



HAL
open science

Premières conséquences quantiques d'une proposition de correction du formalisme des paquets d'ondes

Laurent Millot

► **To cite this version:**

Laurent Millot. Premières conséquences quantiques d'une proposition de correction du formalisme des paquets d'ondes. 2016. hal-04371484

HAL Id: hal-04371484

<https://hal.science/hal-04371484>

Preprint submitted on 3 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Premières conséquences quantiques d'une proposition de correction du formalisme des paquets d'ondes

Laurent Millot, Institut Acte, UMR 8218, Sorbonne Paris 1 / CNRS,
ENS Louis-Lumière, La cité du Cinéma, 20 rue Ampère BP 12,
93213 La Plaine Saint-Denis Cedex, France
(l.millot@ens-louis-lumiere.fr)

02/10/2016

Résumé

Dans [1] on a proposé une correction des définitions classiques des paquets d'ondes afin de tenir compte du caractère effectivement spatio-temporel des phénomènes physiques et illustré les conséquences de cette correction pour le cas des mesures de grandeurs scalaires à partir de l'exemple de la pression acoustique. Dans cet article, on commence par exposer les corrections proposées et les premières conséquences en termes de mesure dans le cas quantique. On montre ensuite que l'on ne peut pas retrouver les inégalités d'Heisenberg à partir des corrections proposées pour les paquets d'ondes et qu'il faudrait proposer d'autres arguments pour justifier l'utilisation des principes de dualité et de fluctuations du vide quantique par exemple. On propose une introduction et une interprétation différentes pour les opérateurs quantiques et on montre que l'on peut obtenir des approximations quantiques mathématiques de descriptions classiques non quantiques sans supposer les phénomènes ondulatoires. On revient enfin sur les questions d'interprétation probabiliste et de trajectoires.

1 Introduction

Cet article traite de la question de la description fréquentielle associée à la notion de paquets d'ondes et d'un aperçu de quelques unes des conséquences de la proposition d'une modification sensible des définitions des paquets d'ondes.

Dans la deuxième section on expose d'abord les corrections considérées pour les paquets d'ondes introduites dans [1] et les principaux défauts des définitions classiques et on discute de l'application de ces corrections au cas quantique. Puis, dans la troisième section on étudie les conséquences des corrections proposées pour les inégalités d'Heisenberg et les principes quantiques qui en découlent. Ensuite, dans la quatrième section, on propose une interprétation et une définition différentes des opérateurs quantiques et on observe les conséquences du choix de la convention pour la description fréquentielle des phénomènes étudiés en termes d'équations quantiques. En section cinq, on montre ce qui se passe quand on part de descriptions classiques de phénomènes physiques et que l'on introduit un objet quantique grâce à une relation analogue à celle proposée par Madelung. Enfin, on confronte les résultats des sections quatre et cinq et on discute des questions de trajectoire et d'interprétation probabiliste.

2 Définitions des paquets d'ondes prises en compte

Pour simplifier la présentation, on ne considère que le cas des phénomènes « unidimensionnels » dépendant des variables spatiale r et temporelle t que l'on notera par exemple $\psi(r, t)$. L'extension au cas « tridimensionnel » est abordée dans [1] tant du point de vue de la définition des paquets d'ondes que du point de vue des conséquences en termes de mesure de quantités scalaires telles que la pression en Acoustique.

Classiquement, la définition des paquets d'ondes « unidimensionnels » en Mécanique Quantique se fait en partant d'une onde plane aller progressive non dissipative aller exprimée en utilisant la représentation en exponentielles complexes telle que par exemple :

$$\psi(r, t) = A(k).e^{i(kr - \omega(k)t)}$$

où $A(k)$ est une constante par défaut complexe pour un nombre d'onde k choisi, $i = \sqrt{-1}$ et $\omega(k)$ la pulsation temporelle associée au nombre d'onde, définie par la donnée de la relation de dispersion. Le paquet d'ondes est ensuite introduit en tant que superposition d'une infinité de ces ondes monochromatiques afin de limiter l'expansion spatiale de la « particule » étudiée, ce qui conduit à écrire [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k).e^{i(kr - \omega(k)t)} \frac{dk}{2\pi}, \quad (1)$$

expression qui suppose une dépendance fréquentielle des phénomènes seulement en fonction du nombre d'onde k ou bien encore :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega).e^{i(\omega t - k(\omega)r)} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (2)$$

expression qui suppose une dépendance fréquentielle seulement en fonction de la pulsation ω .

Puis, en introduisant les relations de Planck-Einstein et de de Broglie permettant de faire le lien entre la description corpusculaire des phénomènes par le couple (énergie, quantité de mouvement) et la description ondulatoire (pulsation temporelle, nombre d'onde), on est en mesure de déduire les définitions alternatives du paquet d'ondes qui ne font intervenir que l'énergie ou la quantité de mouvement suivant la variable qui semble la plus appropriée au problème à traiter.

Ceci étant, comme montré dans [1], cette construction classique est erronée car elle part d'un cas trop particulier, celui de l'onde monochromatique pour construire la re-synthèse de phénomènes plus complexes d'un point de vue fréquentiel en utilisant la relation de dispersion dans l'espace (r, t) alors que celle-ci n'est valide que dans le plan bi-fréquentiel (k, ω) . En fait, comme indiqué dans [1], il faut partir de la re-synthèse des phénomènes spatio-temporels $\psi(r, t)$ à partir d'une transformée de Fourier spatio-temporelle inverse, valable pour des phénomènes quelconques « unidimensionnels » et introduire comme contrainte supplémentaire l'hypothèse d'une nature ondulatoire de ces phénomènes.

On part ainsi de la définition suivante de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse si on considère comme variables fréquentielles k et ω :

$$\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k, \omega}(k, \omega) \cdot e^{ikr} \cdot e^{i\omega t} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3)$$

où on adopte le même signe pour les deux bases d'exponentielles car cette définition s'applique à des phénomènes « unidimensionnels » quelconques.

