



HAL
open science

Intégration de mesures de distance entre agents de corrélation inconnue : cas unidimensionnel

Colin Cros, Pierre-Olivier Amblard, Christophe Prieur, Jean-François Da
Rocha

► **To cite this version:**

Colin Cros, Pierre-Olivier Amblard, Christophe Prieur, Jean-François Da Rocha. Intégration de mesures de distance entre agents de corrélation inconnue : cas unidimensionnel. GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Aug 2023, Grenoble, France. hal-04381665

HAL Id: hal-04381665

<https://hal.science/hal-04381665>

Submitted on 11 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Intégration de mesures de distance entre agents de corrélation inconnue : cas unidimensionnel

Colin CROS^{1,2}, Pierre-Olivier AMBLARD¹, Christophe PRIEUR¹, Jean-François DA ROCHA²

¹Univ. Grenoble Alpes, CNRS, GIPSA-Lab, F-38000 Grenoble

²Telespazio FRANCE, F-31100 Toulouse

colin.cros@gipsa-lab.fr, pierre-olivier.amblard@cnrs.fr
christophe.prieur@gipsa-lab.fr, jeanfrancois.darocho@telespazio.com

Résumé – Ce papier porte sur le positionnement collaboratif par mesures de distance inter-agents. Nous définissons et étudions le filtre linéaire optimal pour des mesures de distance entre agents évoluant sur une droite et dont les corrélations entre les estimateurs ne sont pas connues. Ce filtre adopte une approche minimax : il minimise l’erreur quadratique pour la pire corrélation possible. Son étude montre que dans certains cas, il vaut mieux ne pas utiliser les mesures.

Abstract – This paper focuses on collaborative positioning using inter-agent distance measurements. We define and study the optimal linear filter for distance measurements between agents moving on a line and whose correlations between estimators are not known. This filter adopts a minimax approach: it minimizes the squared error for the worst possible correlation. Its study shows that in some cases, it is better not to use the measures.

1 Introduction

Dans un système de positionnement, les agents estiment traditionnellement leur position en se repérant par rapport à des points de repère (satellites GNSS, antennes radio, amers, etc.). Dans certaines situations, notamment en intérieur ou en centre-ville, les liaisons avec ces points de repère sont plus difficiles et la précision du positionnement en pâtit. Pour limiter la perte de précision, des systèmes coopératifs peuvent être utilisés [5]. Une méthode simple de coopération est la mesure de distances entre agents. Les agents transmettent à leurs voisins leur position estimée et l’incertitude associée. Ils mesurent ensuite les distances à leurs voisins qui deviennent alors de nouveaux points de repère.

La difficulté de ce type de coopération provient de la méconnaissance des covariances croisées entre les estimateurs des agents. Elles interviennent dans le calcul du gain optimal et de la covariance après filtrage. Malheureusement, dans les réseaux comportant de grands nombres d’agents, il est impossible d’estimer, et donc d’utiliser, ces covariances croisées à cause des coûts de calculs et de communication. Négliger ces corrélations (en les considérant nulles ou maximales) engendrent des sous-estimations des erreurs et potentiellement la divergence des filtres. Afin de ne pas sous-estimer les erreurs, les agents doivent utiliser des filtres *consistants*. Ces filtres majorent la covariance après filtrage en considérant toutes les covariances croisées possibles. La recherche du filtre consistant optimal est un problème d’optimisation convexe reposant sur une approche minimax, voir par exemple [3].

Dans cette étude, nous étudions le filtrage de mesures de distance entre agents évoluant sur une droite. Bien que peu réaliste, cette situation permet d’apprécier les comportements spécifiques des filtres consistants. Nous formulons, dans la section 2, le problème du filtrage optimal pour un agent mesurant des distances avec d’autres agents alliés mais ignorant les corrélations avec et entre ses alliés. Au-delà de la résolution du problème présentée en section 3, nous étudions dans la section 4 l’utilité des mesures : nous montrons que dans certains cas, il vaut mieux ne pas les utiliser. Les résultats sont discutés dans la section 5, puis nous terminons en abordant l’extension de ces travaux pour des agents évoluant dans des espaces de dimensions supérieures dans la section 6.

