



**HAL**  
open science

# Suites diagopentagonales - Partie 1 : Généralités et cas des pentagones quadrisocèles

David Pouvreau

► **To cite this version:**

David Pouvreau. Suites diagopentagonales - Partie 1 : Généralités et cas des pentagones quadrisocèles. *Quadrature*, 2023, 130, pp.28-38. hal-04383557

**HAL Id: hal-04383557**

**<https://hal.science/hal-04383557v1>**

Submitted on 9 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

# Suites diagopentagonales – Partie 1 : Généralités et cas des pentagones quadrisocèles

Par David Pouvreau<sup>1</sup>

## 1. Introduction : le problème des suites diagopentagonales

Le problème considéré ici a été posé dans un autre article en 2016. Rien n’avait alors été dit concernant sa résolution ([3], p. 43). Il s’agira, dans une première partie de cet article, de présenter quelques résultats préliminaires dans l’exploration de ce problème, puis de lui apporter une solution dans une infinité de cas particuliers pour, finalement, être en mesure d’entrevoir une clef de sa résolution dans le cas général – à laquelle une seconde partie sera consacrée. Les deux parties visent à exposer tant la résolution d’un problème qu’une démarche de recherche.

### Définitions

Soit  $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$  un pentagone strictement convexe d’un plan affine  $\mathbb{P}$ .

$\mathcal{P}$  sera dit *quadrisocèle* en  $A_1$  si  $A_2A_3A_4A_5$  est un carré et si  $A_1A_2A_5$  est isocèle en  $A_1$ .

Les cinq diagonales de  $\mathcal{P}$  se coupent dans tous les cas en cinq points formant eux-mêmes un pentagone strictement convexe  $\mathfrak{D}_1 = D_1^{(1)}D_2^{(1)}D_3^{(1)}D_4^{(1)}D_5^{(1)}$  de sommets  $(D_k^{(1)})_{1 \leq k \leq 5}$  définis par :  $D_1^{(1)} = (A_2A_4) \cap (A_3A_5)$  ;  $D_2^{(1)} = (A_1A_4) \cap (A_3A_5)$  ;

$$D_3^{(1)} = (A_2A_5) \cap (A_1A_4) ; D_4^{(1)} = (A_2A_5) \cap (A_1A_3) ; D_5^{(1)} = (A_2A_4) \cap (A_1A_3).$$

On appelle  $\mathfrak{D}_1$  le *diagopentagone* de  $\mathcal{P}$ , chacun des cinq points  $D_k^{(1)}$  étant appelé le point de  $\mathfrak{D}_1$  *correspondant* au point  $A_k$ .

On peut alors définir la *suite diagopentagonale* de  $\mathcal{P}$  comme celle des pentagones  $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  obtenue comme suit par récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_0 = \mathcal{P} \quad (\forall k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket, D_k^{(0)} = A_k) \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathfrak{D}_{n+1} = (D_k^{(n+1)})_{1 \leq k \leq 5} \text{ est le diagopentagone de } \mathfrak{D}_n = (D_k^{(n)})_{1 \leq k \leq 5} \end{array} \right.$$

On appellera  $\mathfrak{D}_n$  le diagopentagone d’ordre  $n$  de  $\mathcal{P}$ .

La définition précédente est justifiée par le fait que  $\mathfrak{D}_1$  est bien un pentagone strictement convexe. Ce fait assez évident intuitivement, qui sera ici admis par souci d’économie d’espace, peut se justifier rigoureusement par l’absurde. La trame d’une preuve en est la suivante. Les cinq points d’intersection  $D_k^{(1)}$  des diagonales de  $\mathcal{P}$  appartiennent à l’intérieur de l’enveloppe convexe de  $\mathcal{P}$ , du fait de sa stricte convexité (ce qui peut précisément s’expliciter au moyen de leur caractérisation barycentrique aréolaire, rappelée dans la section 2). Si trois des points  $D_k^{(1)}$  étaient alignés, trois des sommets de  $\mathcal{P}$  le seraient aussi : c’est exclu. Donc ces points sont trois à trois non alignés : ils forment bien un pentagone  $\mathfrak{D}_1$ . En supposant maintenant par exemple que  $D_1^{(1)}$  et  $D_3^{(1)}$  sont dans le même demi-plan de frontière  $(D_2^{(1)}D_5^{(1)})$ , puis en explicitant ces points comme barycentres à coefficients aréolaires (strictement positifs) des sommets  $A_k$  de  $\mathcal{P}$ , on peut déduire l’existence d’une configuration analogue pour les points  $A_k$ , exclue par l’hypothèse de stricte convexité de  $\mathcal{P}$ . À permutation près, tous les autres cas analogues conduisent à la même contradiction de l’hypothèse initiale. D’où la conclusion.

---

<sup>1</sup> Professeur agrégé de mathématiques en CPGE, Lycée Roland Garros, Le Tampon, La Réunion. Email : pvrdrv@gmail.com. L’auteur remercie Dominique Tournès, professeur à l’Université de La Réunion, pour sa relecture, ses commentaires, ses simulations et vérifications numériques, et sa réalisation des figures.

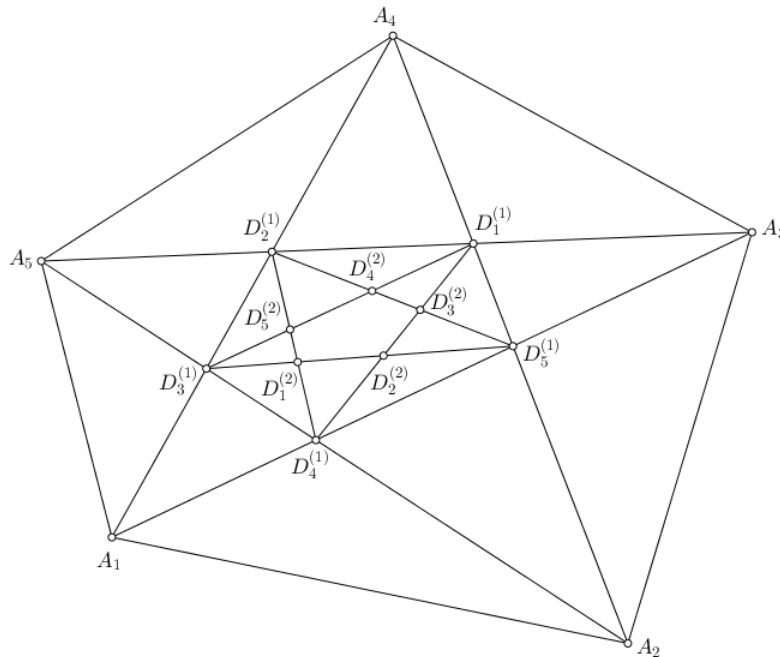


Figure 1 : Trois premiers termes de la suite diagopentagonale d'un pentagone strictement convexe

Le problème (P) qu'il s'agit de résoudre ici est alors le suivant : dans la mesure où elle existe, comment peut-on caractériser la limite de la suite diagopentagonale de  $\mathcal{P}$ , notamment en fonction de ses caractéristiques géométriques ? Cette limite étant entendue ici par abus de langage, plus précisément au sens de celle de la suite des quintuplets de points  $(D_1^{(n)}; D_2^{(n)}; D_3^{(n)}; D_4^{(n)}; D_5^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  dans l'espace métrique  $\mathbb{P}^5$  muni de la distance induite sur ce produit cartésien par toute distance  $d$  choisie sur  $\mathbb{P}$ , telle que la distance euclidienne usuelle.

## 2. Première approche du cas général

Le seul résultat préliminaire immédiat est un théorème de convergence de suite d'enveloppes convexes qui tend à justifier la pertinence du problème (P) :

### Théorème 1

La suite des enveloppes convexes des familles de sommets des termes de la suite diagopentagonale de tout pentagone strictement convexe converge vers une partie compacte d'aire nulle du plan.