Dans [1], on introduisait ensuite comme contrainte supplémentaire ondulatoire une équation d'onde minimale d'ordre un correspondant au cas de la propagation d'ondes acoustiques planes progressives non dissipatives en champ libre et on injectait (3) dans cette équation d'onde pour obtenir une traduction fréquentielle de la contrainte supplémentaire ondulatoire, la relation de dispersion. Ici, on va juste supposer que l'on dispose de la relation de dispersion fréquentielle soit sous la forme $\omega = \omega(k)$ soit sous la forme $k = k(\omega)$.

Comme la relation de dispersion n'est valable que dans l'espace bi-fréquentiel (k, ω) , on ne peut absolument pas l'utiliser dans le plan spatio-temporel (r, t) pour « préciser » la définition des ondes monochromatiques à prendre en compte et il n'est donc pas possible, comme annoncé, d'envisager la construction du paquet d'ondes à partir d'une superposition d'ondes monochromatiques définies dans le plan (r, t) comme cela se fait classiquement en Mécanique Quantique.

En fait, pour obtenir une expression correcte pour le paquet d'ondes, il faut introduire la relation de dispersion dans l'expression de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse (3). Ceci conduit à remplacer $\Psi_{k, \omega}(k, \omega)$ par $\Psi_{k, \omega}(k, \omega) \cdot 2\pi \cdot \delta(k - k(\omega))$ si on souhaite ne conserver que ω comme variable fréquentielle ou par $\Psi_{k, \omega}(k, \omega) \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega(k))$ si c'est k que l'on souhaite conserver comme variable fréquentielle pour la définition du paquet d'ondes. En exploitant une des propriétés de l'impulsion de Dirac, on aboutit alors respectivement aux deux premières définitions pour le paquet d'ondes « unidimensionnel » :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k, \omega}(k(\omega), \omega) \cdot e^{i(\omega t + k(\omega) \cdot r)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4)$$

et

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k, \omega}(k, \omega(k)) \cdot e^{i(kr + \omega(k) \cdot t)} \frac{dk}{2\pi}, \quad (5)$$

dans lesquelles $\Psi_{k, \omega}(k(\omega), \omega)$ et $\Psi_{k, \omega}(k, \omega(k))$ correspondent à la prise en compte de la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle uniquement pour la restriction du plan bi-fréquentiel (k, ω) à la courbe (ou aux courbes) associée(s) à la relation de dispersion.

En introduisant les relations de Planck-Einstein et de de Broglie dans (4) et (5), on obtient deux autres définitions utiles pour le paquet d'ondes permettant de faire le lien entre le plan (r, t) et le plan (p, E) :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k, \omega} \left(\frac{p}{\hbar}, \frac{E(p)}{\hbar} \right) \cdot e^{i(pr + E(p)t)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \quad (6)$$

et

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k, \omega} \left(\frac{p(E)}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) \cdot e^{i(p(E)r + Et)/\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar}, \quad (7)$$

dans lesquelles il conviendrait d'insérer l'expression de $E(p)$ (respectivement de $p(E)$) pour simplifier les phases des ondes monochromatiques intervenant dans ces définitions et y faire apparaître le cas échéant un signe négatif.

Et, comme indiqué dans [1], les définitions proposées pour le paquet d'ondes font intervenir comme poids pour les ondes monochromatiques une quantité physique qui n'est pas une simple transformée de Fourier spatiale ou temporelle mais les valeurs de la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle le long de la (des) courbe(s) de dispersion (ou de l'équivalent si on travaille avec le couple de variables (p, E)).

Dans le cas où on travaille avec les variables (k, ω) , on doit donc être en mesure de calculer les poids des ondes monochromatiques $\Psi_{k, \omega}(k(\omega), \omega)$ ou $\Psi_{k, \omega}(k, \omega(k))$ définis à partir de :

$$\Psi_{k, \omega}(k, \omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi(r, t) \cdot e^{-i(\omega t + kr)} dt \cdot dr.$$

Or, pour disposer des informations nécessaires au calcul de $\Psi_{k, \omega}(k(\omega), \omega)$ ou $\Psi_{k, \omega}(k, \omega(k))$, on constate qu'il faudrait idéalement disposer des informations sur $\psi(r, t)$ pour tous les instants et tous les points le long de la (les) courbe(s) de propagation. En fait, on conçoit aisément qu'il ne sera pas possible de procéder à autant de mesures et que l'on devra se contenter d'un nombre fini de capteurs le long de la droite de propagation sur laquelle se trouve le ou les points où on désire re-synthétiser le phénomène $\psi(r, t)$ à partir des définitions des paquets d'ondes. Ce constat rend très coûteux voire impossible la mise en place d'un dispositif de mesure adapté selon la nature des phénomènes que l'on doit observer.

Dans [1], on explique que le recours à des capteurs positionnés aux seuls points-cibles nous intéressant qui semble classiquement satisfaisant tient au fait que les signaux ainsi mesurés sont purement temporels, que l'information spatiale se réduit en quelque sorte à l'étiquetage du nom du signal et qu'en réalisant des mesures au(x) seul(s) point(s)-cible(s) on n'a nul besoin d'en appeler au formalisme des paquets d'ondes pour décrire les phénomènes étudiés. Et, on explique que pour obtenir une information quant au caractère ondulatoire éventuel des phénomènes étudiés, il faut en passer par la comparaison de mesures réalisées de manière synchronisée pour tous les points-cibles ou tenter de procéder à la re-synchronisation de mesures en un ou seulement quelques points-cibles à chaque fois en espérant que les conditions d'excitation et initiales sont suffisamment proches d'une mesure à l'autre. Or, rien ne garantit que ces manières de

procéder soient possibles dans le cas de la Mécanique Quantique soit parce que le dispositif de mesure à mettre en œuvre sera trop intrusif au regard des quantités étudiées soit parce qu'il n'est pas possible de reproduire des conditions initiales et/ou d'excitation suffisamment proches entre deux mesures. Le principe de la prise en compte de l'individuation des particules (cf. expérience Aspect [13]) généraliserait encore cette discussion.

Cette question de la mesure nécessiterait une réflexion plus poussée qui dépasse le cadre de cet article qui se concentre dans la suite sur d'autres conséquences de la modification des définitions des paquets d'ondes.

