



HAL
open science

**Proposition de correction du formalisme des paquets
d'ondes et premières conséquences induites en
Acoustique**
Laurent Millot

► **To cite this version:**

Laurent Millot. Proposition de correction du formalisme des paquets d'ondes et premières conséquences induites en Acoustique. 2016. hal-04371480

HAL Id: hal-04371480

<https://hal.science/hal-04371480>

Preprint submitted on 4 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Proposition de correction du formalisme des paquets d'ondes et premières conséquences induites en Acoustique

Laurent Millot, Institut Acte, UMR 8218, Sorbonne Paris 1 / CNRS,
ENS Louis-Lumière, La cité du Cinéma, 20 rue Ampère BP 12,
93213 La Plaine Saint-Denis Cedex, France
(l.millot@ens-louis-lumiere.fr)

08/09/2016

Résumé

Dans cet article, on commence par expliquer pourquoi les définitions classiques des paquets d'ondes posent problème. On propose ensuite une correction des définitions des paquets d'ondes tenant compte de la nature spatio-temporelle des phénomènes et de la dimension 2 à 4 des transformées de Fourier nécessaires pour synthétiser correctement ces phénomènes. On passe ensuite en revue quelques unes des conséquences des corrections introduites pour la mesure de grandeurs physiques scalaires en s'appuyant sur l'exemple de la mesure de pression en Acoustique : nécessité d'utiliser un maillage spatial de capteurs; paradoxe du caractère satisfaisant des mesures au seul point-cible; pertinence de l'utilisation d'excitations complexes plutôt que monochromatiques.

1 Introduction

Cet article traite de la question de la description fréquentielle associée à la notion de paquets d'ondes et donne un aperçu de quelques unes des conséquences en Acoustique de la proposition d'une modification sensible des définitions des paquets d'ondes. Il serait intéressant d'étudier plus en profondeur la portée des corrections proposées pour les autres branches de la Physique puisque les corrections proposées concernent le principe général ou générique des paquets d'ondes et non pas simplement sa déclinaison acoustique, ce qui sera initié dans le cas de la Mécanique Quantique dans un autre article.

Dans la deuxième section, on met en évidence un problème concernant les hypothèses utilisées pour définir les paquets d'ondes et on montre comment aboutir à la correction proposée d'abord dans le cas des phénomènes « unidimensionnels » puis ensuite pour le cas des phénomènes « tridimensionnels », avec une mise entre guillemets des termes unidimensionnels et tridimensionnels car ils ne prennent pas en compte la dimension temporelle. Comme on le verra au cours de l'exposé des problèmes de la définition classique du paquet d'ondes puis de la correction proposée, une partie des problèmes rencontrés ou auxquels il convient d'apporter un traitement soigné proviennent dans une large mesure de la détermination de l'espace dans lequel on décrit les phénomènes étudiés. Et les termes « unidimensionnels » et « tridimensionnels » participent des problèmes de détermination de l'espace de travail car ils entretiennent le flou s'agissant de la description des définitions classiques potentiellement erronées.

La troisième section rassemble une discussion des conséquences des modifications proposées pour les mesures de grandeurs scalaires en s'appuyant sur l'exemple des mesures de pression en Acoustique. Il convient de préciser que les problèmes mis en évidence sont susceptibles d'être rencontrés pour tous les phénomènes physiques supposés ondulatoires et caractérisés à partir d'excitations monochromatiques. On montre d'abord quels sont les changements conséquents à introduire dans le protocole de mesure si on veut effectivement utiliser l'hypothèse d'une superposition d'ondes monochromatiques pour synthétiser la réponse du système ou des phénomènes étudiés. On discute ensuite de la nature physique des signaux de mesure classiques obtenus au seul point-cible avec des excitations monochromatiques qui semblent fournir des résultats pertinents bien qu'ils ne respectent pas les conditions imposées par la superposition d'ondes monochromatiques intervenant pour un paquet d'ondes. Enfin, on étudie l'intérêt d'utiliser des excitations complexes pour réaliser ces mesures.

Ces propositions reprennent et complètent une présentation orale lors d'une conférence organisée par l'Acoustical Society of America [1].

2 Discussions sur la définition du paquet d'ondes

2.1 Problèmes posés par la définition classique du paquet d'ondes « unidimensionnel »

Afin de simplifier l'exposé, nous nous plaçons délibérément dans le cas « unidimensionnel », ce qui signifie que les phénomènes considérés sont des fonctions dépendant seulement des variables spatiale r et temporelle t . L'extension au cas « tridimensionnel » étant assez immédiate, elle ne sera pas introduite dans le cas de la définition classique des paquets d'ondes.

En Mécanique Quantique (principalement), on introduit généralement la notion de paquet d'ondes en partant d'une superposition d'ondes planes aller monochromatiques progressives non dissipatives [2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Ainsi, en utilisant la représentation en exponentielles complexes, on part par exemple de l'onde plane aller (progressive non dissipative) :

$$\psi(r, t) = A(k).e^{i(kr - \omega(k)t)}$$

où $A(k)$ est une constante par défaut complexe pour un nombre d'onde k choisi, $i = \sqrt{-1}$ et $\omega(k)$ la pulsation temporelle associée au nombre d'onde, définie par la donnée de la relation de dispersion. On construit ensuite le paquet d'ondes en tant que superposition d'une infinité d'ondes monochromatiques associées à un ensemble de nombres d'ondes k décrivant potentiellement \mathbb{R} pour rendre compte de la localisation de la particule modélisée et parvenir ainsi à la faire exister en tant que réalité physique, mais aussi vérifier les contraintes mathématiques (phénomène de carré sommable par exemple) associées. On obtient alors une première écriture du paquet d'ondes [2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14] :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k).e^{i(kr - \omega(k)t)} \frac{dk}{2\pi}. \quad (1)$$

On trouve aussi [3, 6, 15] ou [16, 17] (en Acoustique) une deuxième définition du paquet d'ondes faisant plutôt intervenir la pulsation temporelle ω sous la forme :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) \cdot e^{i(\omega t - k(\omega)r)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2)$$

où la définition de la phase de l'onde change puisque l'on passe de $kr - \omega t$ dans l'expression (1) à $\omega t - kr$ dans l'expression (2).

