



HAL
open science

Critère de divisibilité des nombres impairs non multiples de 5

Mohamed Algoni

► **To cite this version:**

Mohamed Algoni. Critère de divisibilité des nombres impairs non multiples de 5. 2024. hal-04388277v1

HAL Id: hal-04388277

<https://hal.science/hal-04388277v1>

Preprint submitted on 11 Jan 2024 (v1), last revised 26 Mar 2024 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Critère de divisibilité des nombres impairs non multiples de 5

MOHAMED Algoni

Université MARIEN NGOUABI, CONGO

*E-mail : mohamedalgoni99@gmail.com

Résumé

Cet article présente un nouveau critère de divisibilité pour les nombres impairs non multiples de 5. L'auteur a développé ce critère en utilisant deux concepts clés : le concept de "diviseur-cross" et le concept des "nombres de $\mathcal{M.A}$ ". L'article explore en détail la méthode de démonstration de ce critère en utilisant les concepts introduits.

Mots-Clés

Diviseur-cross; Nombres de $\mathcal{M.A}$

I INTRODUCTION

Dans cet article, nous présentons un nouveau critère de divisibilité pour les nombres impairs non multiples de 5. Les critères de divisibilité sont des outils essentiels en mathématiques permettant de déterminer si un nombre est divisible par un autre. Dans notre étude, nous nous concentrons spécifiquement sur les nombres impairs non multiples de 5, qui présentent des caractéristiques particulières. Notre objectif est de proposer un critère efficace et simple de divisibilité pour ce type de nombre. Pour ce faire, nous introduisons deux concepts clés : le concept de "diviseur-cross" et le concept des "nombres de $\mathcal{M.A}$ ". Ces concepts, que nous avons développés, jouent un rôle central dans notre critère de divisibilité. Dans la suite de cet article, nous expliquerons en détail notre méthode de démonstration de ce critère en utilisant ces concepts. Nous espérons que cette étude contribuera à une meilleure compréhension des divisibilités des nombres impairs et ouvrira de nouvelles possibilités de recherche dans ce domaine.

II DIVISEUR-CROSS

Soient A , B et C trois entiers strictement supérieurs à 1 tels que C ne divise ni A ni B . Il existe donc r et $r' \in \{1; 2; 3; 4; \dots, C - 1\}$ pour lesquels $A = C \times k + r$ et $B = C \times k' + r'$ avec $(k; k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

C est un diviseur-cross de A et de B si et seulement si C ne divise ni A ni B mais divise le produit $A \times B$.

Exemple II.1:

10 est un diviseur-cross de 15 et 2, car il ne divise ni 15 ni 2 mais divise plutôt leur produit.

III NOMBRES DE $\mathcal{M}.A$

Soit A un entier strictement supérieur à 2 tel que

$A = 10A' + a$, avec $A' \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, i.e. que a est l'unité de A .

A est un nombre de $\mathcal{M}.A$ si et seulement si $\forall r \in \{1; 2; 3; \dots, A - 1\} \quad 10r \not\equiv 0[A]$

-Recherche des nombres de $\mathcal{M}.A$

Supposons que A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}.A$

Alors $\exists r \in \{1; 2; 3; \dots, A - 1\} \mid 10r \equiv 0[A]$

$$10r \equiv 0[A]$$

$$\implies 10r = k \times A \quad \text{avec } k > 0 \quad \text{car } r \text{ est positif}$$

$$\implies r = \frac{k \times A}{10}$$

$$\text{Or } A = 10A' + a \implies r = k \times A' + \frac{k \times a}{10}$$

Donc pour que r soit un entier, il faudrait que le terme $\frac{k \times a}{10}$ soit un entier aussi .

r dépend donc en même temps du paramètre a et du paramètre k ; nous savons dans quel intervalle est définis a mais pas k .

Encadrons k :

$$r \leq A - 1$$

$$\implies 10r \leq 10A - 10 \quad \text{avec } 10r = kA$$

$$\implies kA \leq 10A - 10$$

$$\implies k \leq 10 - \frac{10}{A}$$

$$\implies k < 10$$

On a aussi $k > 0$

$$\implies 0 < k < 10$$

$$\implies 1 \leq k \leq 9$$

Alors $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

On cherche ensuite à déterminer les nombres pour lesquels il n'existe aucun $r \in \mathbb{N}^*$, ces nombres seront déclarés comme nombres de $\mathcal{M}.A$.