3 Conséquence pour les inégalités d'Heisenberg

Dans la suite, on utilise le terme « incertitude » mais on devrait lui préférer celui d'« indétermination » car en Mécanique Quantique on suppose que, même en disposant de moyens de mesures idéalement précis, on ne pourrait pas déterminer par exemple de manière synchrone la position et la quantité de mouvement d'une « particule » : cette indétermination est supposée constituer une des propriétés caractéristiques des phénomènes quantiques.

Même si les inégalités d'Heisenberg encore appelées relations d'incertitude sont souvent introduites à partir de la description « opérationnelle » de la Mécanique Quantique et de la propriété de non commutation des opérateurs quantiques [6, 7, 8, 9, 10], nous abordons cette question à partir des définitions des paquets d'ondes introduites dans le paragraphe précédent puisque l'équivalence entre les descriptions « ondulatoire » et « matricielle » a été montrée.

Lorsque ces inégalités ou ces relations d'incertitudes sont introduites à partir de la notion de paquet d'ondes [2, 3, 4, 5, 12], elles reposent sur une définition classique pour le paquet du type :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k).e^{i(kr - \omega(k).t)} \frac{dk}{2\pi},$$

et de l'hypothèse que l'on peut s'affranchir de la dépendance temporelle en ne considérant que ce qui se passe à l'instant d'origine $t = 0$, suffisant pour déterminer la constitution fréquentielle du phénomène $\psi(r, t)$ étudié.

On part alors plutôt de $\psi(r, 0)$ qui s'écrit :

$$\psi(r, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k).e^{ikr} \frac{dk}{2\pi}$$

et on interprète $A(k)$ comme la transformée de Fourier spatiale de $\psi(r, 0)$.

Or, par construction, la transformée de Fourier spatiale ne permet pas une détermination synchronisée à la fois en espace et en nombre d'onde et le produit des incertitudes de localisation spatiale σ_r et fréquentielle σ_k (en fait des déviations standards spatiale et fréquentielle) vérifie l'inégalité :

$$\sigma_r \cdot \sigma_k \geq \frac{1}{2}. \quad (8)$$

En considérant la relation de Planck $p = \hbar \cdot k$ liant la projection algébrique de l'impulsion p au nombre d'onde k par l'intermédiaire de la constante de Planck réduite \hbar , on aboutit alors à l'inégalité d'Heisenberg pour le produit des incertitudes de localisation spatiale σ_r et en impulsion σ_p :

$$\sigma_r \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (9)$$

Et à partir de la relation (9), on dispose d'une justification de l'introduction du principe de dualité onde/corpuscule. De manière analogue on peut établir une inégalité entre les localisations temporelle σ_t et en énergie σ_E à partir de l'écriture du paquet d'ondes ne conservant que l'énergie comme variable, inégalité qui peut servir à introduire le principe de fluctuations quantiques du vide par exemple.

Mais, on a vu au paragraphe précédent que la forme correcte pour la version du paquet d'ondes en fonction de k s'écrit en fait :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k, \omega}(k, \omega(k)) \cdot e^{i(kr + \omega(k) \cdot t)} \frac{dk}{2\pi}$$

qui devient si on s'intéresse à $\psi(r, 0)$:

$$\psi(r, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k, \omega}(k, \omega(k)) \cdot e^{ikr} \frac{dk}{2\pi}.$$

On constate que cette expression corrigée fait maintenant correspondre $\psi(r, 0)$ à $\Psi_{k, \omega}(k, \omega(k))$ au lieu de $A(k)$. Il n'est donc plus possible d'envisager un lien de type signal/transformée de Fourier spatiale entre $\psi(r, 0)$ et $\Psi_{k, \omega}(k, \omega(k))$ et d'utiliser le défaut de localisation de la transformée de Fourier spatiale pour aboutir aux inégalités (8) et (9). On ne dispose donc plus des arguments habituels pour justifier le principe de dualité onde/corpuscule. Là encore, une discussion pourrait être ouverte autour de l'idée d'incertitude comme simple relation (critère opérationnel) ou comme principe (loi universelle). Le même raisonnement pour l'expression du paquet d'ondes en fonction de ω puis de E conduit à l'impossibilité d'introduire une inégalité entre les localisations temporelle et énergétique et donc de justifier le principe des fluctuations quantiques du vide notamment.

Comme l'équivalence entre les mécaniques quantiques ondulatoire et matricielle a été démontrée assez rapidement après l'apparition de ces deux versions, il semble prudent de ne pas utiliser non plus les dérivations des inégalités d'Heisenberg reposant sur les opérateurs quantiques. En fait, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, les définitions corrigées proposées pour les paquets d'ondes permettent une définition alternative des opérateurs quantiques que l'on pourrait peut-être qualifier de moins mystérieuse qui semble apporter des arguments en faveur de la prudence par rapport à l'utilisation des opérateurs quantiques pour obtenir les inégalités d'Heisenberg.

Vu que les définitions corrigées correspondent à des cas particuliers ondulatoires d'une transformée de Fourier spatio-temporelle inverse, l'incertitude de localisation entre les plans (r, t) et (k, ω) ne semble pas devoir conduire à des inégalités séparées liant σ_r et σ_k d'une part et σ_t et σ_ω d'autre part, ou encore pour σ_r , σ_t , σ_p et σ_E entre les plans (r, t) et (p, E) . Cette possibilité d'une séparabilité en couples n'est pas complètement écartée mais rien ne garantit qu'elle soit possible et il apparaît donc nécessaire de disposer d'autres éléments pour retrouver éventuellement ce genre d'inégalités. En l'état, si rien ne permet d'éliminer l'idée d'une dualité onde/corpuscule, on ne peut retenir les inégalités d'Heisenberg qui la justifient habituellement. Il serait donc nécessaire de rechercher une autre justification pour introduire les principes quantiques habituels d'incertitudes, de dualité et/ou de fluctuations quantiques du vide notamment.

Dans la suite, on s'intéresse à une introduction alternative des opérateurs quantiques en étudiant ce que donne la dérivation d'équations quantiques à partir de la re-synthèse de $\psi(r, t)$.