En introduisant les relations d'Einstein-Planck et de de Broglie permettant de faire le lien entre la description corpusculaire des phénomènes par le couple (énergie, quantité de mouvement) et la description ondulatoire (pulsation temporelle, nombre d'onde), on est en mesure de déduire les définitions alternatives du paquet d'ondes qui ne font intervenir que l'énergie ou la quantité de mouvement suivant la variable qui semble la plus appropriée au problème à traiter [5, 7, 10, 11, 12, 18], avec au besoin l'introduction d'un changement dans le signe de la phase.

Par contre, dans d'autres branches de la science [19, 20] (Géophysique), [21, 22, 23] (Traitement du Signal multidimensionnel), [24, 25] (Electrodynamique), [26, 27, 28, 29, 30] (Mathématiques pour la Physique), [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] (Acoustique) on ne trouve explicitement que très rarement la notion de paquets d'ondes au profit d'une re-synthèse fréquentielle des phénomènes spatio-temporels étudiés $\psi(r, t)$ à partir de la définition de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse :

$$\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} C(k, \omega) \cdot e^{i(kr - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi}. \quad (3)$$

Et, quand on s'intéresse à des problèmes de propagation d'ondes, on part de l'équation classique d'ordre deux de propagation des ondes avec au second membre des termes dits de source, équation que l'on transforme en général à l'aide d'une transformée de Fourier temporelle et pour laquelle on construit une solution à partir de la transformée de Fourier temporelle d'une fonction de Green adaptée ou approchée sur la base d'une extension du principe de Huygens-Fresnel. Ainsi, dans ces cas de figure, on ne cherche pas à synthétiser un paquet d'ondes puisque l'on ne se place pas dans un espace bi-fréquentiel, tel que l'espace (k, ω) , mais plutôt dans un espace spatio-fréquentiel (r, ω) voire (r, k) en remplaçant (en Acoustique ou Electromagnétisme) les occurrences de ω par $k \cdot c_0$ où c_0 correspond à la vitesse de propagation.

Ceci étant, on peut définir des expressions des paquets d'ondes à partir de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse (3) en introduisant la relation de dispersion. Ainsi, dans le cas des phénomènes acoustiques ou électromagnétiques par exemple, la relation de dispersion classique s'écrit $\omega = k c_0$ et on aboutit alors aux définitions suivantes pour les paquets d'ondes :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(k, k \cdot c_0) \cdot e^{ik(r - c_0 t)} \frac{dk}{2\pi} \quad (4)$$

et

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\omega}{c_0}, \omega\right) \cdot e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c_0}\right)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (5)$$

où on a choisi d'adopter une phase avec un signe négatif pour la dépendance temporelle.

En considérant comme relation de dispersion les formes plus générales $\omega = \omega(k)$ ou $k = k(\omega)$, on obtient les définitions suivantes pour les paquets d'ondes :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(k, \omega(k)) \cdot e^{i(kr - \omega(k)t)} \frac{dk}{2\pi} \quad (6)$$

et

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k(\omega), \omega) \cdot e^{-i(\omega t - k(\omega)r)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (7)$$

où on a encore choisi d'adopter une phase avec un signe négatif pour la dépendance temporelle.

En comparant le couple de définitions du paquet d'ondes (1) et (2) au couple de définitions potentielles (4) et (5), ou au couple (6) et (7), on constate que l'on est confrontés à deux problèmes potentiels distincts.

On constate d'abord que la convention de phase utilisée pour l'onde monochromatique diffère d'un jeu de définitions à l'autre. Il s'agirait d'une question de convention variable en Physique selon la variable fréquentielle que l'on prend comme variable principale [23, 30, 37] et la convention adoptée pour (3) correspondrait à l'anticipation du travail avec des ondes se déplaçant dans le sens des r croissants quand le nombre d'onde k et la pulsation temporelle ω sont tous les deux positifs [23, 31]. Ce premier problème doit être réglé car il ne semble pas satisfaisant que la définition de la phase de l'onde monochromatique relève d'une simple convention et qu'elle puisse changer selon les us et coutumes propres à l'une ou l'autre des branches de la Physique. Nous montrerons notamment dans la suite que la définition de la phase intervenant dans le paquet d'ondes dérive naturellement de la prise en compte de l'hypothèse d'une nature ondulatoire des phénomènes.

On constate enfin que la nature physique du poids de chacune des ondes monochromatiques considérées change de manière drastique et inacceptable : une simple transformée de Fourier spatiale ou temporelle dans le cas « quantique » de (1) et (2) ; une transformée de Fourier spatio-temporelle pour (4) et (5), ou (6) et (7). Il convient de préciser que, bien que les relations (4) et (5), ou (6) et (7), correspondent à la conséquence de l'introduction de la relation de dispersion dans la définition de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse (3), elles ne semblent pas figurer dans la littérature puisque l'on construit très souvent les solutions des problèmes de propagation acoustique (ou électromagnétique) à partir de fonctions de Green. Ceci est regrettable puisque si on ne dispose pas de relations du type de (4) et (5), ou du type de (6) et (7), on ne peut constater que les définitions du paquet d'ondes sont très différentes d'une branche à l'autre de la Physique. En fait, comme nous allons le montrer, ces définitions du paquet d'ondes ne sont *a priori* pas valides même si les définitions (4) et (5), ou (6) et (7), sont assez

proches des définitions alternatives qui vont être proposées dans la suite. Nous montrerons que ce second problème résulte de la construction classique mais potentiellement erronée du paquet d'ondes comme superposition d'ondes monochromatiques.

Le paragraphe suivant permet d'illustrer et de détailler les deux propositions à même de résoudre ces deux problèmes.

2.2 Processus à adopter pour obtenir une définition valide du paquet d'ondes « unidimensionnel »

2.2.1 Point de départ

Le point de départ pour déduire des formulations correctes du paquet d'ondes consiste à considérer la description des phénomènes physiques spatio-temporels $\psi(r, t)$, non pas à partir d'une superposition d'ondes monochromatiques dans le plan spatio-temporel (r, t) mais à partir d'une modélisation dans le plan bi-fréquentiel (k, ω) .