Démonstration. Les enveloppes convexes des familles de sommets des termes d'une suite diagopentagonale forment, au sens de l'inclusion, une suite décroissante de compacts non vides (parties fermées et bornées de l'espace métrique  $(\mathbb{P}; d)$ ). En effet, en reprenant les notations précédentes, chaque point  $M$  de l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\{D_k^{(n)}\}_{1 \leq k \leq 5}$  est par définition, pour tout  $n \geq 1$  fixé, un barycentre à coefficients positifs des cinq sommets  $D_k^{(n)}$  de  $\mathcal{D}_n$ . Comme ces sommets sont eux-mêmes des barycentres à coefficients (aréolaires) strictement positifs des sommets de  $\mathcal{D}_{n-1}$ , un tel point  $M$  appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\{D_k^{(n-1)}\}_{1 \leq k \leq 5}$ . Donc cette dernière enveloppe convexe contient celle de l'ensemble  $\{D_k^{(n)}\}_{1 \leq k \leq 5}$ . Le « théorème des compacts emboîtés » assure alors la convergence de la suite d'enveloppes convexes considérée vers un compact limite  $L$ . Un résultat récent établissant que le maximum du rapport entre aire d'un diagopentagone et aire de son pentagone générateur  $\mathcal{P}$  est égal à  $\frac{7-3\sqrt{5}}{2} < 1$  et atteint lorsque  $\mathcal{P}$  est régulier ([2]), on peut de plus affirmer que  $L$  est un compact d'aire nulle.

La possibilité que  $L$  soit autre chose qu'un point n'est pas *a priori* à exclure. L'intuition et l'expérimentation numérique convainquent toutefois que c'est toujours un point. Reste à le montrer. On peut songer à cette fin à établir la convergence vers 0 de la suite des diamètres des diagopentagones, ce qui pourrait (le diamètre d'un polygone convexe étant majoré par son demi-périmètre) se déduire de la preuve que la suite de leurs périmètres converge vers 0. Mais cette approche est difficile à mener à bien car la borne supérieure du rapport entre le périmètre d'un diagopentagone et celui de son pentagone générateur est égale à 1. Nous verrons en partie 2 que c'est *in fine* l'argument qui permettra d'obtenir la solution cherchée, mais nous verrons aussi tous les détours nécessaires à cette fin... De plus, à supposer même que le problème de la nature du compact  $L$  soit résolu, resterait encore à caractériser  $L$  en fonction de  $\mathcal{P}$ . La difficulté de (P) tient à sa non linéarité, qui fait contraster ce problème avec celui de la convergence des suites « barypolygones », dont la linéarité est au contraire d'emblée manifeste ([1], [3]). Nous allons toutefois voir l'algèbre linéaire s'inviter efficacement dans la résolution de (P).

La possibilité de caractériser ce problème en termes barycentriques tient la propriété suivante, formulée et démontrée dans ([3], p. 42), à laquelle allusion a été faite en introduction :

$$L'intersection D des diagonales d'un quadrilatère strictement convexe  $A_1A_2A_3A_4$  est  
 $D = \text{bar}\{(A_1, \text{aire}(A_2A_3A_4)); (A_2, \text{aire}(A_1A_3A_4)); (A_3, \text{aire}(A_1A_2A_4)); (A_4, \text{aire}(A_1A_2A_3))\}$$$

Ce résultat permet en effet d'expliciter les sommets d'un diagopentagone comme barycentres des sommets de son pentagone générateur  $\mathcal{P}$ . Une question surgit alors : n'y aurait-il pas dans la suite diagopentagonale un comportement limite analogue à celui joué par le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère convexe, qui se formulerait de manière analogue à la proposition précédente ? Une jolie propriété a été découverte dans le contexte de cette interrogation, la suite de cet article rendant toutefois douteuse son utilité pour résoudre (P) :

**Théorème 2**

Soit  $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$  un pentagone strictement convexe. Soient  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  les sommets correspondants de son diagopentagone, conformément à la définition plus haut. Notons :  $D = \text{bar}\{(A_1; \text{aire}(A_2A_3A_4A_5)); (A_2; \text{aire}(A_1A_3A_4A_5)); (A_3; \text{aire}(A_1A_2A_4A_5)); (A_4; \text{aire}(A_1A_2A_3A_5)); (A_5; \text{aire}(A_1A_2A_3A_4))\}$

Alors on a aussi :

$$D = \text{bar}\{(D_1; \text{aire}(A_2A_3A_4A_5)); (D_2; \text{aire}(A_1A_3A_4A_5)); (D_3; \text{aire}(A_1A_2A_4A_5)); (D_4; \text{aire}(A_1A_2A_3A_5)); (D_5; \text{aire}(A_1A_2A_3A_4))\}$$

Démonstration. On combine la propriété rappelée plus haut et le théorème d'associativité des barycentres. L'idée est de décomposer chaque quadrilatère engendré par les sommets de  $\mathcal{P}$  selon chacune des deux réunions possibles de deux triangles définis au moyen de leurs diagonales et d'effectuer ensuite les bonnes associations de points permettant de recomposer le système barycentrique au moyen des sommets du diagopentagone. On obtient ainsi successivement :

$$\begin{aligned} D &= \text{bar}\{(A_1; 2\text{aire}(A_2A_3A_4A_5)); (A_2; 2\text{aire}(A_1A_3A_4A_5)); (A_3; 2\text{aire}(A_1A_2A_4A_5)); \\ &\quad (A_4; 2\text{aire}(A_1A_2A_3A_5)); (A_5; 2\text{aire}(A_1A_2A_3A_4))\} \\ &= \text{bar}\{(A_1; \text{aire}(A_3A_4A_5)); (A_1; \text{aire}(A_2A_4A_5)); (A_1; \text{aire}(A_2A_3A_5)); (A_1; \text{aire}(A_2A_3A_4)); \\ &\quad (A_2; \text{aire}(A_3A_4A_5)); (A_2; \text{aire}(A_1A_4A_5)); (A_2; \text{aire}(A_1A_3A_5)); (A_2; \text{aire}(A_1A_3A_4)); \\ &\quad (A_3; \text{aire}(A_2A_4A_5)); (A_3; \text{aire}(A_1A_4A_5)); (A_3; \text{aire}(A_1A_2A_5)); (A_3; \text{aire}(A_1A_2A_4)); \\ &\quad (A_4; \text{aire}(A_2A_3A_5)); (A_4; \text{aire}(A_1A_3A_5)); (A_4; \text{aire}(A_1A_2A_5)); (A_4; \text{aire}(A_1A_2A_3)); \\ &\quad (A_5; \text{aire}(A_2A_3A_4)); (A_5; \text{aire}(A_1A_3A_4)); (A_5; \text{aire}(A_1A_2A_4)); (A_5; \text{aire}(A_1A_2A_3))\} \\ &= \text{bar}\{(A_2; \text{aire}(A_3A_4A_5)); (A_3; \text{aire}(A_2A_4A_5)); (A_4; \text{aire}(A_2A_3A_5)); (A_5; \text{aire}(A_2A_3A_4)); \\ &\quad (A_1; \text{aire}(A_3A_4A_5)); (A_3; \text{aire}(A_1A_4A_5)); (A_4; \text{aire}(A_1A_3A_5)); (A_5; \text{aire}(A_1A_3A_4))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_1; \text{aire}(A_2A_4A_5)); (A_2; \text{aire}(A_1A_4A_5)); (A_4; \text{aire}(A_1A_2A_5)); (A_5; \text{aire}(A_1A_2A_4)); \\
 & (A_1; \text{aire}(A_2A_3A_5)); (A_2; \text{aire}(A_1A_3A_5)); (A_3; \text{aire}(A_1A_2A_5)); (A_5; \text{aire}(A_1A_2A_3)); \\
 & (A_1; \text{aire}(A_2A_3A_4)); (A_2; \text{aire}(A_1A_3A_4)); (A_3; \text{aire}(A_1A_2A_4)); (A_4; \text{aire}(A_1A_2A_3)) \\
 = & \text{bar}\{(D_1; 2\text{aire}(A_2A_3A_4A_5)); (D_2; 2\text{aire}(A_1A_3A_4A_5)); (D_3; 2\text{aire}(A_1A_2A_4A_5)); \\
 & (D_4; 2\text{aire}(A_1A_2A_3A_5)); (D_5; 2\text{aire}(A_1A_2A_3A_4))\}.
 \end{aligned}$$