4 Définition alternative des opérateurs quantiques

Pour faire apparaître les opérateurs quantiques, on ne part pas des paquets d'ondes mais de la re-synthèse des phénomènes spatio-temporels $\psi(r, t)$ quelconques à partir de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse :

$$\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}(k, \omega) \cdot e^{i(kr+\omega t)} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}$$

qui devient en introduisant les relations de Planck-Einstein et de de Broglie :

$$\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}\left(\frac{p}{\hbar}, \frac{E}{\hbar}\right) \cdot e^{i(pr+Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar}. \quad (10)$$

Si on disposait de l'analogie d'une relation de dispersion entre E et p , telle que $E = p^2/2m$ par exemple dans le cas d'une particule libre de masse m , on pourrait simplifier (10) pour faire apparaître les définitions adaptées du paquet d'ondes. Même si ce n'est pas le cas, on peut pour autant envisager les différents cas de figure s'agissant des phases pour l'exponentielle complexe intervenant dans la formule de re-synthèse de $\psi(r, t)$ en considérant l'expression modifiée suivante pour (10) :

$$\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p,E}(p, E) \cdot e^{i(\varepsilon_1 pr + \varepsilon_2 Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar} \quad (11)$$

où ε_1 et ε_2 peuvent prendre indépendamment la valeur 1 ou -1 , ce qui permet d'envisager tous les cas de figure, en gardant cependant à l'esprit que le choix $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ semble plus naturel pour des phénomènes physiques quelconques et que l'apparition d'un signe négatif dans la phase de l'onde devrait se produire à partir de l'introduction d'une contrainte supplémentaire sur la nature par exemple ondulatoire des phénomènes.

En considérant la dérivée partielle de $\psi(r, t)$ par rapport à t en utilisant (11), on vérifie que l'on peut écrire :

$$-i\varepsilon_2\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E \cdot \Psi_{p,E}(p, E) \cdot e^{i(\varepsilon_1 pr + \varepsilon_2 Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar}$$

puis, par analogie, pour la dérivée partielle de $\psi(r, t)$ par rapport à r :

$$-i\varepsilon_1\hbar\frac{\partial}{\partial r}\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} p \cdot \Psi_{p,E}(p, E) \cdot e^{i(\varepsilon_1 pr + \varepsilon_2 Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar}$$

et enfin pour la dérivée partielle d'ordre deux de $\psi(r, t)$ par rapport à r :

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} p^2 \cdot \Psi_{p,E}(p, E) \cdot e^{i(\varepsilon_1 pr + \varepsilon_2 Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar}.$$

On est donc conduit à considérer les couples (fonction d'onde, transformée de Fourier spatio-temporelle) suivants :

$$-i\varepsilon_2\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r, t) \xleftrightarrow{TF_{p,E}} E \cdot \Psi_{E,p}(E, p) \quad (12)$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(r, t) \xleftrightarrow{TF_{p,E}} p^2 \cdot \Psi_{E,p}(E, p) \quad (13)$$

qui montrent qu'aux dérivations partielles d'ordre un par rapport au temps et d'ordre deux par rapport à l'espace on fait correspondre une multiplication par E ou p^2 de la bi-transformée de Fourier $\Psi_{E,p}(E, p)$. On peut donc déjà définir quelques uns des opérateurs quantiques classiques opérant sur $\psi(r, t)$ à partir de la bi-transformée de Fourier grâce aux relations suivantes :

$$\widehat{p_r} = -i\varepsilon_1\hbar\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\widehat{K_r} = \frac{\widehat{p^2}}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2},$$

et

$$\widehat{E} = -i\varepsilon_2\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

Si on considère un potentiel scalaire $V(r, t)$ ne présentant aucun problème d'existence et/ou de discontinuité sur la partie de l'espace (r, t) où on étudie les phénomènes, on peut écrire que :

$$V(r, t) \cdot \psi(r, t) = V(r, t) \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p,E}(p, E) \cdot e^{i(\varepsilon_1 pr + \varepsilon_2 Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar}$$

soit encore

$$V(r, t) \cdot \psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V(r, t) \cdot \Psi_{p, E}(p, E) \cdot e^{i(\varepsilon_1 pr + \varepsilon_2 Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar} \quad (14)$$

ce qui conduit à introduire l'opérateur quantique classique \widehat{V} associé au potentiel scalaire $V(r, t)$ et défini par

$$\widehat{V} = V(r, t)_x$$

qui correspond à la multiplication par $V(r, t)$ de $\psi(r, t)$ et, par suite, l'opérateur Hamiltonien \widehat{H} :

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \widehat{V}.$$

A ce stade, on a retrouvé la plupart des opérateurs quantiques classiques opérant sur la fonction d'onde $\psi(r, t)$ et on peut constater que ces opérateurs sont définis comme bi-transformées de Fourier spatio-temporelles inverses d'une description « fréquentielle » construite dans le plan (p, E) , alors que p et E sont en général plutôt considérées comme des grandeurs corpusculaires.

L'équation de conservation de l'énergie pour une particule de masse m non relativiste soumise à l'action du potentiel scalaire $V(r, t)$ s'écrit :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r, t) \quad (15)$$

et, en utilisant les équations (12), (13) et (14), on constate que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_2 \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) - V(r, t) \psi(r, t) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[E - \frac{p^2}{2m} - V(r, t) \right] \cdot \Psi_{p, E}(p, E) \cdot e^{i(\varepsilon_1 pr + \varepsilon_2 Et)/\hbar} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{dE}{2\pi\hbar} \end{aligned}$$

qui, en utilisant l'équation de conservation de l'énergie (15) conduit à écrire l'équation quantique suivante :

$$-i\varepsilon_2 \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) + V(r, t) \psi(r, t). \quad (16)$$

Dans l'équation (16), on ne voit apparaître aucune occurrence de ε_1 ce qui signifie que le choix de la valeur de ce paramètre n'a aucune incidence sur l'équation quantique obtenue en re-synthétisant l'équation de conservation de l'énergie. Par contre, suivant le choix opéré pour le paramètre ε_2 , l'équation quantique obtenue change puisque l'on a respectivement suivant que $\varepsilon_2 = -1$ et $\varepsilon_2 = +1$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) + V(r, t) \psi(r, t) \quad (17)$$

et

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) + V(r, t) \psi(r, t). \quad (18)$$