Pour décrire des phénomènes purement temporels $\psi(t)$, on peut utiliser une description fréquentielle de ceux-ci grâce à la formule de re-synthèse par transformée de Fourier temporelle inverse :

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\omega}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

où $\Psi_{\omega}(\omega)$ désigne la transformée de Fourier temporelle de $\psi(t)$. Et, pour décrire des phénomènes purement spatiaux $\psi(r)$, on peut considérer de manière analogue la transformée de Fourier spatiale inverse :

$$\psi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k(k) \cdot e^{ikr} \frac{dk}{2\pi}$$

où $\Psi_k(k)$ désigne alors la transformée de Fourier spatiale de $\psi(r)$ qui repose sur l'utilisation des e^{ikr} et non des e^{-ikr} comme cela semble être couramment pratiqué en Physique afin de faire intervenir un signe négatif dans le cas des ondes aller [23, 30, 37].

Ensuite, on peut alors décrire les phénomènes spatio-temporels « unidimensionnels » mais de nature physique quelconque $\psi(r, t)$ en considérant la formule de re-synthèse de bi-transformée de Fourier spatio-temporelle inverse faisant intervenir les deux familles précédentes d'exponentielles complexes temporelles $e^{i\omega t}$ et spatiales e^{ikr} . Cette bi-transformée de Fourier inverse s'écrit alors [38, 39, 40, 41, 42, 1, 43, 44, 45, 46] :

$$\psi(r, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}(k, \omega) \cdot e^{ikr} \cdot e^{i\omega t} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (8)$$

où l'ordre d'intégration n'a *a priori* aucune incidence sur le résultat et où $\Psi_{k,\omega}(k, \omega)$ correspond à la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle de $\psi(r, t)$.

La description purement fréquentielle définie par (8) est valable pour des phénomènes spatio-temporels « unidimensionnels » quelconques et elle est donc générale mais elle peut cependant être simplifiée dans le cas de phénomènes ondulatoires. Il convient de noter que je n'ai pas vu apparaître dans la littérature cette proposition, toujours vraisemblablement parce que la description fréquentielle (8) est soit utilisée pour l'étude de phénomènes quelconques soit parce qu'elle correspond juste à un point de départ pour la construction de re-synthèses, dans le cas de phénomènes ondulatoires, utilisant les fonctions de Green [38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46]. Ici, il n'est absolument pas question de s'inscrire dans une de ces deux démarches mais bien de chercher à faire émerger des définitions alternatives des paquets d'ondes potentiellement valides quelle que soit la branche de la Physique dans laquelle on travaille.

Dans la suite, avant de s'intéresser au cas général, nous commençons par distinguer le cas « acoustique » correspondant aux phénomènes « unidimensionnels » supposés obéir classiquement à une équation de propagation d'ondes (non dissipatives) d'ordre deux du type :

$$\frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

donc loin de toute source ou de tout obstacle, situation souvent qualifiée de propagation en champ libre. Précisons que les définitions obtenues pour ce cas seront valides pour tous les phénomènes physiques susceptibles d'obéir à l'équation de propagation d'ondes (9).

2.2.2 Cas « acoustique »

Dans [47] j'ai fait apparaître l'intérêt de considérer, pour l'étude des phénomènes acoustiques en champ libre, une équation d'onde d'ordre un qui n'est valide que pour les ondes progressives non dissipatives aller « unidimensionnelles » qui nous intéressent, contrairement à l'équation classique de propagation d'ondes (9) qui admet pour solutions les ondes aller et les ondes retour. Cette équation d'ordre un (qui ressemble fortement à l'annulation d'une dérivée particulière) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) + c_0 \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, t) = 0 \quad (10)$$

est supposée valide pour tous les couples (r, t) pertinents, donc décrivant la portion de \mathbb{R}^2 où les phénomènes ondulatoires sont supposés se manifester même si dans la suite on supposera qu'il s'agit de \mathbb{R}^2 pour alléger le texte.

L'introduction de la description fréquentielle définie par (8) dans (10) conduit rapidement à écrire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i[\omega + kc_0] \cdot \Psi_{k,\omega}(k, \omega) \cdot e^{ikr} \cdot e^{i\omega t} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} = 0$$

expression qui ne peut être vraie dans le cas général $\forall (r, t) \in \mathbb{R}^2$ que si la quantité $[\omega + kc_0] \cdot \Psi_{k,\omega}(k, \omega)$ est nulle $\forall (k, \omega) \in \mathbb{R}^2$ puisque les familles $\{e^{ikr}\}_{k \in \mathbb{R}}$ et $\{e^{i\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ forment respectivement des bases orthogonales.

Comme le cas où tous les $\Psi_{k,\omega}(k, \omega)$ sont nuls n'est pas physiquement intéressant puisque correspondant à l'absence de phénomène physique, les phénomènes ondulatoires recherchés vérifient alors l'équation :

$$\omega + kc_0 = 0 \quad \forall (k, \omega) \in \mathbb{R}^2 \quad (11)$$

qui correspond à l'expression correcte de la relation de dispersion pour les ondes progressives non dissipatives « unidimensionnelles » aller.

On peut noter que le passage des ondes aller aux ondes retour est immédiat si on change c_0 en $-c_0$ mais que cela conduit alors à une équation d'onde d'ordre un et une relation de dispersion différentes de celles trouvées pour les ondes aller. Il est aussi intéressant de noter que c'est en considérant en plus la relation de dispersion (11) que l'on va introduire naturellement le signe négatif présent dans les formulations du paquet d'ondes alors que la relation de dispersion $\omega^2 = k^2c_0^2$, que l'on aurait obtenue à partir de l'équation classique (9), conduit à considérer que l'on a $\omega = kc_0$ et à adopter des conventions pour la phase de l'onde monochromatique différentes d'une discipline physique à l'autre.

De plus, la relation de dispersion $\omega + kc_0 = 0$ correspond à l'équation d'une droite passant par l'origine et de pente $-c_0$ dans le plan bi-fréquentiel (k, ω) ce qui signifie que supposer les phénomènes spatio-temporels « unidimensionnels » ondulatoires conduit à la restriction du plan bi-fréquentiel (k, ω) à la seule droite d'équation $\omega + kc_0 = 0$, droite que nous nommons dans la suite droite de dispersion. De plus, on constate que la relation de dispersion est valide dans (k, ω) mais pas dans (r, t) , ce qui interdit complètement la construction du paquet d'ondes en tant que superposition d'ondes monochromatiques comme cela est classiquement fait pour aboutir aux définitions (1) et (2).

On peut alors utiliser la relation de dispersion (11) pour restreindre la double intégration présente dans (8) en exprimant k en fonction de ω (ou réciproquement).