2 Problème

Notations. Dans la suite, les variables aléatoires sont notées en minuscules grasses, par exemple z , les vecteurs sont soulignés, par exemple \underline{k} , et les matrices en majuscules grasses, par exemple H .

On considère $n + 1$ agents, indexés de 0 à n , caractérisés par leurs positions $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dans toute l’étude, nous nous concentrons uniquement sur l’estimation de la position de l’agent 0. Chaque agent dispose d’un estimateur non biaisé de sa position, noté \hat{x}_i , de variance σ_i^2 connue. On note $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_i$ les erreurs des estimateurs, elles satisfont donc : $E[\tilde{x}_i] = 0$ et $E[\tilde{x}_i^2] = \sigma_i^2$. Les corrélations entre les estimateurs $\rho_{i,j} = (\sigma_i \sigma_j)^{-1} E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j]$ sont en revanche inconnues. On note $R =$

$(\rho_{i,j})$ la matrice de corrélation. Comme les corrélations sont inconnues, l'unique hypothèse sur \mathbf{R} est qu'elle appartient à l'ensemble \mathcal{R} des corrélations possibles : l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives de diagonale unitaire.

On considère également n mesures des distances (signées) entre l'agent 0 et les n autres :

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i, \quad (1)$$

où \mathbf{v}_i est un bruit centré de variance η_i^2 connue. Ces bruits sont supposés indépendants deux à deux et indépendants de chacune des erreurs d'estimation $\tilde{\mathbf{x}}_i$.

L'objectif est de créer un nouvel estimateur $\hat{\mathbf{x}}_F$ pour la position \mathbf{x}_0 aussi précis que possible en filtrant les mesures \mathbf{z}_i . Ce nouvel estimateur est recherché comme une combinaison linéaire des mesures \mathbf{z}_i et des estimateurs $\hat{\mathbf{x}}_i$. On cherche à minimiser l'erreur quadratique moyenne (MSE) d'estimation $E[\tilde{\mathbf{x}}_F^2]$, où $\tilde{\mathbf{x}}_F = \hat{\mathbf{x}}_F - \mathbf{x}_0$. Comme un biais augmenterait la MSE, l'estimateur $\hat{\mathbf{x}}_F$ est recherché non biaisé. Il est défini par n gains $\underline{k} = (k_1 \ \dots \ k_n)^\top \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{\mathbf{x}}_F = \hat{\mathbf{x}}_0 + \sum_{i=1}^n k_i [\mathbf{z}_i - (\hat{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_i)]. \quad (2)$$

En introduisant, $k_0 = 1 - \sum_{i=1}^n k_i$, (2) se ré-écrit :

$$\hat{\mathbf{x}}_F = k_0 \hat{\mathbf{x}}_0 + \sum_{i=1}^n k_i (\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{z}_i) \quad (3)$$

L'équation (2) présente la forme classique d'une correction : les k_i sont les gains de correction et les $\mathbf{z}_i - (\hat{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_i)$ sont les innovations des mesures. De son côté, l'équation (3) représente la fusion de $n + 1$ estimateurs de la position \mathbf{x}_0 : en effet, les $\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{z}_i$ peuvent aussi être considérés comme des estimateurs de la position \mathbf{x}_0 .

