



HAL
open science

Synopsis de "Diago hexagones et suites diago hexagonales"

David Pouvreau, Dominique Tournès

► **To cite this version:**

David Pouvreau, Dominique Tournès. Synopsis de "Diago hexagones et suites diago hexagonales". 2024.
hal-04383573

HAL Id: hal-04383573

<https://hal.science/hal-04383573>

Preprint submitted on 9 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Synopsis de Diago-hexagones et suites diago-hexagonales

Par David Pouvreau¹ et Dominique Tournès²

A paraître dans *Quadrature*, n°133, 2024

Soit $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone strictement convexe du plan. Les intersections de ses neuf diagonales qui sont intérieures à \mathcal{P} forment une « constellation » de quinze ou, éventuellement, treize points distincts. Les diagonales « majeures » (A_1A_4) , (A_2A_5) et (A_3A_6) de \mathcal{P} , se coupent aux sommets d'un triangle (éventuellement réduit à un point) qu'on appellera ici le *triangle diagonal* de \mathcal{P} : $T_1 = (A_1A_4) \cap (A_2A_5)$, $T_2 = (A_2A_5) \cap (A_3A_6)$ et $T_3 = (A_3A_6) \cap (A_1A_4)$. Il y a par ailleurs deux sous-familles d'intersections diagonales intéressantes, de cardinal 6.

L'enveloppe convexe de la constellation est l'hexagone strictement convexe \mathfrak{D}_1 de sommets $(D_k^{(1)})_{1 \leq k \leq 6}$ définis (modulo 6) par $D_k^{(1)} = (A_kA_{k+2}) \cap (A_{k+1}A_{k+3})$. On dira que \mathfrak{D}_1 est le *diago-hexagone primaire* de \mathcal{P} et que pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $D_k^{(1)}$ est le sommet de \mathfrak{D}_1 correspondant à A_k . Et on appellera *suite diago-hexagonale primaire* de \mathcal{P} la suite d'hexagones strictement convexes $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par la construction récurrente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_0 = \mathcal{P} \quad (\forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, D_k^{(0)} = A_k) \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathfrak{D}_{n+1} = (D_k^{(n+1)})_{1 \leq k \leq 6} \text{ est le diago-hexagone primaire de } \mathfrak{D}_n = (D_k^{(n)})_{1 \leq k \leq 6} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hexagone \mathfrak{D}_n sera alors appelé le diago-hexagone primaire d'ordre n de \mathcal{P} .

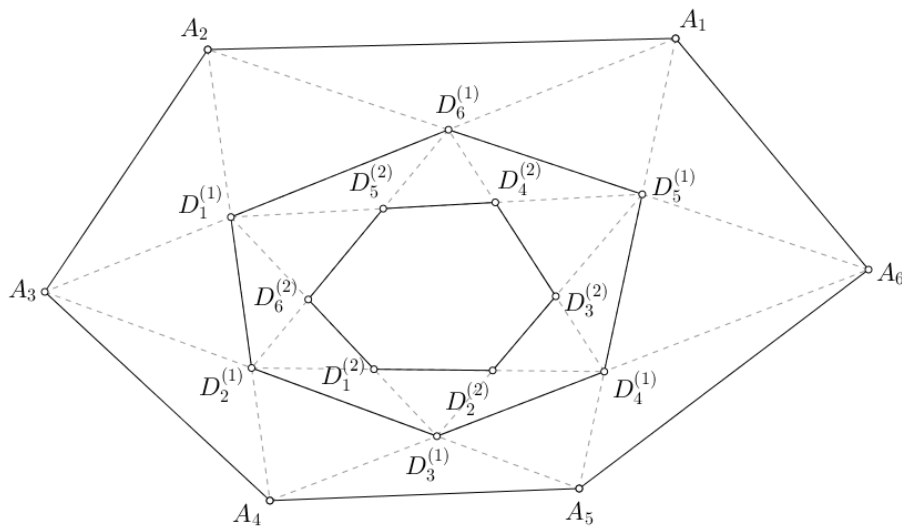


Figure 1 : Trois premiers termes d'une suite diago-hexagonale primaire

On obtient aussi à partir de l'hexagone \mathcal{P} un hexagone strictement convexe \mathcal{H}_1 de sommets $(H_k^{(1)})_{1 \leq k \leq 6}$ définis (modulo 6) par $H_k^{(1)} = (A_kA_{k+3}) \cap (A_{k+1}A_{k+5})$.