Sur cette base et par analogie avec le cas des quadrilatères convexes, on peut être tenté de conjecturer que le point  $D$  précédemment défini est la limite de la suite diagopentagonale de  $\mathcal{P}$  (au sens déjà dit où la suite  $(D_1^{(n)}; D_2^{(n)}; D_3^{(n)}; D_4^{(n)}; D_5^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{P}^5$  converge vers  $\{D\}^5$ ). On a au moins trouvé avec  $D$  un barycentre des sommets de  $\mathcal{P}$  qui appartient à l'intérieur de l'enveloppe convexe de son diagopentagone. Mais appartient-il bien à l'intérieur de l'enveloppe convexe de chaque terme de la suite diagopentagonale de  $\mathcal{P}$  ?

### 3. L'intérêt des pentagones quadrisocèles pour une approche du problème

Considérons, en reprenant les notations de la définition initiale, tous les cas où  $\mathcal{P}$  est quadrisocèle en  $A_1$ , en notant  $x$  la distance de  $A_1$  à  $(A_2A_5)$ , l'unité de mesure étant la moitié du côté du carré  $A_2A_3A_4A_5$ . On appellera  $x$  le paramètre de la suite diagopentagonale ici. Dans l'un des repères orthonormés du plan centrés en l'intersection  $O$  des diagonales de ce carré et d'axes parallèles aux côtés, les sommets de  $\mathcal{P}$  ont pour coordonnées :

$$A_1(1+x; 0), A_2(1; 1), A_3(-1; 1), A_4(-1; -1) \text{ et } A_5(1; -1).$$

Commençons par supposer que  $x = 1$ , cas illustré par la figure 2. On vérifie alors que le point  $D$  défini dans le théorème 2 a pour coordonnées  $(5/9; 0)$ . Or, on vérifie aussi que les abscisses des sommets du diagopentagone d'ordre 3 sont dans ce cas comprises entre  $4/7$  et  $2/3$ . La réponse à la question posée plus haut est donc négative :  $D$  n'appartenant pas à l'enveloppe convexe des sommets de ce diagopentagone, il ne peut pas être la limite de la suite diagopentagonale de  $\mathcal{P}$ . Nous verrons plus loin qu'ici, la limite  $L$  cherchée est en fait le point d'ordonnée 0 et d'abscisse  $\frac{1}{2}(7 - \sqrt{33}) \approx 0,62772$ .

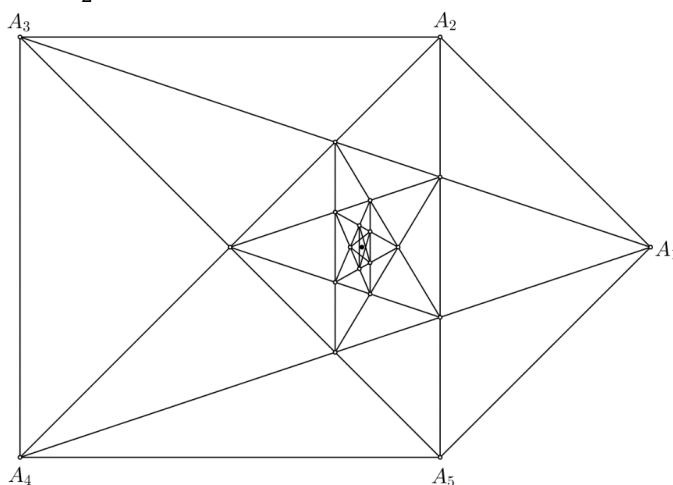


Figure 2 : Cas d'un pentagone quadrisocèle de paramètre  $x = 1$

Considérons maintenant plus généralement les cas des pentagones quadrisocèles en  $A_1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathfrak{D}_n = D_1^{(n)}D_2^{(n)}D_3^{(n)}D_4^{(n)}D_5^{(n)}$  le diagopentagone d'ordre  $n$  de  $\mathcal{P}$ , avec les  $D_k^{(n)}$  définis pour tout  $n \geq 0$  et tout  $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$  conformément aux intersections précisées dans la définition initiale d'une suite diagopentagonale. On peut commencer par énoncer :

**Proposition 1**

La suite diagopentagonale d'un pentagone quadrisocèle de paramètre  $x$  est déterminée par le système récurrent  $(\Sigma)$  qui sera appelé ici le « système diagopentagonal » de  $\mathcal{P}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(x) = 1 ; \alpha_0(x) = 1 ; b_0(x) = -1 ; \beta_0(x) = 1 ; c_0(x) = 1 + x \\ a_{n+1}(x) = \frac{\beta_n(x)c_n(x)(a_n(x) - b_n(x)) + (\beta_n(x)a_n(x) + \alpha_n(x)b_n(x))(c_n(x) - b_n(x))}{\beta_n(x)(a_n(x) - b_n(x)) + (\alpha_n(x) + \beta_n(x))(c_n(x) - b_n(x))} \\ \alpha_{n+1}(x) = \frac{-\beta_n(x)[\beta_n(x)(c_n(x) - a_n(x)) + \alpha_n(x)(c_n(x) - b_n(x))]}{\beta_n(x)(a_n(x) - b_n(x)) + (\alpha_n(x) + \beta_n(x))(c_n(x) - b_n(x))} \\ b_{n+1}(x) = a_n(x) \\ \beta_{n+1}(x) = \frac{-\beta_n(x)(c_n(x) - a_n(x))}{c_n(x) - b_n(x)} \\ c_{n+1}(x) = \frac{\beta_n(x)a_n(x) + \alpha_n(x)b_n(x)}{\alpha_n(x) + \beta_n(x)} \end{array} \right.$$

Démonstration. De simples considérations de symétrie assurent que pour tout  $x > 0$  fixé, les sommets de  $\mathcal{D}_n$  ont, dans le repère considéré, des coordonnées de la forme :

$$D_1^{(n)}(c_n(x); 0), \quad D_2^{(n)}(a_n(x); \alpha_n(x)), \quad D_3^{(n)}(b_n(x); \beta_n(x)) \\ D_4^{(n)}(b_n(x); -\beta_n(x)), \quad D_5^{(n)}(a_n(x); -\alpha_n(x)).$$

On obtient alors rapidement avec la proposition rappelée au début du 2. que les cinq suites de coordonnées sont les solutions de  $(\Sigma)$ . Par exemple pour la suite de points  $(D_1^{(n)})$ , on a

$$D_1^{(n+1)} = \text{bar}\{(D_2^{(n)}, \text{aire}(D_3^{(n)}D_4^{(n)}D_5^{(n)})); (D_3^{(n)}, \text{aire}(D_2^{(n)}D_4^{(n)}D_5^{(n)})); \\ (D_4^{(n)}, \text{aire}(D_2^{(n)}D_3^{(n)}D_5^{(n)})); (D_5^{(n)}, \text{aire}(D_2^{(n)}D_3^{(n)}D_4^{(n)})\}.$$