Si on décide de ne conserver que la pulsation temporelle ω , il convient de remplacer $\Psi_{k,\omega}(k, \omega)$ par $\Psi_{k,\omega}(k, \omega) \cdot 2\pi \cdot \delta(k + \frac{\omega}{c_0})$ dans (8) pour restreindre l'intégration à la seule droite de dispersion ce qui conduit à écrire :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}(k, \omega) \cdot 2\pi \cdot \delta(k + \frac{\omega}{c_0}) \cdot e^{ikr} \cdot e^{i\omega t} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Or, on sait que l'impulsion de Dirac vérifie la propriété :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \cdot \delta(k - k_0) \cdot dk = g(k_0)$$

pour n'importe quelle fonction g garantissant l'existence de l'intégrale de départ (ce que l'on supposera évidemment vérifié ici).

Aussi par extension au cas qui nous intéresse comportant une double intégration, on aboutit à la première expression valide pour le paquet d'ondes « unidimensionnel » :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}\left(-\frac{\omega}{c_0}, \omega\right) \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c_0}\right)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (12)$$

dans laquelle $\Psi_{k,\omega}\left(-\frac{\omega}{c_0}, \omega\right)$ correspond à la prise en compte de la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle uniquement pour les couples (k, ω) décrivant la droite de dispersion.

Si on décide, par contre, de ne conserver que le nombre d'onde k comme variable fréquentielle, il faut alors remplacer $\Psi_{k,\omega}(k, \omega)$ par $\Psi_{k,\omega}(k, \omega) \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega + kc_0)$ dans (8) ce qui donne par une démarche analogue la deuxième expression valide pour le paquet d'ondes « unidimensionnel » :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}(k, -k \cdot c_0) \cdot e^{ik(r - c_0 \cdot t)} \frac{dk}{2\pi} \quad (13)$$

où $\Psi_{k,\omega}(k, -k \cdot c_0)$ correspond encore à la prise en compte de la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle uniquement pour les couples (k, ω) décrivant la droite de dispersion mais en exprimant cette fois la pulsation temporelle en fonction du nombre d'onde.

Par rapport aux définitions classiques du paquet d'onde associées à (1) et à (2), si on retrouve bien les ondes monochromatiques « unidimensionnelles » dans les définitions proposées (12) et (13), on constate par contre que la nature physique du poids de chacune de ces ondes monochromatiques change puisqu'on a affaire aux valeurs de la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle associée le long de la courbe de dispersion et non à une simple transformée de Fourier temporelle ou spatiale.

De plus, le processus d'obtention des relations (12) et (13), montre que la convention pour la phase de l'onde monochromatique n'est pas libre mais qu'elle découle du choix de la définition des bases spatiale et temporelle d'exponentielles complexes intervenant dans la construction de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse (8). On pourrait choisir d'adopter un signe différent pour les phases de ces deux bases d'exponentielles complexes, mais il me semble préférable d'adopter un signe positif pour les deux bases puisque le signe moins « attendu » (dans le cas d'ondes aller) devrait systématiquement apparaître grâce à l'utilisation de l'hypothèse supplémentaire sur le caractère ondulatoire des phénomènes étudiés et parce que l'insertion d'un signe négatif dans (8) apparaît dénué de sens physique si les phénomènes étudiés ne sont pas ondulatoires.

Par contre, on a un changement de nature ou d'interprétation physique du poids fréquentiel des ondes monochromatiques, qui passe de la notion de spectre dans la formulation classique à une notion de « bi-spectre » ou d'« hyper-spectre » dans la formulation alternative proposée, et ceci a des conséquences sensibles comme on va le vérifier dans la suite après un premier paragraphe consacré au cas général « unidimensionnel » puis un second consacré à l'extension au cas « tridimensionnel » pour les phénomènes ondulatoires « acoustiques ».

2.2.3 Cas général « unidimensionnel »

Dans la suite de ce paragraphe, on continue à prendre (8) comme définition pour la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse.

Pour les phénomènes ondulatoires pour lesquels la relation de dispersion ne correspond pas à la droite de dispersion $\omega + k.c_0 = 0$, il faudrait idéalement reprendre la démarche du cas « acoustique » en partant d'une équation d'onde minimale valide reliant les dérivées partielles de $\psi(r, t)$ et de la définition de la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse par (8). De cette façon la phase de l'onde monochromatique dans les définitions des paquets d'ondes s'obtiendrait automatiquement et s'adapterait à la convention de phase choisie pour les bases d'exponentielles spatiales et temporelles pour définir la transformée de Fourier spatio-temporelle inverse.

Comme on ne connaît pas dans le cas général l'équation d'ondes minimale pour le cas de la propagation en champ libre, on va se contenter de supposer que la relation de dispersion utile s'écrit soit $\omega = \omega(k)$ soit $k = k(\omega)$ selon la variable fréquentielle que l'on souhaite éliminer pour obtenir la définition associée du paquet d'ondes.

En suivant la fin de la démarche présentée dans le cas « acoustique », on obtient alors les deux définitions suivantes pour le paquet d'ondes :

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}(k(\omega), \omega) \cdot e^{i(\omega t + k(\omega)r)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (14)$$

et

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k,\omega}(k, \omega(k)) \cdot e^{i(kr + \omega(k)t)} \frac{dk}{2\pi}. \quad (15)$$

On constate d'abord que l'on retrouve, comme poids des ondes monochromatiques, la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle pour tous les couples (k, ω) décrivant la (ou les) courbe(s) de dispersion correspondant à la relation de dispersion dans le plan (k, ω) . On constate ensuite que l'on n'a pas d'information précise concernant la phase des ondes monochromatiques, ce qui est normal puisque c'est le choix des signes des bases d'exponentielles spatiales et temporelle pour la transformée de Fourier inverse et la prise en compte de l'équation minimale d'ondes pour les phénomènes étudiés qui permettent seules de faire apparaître automatiquement la phase des ondes monochromatiques.

Il me semble plus naturel, comme indiqué précédemment, de choisir la même convention de signe pour les bases d'exponentielles spatiales et temporelle pour la transformée de Fourier inverse puisque cette re-synthèse est valide pour des phénomènes « unidimensionnels » quelconques. En fait, quelle que soit la convention choisie, la prise en compte d'une contrainte supplémentaire ondulatoire conduira, si nécessaire, à l'apparition d'un signe négatif dans la phase de l'onde monochromatique associée à l'apparition éventuelle d'un signe négatif dans la définition des points de (k, ω) concernés par l'intégration résiduelle.