La variance de l'estimateur $\hat{\mathbf{x}}_F$, notée σ_F^2 , dépend du gain \underline{k} et de la matrice de corrélation \mathbf{R} . En utilisant la forme (3), elle s'exprime par :

$$\sigma_F^2(\underline{k}, \mathbf{R}) = \sum_{i=0}^n k_i^2 (\sigma_i^2 + \eta_i^2) + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} k_i k_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \quad (4)$$

où $\eta_0 = 0$ a été introduit pour simplifier l'écriture. On dit qu'une paire (\underline{k}, s_F) , constituée d'un gain \underline{k} et d'une variance s_F , constitue un filtre *consistant* si $\forall \mathbf{R} \in \mathcal{R}$, $s_F \geq \sigma_F^2(\underline{k}, \mathbf{R})$. En d'autres termes, la variance s_F garantit de ne pas sous-estimer la MSE. Ne connaissant pas \mathbf{R} , notre objectif est de trouver le meilleur filtre consistant, c'est-à-dire celui ayant la plus petite variance s_F . Posons $g : \underline{k} \mapsto \max_{\mathbf{R} \in \mathcal{R}} \sigma_F^2(\underline{k}, \mathbf{R})$, le problème considéré dans ce papier est le suivant.

$$\underset{\underline{k} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} g(\underline{k}). \quad (\text{P}_1)$$

On notera \underline{k}^* la solution de (P₁) et $s_F^* = g(\underline{k}^*)$. L'estimateur optimal après filtrage $\hat{\mathbf{x}}_F^*$ est obtenu par (2) avec le gain \underline{k}^* et sa variance est majorée par s_F^* . La variance s_F^* n'est pas la variance réelle de l'estimateur, $E[(\tilde{\mathbf{x}}_F^*)^2]$, celle-ci n'est pas calculable sans connaître les corrélations, mais son plus petit majorant possible.

3 Résolution

Nous allons simplifier (P₁) en montrant que sa solution appartient à un ensemble \mathcal{K} et en explicitant la fonction g sur \mathcal{K} . Définissons \mathcal{K} comme le simplexe :

$$\mathcal{K} = \left\{ \underline{k} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, k_i \geq 0; \sum_{i=1}^n k_i \leq 1 \right\}. \quad (5)$$

L'inégalité $\sum_{i=1}^n k_i \leq 1$ équivaut à avoir le gain k_0 introduit dans (3) également positif. Tout gain $\underline{k} \in \mathcal{K}$ satisfait donc (i) $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, k_i \geq 0$ et (ii) $\sum_{i=0}^n k_i = 1$. Ainsi d'après (3), un gain $\underline{k} \in \mathcal{K}$ engendre un estimateur $\hat{\mathbf{x}}_F$ comme une combinaison convexe de $\hat{\mathbf{x}}_0$ et des estimateurs $\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{z}_i$.

D'après (4), sur \mathcal{K} , la variance $\sigma_F^2(\underline{k}, \mathbf{R})$ est maximale lorsque tous les $\rho_{i,j} = 1$, c'est-à-dire lorsque tous les estimateurs sont parfaitement corrélés. On a donc $\forall \underline{k} \in \mathcal{K}$,

$$g(\underline{k}) = \sigma_F^2(\underline{k}, \underline{e}\underline{e}^\top) \quad (6)$$

où \underline{e} est le vecteur dont toutes les composantes sont 1. Montrons à présent que le lemme suivant.

Lemme 1. *La solution \underline{k}^* de (P₁) appartient à \mathcal{K} .*

Démonstration. Nous allons montrer que si $\underline{k} \notin \mathcal{K}$, alors il existe $\underline{k}' \in \mathcal{K}$ tel que $g(\underline{k}) > g(\underline{k}')$.

Soit $\underline{k} \notin \mathcal{K}$. En notant toujours $k_0 = 1 - \sum_{i=1}^n k_i$, il existe $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $k_i < 0$. Posons \underline{k}^+ le vecteur dont les composantes sont $k_i^+ = \max(0, k_i)$, $C = \sum_{i=0}^n k_i^+$ et $\underline{k}' = \frac{1}{C} \underline{k}^+$. Par construction, $\underline{k}' \in \mathcal{K}$ et $C > \sum_{i=0}^n k_i = 1$. Considérons alors la matrice de corrélation $\mathbf{R}_0 = (r_{i,j})$ définie par :

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \in \mathcal{I}^+; \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (7)$$

où $\mathcal{I}^+ = \{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid k_i \geq 0\}$.