On calcule alors, en choisissant une orientation du plan et à un facteur  $\delta$  près :

$$\text{aire}(D_3^{(n)}D_4^{(n)}D_5^{(n)}) = \delta \begin{vmatrix} a_n(x) & -b_n(x) & 0 \\ 0 & 2\beta_n(x) & 0 \end{vmatrix} = 2\delta\beta_n(x)(a_n(x) - b_n(x)) \\ \text{aire}(D_2^{(n)}D_4^{(n)}D_5^{(n)}) = \delta \begin{vmatrix} 0 & b_n(x) & -a_n(x) \\ 2\alpha_n(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\delta\alpha_n(x)(a_n(x) - b_n(x)) \\ \text{aire}(D_2^{(n)}D_3^{(n)}D_5^{(n)}) = \delta \begin{vmatrix} b_n(x) & -a_n(x) & 0 \\ 0 & -2\alpha_n(x) & 0 \end{vmatrix} = 2\delta\alpha_n(x)(a_n(x) - b_n(x)) \\ \text{aire}(D_2^{(n)}D_3^{(n)}D_4^{(n)}) = \delta \begin{vmatrix} 0 & a_n(x) & -b_n(x) \\ -2\beta_n(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\delta\beta_n(x)(a_n(x) - b_n(x))$$

Puis, après simplification immédiate par  $2\delta(a_n(x) - b_n(x))$  :

$$c_{n+1}(x) = \frac{\beta_n(x)a_n(x) + \alpha_n(x)b_n(x) + \alpha_n(x)b_n(x) + \beta_n(x)a_n(x)}{\beta_n(x) + \alpha_n(x) + \alpha_n(x) + \beta_n(x)} = \frac{\beta_n(x)a_n(x) + \alpha_n(x)b_n(x)}{\alpha_n(x) + \beta_n(x)}.$$

On procède de même pour les quatre autres suites de points afin d'en déduire les quatre autres équations de récurrence de  $(\Sigma)$ .

La non linéarité du problème (P) est manifeste dans l'expression de  $(\Sigma)$ . Ce dernier n'en reste pas moins accessible à l'analyse, mais surtout et d'abord à l'algèbre. Commençons par observer les premiers termes des cinq suites de fractions rationnelles ainsi définies ; ils suggèrent déjà l'existence de certaines régularités :

	$a_n(x)$	$b_n(x)$	$\alpha_n(x)$	$\beta_n(x)$	$c_n(x)$
$n = 0$	1	-1	1	1	$1 + x$
$n = 1$	$\frac{x+1}{x+3}$	1	$-\frac{x+1}{x+3}$	$-\frac{x}{x+2}$	0
$n = 2$	$\frac{(x+1)^2}{x^2+4x+1}$	$\frac{x+1}{x+3}$	$\frac{x(x+1)^2}{(x+2)(x^2+4x+1)}$	$\frac{x(x+1)}{(x+2)(x+3)}$	$\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}$
$n = 3$	$\frac{(x+1)^2(x+3)}{x^3+7x^2+13x+5}$	$\frac{(x+1)^2}{x^2+4x+1}$	$-\frac{x(x+1)^3}{(x+2)(x^3+7x^2+13x+5)}$	$-\frac{x^2(x+1)^2}{(x+2)^2(x^2+4x+1)}$	$\frac{(x+1)^2}{x^2+4x+2}$
$n = 4$	$\frac{(x+1)^2(x^2+4x+1)}{x^4+8x^3+18x^2+10x+1}$	$\frac{(x+1)^2(x+3)}{x^3+7x^2+13x+5}$	$\frac{x^2(x+1)^4}{(x+2)^2(x^4+8x^3+18x^2+10x+1)}$	$\frac{x^2(x+1)^3}{(x+2)^2(x^3+7x^2+13x+5)}$	$\frac{(x^2+3x+1)(x+1)^2}{x^4+7x^3+14x^2+8x+1}$

$$a_5(x) = \frac{(x^3+7x^2+13x+5)(x+1)^2}{x^5+11x^4+42x^3+66x^2+39x+7} ; \quad b_5(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x^3+7x^2+13x+5} ; \quad c_5(x) = \frac{(x+1)^2(x^2+4x+2)}{x^4+8x^3+19x^2+14x+3}$$

$$\alpha_5(x) = -\frac{x^2(x+1)^5}{(x+2)^2(x^5+11x^4+42x^3+66x^2+39x+7)} ; \quad \beta_5(x) = -\frac{x^3(x+1)^4}{(x+2)^3(x^4+8x^3+18x^2+10x+1)}$$

L'étude algébrique de  $(\Sigma)$  va montrer que sa solution repose sur la seule connaissance de la suite des polynômes normalisés formant les dénominateurs des fractions rationnelles  $a_n$  (telles que considérées sous forme irréductible) et que cette suite peut être explicitée au moyen de l'algèbre linéaire. Qu'une linéarité se révèle ainsi cachée dans  $(\Sigma)$  n'est toutefois pas surprenant si l'on conserve à l'esprit que tout le problème s'exprime en termes barycentriques. Remarquons en effet que la non linéarité de  $(\Sigma)$  tient à la nature aréolaire des coefficients barycentriques. Mais aussi que le calcul, lui, demeure barycentrique, donc fondamentalement linéaire.

Concernant ces coefficients barycentriques, une heuristique féconde naît de l'observation du fait que tous les triangles et quadrilatères définis par les sommets de  $\mathcal{P}$  ont une mesure d'aire qui est soit l'un des trois polynômes constants égaux à 1, 2 ou 4, soit l'un des quatre polynômes de degré 1 que sont les  $x \mapsto x+k$  où  $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ , l'aire intérieure de  $\mathcal{P}$  étant elle-même de mesure  $x+4$ . Surtout si l'on reste attaché à l'hypothèse d'une détermination aréolaire de la limite de la suite diagopentagonale, il est dans l'étude qui suit très utile de partir du principe que tout peut se formuler rationnellement à l'aide de ces seuls polynômes. Tout en n'écartant aucune hypothèse concernant la nature de la limite, qui n'a par contre aucune raison *a priori* d'être rationnelle.

Pour toutes ces raisons, la résolution de (P) dans le cas des pentagones quadrisocèles apparaît d'emblée prometteuse pour une première approche du problème (P), au moins en vue d'une conjecture solide voire d'une piste de résolution pertinente concernant le cas général. Au vu de la difficulté du problème, que ce qui suit va illustrer, ce n'est pas là un mérite négligeable.

#### 4. Algèbre du système diagopentagonal des pentagones quadrisocèles

Toute l'étude algébrique de  $(\Sigma)$  repose sur la proposition suivante :

##### Proposition 2

Soient  $(T_n)$ ,  $(U_n)$ ,  $(V_n)$  et  $(W_n)$  les quatre suites de polynômes définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{T_n}{U_n} ; \quad T_n \wedge U_n = \mathbb{1} ; \quad \text{dom}(U_n) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{V_n}{W_n} ; \quad V_n \wedge W_n = \mathbb{1} ; \quad \text{dom}(W_n) = 1$$

On a alors, pour tout  $x > 0$  fixé :

$$(i) \quad \forall n \geq 2, \quad T_n(x) = (x+1)^2 U_{n-2}(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n(x)U_{n+3}(x) - U_{n+1}(x)U_{n+2}(x) = 2(-1)^n(x+1)^n$$