L'équation (17) correspond à l'équation classique de Schrödinger pour une particule massive dans un potentiel scalaire, l'équation (18) à son « complexe conjugué » et on peut remarquer que ces deux équations se comporteront de la même manière pour des phénomènes indépendants du temps. On constate donc que l'on obtient l'équation de Schrödinger classique pour la moitié des choix possibles (cas où $\varepsilon_2 = -1$ et $\varepsilon_1 = \pm 1$) pour la convention sur la phase de l'onde et l'équation « conjuguée » pour l'autre moitié des cas (cas où $\varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_1 = \pm 1$), sans argument fort pour éliminer les cas donnant cette deuxième équation quantique. Et, si on choisit d'adopter un signe positif pour les exponentielles complexes temporelles et spatiales dans la transformée de Fourier spatio-temporelle puisqu'elle s'applique aux phénomènes quelconques (« unidimensionnels »), c'est même plutôt l'équation (18) qui apparaît la plus « naturelle » mathématiquement.

On a donc un problème puisque le choix de la définition de la transformée de Fourier spatio-temporelle, ou plus précisément de l'utilisation des $e^{iEt/\hbar}$ ou des $e^{-iEt/\hbar}$, choix que l'on peut à la rigueur considérer comme arbitraire, influence directement l'équation quantique que l'on obtient. Il convient de garder à l'esprit que ces deux équations sont obtenues en ayant recours à une re-synthèse de l'équation de conservation de l'énergie non relativiste basée sur une description « fréquentielle » des phénomènes physiques étudiés dans le plan (p, E) , donc à partir de grandeurs auxquelles on confère plutôt un caractère corpusculaire. En fait, il semble bien que c'est l'interprétation de l'équation quantique trouvée et de la nature physique de $\psi(r, t)$ qui suggère un caractère potentiellement ondulatoire. En effet, si on décide de partir directement sur la construction définie par (11) en considérant comme espace fréquentiel le plan (p, E) sans partir de la construction de la $TF_{k, \omega}$ et sans utiliser les relations de Planck-Einstein et de de Broglie, pour faire le lien entre (k, ω) , couple de variables ondulatoires, et (p, E) , couple de variables corpusculaires, on n'utilise pas l'hypothèse d'un comportement pour partie ondulatoire des phénomènes.

Pour contourner le problème de choix de définition de la phase des exponentielles complexes temporelles, on peut peut-être envisager un autre procédé pour aboutir à des équations quantiques de type Schrödinger en partant de descriptions corpusculaires de phénomènes physiques, procédé illustré dans le paragraphe suivant.

5 Dérivation déterministe d'équations quantiques

Dans ce paragraphe, on part d'un jeu d'équations déterministes et en introduisant une analogie de type Madelung on cherche à re-synthétiser une des équations déterministes à partir des dérivées partielles de la fonction d'onde quantique tout en utilisant la deuxième équation comme contrainte supplémentaire. On commence d'abord par recenser les équations déterministes qui seront utilisées en indiquant quelques configurations physiques auxquelles elles pourraient correspondre. On calcule ensuite les dérivées partielles spatiales comme temporelles de la fonction d'onde et on les utilise pour la re-synthèse de la première équation.

5.1 Jeu d'équations déterministes considérées

On considère comme point de départ deux équations qui ressemblent aux équations de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement que l'on trouve en Mécanique des Fluides en

supposant que la configuration étudiée correspond à des phénomènes « unidimensionnels » irrotationnels permettant une description eulérienne en projection sur l'axe coïncidant avec la trajectoire des particules considérées. On se place donc dans le cas de l'utilisation du potentiel scalaire des vitesses φ défini par $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ en lieu et place du vecteur vitesse \vec{v} de la particule.

La version de conservation de la masse que nous considérons comme point de départ s'écrit :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \text{div}(\kappa \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = 0 \quad (19)$$

où κ pourrait correspondre à la masse volumique ρ en Mécanique des Fluides ou à la charge électrique q en Electromagnétisme par exemple. En introduisant la variable κ on indique que l'on veut travailler sur une équation de conservation d'une grandeur scalaire sans forcément se restreindre au cas de la Mécanique des Fluides ou de l'Electromagnétisme afin de se placer dans un contexte plus général, celui de tous les cas que l'on pourrait rencontrer en Physique où une équation de cette forme aurait quelque pertinence. Ici, on n'a pas introduit de terme de source mais il serait intéressant d'étudier ce qui se passe si on introduisait ce terme.

En fait, il s'avère plus intéressant de considérer cette équation sous sa forme développée dans la suite :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \kappa + \kappa \Delta \varphi = 0. \quad (20)$$

Comme deuxième équation, on considère une équation analogue à la conservation de la quantité de mouvement pour des phénomènes irrotationnels non visqueux, soit donc une équation analogue à l'équation d'Euler en Mécanique des Fluides dans sa version irrotationnelle. On suppose que le terme de convection $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}$ peut alors être remplacé par $\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2$ et que le terme d'inertionarité $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ peut être remplacé par $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$. Pour le terme associé aux forces extérieures volumiques \vec{f} et aux forces de pression $\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$, on suppose que l'on peut le remplacer par un terme de la forme $\frac{V}{\kappa}$ ce qui conduit à l'écriture suivante pour cette équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 + \frac{V}{\kappa} \right] = 0$$

Si on suppose κ constante on peut considérer V comme la somme du potentiel scalaire dont dérivent les forces extérieures $\rho \vec{f}$ et de la pression p . Si on suppose plutôt que κ varie et une relation analogue à une transformation adiabatique s'écrivant $\zeta \cdot \kappa^{-\gamma} = \text{cste}$ le terme V/κ détaillé s'écrit $\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\zeta}{\kappa}$ sur la base du cas fluide où on remplace ζ par la pression p et où on suppose négligeable la contribution des forces extérieures (pesanteur par exemple). Il serait intéressant de compléter au besoin l'équation générique de type conservation de la quantité de mouvement que nous utilisons ici pour voir ce qui se passe si on considère des configurations physiques plus complexes prenant aussi en compte idéalement les termes de pertes.

