 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \in \left\{ \frac{9}{10}, \frac{18}{10}, \frac{27}{10}, \frac{36}{10}, \frac{45}{10}, \frac{54}{10}, \frac{63}{10}, \frac{72}{10}, \frac{81}{10} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k \times a}{10} \notin \mathbb{N}$$

Alors r n'existe pas quelque soit k

Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 9 sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$.

Tableau récapitulatif

Valeur de A	Valeur de r tel que $10r \equiv 0[A]$	Qualificatif de A
$10A'$	$r \in \{A', 2A', 3A', 4A', 5A', 6A', 7A', 8A', 9A'\}$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 1$		A est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 2$	$r = 5A' + 1$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 3$		A est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 4$	$r = 5A' + 2$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 5$	$r \in \{2A' + 1, 4A' + 2, 6A' + 3, 8A' + 4\}$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 6$	$r = 5A' + 3$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 7$		A est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 8$	$r = 5A' + 4$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$
$10A' + 9$		A est un nombre de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$

On en conclut donc que tous les entiers impairs non multiples de 5 (excepté 1) sont des nombres de $\mathcal{M}.\mathcal{A}$. □

Lemme 1:

soient A et B deux entiers strictement positifs

$$(A \text{ est un nombre de } \mathcal{M}.\mathcal{A}) \Rightarrow (A \text{ n'est pas un diviseur-cross de } 10 \text{ et } B)$$

Démonstration. Nous démontrons la contraposée

$$(A \text{ est un diviseur-cross de } 10 \text{ et } B) \Rightarrow (A \text{ n'est pas un nombre de } \mathcal{M}.\mathcal{A})$$

Nous savons que :

$$A \text{ est un diviseur-cross de } 10 \text{ et } B \Leftrightarrow (B \equiv r[A]) \wedge (10 \equiv r'[A]) \wedge (10 \times B \equiv 0[A])$$

$$\text{avec } r \text{ et } r' \in \{1; 2; 3; 4; \dots, A - 1\}$$

$$\text{On a } B \equiv r[A]$$

$$\Rightarrow 10 \times B \equiv 10r[A]$$

$$\text{Or } 10 \times B \equiv 0[A]$$

$$\Rightarrow 10r \equiv 0[A]$$

On rappelle que A est un nombre de $\mathcal{M}.A \Leftrightarrow \forall r \in \{1; 2; 3; \dots, A - 1\} \quad 10r \not\equiv 0[A]$
 Or en partant de l'hypothèse que A est un diviseur-cross de 10 et B , on obtient $10r \equiv 0[A]$.
 Ce qui implique que A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.A$.

Alors

$$(A \text{ est un diviseur-cross de } 10 \text{ et } B) \Rightarrow (A \text{ n'est pas un nombre de } \mathcal{M}.A)$$

D'où

$$(A \text{ est un nombre de } \mathcal{M}.A) \Rightarrow (A \text{ n'est pas un diviseur-cross de } 10 \text{ et } B)$$

□

IV CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ

Soient a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 et $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ tels que a_n et b_m sont non nuls, et $n, m \in \mathbb{N}$. Définissons également $A = \sum_{i=0}^n (10^i \times a_i)$ et $B = \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)$ tels que A et B soient respectivement constitués de $(n + 1)$ chiffres et de $(m + 1)$ chiffres.

Nous définissons ensuite r_m comme le reste de la division euclidienne de 10^m par A .

$$10^m \equiv r_m[A]$$

$$\Rightarrow 10^m = r_m + A \times k \quad \text{avec } k \text{ un entier}$$

$$\Rightarrow r_m = 10^m - A \times k$$

4.1 Énoncé du Critère de divisibilité

Théorème 1:

$B \equiv 0[A] \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$ avec A un nombre de $\mathcal{M}.A$, b_j les chiffres de B et r_{j+1} le reste de la division euclidienne de 10^{j+1} par A .

Démonstration. $B \equiv 0[A] \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

Premier sens : $B \equiv 0[A] \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

On a $r_{j+1} = 10^{j+1} - A \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=0}^m ((10^{j+1} - A \times k) \times b_j) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=0}^m (10^{j+1} \times b_j - A \times k \times b_j) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=1}^m (10^{j+1} \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (k \times b_j) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= 10 \times \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (k \times b_j) \end{aligned}$$

Or $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) = B = k' \times A$ avec k' un entier positif.

Donc

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= 10 \times k' \times A - A \times \sum_{j=0}^m (k \times b_j) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= A \times (10k' - \sum_{j=0}^m (k \times b_j)) \end{aligned}$$

Posons $(10k' - \sum_{j=0}^m (k \times b_j)) = k''$.

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) = A \times k''$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A].$$

Ainsi $B \equiv 0[A] \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j)$.