On s'aperçoit que les définitions des paquets d'ondes pourraient ne pas varier d'une branche à l'autre de la Physique et ne pas dépendre non plus d'us et coutumes propres à chaque spécialité à condition de choisir la même convention de phase pour la construction de la transformée de Fourier inverse spatio-temporelle dans toutes les branches de la Physique. Et ces définitions du paquet d'ondes feraient systématiquement apparaître un poids pour chacune des ondes monochromatiques correspondant à la valeur de la transformée de Fourier spatio-temporelle calculée le long de la (des) courbe(s) de dispersion. On constate aussi que les définitions des paquets d'ondes sont obtenues à partir de la description fréquentielle des phénomènes spatio-temporels quelconques en introduisant une contrainte supplémentaire quant à la nature ondulatoire des phénomènes étudiés, contrainte qui correspond à la relation de dispersion dans le plan fréquentiel (k, ω) et à une équation d'ondes reliant les dérivées partielles de $\psi(r, t)$ dans le plan spatio-temporel (r, t) . Ceci montre, comme cela a déjà été dit précédemment, que l'on ne peut pas construire de définition valide du paquet d'ondes en tant que superposition d'ondes monochromatiques dans le plan (r, t) puisque l'on n'a absolument pas le droit d'utiliser la relation de dispersion hors du plan fréquentiel (k, ω) .

On pourrait déduire simplement les deux autres définitions quantiques correctes du paquet d'ondes, mettant en jeu l'énergie ou l'impulsion, en introduisant les relations de Planck-Einstein et de de Broglie dans les expressions (14) et (15).

Dans le paragraphe suivant, on indique les définitions du paquet d'ondes pour des phénomènes « tridimensionnels » uniquement dans le cas « acoustique » qui sera considéré dans l'étude des premières conséquences en Acoustique des corrections proposées pour les définitions du paquet d'ondes.

2.3 Extension « tridimensionnelle acoustique »

Lorsqu'on considère l'extension « tridimensionnelle », la variable spatiale r devient le vecteur position \vec{r} et le nombre d'onde k est remplacé par le vecteur d'onde \vec{k} . La description fréquentielle de phénomènes spatio-temporels $\psi(\vec{r}, t)$ quelconques s'écrit alors sous la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\vec{k}, \omega}(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (16)$$

où $\Psi_{\vec{k}, \omega}(\vec{k}, \omega)$ correspond à la quadri-transformée de Fourier spatio-temporelle de $\psi(\vec{r}, t)$.

Si on considère en plus que les phénomènes sont ondulatoires, on est amené à considérer une propagation d'ondes que l'on supposera plane à une vitesse c_0 selon la direction \vec{u} (\vec{u} est évidemment supposé de norme unitaire) et on a alors le modèle mathématique d'onde plane aller (progressive non dissipative) suivant :

$$\psi(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c_0}\right)$$

avec f une fonction au moins continue et dérivable une fois sur \mathbb{R} par exemple.

Si on pose $\vec{c}_0 = c_0 \vec{u}$, on vérifie en calculant la dérivée partielle temporelle et le gradient spatial de $\psi(r, t)$ que :

$$\vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c_0} f'(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c_0}) \vec{u} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \vec{u}$$

et, par suite, que $\psi(\vec{r}, t)$ vérifie l'équation d'onde d'ordre un suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) + \vec{c}_0 \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad \forall(\vec{r}, t), \quad (17)$$

qui ressemble à l'équation de la dérivée particulière de $\psi(\vec{r}, t)$ dès lors que la vitesse particulière associée coïncide avec \vec{c}_0 .

En reportant (16) dans (17), en posant $\vec{k} = k \vec{u}$ et en notant que

$$\vec{\nabla} (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{k},$$

on aboutit à la relation de dispersion cherchée

$$\omega + k \cdot c_0 = 0 \quad \forall(k, \omega)$$

qui correspond à la droite de dispersion trouvée dans le cas « unidimensionnel » acoustique.

On retrouve donc que l'ajout d'une hypothèse ondulatoire pour les phénomènes conduit à une restriction du plan bi-fréquentiel (k, ω) à la droite de dispersion $\omega + k \cdot c_0 = 0$, avec en plus $\vec{k} = k \vec{u}$ pour être en mesure de définir complètement \vec{k} .

En considérant (16) on constate que l'expression la plus intéressante pour définir le paquet d'ondes est obtenue en éliminant le vecteur d'onde \vec{k} et en ne conservant que la pulsation temporelle ω puisqu'opérer ce choix permet de passer d'une intégrale quadruple à une intégrale simple pour ω . On peut alors remplacer dans (16) $\Psi_{\vec{k}, \omega}(\vec{k}, \omega)$ par $\Psi_{\vec{k}, \omega}(\vec{k}, \omega) \cdot (2\pi)^3 \cdot \delta(\vec{k} + \frac{\omega}{c_0} \vec{u})$ ce qui conduit à la première expression recherchée pour la définition du paquet d'ondes « tridimensionnel » :

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\vec{k}, \omega}(-\frac{\omega}{c_0} \vec{u}, \omega) \cdot e^{i\omega(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c_0})} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (18)$$

Si on souhaite conserver \vec{k} comme variable fréquentielle, on doit alors remplacer dans la relation (16) $\Psi_{\vec{k}, \omega}(\vec{k}, \omega)$ par $\Psi_{\vec{k}, \omega}(\vec{k}, \omega) \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega + k \cdot c_0)$, ce qui conduit à la deuxième expression recherchée pour le paquet d'ondes « tridimensionnel » :

$$\psi(\vec{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\vec{k}, \omega}(\vec{k}, -k \cdot c_0) \cdot e^{ik(\vec{r} \cdot \vec{u} - c_0 t)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (19)$$

A partir des deux définitions du paquet d'ondes « tridimensionnel » (18) et (19), on constate que c'est maintenant la connaissance préalable des valeurs de la quadri-transformée de Fourier du phénomène étudié le long de la droite de dispersion qui est nécessaire pour être en mesure d'utiliser l'expression correcte du paquet d'ondes « tridimensionnel ». Pour les définitions des paquets d'ondes « tridimensionnels » dans le cas des phénomènes physiques obéissant à une relation de dispersion ne coïncidant pas avec la droite de dispersion, on retrouverait le fait que l'on doit connaître les valeurs de la quadri-transformée de Fourier pour la restriction du plan bi-fréquentiel (k, ω) (ou son analogue (p, E)) à la (aux) courbe(s) définie(s) par la relation de dispersion.