En fait, on utilisera la version intégrée spatialement de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrivant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 + \frac{V}{\kappa} = 0 \quad (21)$$

où on a « distribué » la constante d'intégration dans le terme V/κ et, comme cela se fait classiquement, la fonction purement temporelle susceptible d'intervenir suite à l'intégration spatiale dans $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. On considère donc une équation qui ressemble à une relation de Bernoulli compressible instationnaire irrotationnelle non visqueuse ou bien encore à une équation d'Hamilton-Jacobi.

Pour compléter ce jeu d'équations on considérera soit la contrainte

$$\kappa = \text{cste} \quad (22)$$

qui correspondrait au cas incompressible en Mécanique des Fluides soit la contrainte analogue à la définition d'une transformation adiabatique

$$\zeta \cdot \kappa^{-\gamma} = \text{cste}. \quad (23)$$

On considère donc un jeu d'équations qui correspondent à une formulation générique des équations utilisées dans [14] pour proposer une alternative corpusculaire à la description des problèmes acoustiques. Alternative qui aboutit à limiter l'approche ondulatoire au seul cas de l'approximation mathématique de l'équation de conservation de la masse en champ libre par une équation d'onde du premier ordre ne faisant intervenir que des ondes planes (progressives non dissipatives) aller et ce seulement pour la pression, la masse volumique voire la température tandis que la vitesse des particules fluides est identifiée à la vitesse de propagation de ces ondes.

5.2 Re-synthèse de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

On cherche maintenant à re-synthétiser l'équation de conservation de la quantité de mouvement (21) en utilisant l'équation de conservation (20) comme une contrainte à partir de l'introduction d'un objet quantique que nous noterons ψ . La relation (22) ou (23) pour κ sera utilisée à la fin comme une contrainte supplémentaire permettant de simplifier la famille d'équations quantiques obtenues.

Pour définir l'objet quantique ψ , on considère la proposition de Madelung que l'on adapte ici aux variables κ (on se limite ici au cas où κ est une grandeur physique à valeurs réelles positives) et φ utilisées ici pour l'écrire sous la forme :

$$\psi = \sqrt{\kappa} e^{iq\varphi} \quad (24)$$

où q est une constante potentiellement réelle dont on discutera l'interprétation dans le paragraphe suivant.

Si on calcule la dérivée partielle d'ordre un de ψ par rapport au temps, on vérifie que l'on obtient alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[iq \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right] \psi.$$

Par analogie, on trouve alors pour le gradient spatial de ψ :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \psi = \left[iq \overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{1}{2\kappa} \overrightarrow{\text{grad}} \kappa \right] \psi$$

et en réutilisant ce résultat pour simplifier l'expression du laplacien scalaire $\Delta\psi$ on aboutit à l'expression :

$$\Delta\psi = \left[iq\Delta\varphi - q^2(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 + \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa}\right)^2 + \text{div}\left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa}\right) + iq(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa}\right) \right] \psi.$$

On peut réécrire ces trois dernières équations pour faire apparaître respectivement dans le membre de gauche les termes $\psi \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\psi \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2$ et $V\psi/\kappa$:

$$\psi \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{iq} \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\psi}{2\kappa} \frac{\partial\kappa}{\partial t} \right] \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \psi \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 &= -\frac{\Delta\psi}{2q^2} + \frac{\psi}{2q^2} \left[iq\Delta\varphi + \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \text{div}\left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa}\right) + \frac{iq}{2\kappa} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \kappa \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{V\psi}{\kappa} = \frac{V\psi}{\kappa} \quad (27)$$

En sommant les équations (25) à (27), on re-synthétise l'équation de conservation de la quantité de mouvement (21) et on constate que l'on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{iq} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\Delta\psi}{2q^2} + \frac{V\psi}{\kappa} \\ &+ \frac{i\psi}{2q\kappa} \left[\frac{\partial\kappa}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \kappa + \kappa \Delta\varphi \right] \\ &+ \frac{\psi}{2q^2} \left[\left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa}\right)^2 + \text{div}\left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

On vérifie que la deuxième ligne de l'équation (28) est nulle car elle fait apparaître en facteur l'équation de conservation de la masse. Si on suppose que la troisième ligne correspond à une quantité à valeur négligeable, l'équation peut alors être approchée par :

$$\frac{1}{iq} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\Delta\psi}{2q^2} + \frac{V\psi}{\kappa} = 0$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{i}{q} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{V\psi}{\kappa} - \frac{\Delta\psi}{2q^2}. \quad (29)$$

En fait, la quantité négligée

$$C = \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} \kappa}{2\kappa} \right)^2 + \text{div} \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} K}{2\kappa} \right)$$

s'avère être nulle si on considère comme contrainte supplémentaire (22) et si on considère par contre (23) on doit alors vérifier la condition :

$$\kappa \Delta \kappa - \left(\overrightarrow{\text{grad}} \kappa \right)^2 \ll 4q^2 \kappa^2. \quad (30)$$

5.3 Discussion et perspectives

On peut constater que (29) est valable pour q potentiellement réel ce qui signifie que, partant de la définition d'une famille d'objets quantiques ψ fonction de la valeur choisie pour q d'après (24), on aboutit à une famille d'équations quantiques à laquelle s'ajoute éventuellement une contrainte additionnelle si κ n'est pas une constante.

Si on choisit pour q la valeur $\epsilon \kappa_0 / \hbar$ où $\epsilon = \pm 1$ et κ_0 correspond à la valeur moyenne de κ (donc à κ si c 'est une constante), la famille d'équations (29) se réduit au couple d'équations complexes conjuguées :

$$\pm i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\kappa_0}{\kappa} V \psi - \frac{\hbar^2}{2\kappa_0} \Delta \psi$$

qui coïncident quasiment avec les deux équations (17) et (18) avec κ_0 à la place de m dans le cas où κ varie mais avec des variations négligeables par rapport à sa valeur moyenne κ_0 .

Dans le cas où κ est une constante, le couple d'équations complexes conjuguées s'écrit alors :

$$\pm i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = V \psi - \frac{\hbar^2}{2\kappa} \Delta \psi \quad (31)$$

et si on peut remplacer κ par m ce couple coïncide parfaitement avec les équations (17) et (18) sans que l'on puisse écarter l'une ou l'autre de ces deux équations de Schrödinger.