On rappelle aussi que $r = k \times A' + \frac{k \times a}{10}$

avec $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Pour $a = 0$: Il s'agit des multiples de 10

$$r = k \times A' \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow kA' \in \{A'; 2A'; 3A'; 4A'; 5A'; 6A'; 7A'; 8A'; 9A'\}$$

$$\text{Ainsi, } r \in \{A'; 2A'; 3A'; 4A'; 5A'; 6A'; 7A'; 8A'; 9A'\}$$

Donc aucun multiple de 10 n'est un nombre de $\mathcal{M.A}$ car r existe.

Pour $a = 1$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 1

$$r = k \times A' + \frac{k}{10} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{10} \in \left\{ \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}; \frac{4}{10}; \frac{5}{10}; \frac{6}{10}; \frac{7}{10}; \frac{8}{10}; \frac{9}{10} \right\}$$

On remarque que pour aucune valeur de k , r n'est entier, donc r n'existe pas.
Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 1 sont des nombres de $\mathcal{M.A}$.

Pour $a = 2$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 2

$$r = k \times A' + \frac{k}{5} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{5} \in \left\{ \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1; \frac{6}{5}; \frac{7}{5}; \frac{8}{5}; \frac{9}{5} \right\}$$

On remarque que r existe pour $k = 5$, et $r = 5A' + 1$.
Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 2 n'est un nombre de $\mathcal{M.A}$.

Pour $a = 3$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 3

$$r = k \times A' + \frac{3k}{10}$$

$$\text{Or } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{3k}{10} \in \left\{ \frac{3}{10}; \frac{6}{10}; \frac{9}{10}; \frac{12}{10}; \frac{15}{10}; \frac{18}{10}; \frac{21}{10}; \frac{24}{10}; \frac{27}{10} \right\}$$

On remarque que pour aucune valeur de k , r n'est entier, donc r n'existe pas.
Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 3 sont des nombres de $\mathcal{M.A}$.

Pour $a = 4$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 4

$$r = k \times A' + \frac{2k}{5} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{2k}{5} \in \left\{ \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}; 2; \frac{12}{5}; \frac{14}{5}; \frac{16}{5}; \frac{18}{5} \right\}$$

On remarque que r existe pour $k = 5$ et $r = 5A' + 2$.

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 4 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

Pour $a = 5$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 5

$$r = k \times A' + \frac{k}{2} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3; \frac{7}{2}; 4; \frac{9}{2} \right\}$$

On remarque que r existe pour $k \in \{2; 4; 6; 8\}$ et $r \in \{2A' + 1; 4A' + 2; 6A' + 3; 8A' + 4\}$.

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 5 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

Pour $a = 6$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 6

$$r = k \times A' + \frac{3k}{5} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{3k}{5} \in \left\{ \frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \frac{9}{5}; \frac{12}{5}; 3; \frac{18}{5}; \frac{21}{5}; \frac{24}{5}; \frac{27}{5} \right\}$$

On remarque que r existe pour $k = 5$ et $r = 5A' + 3$.

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 6 n'est un nombre de $\mathcal{M.A.}$

Pour $a = 7$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 7

$$r = k \times A' + \frac{7k}{10} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{7k}{10} \in \left\{ \frac{7}{10}; \frac{14}{10}; \frac{21}{10}; \frac{28}{10}; \frac{35}{10}; \frac{42}{10}; \frac{49}{10}; \frac{56}{10}; \frac{63}{10} \right\}.$$

On remarque que pour aucune valeur de k , r n'est entier, donc r n'existe pas.

Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 7 sont des nombres de $\mathcal{M.A.}$

Pour $a = 8$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 8

$$r = k \times A' + \frac{4k}{5} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{4k}{5} \in \left\{ \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \frac{12}{5}; \frac{16}{5}; 4; \frac{24}{5}; \frac{28}{5}; \frac{32}{5}; \frac{36}{5} \right\}$$

On remarque que r existe pour $k = 5$ et $r = 5A' + 4$.