Par définition de g , $g(\underline{k}) \geq \sigma_F^2(\underline{k}, \mathbf{R}_0)$. Or :

$$\begin{aligned} \sigma_F^2(\underline{k}, \mathbf{R}_0) &= \sum_{i=0}^n k_i^2 (\sigma_i^2 + \eta_i^2) + 2 \sum_{i,j \in \mathcal{I}^+ \mid i < j} k_i k_j \sigma_i \sigma_j \\ &> \sum_{i \in \mathcal{I}^+} k_i^2 (\sigma_i^2 + \eta_i^2) + 2 \sum_{i,j \in \mathcal{I}^+ \mid i < j} k_i k_j \sigma_i \sigma_j \\ &= C^2 g(\underline{k}') > g(\underline{k}'). \end{aligned}$$

Ainsi $g(\underline{k}) \geq \sigma_F^2(\underline{k}, \mathbf{R}_0) > g(\underline{k}')$, d'où $\underline{k}^* \in \mathcal{K}$. \square

Posons alors $q : \underline{k} \mapsto \sigma_F^2(\underline{k}, \underline{e}\underline{e}^\top)$ définie par :

$$q(\underline{k}) = \left[\sigma_0 - \sum_{i=1}^n k_i (\sigma_0 - \sigma_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^n k_i^2 \eta_i^2 \quad (8)$$

D'après (6), les fonctions g et q coïncident sur \mathcal{K} et d'après le lemme 1, $\underline{k}^* \in \mathcal{K}$. Le problème (P₁) est donc équivalent au problème suivant.

$$\underset{\underline{k} \in \mathcal{K}}{\text{minimiser}} q(\underline{k}), \quad (\text{P}_2)$$

La minimisation d'une forme quadratique sur un simplexe est un problème trivial pour les outils d'optimisation convexe [1]. En revanche, il n'existe à notre connaissance aucune solution explicite à un tel problème. Nous nous contenterons dans la suite de commenter l'*utilité* des estimateurs intervenant dans (3).

4 Utilité des estimateurs

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'utilité des estimateurs \hat{x}_i pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Un estimateur \hat{x}_i sera considéré comme inutile si $k_i^* = 0$, et utile dans le cas contraire. En effet, d'après (3), si $k_i^* = 0$, l'estimateur \hat{x}_i n'intervient pas dans la définition de l'estimateur optimal \hat{x}_F^* . Bien que \underline{k}^* ne soit pas explicitement exprimable, nous pouvons statuer dans certains cas sur la nullité de ses composantes. Pour cela nous allons étudier la forme quadratique q .

Afin de compresser les notations, on pose : $\mathbf{H} = \text{diag}(\eta_i)$ la matrice diagonale dont les coefficients sont les η_i , $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des σ_i et $\underline{s} = \sigma_0 \underline{e} - \underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur dont les composantes sont $s_i = \sigma_0 - \sigma_i$. Avec ces notations, la forme quadratique q , son gradient ∇q et son minimum $\bar{\underline{k}}$ sur \mathbb{R}^n s'écrivent :

$$q(\underline{k}) = \underline{k}^\top (\mathbf{H}^2 + \underline{s}\underline{s}^\top) \underline{k} - 2\sigma_0 \underline{s}^\top \underline{k} + \sigma_0^2 \quad (9)$$

$$\nabla q(\underline{k}) = 2(\mathbf{H}^2 + \underline{s}\underline{s}^\top) \underline{k} - 2\sigma_0 \underline{s} \quad (10)$$

$$\bar{\underline{k}} = \sigma_0 (\mathbf{H}^2 + \underline{s}\underline{s}^\top)^{-1} \underline{s} = \frac{\sigma_0 \mathbf{H}^{-2} \underline{s}}{1 + \underline{s}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{s}} \quad (11)$$

4.1 Utilité d'une mesure

Dans ce paragraphe, nous étudions l'intérêt des mesures, c'est-à-dire l'utilité des estimateurs \hat{x}_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le résultat principal est le lemme suivant.