Deuxième sens : $\sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A] \Rightarrow B \equiv 0[A]$

On a $r_{j+1} = 10^{j+1} - A \times k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=0}^m ((10^{j+1} - A \times k) \times b_j) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=0}^m (10^{j+1} \times b_j - A \times k \times b_j) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=1}^m (10^j \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (k \times b_j) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= 10 \times \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (k \times b_j) \end{aligned}$$

avec $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) = B$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) = 10 \times B - A \times \sum_{j=0}^m (k \times b_j)$$

Or $\sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

$$\Rightarrow 10 \times B - A \times \sum_{j=0}^m (k \times b_j) \equiv 0[A]$$

$$\Rightarrow 10 \times B \equiv 0[A]$$

Cette dernière ligne implique quatre(4) possibilités :

- $B \equiv 0[A]$
- $10 \equiv 0[A]$
- A divise B et 10
- A est un diviseur-cross de 10 et B

Examinons chaque cas :

- La deuxième possibilité est écartée .

Justification : A est un nombre de $\mathcal{M.A}$, il est donc impair et non multiple de 5. Or les diviseur de 10 sont 2, 5, et 10, donc A ne divise pas 10 .

- La troisième possibilité est écartée.

Justification : A ne divise pas 10, donc la proposition (A divise B et 10) est fausse .

- La quatrième possibilité est écartée .

Justification : Nous avons démontré au **lemme 1** que :

$$(A \text{ est un nombre de } \mathcal{M.A}) \Rightarrow (A \text{ n'est pas un diviseur-cross de } 10 \text{ et } B)$$

Donc il ne reste que la première possibilité.

Alors $10 \times B \equiv 0[A] \Rightarrow B \equiv 0[A]$

D'où $\sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A] \Rightarrow B \equiv 0[A]$

Ainsi $B \equiv 0[A] \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

□

Exemples

Pour $A = 7$ et $B = 147$:

On a $m = 2, b_2 = 1, b_1 = 4, b_0 = 7, r_3 = 6, r_2 = 2$ et $r_1 = 3$

147 est un multiple de 7 si et seulement si $\sum_{j=0}^2 (r_{j+1} \times b_j)$ l'est aussi

$$\sum_{j=0}^2 (r_{j+1} \times b_j) = r_3 \times b_2 + r_2 \times b_1 + r_1 \times b_0$$

$$\sum_{j=0}^2 (r_{j+1} \times b_j) = 6 \times 1 + 2 \times 4 + 3 \times 7$$

$$\sum_{j=0}^2 (r_{j+1} \times b_j) = 35 = 5 \times 7 \equiv 0[7]$$

Pour $A = 13$ et $B = 1898$:

On a $m = 3, b_3 = 1, b_2 = 8, b_1 = 9, b_0 = 8, r_4 = 3, r_3 = 12, r_2 = 9$ et $r_1 = 10$

1898 est un multiple de 13 si et seulement si $\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j)$ l'est aussi

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = r_4 \times b_3 + r_3 \times b_2 + r_2 \times b_1 + r_1 \times b_0$$

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = 3 \times 1 + 12 \times 8 + 9 \times 9 + 10 \times 8$$

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = 260 = 20 \times 13 \equiv 0[13]$$

Pour $A = 31$ et $B = 1426$:

On a $m = 3, b_3 = 1, b_2 = 4, b_1 = 2, b_0 = 6, r_4 = 18, r_3 = 8, r_2 = 7$ et $r_1 = 10$

1426 est un multiple de 31 si et seulement si $\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j)$ l'est aussi

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = r_4 \times b_3 + r_3 \times b_2 + r_2 \times b_1 + r_1 \times b_0$$

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = 18 \times 1 + 8 \times 4 + 7 \times 2 + 10 \times 6$$

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = 124 = 4 \times 31 \equiv 0[31]$$

Pour $A = 29$ et $B = 2407$:

On a $m = 3, b_3 = 2, b_2 = 4, b_1 = 0, b_0 = 7, r_4 = 24, r_3 = 14, r_2 = 13$ et $r_1 = 10$

2407 est un multiple de 29 si et seulement si $\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j)$ l'est aussi

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = r_4 \times b_3 + r_3 \times b_2 + r_2 \times b_1 + r_1 \times b_0$$

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = 24 \times 2 + 14 \times 4 + 13 \times 0 + 10 \times 7$$

$$\sum_{j=0}^3 (r_{j+1} \times b_j) = 174 = 6 \times 29 \equiv 0[29]$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dimitris Koukoulopoulos, Introduction à la théorie des nombres

[2] J.-P. Marco and L. Lazzarini, Mathématiques 11, Pearson, 2012.

[3] Valentin Vinoles, Cours élémentaire d'arithmétique, (2009).