Ainsi, aucun nombre ayant pour unité 8 n'est un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$.

Pour $a = 9$: Il s'agit des nombres ayant pour unité 9

$$r = k \times A' + \frac{9k}{10} \text{ avec } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\Rightarrow \frac{9k}{10} \in \left\{ \frac{9}{10}; \frac{18}{10}; \frac{27}{10}; \frac{36}{10}; \frac{45}{10}; \frac{54}{10}; \frac{63}{10}; \frac{72}{10}; \frac{81}{10} \right\}$$

On remarque que pour aucune valeur de k , r n'est entier, donc r n'existe pas.

Ainsi, tous les nombres ayant pour unité 9 sont des nombres de $\mathcal{M}\mathcal{A}$.

On en conclut donc que tous les entiers impairs non multiples de 5 (excepté 1) sont des nombres de $\mathcal{M}\mathcal{A}$.

Tableau récapitulatif

Valeur de A	Valeur du reste pour lequel $10r \equiv 0[A]$	Nature de A
$10A'$	$r \in \{A'; 2A'; 3A'; 4A'; 5A'; 6A'; 7A'; 8A'; 9A'\}$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 1$		A est un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 2$	$r = 5A' + 1$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 3$		A est un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 4$	$r = 5A' + 2$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 5$	$r \in \{2A' + 1; 4A' + 2; 6A' + 3; 8A' + 4\}$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 6$	$r = 5A' + 3$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 7$		A est un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 8$	$r = 5A' + 4$	A n'est pas un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$
$10A' + 9$		A est un nombre de $\mathcal{M}\mathcal{A}$

IV CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ

Soient $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ avec a_n non nul et $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 \in \mathbb{Z}$ avec n et $m \in \mathbb{N}$; prenons aussi $A = \sum_{i=0}^n (10^i \times a_i) = \sum_{i=1}^{n+1} (10^{i-1} \times a_{i-1})$ tel que A soit constitué de $(n+1)$ chiffre(s). On définit aussi $r_m = 10^m - A \times \lfloor \frac{10^m}{A} \rfloor$ comme le reste de la division euclidienne de 10^m par A .

Théorème 1:

$$\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A] \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A] \quad \text{avec } A \text{ un nombre de } \mathcal{M.A.}$$

Démonstration. $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A] \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$ avec A un nombre de $\mathcal{M.A.}$

-Premier sens : $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A] \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

On a $r_j = 10^j - A \times \lfloor \frac{10^j}{A} \rfloor$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=0}^m [(10^{j+1} - A \times \lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor) \times b_j] \\ &= \sum_{j=0}^m (10^{j+1} \times b_j - A \times \lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \\ &= \sum_{j=1}^m (10^j \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \\ &= 10 \times \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \end{aligned}$$

Or $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) = k \times A$ avec k est un entier positif. Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= 10 \times k \times A - A \times \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \\ &= A \times (10k - \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j)) \end{aligned}$$

Posons $(10k - \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j)) = k'$

Alors $\sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) = A \times k'$.

Donc $\sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

Ainsi $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A] \Rightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

-Deuxième sens : $\sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A] \Rightarrow \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A]$

On a $r_j = 10^j - A \times \lfloor \frac{10^j}{A} \rfloor$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) &= \sum_{j=0}^m [(10^{j+1} - A \times \lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor) \times b_j] \\ &= \sum_{j=0}^m (10^{j+1} \times b_j - A \times \lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \\ &= \sum_{j=1}^m (10^{j+1} \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \\ &= 10 \times \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \end{aligned}$$

Or $\sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A]$

$$\Rightarrow 10 \times \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) - A \times \sum_{j=0}^m (\lfloor \frac{10^{j+1}}{A} \rfloor \times b_j) \equiv 0[A]$$

$$\Rightarrow 10 \times \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A]$$

Maintenant, examinons les quatre (4) cas possibles :

- $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A]$
- $10 \equiv 0[A]$
- A divise $\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)$ et 10
- A est un diviseur-cross de 10 et $|\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)|$

Nous cherchons ensuite le cas qui convient :

- Le deuxième cas est écarté.