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, (U_{2k-2}(x))^2 - U_{2k-4}(x)U_{2k}(x) &= -2x(x+1)^{2k-4} \\ \forall k \geq 2, (U_{2k-1}(x))^2 - U_{2k-3}(x)U_{2k+1}(x) &= 2(x+2)(x+1)^{2k-3} \\ \forall k \geq 2, U_{2k}(x) &= \frac{1}{2}x U_{2k-1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2) U_{2k-2}(x) + \frac{1}{2}x(x+1) U_{2k-3}(x) \\ \forall k \geq 1, U_{2k+1}(x) &= \frac{1}{2}(x+2) U_{2k}(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2) U_{2k-1}(x) + \frac{1}{2}(x+1)(x+2) U_{2k-2}(x) \\ \text{(ii)} \quad \forall k \geq 1, \alpha_{2k}(x) &= \left(\frac{x}{x+2}\right)^k \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} ; \quad \alpha_{2k+1}(x) = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^k \frac{(x+1)^{2k+1}}{U_{2k+1}(x)} \\ \text{(iii)} \quad \forall k \geq 1, \beta_{2k}(x) &= \left(\frac{x}{x+2}\right)^k \frac{(x+1)^{2k-1}}{U_{2k-1}(x)} ; \quad \beta_{2k+1}(x) = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} \\ \text{(iv)} \quad \forall n \geq 2, V_n(x) &= (x+1)^2 W_{n-2}(x) \\ \forall k \geq 2, W_{2k}(x) &= \frac{1}{2}(x U_{2k-1}(x) + (x+1)(x+2) U_{2k-2}(x)) \\ \forall k \geq 1, W_{2k+1}(x) &= \frac{1}{2}(U_{2k}(x) + (x+1) U_{2k-1}(x)) \end{aligned}$$

**Démonstration.** On raisonne par récurrence forte. La preuve ne sera pas entièrement rédigée ici, compte tenu du format des présentes marges ; mais le lecteur pardonnera volontiers à l’auteur cette fermaterie après avoir considéré les parties les plus significatives de cette preuve.

Notons  $(H_k)$  la proposition précédente, étant entendu qu’on y substitue dans les deux premières identités du (i) et dans la première identité du (iv) les deux identités de récurrence qui les expriment aux rangs  $2k$  et  $2k + 1$ . Les résultats obtenus sur les premiers rangs, présentés plus haut, montrent que  $(H_2)$  est vraie et que sont également vraies les égalités annoncées qui ne sont pas incluses dans  $(H_2)$ . Soit maintenant  $k \geq 2$  fixé tel que  $(H_j)$  est vraie pour tout  $j \in \llbracket 2; k \rrbracket$ . Commençons par considérer le numérateur du nombre  $a_{2k+2}(x)$  tel que déduit de  $(\mathcal{E})$  :

$$\begin{aligned} &\beta_{2k+1}(x)c_{2k+1}(x)(a_{2k+1}(x) - b_{2k+1}(x)) + (\beta_{2k+1}(x)a_{2k+1}(x) + \alpha_{2k+1}(x)b_{2k+1}(x))(c_{2k+1}(x) - b_{2k+1}(x)) \\ &= -\left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} \frac{(x+1)^2(U_{2k-2}(x) + (x+1) U_{2k-3}(x))}{U_{2k}(x) + (x+1) U_{2k-1}(x)} \left(\frac{(x+1)^2 U_{2k-1}(x)}{U_{2k+1}(x)} - \frac{(x+1)^2 U_{2k-2}(x)}{U_{2k}(x)}\right) \\ &\quad + \left(-\left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} \frac{(x+1)^2 U_{2k-1}(x)}{U_{2k+1}(x)} - \left(\frac{x}{x+2}\right)^k \frac{(x+1)^{2k+1}}{U_{2k+1}(x)} \frac{(x+1)^2 U_{2k-2}(x)}{U_{2k}(x)}\right) \\ &\quad \quad \quad \times \left(\frac{(x+1)^2(U_{2k-2}(x) + (x+1) U_{2k-3}(x))}{U_{2k}(x) + (x+1) U_{2k-1}(x)} - \frac{(x+1)^2 U_{2k-2}(x)}{U_{2k}(x)}\right) \\ &= -\left(\frac{x}{x+2}\right)^k (x+1)^{2k+4} \left[ \frac{x(U_{2k-2}(x) + (x+1) U_{2k-3}(x))(U_{2k}(x)U_{2k-1}(x) - U_{2k+1}(x)U_{2k-2}(x))}{(x+2)(U_{2k}(x))^2 U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1) U_{2k-1}(x))} \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + \frac{xU_{2k-1}(x) + (x+1)(x+2)U_{2k-2}(x)}{(x+2)U_{2k}(x)U_{2k+1}(x)} \times \frac{(x+1)(U_{2k-3}(x)U_{2k}(x) - U_{2k-2}(x)U_{2k-1}(x))}{(U_{2k}(x) + (x+1) U_{2k-1}(x))U_{2k}(x)} \right] \\ &= -\left(\frac{x}{x+2}\right)^k (x+1)^{2k+4} \left[ \frac{-x(U_{2k-2}(x) + (x+1) U_{2k-3}(x)) \times 2(x+1)^{2k-2}}{(x+2)(U_{2k}(x))^2 U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1) U_{2k-1}(x))} \right. \\ &\quad \quad \quad \left. - \frac{xU_{2k-1}(x) + (x+1)(x+2)U_{2k-2}(x)}{(x+2)U_{2k}(x)U_{2k+1}(x)} \times \frac{2(x+1)(x+1)^{2k-3}}{(U_{2k}(x) + (x+1) U_{2k-1}(x))U_{2k}(x)} \right] \end{aligned}$$



$$= 2 \left( \frac{x}{x+2} \right)^k (x+1)^{4k+2} \left[ \frac{xU_{2k-1}(x) + (x^2 + 4x + 2)U_{2k-2}(x) + x(x+1)U_{2k-3}(x)}{(x+2)(U_{2k}(x))^2 U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} \right].$$

Considérons maintenant le dénominateur du nombre  $a_{2k+2}(x)$  tel que déduit de  $(\Sigma)$  :

$$\begin{aligned} & \beta_{2k+1}(x)(a_{2k+1}(x) - b_{2k+1}(x)) + (a_{2k+1}(x) + \beta_{2k+1}(x))(c_{2k+1}(x) - b_{2k+1}(x)) \\ &= - \left( \frac{x}{x+2} \right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} \left( \frac{(x+1)^2 U_{2k-1}(x)}{U_{2k+1}(x)} - \frac{(x+1)^2 U_{2k-2}(x)}{U_{2k}(x)} \right) \\ & \quad + \left( - \left( \frac{x}{x+2} \right)^k \frac{(x+1)^{2k+1}}{U_{2k+1}(x)} - \left( \frac{x}{x+2} \right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} \right) \\ & \quad \quad \quad \times \left( \frac{(x+1)^2 (U_{2k-2}(x) + (x+1)U_{2k-3}(x))}{(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} - \frac{(x+1)^2 U_{2k-2}(x)}{U_{2k}(x)} \right) \\ &= - \left( \frac{x}{x+2} \right)^k (x+1)^{2k+2} \left[ \frac{x(U_{2k-1}(x)U_{2k}(x) - U_{2k+1}(x)U_{2k-2}(x))}{(x+2)(U_{2k}(x))^2 U_{2k+1}(x)} + \frac{(x+1)(x+2)U_{2k}(x) + xU_{2k+1}(x)}{(x+2)U_{2k}(x)U_{2k+1}(x)} \right. \\ & \quad \quad \quad \left. \times \frac{(x+1)(U_{2k-3}(x)U_{2k}(x) - U_{2k-1}(x)U_{2k-2}(x))}{U_{2k}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} \right] \\ &= - \left( \frac{x}{x+2} \right)^k (x+1)^{2k+2} \left[ \frac{-2x(x+1)^{2k-2}}{(x+2)(U_{2k}(x))^2 U_{2k+1}(x)} \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + \frac{(x+1)(x+2)U_{2k}(x) + xU_{2k+1}(x)}{(x+2)U_{2k}(x)U_{2k+1}(x)} \times \frac{-2(x+1)(x+1)^{2k-3}}{U_{2k}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} \right] \\ &= 2 \left( \frac{x}{x+2} \right)^k (x+1)^{4k} \frac{xU_{2k+1}(x) + (x^2 + 4x + 2)U_{2k}(x) + x(x+1)U_{2k-1}(x)}{(x+2)(U_{2k}(x))^2 U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))}. \end{aligned}$$