Lemme 2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $\sigma_i \geq \sigma_0$, alors $k_i^* = 0$.

Démonstration. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, supposons $\sigma_i \geq \sigma_0$. La dérivée partielle de q par rapport à k_i est $\nabla q(\underline{k})^\top \underline{e}_i$ où \underline{e}_i est le i -ème vecteur de la base canonique. Pour tout $\underline{k} \in \mathcal{K}$:

$$\nabla q(\underline{k})^\top \underline{e}_i = 2(\sigma_i - \sigma_0) \sum_{j=0}^n k_j \sigma_j + 2k_i \eta_i^2 \geq 0.$$

Par conséquent, le minimum sur \mathcal{K} satisfait $k_i^* = 0$. \square

Le lemme 2 indique que si un agent i est moins précis que l'agent 0, alors l'intégration d'une mesure avec cet agent est inutile. On notera en particulier que la précision de la mesure n'intervient pas dans la condition. Si $\sigma_0 \leq \sigma_i$, même une mesure parfaite (c'est-à-dire avec $\eta_i = 0$) est inutile.

4.2 Utilité de l'estimateur \hat{x}_0

Nous étudions à présent l'utilité de l'estimateur \hat{x}_0 . Le lemme 2 a montré que les estimateurs moins précis que \hat{x}_0 sont inutiles. On supposera donc dans ce paragraphe que les n autres estimateurs sont tous strictement plus précis : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma_i < \sigma_0$. Le gain issu de $\bar{\underline{k}}$ associé à \hat{x}_0 dans (3) est :

$$\bar{k}_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \bar{k}_i = \frac{1 - \underline{\sigma}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{s}}{1 + \underline{s}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{s}}. \quad (12)$$

Le résultat principal est le lemme suivant.

Lemme 3. Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma_i < \sigma_0$. Alors, $k_0^* > 0$ si et seulement si $\bar{k}_0 > 0$. De plus, si la condition est satisfaite, alors $\underline{k}^* = \bar{\underline{k}}$.

Démonstration. Si $\bar{\underline{k}} \in \mathcal{K}$, alors c'est la solution de (P₂). Comme $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_i = \sigma_0 - \sigma_i > 0$, d'après (11), $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\bar{k}_i > 0$. Par conséquent, $\bar{\underline{k}} \in \mathcal{K}$ si et seulement si $\bar{k}_0 \geq 0$. Si $\bar{k}_0 > 0$, alors $\bar{\underline{k}} \in \mathcal{K}$. Dans ce cas, $\underline{k}^* = \bar{\underline{k}}$ et $k_0^* > 0$.

À l'inverse, supposons $\bar{k}_0 \leq 0$. Nous allons montrer que le gradient de q est négatif dans une direction \underline{u} aux composantes $u_i > 0$. Cela implique que le minimum est atteint sur la face du simplexe : $\sum_{i=1}^n k_i = 0$. En effet, sinon pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on aurait $\underline{k}^* + \varepsilon \underline{u} \in \mathcal{K}$ et $q(\underline{k}^* + \varepsilon \underline{u}) < q(\underline{k}^*)$.

Comme $\underline{s} = \sigma_0 \underline{e} - \underline{\sigma}$, le gradient (10) se réécrit :

$$\nabla q(\underline{k}) = (\mathbf{H}^2 - \underline{s}\underline{s}^\top) \underline{k} - \sigma_0(1 - \underline{k}^\top \underline{e}) \underline{s}$$