¹ Professeur agrégé de mathématiques en CPGE, Lycée Roland Garros, Le Tampon, La Réunion. Email : pvrddvd@gmail.com

² Professeur de mathématiques à l'Université de La Réunion. Email : dominique.tournes@univ-reunion.fr

On dira ici que \mathcal{H}_1 est le *diago-hexagone secondaire* de \mathcal{P} et que pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $H_k^{(1)}$ est le sommet de \mathcal{H}_1 correspondant à A_k . On peut alors définir la *suite diago-hexagonale secondaire* de \mathcal{P} , comme celle des hexagones strictement convexes $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 = \mathcal{P} \quad (\forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, H_k^{(0)} = A_k) \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_{n+1} = (H_k^{(n+1)})_{1 \leq k \leq 6} \text{ est le diago-hexagone secondaire de } \mathcal{H}_n = (H_k^{(n)})_{1 \leq k \leq 6} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hexagone \mathcal{H}_n sera appelé le diago-hexagone secondaire d'ordre n de \mathcal{P} .

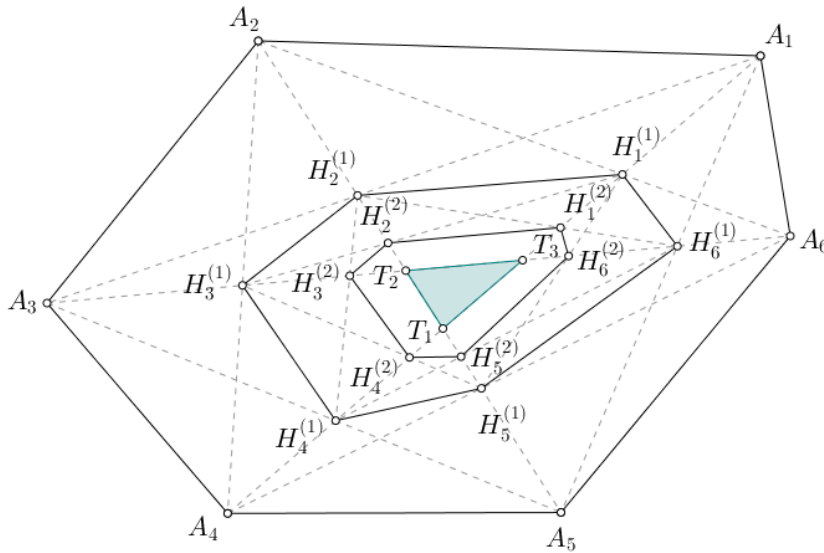


Figure 2 : Trois premiers termes d'une suite diago-hexagonale secondaire et triangle diagonal

Les principaux résultats établis dans cet article, par des arguments tant projectifs qu'algébriques et topologiques, sont les suivants :

Théorème 1

Il existe une unique homographie h telle que $h(A_k) = D_k^{(2)}$ pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, donc telle que $h(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_2$. Plus généralement $h(\mathcal{D}_n) = \mathcal{D}_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On appellera h l'*homographie diago-hexagonale* de \mathcal{P} .

Théorème 2

Les diagonales majeures de \mathcal{P} sont concourantes si, et seulement si son diago-hexagone primaire d'ordre 1 est inscritible dans une conique.

Théorème 3

L'homographie diago-hexagonale h de \mathcal{P} a un unique point fixe Ω intérieur à \mathcal{P} et la suite diago-hexagonale primaire $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{P} converge vers Ω .
On appellera Ω le *centre diagonal* de \mathcal{P} .

Théorème 4

Si \mathcal{P} est inscritible dans une conique, alors chacun de ses diago-hexagones secondaires est inscritible dans une conique.

Théorème 5

La suite diago-hexagonale secondaire de \mathcal{P} converge vers le triangle diagonal de \mathcal{P} .