Et l'on peut finalement en déduire :

$$\begin{aligned} a_{2k+2}(x) &= \frac{(x+1)^2 \left( \frac{1}{2}xU_{2k-1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)U_{2k-2}(x) + \frac{1}{2}x(x+1)U_{2k-3}(x) \right)}{\frac{1}{2}xU_{2k+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)U_{2k}(x) + \frac{1}{2}x(x+1)U_{2k-1}(x)} \\ &= \frac{(x+1)^2 U_{2k}(x)}{\frac{1}{2}xU_{2k+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)U_{2k}(x) + \frac{1}{2}x(x+1)U_{2k-1}(x)}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant d'abord que le dénominateur  $Q_{2k+2}$  de cette fraction est normalisé. En effet, on peut aussi observer que  $\deg(U_n) = n$  pour tout  $n \in \llbracket 0; 2k+1 \rrbracket$  (par récurrence finie à partir des cinquième et sixième relations du (i)). Donc  $\deg(U_{2k-1}) = 2k-1$ ,  $\deg(U_{2k}) = 2k$  et  $\text{dom}(U_{2k}) = 1$  ; de sorte que  $Q_{2k+2}$  a pour coefficient dominant  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Remarquons ensuite qu'on peut établir la relation  $U_{2k-1}(x)Q_{2k+2}(x) - U_{2k}(x)U_{2k+1}(x) = 2(-1)^{2k-1}(x+1)^{2k-1}$  et qu'elle implique que  $Q_{2k+2}$  et  $U_{2k}$  sont premiers entre eux. En effet,  $-1$  n'est racine d'aucun des polynômes  $U_n$  pour  $n \in \llbracket 0; 2k+1 \rrbracket$  (ce qui se montre par récurrence finie en utilisant les deuxième, troisième et quatrième identités du (i)), donc il n'est pas non plus racine de  $Q_{2k+2}$ . Donc si  $\Delta$  est diviseur commun de  $Q_{2k+2}$  et  $U_{2k}$ , alors comme il divise le polynôme  $x \mapsto (x+1)^{2k-1}$ , il est nécessairement de degré 0. Ce qui implique à son tour que  $Q_{2k+2}$  et  $x \mapsto (x+1)^2 U_{2k}(x)$  sont premiers entre eux d'après le « lemme de Gauss ». On peut finalement en déduire que la fraction obtenue plus haut est irréductible et que :

$$U_{2k+2}(x) = \frac{1}{2}xU_{2k+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)U_{2k}(x) + \frac{1}{2}x(x+1)U_{2k-1}(x).$$

Dont se déduisent ensuite aussi :

$$U_{2k-1}(x)U_{2k+2}(x) - U_{2k}(x)U_{2k+1}(x) = 2(-1)^{2k-1}(x+1)^{2k-1}$$

$$(U_{2k}(x))^2 - U_{2k-2}(x)U_{2k+2}(x) = -2x(x+1)^{2k-2}$$

On procède de même pour établir  $U_{2k+3}(x)$  et les identités du (i) analogues aux deux précédentes. L'hérédité des autres expressions annoncées s'établit de manière similaire. Par exemple pour  $\beta_{2k+2}(x)$ , le numérateur de la fraction l'exprimant initialement s'écrit :

$$\begin{aligned} & -\beta_{2k+1}(x)(c_{2k+1}(x) - a_{2k+1}(x)) \\ &= \left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} \left( \frac{(x+1)^2(U_{2k-2}(x) + (x+1)U_{2k-3}(x))}{U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x)} - \frac{(x+1)^2U_{2k-1}(x)}{U_{2k+1}(x)} \right) \\ &= \left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k+2}}{U_{2k}(x)} \\ & \quad \times \frac{(U_{2k+1}(x)U_{2k-2}(x) - U_{2k-1}(x)U_{2k}(x)) + (x+1)(U_{2k+1}(x)U_{2k-3}(x) - (U_{2k-1}(x))^2)}{U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} \\ &= \left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k+2}}{U_{2k}(x)} \frac{2(x+1)^{2k-2} - 2(x+1)(x+2)(x+1)^{2k-3}}{U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} \\ &= -2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{4k+1}}{U_{2k}(x)U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))}. \end{aligned}$$

Le dénominateur initial est quant à lui :

$$\begin{aligned} c_{2k+1}(x) - b_{2k+1}(x) &= \frac{(x+1)^2(U_{2k-2}(x) + (x+1)U_{2k-3}(x))}{U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x)} - \frac{(x+1)^2U_{2k-2}(x)}{U_{2k}(x)} \\ &= (x+1)^2 \frac{(x+1)(U_{2k-3}(x)U_{2k}(x) - U_{2k-2}(x)U_{2k-1}(x))}{U_{2k}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} = \frac{-2(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))}. \end{aligned}$$

On en déduit bien :

$$\begin{aligned} \beta_{2k+2}(x) &= \left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} (x+1)^{2k+1} \frac{U_{2k}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))}{U_{2k}(x)U_{2k+1}(x)(U_{2k}(x) + (x+1)U_{2k-1}(x))} \\ &= \left(\frac{x}{x+2}\right)^{k+1} \frac{(x+1)^{2k+1}}{U_{2k+1}(x)}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant la linéarité du système récurrent formé par les cinquième et sixième identités du (i). Mais remarquons aussi que ce système ne permet pas tel quel une expression matricielle. Il apparaît nécessaire à cette fin de formuler ces identités en dimension 4 :

### Proposition 3

Soient  $(u_k)_{k \geq 0}$  et  $(v_k)_{k \geq 0}$  les suites définies par  $u_k = U_{2k}$  et  $v_k = U_{2k+1}$ . Pour tout  $x > 0$  :

$$\begin{cases} u_{k+2}(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)u_{k+1}(x) + \frac{1}{2}xv_{k+1}(x) + \frac{1}{2}x(x+1)v_k(x) \\ v_{k+2}(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x^2 + 6x + 4)u_{k+1}(x) + \frac{1}{4}(3x^2 + 10x + 4)v_{k+1}(x) + \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)v_k(x) \end{cases}.$$

$$\forall k \geq 0, Z_k(x) = (M(x))^k Z_0(x) \text{ où } \forall k \geq 0, Z_k(x) = \begin{pmatrix} u_{k+1}(x) \\ v_{k+1}(x) \\ u_k(x) \\ v_k(x) \end{pmatrix} \text{ et où}$$

$$M(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(x^2 + 4x + 2) & 2x & 0 & 2x(x + 1) \\ (x + 2)(x^2 + 6x + 4) & 3x^2 + 10x + 4 & 0 & x(x + 1)(x + 2) \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.** Le premier résultat est une conséquence des deux dernières équations de récurrence du (i) de la proposition 2. Le second en découle classiquement par formulation matricielle et par récurrence sur  $k$ .

Il s'agit désormais de déterminer le spectre de  $M(x)$ . Nous allons voir que cela va suffire pour atteindre les objectifs poursuivis, le calcul des puissances de  $M(x)$  n'étant pas nécessaire.

#### Proposition 4

Le spectre de  $M(x)$  est, pour tout  $x > 0$ , formé des quatre nombres réels positifs

$$0 ; \frac{1}{4}x(x + 2) ;$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 2 - \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x}\right) ; \frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 2 + \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x}\right).$$

La plus grande de ces valeurs propres, notée  $\lambda(x)$ , est la dernière.