Considérons alors $\underline{u} = \mathbf{H}^{-2} \underline{\sigma}$, $u_i = \frac{\sigma_i}{\eta_i^2} > 0$. Comme $\underline{s}^\top \underline{u} > 0$ et $1 - \underline{k}^\top \underline{e} = k_0$, $\forall \underline{k} \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} \nabla q(\underline{k})^\top \underline{u} &\leq \underline{k}^\top (\mathbf{H}^2 - \underline{s}\underline{s}^\top) \underline{u} \\ &= (1 - \underline{s}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{\sigma}) \underline{k}^\top \underline{\sigma}. \end{aligned}$$

Or $\underline{k}^\top \underline{\sigma} \geq 0$ sur \mathcal{K} et d'après (12), l'hypothèse $\bar{k}_0 \leq 0$ implique que $1 - \underline{s}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{\sigma} \leq 0$. On a donc $\forall \underline{k} \in \mathcal{K}$, $\nabla q(\underline{k})^\top \underline{u} \leq 0$. D'où $k_0^* = 0$. \square

La condition $\bar{k}_0 > 0$ dans le lemme 3 se reformule $\sigma_0 < \sigma_s$ où σ_s est un seuil défini par :

$$\sigma_s = \frac{1 + \underline{\sigma}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{\sigma}}{\underline{e}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{\sigma}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{\eta_i^2} \right)^{-1} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\eta_i^2} \right). \quad (13)$$

Le lemme énonce que si σ_0 est plus grand que ce seuil, alors $k_0^* = 0$ ce qui signifie que l'estimateur \hat{x}_0 est inutile.

4.3 Cas particulier : une seule mesure

Dans le cas où $n = 1$, le problème est explicitement résoluble. Il n'y a qu'un seul gain à trouver : k_1^* (puis $k_0^* = 1 - k_1^*$).

Si $\sigma_0 \leq \sigma_1$, d'après le lemme 2, $k_1^* = 0$ et $s_F^* = \sigma_0^2$.

Si $\sigma_0 \geq \sigma_s = \sigma_1 + \frac{\eta_1^2}{\sigma_1}$, d'après le lemme 3, $k_0^* = 0$ donc $k_1^* = 1$ et $s_F^* = \sigma_1^2$.

Enfin, si $\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_1 + \frac{\eta_1^2}{\sigma_1}$, alors $\bar{k}_1 \in [0, 1] = \mathcal{K}$. Dans ce cas, $k_1^* = \bar{k}_1 = \frac{\sigma_0(\sigma_0 - \sigma_1)}{\eta_1^2 + (\sigma_0 - \sigma_1)^2}$ et $s_F^* = \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2 + (\sigma_0 - \sigma_1)^2} \sigma_0^2$.

5 Discussions

La conséquence principale du lemme 2 est qu'une mesure peut être inutile. D'après le lemme 2, pour une mesure réalisée vers un agent moins précis que l'agent d'intérêt, c'est-à-dire avec $\sigma_i \geq \sigma_0$, la meilleure stratégie consiste à lui associer un gain nul, ce qui revient à ne pas considérer cette mesure. C'est une différence majeure avec le cas usuel où les corrélations entre les estimateurs des agents sont connues.

Par exemple, considérons qu'il n'y ait qu'un seul autre agent ($n = 1$). Si la corrélation $\rho_{0,1}$ entre $\hat{\mathbf{x}}_0$ et $\hat{\mathbf{x}}_1$ était connue, le gain optimal et la variance après filtrage s'obtiendraient à partir du filtre de Kalman. Ils sont donnés par :

$$k_1^{\text{Kal}} = \frac{\sigma_0(\sigma_0 - \rho_{0,1}\sigma_1)}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{0,1}\sigma_0\sigma_1 + \eta_1^2}, \quad (14)$$

$$(\sigma_F^2)^{\text{Kal}} = \left[1 - \frac{(\sigma_0 - \rho_{0,1}\sigma_1)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 - 2\rho_{0,1}\sigma_0\sigma_1 + \eta_1^2} \right] \sigma_0^2. \quad (15)$$

Hormis dans le cas où $\sigma_0 = \rho_{0,1}\sigma_1$, le gain de Kalman est toujours non nul et $(\sigma_F^2)^{\text{Kal}} < \sigma_0^2$. En d'autres termes, lorsque la corrélation est connue, il est *presque* toujours possible de créer un meilleur estimateur en filtrant la mesure. Évidemment, plus σ_1^2 est grand, moins grande est l'amélioration, mais elle existe tout de même. Lorsque la corrélation est inconnue, ce n'est pas le cas : comme montré dans la section 4.3, pour avoir une amélioration, il faut et il suffit que $\sigma_1 < \sigma_0$.