Dans la section suivante on détaille les incidences sur la mesure liées à l'adoption des définitions alternatives proposées pour le paquet d'ondes.

3 Incidences sur les mesures

Pour mieux saisir les problèmes liés à la représentation fréquentielle pour la mesure des signaux spatio-temporels, il semble important d'insister au préalable sur les points suivants :

- le passage du domaine spatio-temporel (r, t) au domaine fréquentiel (k, ω) se fait grâce à la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle en éliminant les variables temporelle et spatiale respectivement grâce à une sommation sur tous les temps t et toutes les positions r susceptibles d'intervenir dans les évolutions du phénomène spatio-temporel, donc à des intégrations de $-\infty$ à $+\infty$ si on considère que tous les instants et toutes les positions sont parcourus par le phénomène étudié ;
- le retour du domaine fréquentiel au domaine temporel se passe de manière inverse et on a donc des sommations infinies sur les pulsations temporelles ω et les nombres d'onde k dans la formule de re-synthèse associée à la bi-transformée de Fourier inverse ;
- la sommation sur une variable spatio-temporelle ou une variable fréquentielle nécessite en théorie la connaissance du phénomène spatio-temporel ou de sa bi-transformée de Fourier pour toutes les valeurs de la variable que l'on cherche à éliminer par intégration sur celle-ci.

On laissera de côté le fait que l'on se place dans le cadre de l'utilisation de chaînes de mesures et de traitements numériques adaptées (en termes de fréquences d'échantillonnage et de dynamique de codage notamment) aux caractéristiques supposées des phénomènes étudiés et que les mesures réalisées fournissent des signaux numérisés. Evidemment, le passage en numérique conduit à une approximation des transformées de Fourier ou des paquets d'ondes calculés puisque l'on restreint les intégrations continues et potentiellement infinies à des sommations discrètes limitées pour le jeu discret des valeurs des variables effectivement disponibles (sans oublier les précautions nécessaires pour éliminer ou restreindre le repliement spectral). Pour ne pas compliquer plus l'exposé, on fait donc comme si on était en mesure de collecter les informations nécessaires pour construire effectivement des paquets d'ondes « analogiques ».

Afin d'illustrer les éléments décrits dans cette section on considère le cas de la mesure de phénomènes de pression acoustique mais le raisonnement proposé reste valide pour la mesure de n'importe quelle autre grandeur physique scalaire associée à des phénomènes physiques spatio-temporels, « unidimensionnels » pour le moment.

3.1 Cas des excitations « monochromatiques »

Pour mesurer la pression en un point il est nécessaire d'y insérer un capteur de pression ou à défaut un microphone de mesure idéalement aussi petit que possible pour ne pas trop perturber les phénomènes étudiés, présentant une directivité omnidirectionnelle idéalement ou ne s'en écartant pas trop en pratique et n'introduisant pas à peu de filtrage idéalement.

De manière classique quand on suppose que les phénomènes étudiés sont « unidimensionnels » et ondulatoires on utilise alors les définitions classiques du paquet d'ondes (1) et (2) puisqu'elles font intervenir des ondes monochromatiques aller. Considérant ces définitions il est ensuite logique de procéder aux mesures en utilisant comme stimulus un sweep linéaire ou exponentiel constitué d'une succession d'excitations monochromatiques généralement à fréquence croissante. Et, en accord avec les définitions classiques du paquet d'ondes, seul le signal de pression au point d'étude, le point-cible, est enregistré puis analysé pour caractériser les phénomènes étudiés dans le cadre des mesures acoustiques classiques avec des excitations de type sweep (cf. [48] par exemple). En pratique, à partir des signaux numériques mesurés, on calcule d'abord une approximation des valeurs de la transformée de Fourier temporelle à partir des échantillons temporels disponibles puis une approximation du paquet d'ondes pour les valeurs de la variable fréquentielle (fréquence, pulsation temporelle ou nombre d'onde) qui ont été prises en compte lors de la génération du sweep. Mais on est confronté à deux approximations successives avec cette méthode de mesure : l'approximation du calcul des valeurs utiles de la transformée de Fourier puis l'approximation du paquet d'ondes.

En fait, la situation est encore plus problématique puisque les définitions classiques (1) et (2) du paquet d'ondes ne sont vraisemblablement pas valides et qu'il conviendrait plutôt de considérer les définitions alternatives proposées (12) et (13), ou (14) et (15). Sous ces conditions, ce ne serait donc pas une simple transformée de Fourier temporelle ou spatiale suivant la variable fréquentielle conservée qui interviendrait comme poids pour chacune des ondes monochromatiques mais une bi-transformée de Fourier spatio-temporelle, définie par (8). Si on réalise un enregistrement pour chacune des mesures sur un intervalle temporel de durée suffisante avec une fréquence d'échantillonnage temporelle conséquente on devrait disposer d'informations temporelles potentiellement suffisantes pour calculer la bi-transformée de Fourier spatio-temporelle. Par contre, du fait de la présence de l'intégration spatiale dans (8), le calcul de cette bi-transformée de Fourier nécessite aussi impérativement la connaissance des signaux de pression pour un ensemble de positions entourant le point-cible, informations auxquelles on n'a pas du tout accès si on ne réalise l'enregistrement des phénomènes qu'au seul point-cible.

Ainsi, pour utiliser le formalisme des paquets d'ondes corrigés de manière valide, il apparaît nécessaire de réaliser un maillage spatial par des capteurs positionnés en amont comme en aval du point-cible suivant la direction de propagation. Cela signifie qu'il faut idéalement mesurer simultanément les signaux de pression pour un nombre conséquent de positions entourant le point-cible avec un intervalle séparant deux capteurs consécutifs d'autant plus petit que l'on veut une approximation de qualité satisfaisante des phénomènes étudiés. En fait, même si on désire étudier des phénomènes physiques supposés ondulatoires pour une seule position, le recours à une excitation monochromatique (sweep) et la définition du paquet d'ondes imposent l'utilisation d'un maillage spatial suffisant comportant par exemple $N/2$ points avant

et après le point-cible en plus de la mesure au point-cible, ce qui conduirait à utiliser $N + 1$ capteurs omnidirectionnels positionnés le long de la direction de propagation (cf. figure 1).

Echantillonnage spatial : configuration "1D", N+1 capteurs !