**Démonstration.** Le polynôme caractéristique  $\chi_{M(x)}$  de  $M(x)$  tel qu'exprimé comme fonction d'une variable  $\gamma$  s'obtient à partir du développement selon la troisième colonne de  $\det(\gamma I_4 - M(x))$  :

$$\chi_{M(x)}(\gamma) = \gamma \begin{vmatrix} \gamma - \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2) & -\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x(x + 1) \\ -\frac{1}{4}(x + 2)(x^2 + 6x + 4) & \gamma - \frac{1}{4}(3x^2 + 10x + 4) & -\frac{1}{4}x(x + 1)(x + 2) \\ 0 & -1 & \gamma \end{vmatrix}$$

Notons  $L_j$  la  $j$ -ème ligne du déterminant précédent. En substituant  $L_2 - (x + 2)L_1 - (x + 1)L_3$  à  $L_2$ , on obtient après factorisation de la deuxième ligne ainsi obtenue par  $\left(\gamma - \frac{1}{4}x(x + 2)\right)$  que :

$$\chi_{M(x)}(\gamma) = \gamma \left(\gamma - \frac{1}{4}x(x + 2)\right) \begin{vmatrix} \gamma - \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2) & -\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x(x + 1) \\ -(x + 2) & 1 & (x + 1) \\ 0 & -1 & \gamma \end{vmatrix}$$

Les deux premières valeurs propres sont ainsi déterminées. Ne reste plus alors qu'à développer le dernier déterminant, qui est de degré 2 en  $\gamma$ , et à en obtenir les deux racines par utilisation classique des formules du second degré : ce sont les deux dernières valeurs propres annoncées. Il est enfin élémentaire de vérifier par signe de différences que toutes ces valeurs propres sont positives et que  $\lambda(x)$ , la plus grande, est la quatrième annoncée.

## 5. Analyse du système diagopentagonal des pentagones quadrisocèles

Après avoir ainsi exploré algébriquement le système  $(\Sigma)$ , il devient possible d'utiliser quelques arguments d'analyse pour être en mesure de conclure :

**Proposition 5**

Les trois suites de fractions rationnelles  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement vers une même fonction  $\ell$  de la variable  $x$ , qui est la fonction valeur propre

$$\ell : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{\lambda(x)} = \frac{1}{2} \left( x^2 + 4x + 2 - \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x} \right)$$

Démonstration. La proposition 4 (qui implique la diagonalisabilité de  $M(x)$ ) et un calcul matriciel élémentaire permettent d'affirmer que les solutions  $(u_k)$  du système récurrent formulé à la proposition 3 sont des combinaisons linéaires s'exprimant en tout  $x > 0$  fixé sous la forme

$$u_k(x) = f(x)(\lambda(x))^k + g(x) \left( \frac{1}{2} \left( x^2 + 4x + 2 - \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x} \right) \right)^k + h(x) \left( \frac{1}{4} x(x+2) \right)^k$$

où les fonctions  $f, g$  et  $h$  sont des fractions rationnelles strictement positives sur  $]0; +\infty[$ . Compte tenu de la définition de la valeur propre  $\lambda(x)$ , on a donc :

$$(x+1)^2 u_k(x) \sim_{k \rightarrow +\infty} (x+1)^2 f(x) (\lambda(x))^k \quad \text{et} \quad u_{k+1}(x) \sim_{k \rightarrow +\infty} f(x) (\lambda(x))^{k+1}.$$

D'où résulte :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 u_k(x)}{u_{k+1}(x)} = \frac{(x+1)^2}{\lambda(x)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 v_{k-1}(x)}{v_{k+1}(x)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1}(x).$$

L'existence de  $\ell$  est ainsi établie comme limite de la suite  $(a_n)$ . Que son expression corresponde à la troisième valeur propre formulée dans la proposition 4 résulte d'un calcul élémentaire d'identification. La convergence des suites  $(b_n)$  et  $(c_n)$  vers  $\ell$  résulte enfin des troisième et cinquième équations de récurrence de  $(\Sigma)$  et du fait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n(x) \beta_n(x) > 0$ .

**Proposition 6**

Les deux suites de fractions rationnelles  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement sur  $]0; +\infty[$  vers la fonction nulle.

Démonstration. D'après la proposition 2(ii) et la proposition 4, on a pour tout  $x > 0$  fixé :

$$\begin{aligned} \alpha_{2k}(x) &= \left( \frac{x}{x+2} \right)^k \frac{(x+1)^{2k}}{U_{2k}(x)} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2x)^{2k}}{f(x) \left( x^2 + 4x + 2 + \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x} \right)^{2k}} \\ &\sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} \left( \frac{2x}{2x + \left( x^2 + 2x + 2 + \sqrt{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x} \right)} \right)^{2k}. \end{aligned}$$

En découle  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_{2k+1}(x) = 0$  car la raison de la suite géométrique impliquée dans ce dernier équivalent appartient évidemment à  $]0; 1[$ . On obtient de même que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_{2k+1}(x) = 0$ . D'où la convergence de la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers la fonction nulle. Le résultat identique s'en déduit pour la suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation :  $\forall x > 0, \forall n \geq 1, \beta_n(x) = -\frac{x}{x+2} \alpha_{n-1}(x)$ .

## 6. Géométrie du système diagopentagonal des pentagones quadrisocèles

On dispose désormais, avec les propositions 5 et 6, des coordonnées  $(\ell(x); 0)$  dans le repère considéré du point limite  $L(x)$  de la suite diagopentagonale étudiée, précisé par le théorème de convergence diagopentagonale suivant :

**Théorème 3**

Soit  $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$  un pentagone quadrisocèle en  $A_1$  de paramètre  $x$ , et soit  $O$  l'intersection de  $(A_2A_4)$  et de  $(A_3A_5)$ . Alors la suite diagopentagonale de  $\mathcal{P}$  converge vers le point  $L(x)$  du segment  $[OA_1]$  de distance à  $O$  égale à

$$\frac{1}{2} \left( x(x+2) + 2(x+1) - \sqrt{x(x+2) \left( (x+3) + \sqrt{5} \right) \left( (x+3) - \sqrt{5} \right)} \right).$$

Il est ici encore entendu que la convergence annoncée s'entend au sens de celle de la suite des éléments de  $\mathbb{P}^5$  formés des sommets des termes de la suite diagopentagonale vers  $\{L(x)\}^5$ .

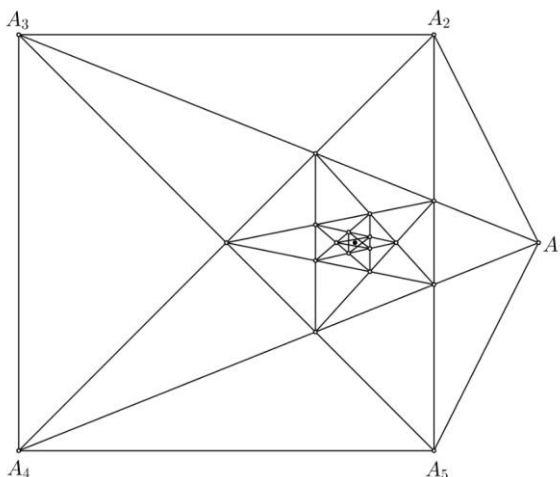


Figure 3 : Cas d'un pentagone quadrisocèle de paramètre  $x = 1/2$ . Ici,  $\ell\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(17 - \sqrt{145}) \approx 0,6198$ .