De manière analogue, le lemme 3 montre que lorsque la variance de l'estimateur $\hat{\mathbf{x}}_0$ est trop grande, cet estimateur est *oublié*, c'est-à-dire qu'il n'apparaît plus dans l'expression du filtre optimal $\hat{\mathbf{x}}_F^*$. Comme pour les autres gains, on notera que dans le cas classique où les corrélations sont connues, le gain k_0^{Kal} n'est *presque* jamais nul. La condition $\bar{k}_0 > 0$ s'exprime géométriquement. Comme $1 - \underline{\sigma}^\top \mathbf{H}^{-2} \underline{s} = \text{Det}(\mathbf{H}^2 - \underline{s}\underline{\sigma}^\top) \text{Det} \mathbf{H}^{-2}$, d'après (12), $\bar{k}_0 > 0$ si et seulement si :

$$\text{Det}(\mathbf{H}^2 - \underline{s}\underline{\sigma}^\top) = \text{Det}(\mathbf{H}^2 + \underline{\sigma}\underline{\sigma}^\top - \sigma_0 \underline{e}\underline{e}^\top) > 0. \quad (16)$$

La fonction $x \mapsto \text{Det}(\mathbf{H}^2 + \underline{\sigma}\underline{\sigma}^\top - x \underline{e}\underline{e}^\top)$ est affine, le seuil σ_s est son zéro. Il s'interprète comme la distance de l'hyperplan formé par les points $\eta_i^2 \underline{e}_i + \sigma_i \underline{\sigma}$ dans la direction $\underline{\sigma}$.

À la place d'étudier le problème (P₁), nous aurions pu inverser le min et le max afin d'étudier le problème suivant :

$$\text{maximiser}_{\mathbf{R} \in \mathcal{R}} \min_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n} \sigma_F^2(\mathbf{k}, \mathbf{R}). \quad (\text{P}_3)$$

Comme la fonction σ_F^2 est convexe par rapport à \mathbf{k} (c'est une forme quadratique) et concave (linéaire) par rapport à \mathbf{R} , d'après le théorème du minimax de von Neumann, voir par exemple [1], les problèmes (P₁) et (P₃) ont la même solution. Pour une corrélation donnée, le gain optimal est le gain de Kalman. Le problème (P₃) s'interprète donc comme la recherche du pire cas pour un filtre de Kalman. On notera toutefois que l'ensemble \mathcal{R} des corrélations possibles n'est pas simple à étudier.

6 Extension en dimensions supérieures

Ce papier considère des agents évoluant sur une droite. En pratique, ils évoluent souvent dans le plan ou l'espace. Le passage vers une dimension $d \geq 2$ lève plusieurs difficultés. Tout d'abord, les mesures doivent être linéarisées suivant les directions $\underline{u}_i = \frac{\underline{x}_0 - \underline{x}_i}{\|\underline{x}_0 - \underline{x}_i\|} \in \mathbb{R}^d$. De plus, elles n'informent sur la position \underline{x}_0 que dans ces directions. L'estimateur linéaire $\hat{\mathbf{x}}_F$ devient alors :

$$\hat{\mathbf{x}}_F = \hat{\mathbf{x}}_0 + \sum_{i=1}^n k_i [z_i - \underline{u}_i^\top (\hat{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_i)], \quad (17)$$

où les gains sont à présent des vecteurs, $\mathbf{K} = (k_1 \ \cdots \ k_n)$. Cet estimateur s'exprime également comme une fusion :

$$\hat{\mathbf{x}}_F = \left(\mathbf{I}_n - \sum_{i=1}^n k_i \underline{u}_i \underline{u}_i^\top \right) \hat{\mathbf{x}}_0 + \sum_{i=1}^n k_i \underline{u}_i \underline{u}_i^\top (\hat{\mathbf{x}}_i + z_i \underline{u}_i). \quad (18)$$