Dans le cas $\kappa = \text{cste}$, l'équation de conservation de la masse (21) correspond effectivement à la description d'un écoulement instationnaire irrotationnel non visqueux et incompressible mais si on suppose que κ correspond en fait à m on a alors une formulation eulérienne de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement pour une particule de masse m pour laquelle on doit avoir $\Delta \varphi = 0$. Dans ce cas la famille d'équations (29) ou le couple d'équations défini par (31) correspondent à une formulation quantique de type Schrödinger qui apparaît potentiellement plus compliquée que la formulation classique utilisée classiquement et moins facile à mettre en œuvre dans le cas d'une particule unique que l'on peut suivre dans son mouvement.

Par extension, il est intéressant de prendre conscience du fait que l'on a construit arbitrairement une famille d'objets quantiques en introduisant (24) et qu'en considérant l'équation (29), parfaitement valide mathématiquement ou approchée si la contrainte (30) doit être préférée, on aboutit à une famille d'équations quantiques analogues à l'équation de Schrödinger sans que l'on puisse éliminer la plupart de ces équations sans information supplémentaire. De plus, comme dans le cas où κ est une constante, la description quantique obtenue s'avère correspondre à une perte d'information sur les phénomènes si on oublie la définition de ψ puisque les objets quantiques sont définis en mélangeant la racine carré de κ (donc de la masse volumique ou de la masse par exemple) et une exponentielle complexe dont la phase est proportionnelle au potentiel scalaire des vitesses φ , que l'objet quantique s'avère être potentiellement à valeurs complexes et qu'il faut calculer sa phase et le carré de son module pour retrouver respectivement les informations sur le potentiel scalaire des vitesses et sur la masse (volumique ou non). On construit ainsi par exemple une description quantique des problèmes d'acoustiques tels qu'on devrait les envisager d'après ce que l'on a présenté dans [14] mais dont l'intérêt n'apparaît pas immédiatement (détermination facilitée des solutions à partir de l'équation quantique?).

Il conviendrait de vérifier que l'on peut procéder de manière analogue pour des configurations physiques plus compliquées où les trajectoires des particules font intervenir une vorticité non nulle ou s'écarterent de la trajectoire rectiligne étudiée ici ne serait-ce qu'en introduisant les termes associées aux pertes visqueuses. Même si cela devrait compliquer les équations à manipuler, il pourrait être intéressant de voir ce que donne le même principe de re-synthèse dans le cas des équations générales de la Mécanique des Fluides ou de la Mécanique y compris dans des systèmes de coordonnées cylindriques ou sphériques. Ceci étant, il convient de noter que l'interprétation statistique des équations de type Schrödinger obtenues en utilisant ce principe de dérivation ne se justifie que si l'on oublie la définition des objets quantiques à partir d'une relation de type Madelung.

6 Remarques complémentaires

Dans la section précédente, on a vu que l'on obtient des équations analogues à l'équation de Schrödinger en cherchant l'équation vérifiée par un objet « quantique » défini à partir de la relation de Madelung et de la définition d'un problème constitué à partir des équations de conservation de la masse, de conservation de la quantité de mouvement et d'une relation supplémentaire correspondant à une hypothèse sur la transformation thermodynamique se déroulant. On peut constater que le problème déterministe considéré comme point de départ est construit en considérant une description eulérienne.

Si on se conforme à l'utilisation traditionnelle de la relation de Madelung, on considère comme point de départ l'équation de Schrödinger et on constate que l'on obtient une description « classique » qui correspond à l'étude d'un problème de fluide « quantique » défini par des équations de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement assez proches de celles prises comme point de départ dans la section précédente. Ainsi, on aboutit avec l'utilisation classique de la relation de Madelung à une description fluide utilisant encore une description eulérienne.

Puisque les descriptions fluides, prises comme point de départ ou obtenues au final, reposent sur une description eulérienne, on peut proposer que ces descriptions ne sont pas à même de déterminer les tra-

jectoires des particules (fluides ou non), voire même que la notion de trajectoire soit dénuée de sens dans ces problèmes (sauf peut-être dans les cas de phénomènes stationnaires). En fait, avec une description eulérienne, on aboutit à une description de ce qui se passe dans l'espace considéré à chaque instant, donc à une description de type champ. On a ainsi une information sur ce qui se passe au cours du temps en chacun des points mais, par contre, aucune information sur les « particules » qui se sont succédées au cours du temps en chacun des points pour générer les champs observés.

En fait, si on considère à nouveau la section 4 consacrée à la définition des opérateurs quantiques, on peut noter que l'on considère une description des phénomènes que l'on suppose « fréquentielle » dans l'espace (p, E) à partir de l'équation de conservation de l'énergie, qui joue alors le rôle de relation de dispersion. Et, on construit un objet « spatio-temporel » à partir de l'introduction d'une re-synthèse par transformation de Fourier spatio-temporelle inverse qui permet de passer du plan (E, p) au plan (r, t) . Or, l'information disponible dans le plan (p, E) se réduit à la conservation de l'énergie qui ne donne pas en l'état accès aux trajectoires des « particules » étudiées : l'équation de conservation de l'énergie décrit plutôt la ou les courbes correspondant aux configurations possibles pour le problème étudié dans le plan (p, E) .

De plus, à partir de la définition du paquet d'ondes (11), si on est en mesure de déterminer la valeur de $\psi(r, t)$ en chacun des points à chaque instant on ne dispose, par contre, d'aucune information sur les trajectoires des « particules » considérées. On constate que l'on se trouve plutôt dans le cadre d'une description à nouveau eulérienne des phénomènes qui ne renseigne que sur ce qui se passe ponctuellement. Et, même en étudiant les corrélations spatiales entre les instants, on ne pourra au mieux que faire émerger des ensembles de trajectoires éventuelles en supposant que les « particules » ne peuvent réaliser, entre deux instants, un saut spatial à une vitesse supérieure à la vitesse de propagation associée aux phénomènes considérés.

Ainsi, on peut proposer que la description quantique, comme la description eulérienne, n'a pas pour objet la détermination des trajectoires des « particules » mises en jeu et qu'elle n'est pas en mesure d'y accéder. Sous cette hypothèse, on retrouve un principe d'indétermination quantique puisque cette description ne permet ni la détermination à chaque instant de la position des particules mises en jeu ni celle de leur vitesse (ou quantité de mouvement).