On peut désormais envisager d'exprimer  $L(x)$  comme barycentre des sommets de  $\mathcal{P}$ , avec l'ambition de formuler les coefficients barycentriques en termes purement géométriques. Le problème est que la connaissance de la fonction  $\ell$  ne suffit pas à déterminer les coefficients barycentriques de manière univoque. Plus précisément, si l'on note  $\omega_i(x)$  le coefficient normalisé du point  $A_i(x)$  pour tout  $i \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$ , alors pour d'évidentes raisons de symétrie :

$$\begin{cases} \omega_5(x) = \omega_2(x) \\ \omega_4(x) = \omega_3(x) \\ \omega_1(x) + \omega_2(x) + \omega_3(x) + \omega_4(x) + \omega_5(x) = 1 \\ (x+1)\omega_1(x) + \omega_2(x) - \omega_3(x) - \omega_4(x) + \omega_5(x) = \ell(x) \end{cases}$$

Et ce système a une infinité de solutions puisqu'il est équivalent au système de rang 4 :

$$\begin{cases} \omega_5(x) = \omega_2(x) \\ \omega_4(x) = \omega_3(x) \\ \omega_2(x) = \frac{1}{4}(1 + \ell(x) - (x+2)\omega_1(x)) \\ \omega_3(x) = \frac{1}{4}(1 - \ell(x) + x\omega_1(x)) \end{cases}$$

La question qui demeure en suspens est alors de savoir s'il existe une formulation aréolaire (ou d'un autre type géométrique) pour la fonction  $\omega_1$  dont la logique de construction serait identique à celle des quatre autres fonctions  $\omega_i$  qui s'en déduisent comme indiqué. On remarquera que, comme envisagé dans la section 3, les coefficients barycentriques seront toujours exprimables comme des combinaisons par sommes, produits et radicaux des nombres

$$1 = \text{aire}(A_1(x)A_2(x)A_3(x)), \quad 2 = \text{aire}(A_2(x)A_3(x)A_4(x)), \quad 4 = \text{aire}(A_2(x)A_3(x)A_4(x)A_5(x)), \\ x = \text{aire}(A_1(x)A_2(x)A_5(x)), \quad x+1 = \text{aire}(A_1(x)A_3(x)A_5(x)),$$

$$x + 2 = \text{aire}(A_1(x)A_3(x)A_4(x)) = \text{aire}(A_1(x)A_2(x)A_3(x)A_5(x)),$$

$$x + 3 = \text{aire}(A_1(x)A_2(x)A_3(x)A_4(x)) ; \quad x + 4 = \text{aire}(A_1(x)A_2(x)A_3(x)A_4(x)A_5(x))$$

La présence du nombre  $\sqrt{5}$  (mesure ici de la diagonale de quatre rectangles inscrits dans le carré  $A_2(x)A_3(x)A_4(x)A_5(x)$ ) et d'un radical de produit de quatre facteurs polynomiaux dans la formulation de  $\ell(x)$  peut suggérer l'utilisation de la formule de Héron ou, plus généralement, que le calcul des coefficients barycentriques porte plus directement sur des longueurs (éventuellement des périmètres), et non sur des aires. Aucune formulation géométrique respectant les conditions précédentes n'a en tout état de cause encore été déterminée, et rien n'assure d'ailleurs *a priori* qu'une telle formulation existe. Par contre, l'expression de  $\ell(x)$  assure que le point limite  $L(x)$  est constructible à la règle et au compas à partir des sommets du pentagone initial, ce qui confère malgré tout un caractère géométrique à la solution ainsi obtenue.

## 7. Vers une solution du problème dans le cas général

Nous avons trouvé une solution algébrique à (P) dans le cas des pentagones quadrisocèles. La démarche adoptée pour y parvenir est-elle transposable pour résoudre le cas général ? Nous pouvons bien, également dans ce cas, entreprendre les calculs barycentriques qui ont conduit au système  $(\Sigma)$ . La « seule » différence est qu'en l'absence de symétrie de  $\mathcal{P}$  et donc de repère privilégié (mais en ayant choisi trois des sommets de  $\mathcal{P}$  pour en former un), le système récurrent non linéaire obtenu  $(\Sigma')$  comprendra *a priori* dix équations de récurrence impliquant dix suites inconnues et quatre paramètres (les conditions initiales, soumises à contraintes de stricte convexité, qui fixent les deux derniers sommets de  $\mathcal{P}$ ). Ce qui, au vu de tout ce qui précède, est prometteur de grandes complications algébriques, quand bien même on peut faire avec une certaine confiance l'hypothèse de la possibilité de déceler ici encore l'existence d'une linéarité sous-jacente à  $(\Sigma')$ . Une première question peut alors surgir : cette complication ne serait-elle pas la traduction d'une approche géométrique inadéquate ? Plus précisément, ne serait-ce pas dans les points de vue purement affine et barycentrique adoptés au départ qu'elle s'enracine ?

Le succès obtenu dans ces cas de quadrisocélie peut aussi susciter une seconde question plus positive mais liée à la précédente, qui va s'avérer cruciale : existe-t-il une transformation géométrique (préservant par nécessité les alignements) qui permettrait de transférer ce succès vers le cas général, quitte à briser un peu la symétrie du cas résolu en s'autorisant à faire varier le point  $A_1$  sur un domaine plus étendu que l'axe des abscisses (auquel cas il faudrait tout de même au préalable généraliser le résultat obtenu à deux variables respectant les contraintes de convexité) ? Un domaine de la géométrie est fameux pour permettre bien souvent de réaliser le « miracle » de démontrer de manière relativement concise la généralité de résultats compliqués de géométrie affine par simple preuve préalable de ces résultats sur des configurations simples : le domaine de la géométrie projective. Et précisément, la partie 2 de cet article montrera que certaines homographies du plan projectif permettent de fournir une réponse positive à la question posée. Cette excursion dans le plan projectif apparaît sinon nécessaire, du moins fort efficace afin de réduire la complexité d'une résolution qui, par nécessité, restera toutefois essentiellement algébrique et analytique. Nous aboutirons alors à la preuve que la limite de la suite diagopentagonale de tout pentagone strictement convexe  $\mathcal{P}$  est l'unique point fixe intérieur à  $\mathcal{P}$  d'une certaine homographie uniquement déterminée par  $\mathcal{P}$ , qui sera précisée ([4]).

## 8. Conclusion

Le problème (P) a reçu ici une solution algébrique dans une infinité de cas particuliers, ceux des pentagones quadrisocèles. Cette solution n'a pas pu aboutir à une formulation purement géométrique. Mais la réflexion sur la démarche utilisée pour y parvenir, sur ses limitations et sur

la manière dont elle pourrait ou non être généralisée à tous les pentagones convexes a permis d'entrevoir un changement de perspective prometteur sur le problème, dont la seconde partie de cet article développera toutes les conséquences jusqu'à aboutir à cette généralisation.

La résolution de (P) pour les pentagones quadrisocèles a aussi ses esthétiques et intérêts propres. D'une part en raison des synergies entre géométries (affine et vectorielle), algèbres (polynomiale et matricielle) et analyse (topologie) qui s'y déploient, ces synergies contribuant à inspirer et structurer la démarche même de recherche. D'autre part par l'étude de système dynamique discret non linéaire qu'elle entreprend, type de systèmes qui ne sont que rarement accessibles à une résolution explicite : est fourni ici un exemple de la possibilité de révéler une linéarité cachée dans l'enchevêtrement des relations définissant un tel système, et accessoirement illustrée dans cette circonstance, s'il en était encore besoin, l'efficacité de l'algèbre linéaire.

## Bibliographie

- [1] Bouis V., « Des probabilités aux suites barypolygonales », *Quadrature*, n°105, 2017, pp. 30-38.
- [2] Cho J. & al., « On the polygon determined by the short diagonals of a convex polygon », 2018 : <https://arxiv.org/pdf/1812.07682.pdf>
- [3] Pouvreau D., Eupherte R., « Suites barypolygonales quelconques », *Quadrature*, n°102, 2016, pp. 32-43.
- [4] Pouvreau D., Tournès D., « Suites diagopentagonales – Partie 2 : le cas général », *Quadrature*, n° 131, 2024 (à paraître).