Justification : A est un nombre de $\mathcal{M.A}$, donc il est différent de 2, 5, et 10.

-Le troisième cas est écarté.

Justification : car A ne divise pas 10.

-Le quatrième cas est écarté.

Justification : on cherche à démontrer que A n'est pas un diviseur-cross de 10 et B .

Supposons par absurde que A est un diviseur-cross de 10 et $|\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)|$.

Alors A ne divise ni 10 ni $|\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)|$ mais divise $10 \times |\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)|$

Donc $\exists r \in \{1, 2, 3, \dots, A - 1\}$ tel que $|\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)| = Ak + r$
avec k est un entier positif.

Nous aurons deux possibilités , soit $A < 10$, soit $A > 10$.

Pour $A < 10$

A est un nombre de $\mathcal{M.A}$, donc $A \in \{3; 7; 9\}$

- Pour $A = 3$:

On a $r \in \{1, 2\}$ et $10 = 3(3) + 1$.

Donc,

$$10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right| = (3 \times 3 + 1)(3k + r)$$

$$10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right| \equiv r[3]$$

On trouve que 3 ne divise pas $10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right|$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse car 3 devrait diviser $10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right|$.

- Pour $A = 7$:

On a $r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $10 = 1(7) + 3$.

Donc,

$$10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right| = (1 \times 7 + 3)(7k + r)$$

$$10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right| \equiv 3r[7] \quad \text{avec } 3r \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

On trouve que 7 ne divise pas $10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right|$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse car 7 devrait diviser $10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right|$.

- Pour $A = 9$:

On a $r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $10 = 1(9) + 1$.

Donc,

$$10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right| = (1 \times 9 + 1)(9k + r)$$

$$10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right| \equiv r[9]$$

On trouve que 9 ne divise pas $10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right|$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse car 9 devrait diviser $10 \times \left| \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \right|$.

Pour $A > 10$

On a $10 \equiv 10[A]$ et $|\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)| = Ak + r$ avec k et $r \in \{1, 2, 3, \dots, A - 1\}$.

$$|\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)| = Ak + r$$

$$10 \times |\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)| = 10Ak + 10r$$

$$10 \times |\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)| \equiv 10r[A]$$

On se demande ensuite si A divise $10r$, la réponse est non car A est un nombre de $\mathcal{M.A}$.

A ne divise pas $10r$

alors A ne divise pas $10 \times |\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)|$ non plus,

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse car A devrait diviser $10 \times |\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)|$.

Nous avons donc démontré par absurde que le quatrième cas est écarté, d'où il ne reste que le premier cas.

$$\text{Alors } 10 \times |\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)| \equiv 0[A] \Rightarrow |\sum_{j=0}^m (10^j \times b_j)| \equiv 0[A]$$

$$\text{D'où } \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A] \Rightarrow \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A]$$

$$\text{Ainsi } \sum_{j=0}^m (10^j \times b_j) \equiv 0[A] \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m (r_{j+1} \times b_j) \equiv 0[A] \quad \square$$

Exemple IV.1:

	<ul style="list-style-type: none"> • $m=4$ • $b_0=4$ • $b_1=-11$ • $b_2=2$ • $b_3=-18$ • $b_4=9$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $A=29$ • $n=1$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $r_1=10$ • $r_2=13$ • $r_3=14$ • $r_4=24$ • $r_5=8$
$\sum_{j=0}^m 10^j b_j =$	$\sum_{j=0}^4 10^j b_j = 4 \cdot 110 + 200 \cdot 18000 + 90000 = 72094 = 29 \times 2486$		
$\sum_{j=0}^m r_{j+1} b_j =$	$\sum_{j=0}^4 r_{j+1} b_j = 40 \cdot 143 + 28 \cdot 432 + 72 = -435 = 29 \times (-15)$		

BIBLIOGRAPHIE

[1] Saliou Touré, Taïrou ALASSANE, Abdou Khadre BARRY, Jules NDA'KOUADIO, Olivier Théodule RAZAFINDRANOVONA, Paul REY, Julien SANHOUIDI, Soma TRAORE, and Joseph TSOUMTSA. *Mathématiques ciam terminale sm - série c*, pages 5-32. EDICEF, 1999.