La covariance de cet estimateur est une matrice semi-définie positive, $\mathbf{P}_F \in \mathbb{R}^{d \times d}$. La comparaison de variances est triviale dans \mathbb{R} , mais en dimension supérieure comme l'ordre Loewner n'est pas complet, il faut choisir une fonction de coût J (généralement la trace ou le déterminant). Ne pas sous-estimer l'erreur signifie utiliser une matrice de covariance plus grande, au sens de Loewner, que toutes les matrices possibles. Le problème de la recherche d'un gain optimal devient alors :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{S}_F \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{d \times n}} J(\mathbf{S}_F) \\ & \text{avec } \forall \mathbf{R} \in \mathcal{R}, \quad \mathbf{S}_F \succeq \mathbf{P}_F(\mathbf{K}, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (\text{P}_4)$$

Une paire $(\mathbf{K}, \mathbf{S}_F)$ satisfaisant la condition du problème (P₄) définit un filtre *consistant*, c'est-à-dire un filtre qui ne sous-estime pas la covariance. \mathbf{K} est le gain du filtre et \mathbf{S}_F la covariance après filtrage qui majore la covariance réelle.

Dans [2], nous nous intéressons à la restriction de (P₄) à 2 agents. Nous étudions une famille de filtres consistants obtenus par la méthode d'Intersection de Covariances Fractionnées (*Split Covariance Intersection* en anglais) [4]. Cette méthode propose un gain \underline{k}_1 proportionnel à $\mathbf{P}_0 \underline{u}_1$, où $\mathbf{P}_0 = \text{E}[\underline{\mathbf{x}}_0 \underline{\mathbf{x}}_0^\top]$, et une matrice de covariance \mathbf{S}_F satisfaisant la consistance. Nous conjecturons que la solution de (P₄) appartient à cette famille si la fonction de coût J est croissante (au sens de Loewner). Nous montrons un résultat analogue au lemme 2 : on note $\sigma_i^2 = \text{E}[(\underline{u}_i^\top \underline{\mathbf{x}}_i)^2]$, pour $i \in \{0, 1\}$, les variances des deux estimateurs dans la direction de la mesure, si $\sigma_0 \leq \sigma_1$, alors la mesure est inutile, c-à-d $\underline{k}_1^* = \underline{0}$. En revanche, à la différence du cas unidimensionnel, la condition n'est que nécessaire : pour avoir $\underline{k}_1^* > 0$, avoir $\sigma_1 < \sigma_0$ ne suffit pas. Dans [2], nous explicitons les conditions (plus fortes) nécessaires et suffisantes lorsque la fonction de coût J est la trace ou le déterminant.

Références

- [1] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [2] C. Cros, P.-O. Amblard, C. Prieur, and J.-F. Da Rocha. Fusion of distance measurements between agents with unknown correlations. *IEEE Control Systems Letters*, 2023.
- [3] R. Forsling, A. Hansson, F. Gustafsson, Z. Sjanic, L. Johan, and G. Hendeby. Conservative linear unbiased estimation under partially known covariances. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 70 :3123–3135, 2022.
- [4] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. General decentralized data fusion with covariance intersection (CI). *Handbook of Multisensor Data Fusion*, 2001.
- [5] S. I. Roumeliotis and I. M. Rekleitis. Analysis of multi-robot localization uncertainty propagation. In *Proceedings IEEE/RSJ IROS*, volume 2, pages 1763–1770 vol.2, 2003.