On peut proposer aussi un constat supplémentaire pour la fonction d'ondes $\psi(r, t)$. Comme ses évolutions spatio-temporelles sont déterminées par l'équation de Schrödinger qui fait apparaître des termes complexes, il semble très probable d'observer des valeurs complexes pour $\psi(r, t)$. En observant à nouveau la définition du paquet d'ondes (11) on peut envisager de considérer que l'on construit la fonction d'ondes à partir de la probabilité d'observer chacun des états (p, E) , probabilité correspondant à $\Psi_{p,E}(p, E)$. Par suite, il apparaît alors logique de considérer que $\psi(r, t)$ correspond à la probabilité d'observer ou non (suivant l'intensité du module de $\psi(r, t)$) une manifestation des phénomènes étudiés au point r à chaque instant t . Et, comme $\psi(r, t)$ est à valeurs complexes, on aboutit alors naturellement à l'idée de considérer $|\psi(r, t)|^2$ comme la densité de probabilité (que l'on peut normaliser) de manifestation des phénomènes étudiés à l'instant t au point r (avec une généralisation rapide dans le

cas « tridimensionnel »). Là encore, on peut constater que l'on peut déterminer à chaque instant où on pourrait rencontrer des « particules » sans être en mesure de les distinguer.

7 Conclusions et prolongements associés

Au travers de cet article, après avoir exposé les corrections envisagées pour les définitions des paquets d'ondes et les conséquences induites du point de vue expérimental, on a décrit quelques unes des premières conséquences en Mécanique Quantique.

Il apparaît ainsi qu'en l'état on ne peut plus ni justifier la validité des inégalités d'Heisenberg ni introduire le principe de dualité onde/corpuscule ou celui des fluctuations quantiques du vide notamment comme cela se fait classiquement. On a montré, dans le cas « unidimensionnel », la correspondance entre les opérateurs quantiques classiques et les dérivations partielles temporelles ou spatiales de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse des phénomènes étudiés. On a aussi mis en évidence, pour le cas d'une particule massive soumise à un potentiel scalaire, que les différents choix pour la convention sur la phase des ondes monochromatiques dans la définition des paquets d'ondes conduisent à deux équations quantiques, celle de Schrödinger et son équation « conjuguée », sans que l'on puisse rejeter *a priori* les conventions conduisant à l'équation « conjuguée ».

Puisque les formulations ondulatoires et matricielles de la Mécanique Quantique coïncident, il semble nécessaire de chercher d'autres éléments avant d'être à nouveau en mesure de supposer notamment la validité des inégalités d'Heisenberg, du principe de dualité onde/corpuscule ou du principe des fluctuations quantiques du vide. Et, pour étudier le problème de la multiplicité potentielle des équations quantiques, il semble intéressant de chercher à ne pas utiliser la description fréquentielle des phénomènes mais à introduire plutôt une description non quantique d'un objet quantique défini par une relation de type Madelung, ce qui a conduit à des familles d'approximations quantiques des phénomènes. On peut en fait noter que l'on inverse ainsi la perspective habituelle qui consiste à partir d'une description quantique des phénomènes pour aboutir à une description classique approchée.

Puisque les descriptions classiques prises comme point de départ ou auxquelles on aboutit en utilisant la relation de Madelung sont des descriptions eulériennes et compte-tenu du caractère potentiellement eulérien aussi de la construction des paquets d'ondes, il semble naturel de proposer que la Mécanique Quantique n'a aucunement comme objet la détermination des trajectoires des « particules » et qu'elle correspond plutôt à une description eulérienne probabiliste des occurrences spatio-temporelles des phénomènes étudiés. On retrouve alors aussi l'idée d'une indétermination pour la position des « particules » sans être en mesure, à ce stade (?), de relier cette indétermination à un principe analogue aux inégalités d'Heisenberg. Et il semble en être de même pour la question des fluctuations du vide par exemple car il apparaît que la Mécanique Quantique ne renseigne que sur la probabilité d'observer en chaque point à chaque instant une occurrence des phénomènes étudiés. Or, rien n'assure que les informations disponibles sont suffisamment précises pour rendre compte de ce qui se passe localement quand la densité de probabilité déterminée tend vers zéro.

En fait, sur la base des constats proposés dans le cas de l'Acoustique [14], il pourrait être intéressant de considérer ce que peut donner l'hypothèse que les phénomènes sont purement corpusculaires mais qu'ils peuvent nous apparaître ondulatoires si on se limite à l'observation d'une partie seulement des grandeurs physiques. Tout le problème n'est pas de décrire correctement le phénomène mais de le décrire de manière à ce qu'il se concilie avec notre perception.

Références

- [1] L. Millot, *Proposition de correction du formalisme des paquets d'ondes et premières conséquences induites en Acoustique*, 2015.
- [2] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, 2003.
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique - Volume I*, Hermann, Paris, 1998.
- [4] J.-L. Basdevant and J. Dalibard, *Mécanique Quantique*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2003.
- [5] J.-L. Basdevant, *12 leçons de mécanique quantique*, Vuibert, 2006.
- [6]) D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Education International, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005.
- [7] M. Le Bellac, *Quantum Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [8] R. W. Robinett, *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2007.
- [9] Ch. Ngô and H. Ngô, *Physique Quantique - Introduction*, Dunod, 2005.
- [10]) J. Hladik and M. Chrysos, *Introduction à la mécanique quantique*, Dunod, 2000.
- [11]) M. Lambert, *Introduction à la mécanique quantique*, Ellipses, 1998.
- [12] Y. Peleg and R. Pnini and E. Zaarur, *Quantum mechanics*, Peleg :98's outlines, Mc Graw Hill, 1998.
- [13] A. Aspect, Ph. Grangier, G. Roger, Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : a new violation of Bell's inequalities, **Phys. Rev. Lett.**, Vol. 49, pp. 91-94, 1982.
- [14] L. Millot, *Proposition d'une alternative au paradigme ondulatoire en Acoustique : les écoulements acoustiques*, 2015.