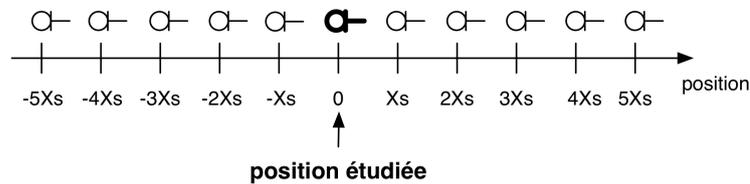


FIGURE 1 – Schéma illustrant la répartition spatiale des capteurs de mesures nécessaires, le long de la droite de propagation (phénomènes « unidimensionnels »), afin d'être en mesure de re-synthétiser une approximation du phénomène ondulatoire étudié à partir de la définition du paquet d'ondes si on utilise une excitation monochromatique. Le point-cible est associé au capteur tracé en gras.

L'obligation d'utiliser un maillage spatial suffisant autour de chacune des positions que l'on souhaite étudier si on désire utiliser des stimuli monochromatiques n'est pas un problème propre au cas de la mesure de pression acoustique puisqu'on est confronté à ce problème à chaque fois que l'on cherche à étudier un phénomène physique ondulatoire scalaire au moins en un point en utilisant des excitations monochromatiques et la définition du paquet d'ondes. Par suite, la question de la validité et/ou de l'interprétation des résultats obtenus pour des phénomènes ondulatoires et donc potentiellement synthétisés par un paquet d'ondes à partir de mesures uniquement au point-cible avec des excitations monochromatiques semble devoir être posée.

Mais les problèmes mis en évidence deviennent encore plus critiques quand on envisage que les phénomènes étudiés sont potentiellement « tridimensionnels » car le maillage spatial nécessaire ne se réduit plus alors à une seule ligne de capteurs positionnés régulièrement et de manière potentiellement symétrique autour du point cible. En fait, pour des phénomènes « tridimensionnels », le maillage doit être volumique afin de prendre en compte le maximum de points autour du point-cible et ainsi améliorer la qualité de l'approximation du paquet d'ondes qui sera obtenue. Evidemment, la densité du maillage et son extension spatiale ont une influence directe et conséquente sur la qualité de l'approximation de la re-synthèse des phénomènes se produisant potentiellement au point-cible.

Ainsi, alors que l'on disposait, en plus du capteur au point-cible, N capteurs selon la droite de propagation dans le cas des phénomènes « unidimensionnels », on devrait mailler le volume entourant le point cible par exemple grâce à $(N + 1)^3$ capteurs (dans le cas d'un maillage avec le même pas spatial suivant chacune des directions) pour des phénomènes « tridimensionnels », comme illustré en figure 2.

3.2 Problème des mesures uniquement au point-cible

Il est intéressant de noter que le respect de la re-synthèse par les paquets d'ondes nécessite des ressources matérielles très conséquentes voire très difficiles à réunir en pratique et qui vont vraisemblablement

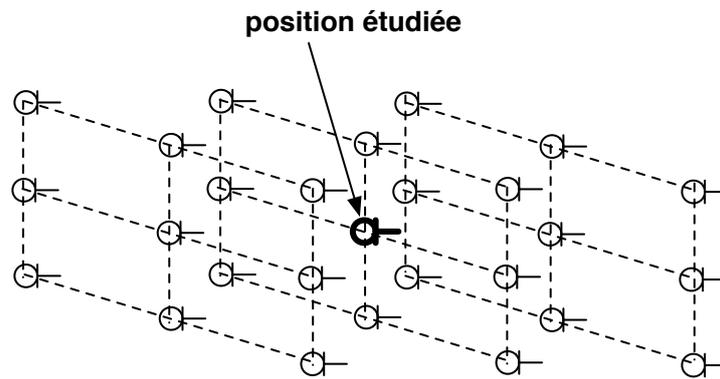


FIGURE 2 – Schéma illustrant la répartition spatiale des capteurs de mesures nécessaires, disposés régulièrement dans un volume autour du point-cible (phénomènes « tridimensionnels »), afin d'être en mesure de re-synthétiser une approximation du phénomène à partir de la définition du paquet d'ondes si on utilise des excitations monochromatiques. Le point-cible est associé au capteur tracé en gras.

blement poser des problèmes de perturbation des phénomènes que l'on veut étudier vu l'espace qui sera occupé par les capteurs et les câbles les reliant éventuellement au dispositif d'acquisition...

Or, bien que les mesures classiques avec des excitations monochromatiques soient classiquement pratiquées en n'enregistrant que ce qui se passe au point-cible, elles semblent pour autant donner accès à des caractérisations généralement considérées comme satisfaisantes des phénomènes étudiés. Ce constat est en contradiction avec ce qui précède et ce d'autant plus qu'il apparaît fort peu probable que les contributions au paquet d'ondes des points situés autour du point-cible soient toutes négligeables ou qu'elles interfèrent systématiquement de manière destructrice de façon que seules les informations captées au point-cible aient une contribution sensible et ce pour n'importe quel point-cible.

En fait, on peut essayer de lever ce paradoxe apparent en étudiant ce qui se passe effectivement lors des mesures.

En pratique, le capteur utilisé n'est pas ponctuel et il transmet la réponse du transducteur à l'ensemble des excitations s'appliquant sur la surface du transducteur. On peut, pour simplifier, considérer que supposer le transducteur ponctuel est une hypothèse satisfaisante car cet effet ne joue qu'un rôle potentiellement mineur par rapport au paradoxe soulevé. En effet, le point intéressant réside dans la prise de conscience du fait que le signal de mesure numérique utilisé pour la caractérisation des phénomènes au point-cible est un signal purement temporel. De plus, si le signal d'excitation « devient effectivement » spatio-temporel quand il est émis par le système de diffusion lors de la mesure, la version utilisée comme référence pour l'analyse correspond au signal d'excitation numérique généré donc à un signal de référence purement temporel. Et, même si on préfère utiliser comme signal de référence le signal enregistré par un capteur analogue à celui placé au point-cible mais placé au droit ou en ultra-proximité du

point-source, le signal de référence ainsi obtenu est aussi purement temporel et l'influence du paramètre spatial se réduit au choix des positions de la source et du point-cible. Ainsi, le signal de référence comme le signal de mesure au point-cible sont des signaux purement temporels pour lesquels l'information spatiale ne subsiste que dans l'étiquetage du point considéré : point-source pour le signal de référence ; point-cible pour le signal de mesure. En se plaçant dans ce cas de figure pour réaliser les mesures, on perd donc complètement le caractère spatial des phénomènes spatio-temporels lors de la phase d'analyse puisque la seule influence du paramètre spatial correspond au choix des positions de la source et du point-cible et qu'aucune modification de la configuration spatiale n'est classiquement mise en œuvre lors des mesures. Les mesures réalisées dans les conditions classiques avec des capteurs seulement aux points-cibles, même si elles donnent une mesure potentiellement biaisée, permettent au moins une comparaison avec d'autres mesures réalisées dans les mêmes conditions.

Ainsi, on n'obtient aucune information concernant le caractère potentiellement ondulatoire ou non des phénomènes étudiés puisque les signaux utilisés pour les analyses sont purement temporels. Et, faute de disposer de maillages de capteurs autour du point-cible, on ne peut absolument pas envisager de re-synthétiser, même de manière approchée, les phénomènes en ce point à partir du principe du paquet d'ondes.

En fait, si on désire étudier la pertinence d'une approximation ondulatoire des phénomènes mesurables avec les capteurs dont on dispose, il faut disposer des signaux temporels simultanés ou re-synchronisés et obtenus dans des conditions expérimentales identiques pour un nombre suffisant de points-cibles dans la zone spatiale dont on souhaite étudier le comportement. Sur la base de la comparaison des signaux mesurés pour cet ensemble de points-cibles, il est alors possible de tester la validité de l'approximation ondulatoire en étudiant notamment :

- les lois d'atténuation ou d'amplification relative, par exemple dans l'axe de la source, du niveau moyen des mesures pour voir si on voit apparaître des lois d'atténuations compatibles avec les modèles d'ondes classiques (loi d'atténuation en $1/r$ ou pas d'atténuation sensible par exemple) ;
- les différences ou constances de profils fréquentiels pouvant ou non correspondre à la notion de front d'onde ;
- les différences ou constances de vitesses d'apparition de front d'excitation pouvant ou non correspondre à la notion de vitesse de propagation d'onde.

Il convient de noter que les constats seraient les mêmes si on utilisait une chaîne d'acquisition analogique puisque les capteurs au point-source comme au point-cible fourniraient encore un signal électrique analogique de nature purement temporelle.

En fait, lorsque les mesures classiques se font uniquement au point-cible, l'utilisation d'excitations monochromatiques de type sweep ne constitue qu'un cas particulier d'excitation susceptible de permettre l'accès à la quantité physique scalaire étudiée dès lors que les phénomènes sont linéaires ou quasiment linéaires. On peut donc envisager d'utiliser d'utiliser des excitations aléatoires (cas des séquences MLS [51] ou des bruits rose ou blanc [49] par exemple) ou encore des excitations complexes représentatives

des conditions classiques d'utilisation des dispositifs étudiés. Puisque les signaux transmis par les transducteurs sont temporels, le choix des excitations à utiliser apparaît devoir être motivé par d'autres critères que le caractère éventuellement ondulatoire des phénomènes étudiés tels que par exemple le rapport signal à bruit des réponses, la validité de l'hypothèse de linéarité du dispositif et des phénomènes étudiés ou la méthode d'analyse envisagée.

Sur la base des propositions présentées dans [47] la situation semble même encore plus complexe et le recours à des excitations complexes représentatives des conditions d'utilisation normales des dispositifs étudiés semble devoir s'imposer puisqu'il apparaît par exemple nécessaire de travailler à partir des équations non linéaires de la Mécanique des Fluides et de considérer plutôt des écoulements acoustiques pour décrire les phénomènes acoustiques. En langage courant, l'excitation « de laboratoire » est, par construction, un phénomène linéaire, respectant le principe de superposition, tandis qu'une excitation faite à partir d'un « élément de programme » (musique, voix...) ne l'est pas nécessairement par hypothèse (phénomènes physiques produisant chacune des sources « primaires » et/ou techniques de composition de ces sources « primaires »).

Dans ces conditions, il semble prudent de tester le principe de linéarité et de superposition acoustique en utilisant des stimuli complexes, en faisant varier le niveau de diffusion et en comparant la réponse obtenue lorsque toutes les sources sont actives avec la somme des réponses obtenues avec à chaque fois une seule des sources actives. Si, comme cela semble se produire sur la base des campagnes de mesures préliminaires que nous avons pu mener et qui seront décrites ailleurs, les phénomènes étudiés manifestent plutôt un comportement sensiblement non linéaire, il serait alors prudent de :

- réaliser les mesures pour un corpus de stimuli complexes potentiellement représentatifs des configurations rencontrées en pratique pour le dispositif étudié ;
- procéder ensuite à la comparaison par exemple des fonctions de transfert calculées à partir des couples (stimulus, mesure associée) pour chacune des excitations composant le corpus pour vérifier si l'hypothèse d'une fonction de transfert unique (et donc d'une réponse impulsionnelle unique) est pertinente pour caractériser le dispositif étudié ;
- considérer des méthodes d'analyses comparatives des mesures et des excitations qui ne reposent pas, s'agissant de la nature physique des phénomènes étudiés, sur d'autres hypothèses que le caractère purement temporel des signaux de mesure.

4 Conclusions et prolongements associés

Au travers de cet article, on a montré que les définitions classiques du paquet d'ondes sont potentiellement erronées et que les amendements proposés pour ces définitions se traduisent par le remplacement des simples transformées de Fourier temporelle ou spatiale utilisées classiquement comme poids des ondes monochromatiques par des bi- ou quadri-transformées de Fourier spatio-temporelles.

Du fait des modifications proposées, il apparaît que les mesures classiques utilisant des excitations monochromatiques avec un capteur au seul point-cible ne satisfont pas au principe de description des phénomènes par un paquet d'ondes et qu'il faudrait introduire un maillage spatial conséquent avec d'autres

capteurs placés autour du point-cible pour se conformer aux exigences associées aux définitions proposées dans cet article pour les paquets d'ondes.

Le paradoxe associé au caractère potentiellement satisfaisant des résultats des mesures classiques avec un seul capteur au point-cible et des excitations monochromatiques est expliqué par le caractère purement temporel des signaux mesurés qu'il s'agisse du signal d'excitation ou du signal mesuré. De plus, ce paradoxe met en évidence le fait que ce genre de mesures ne donne en pratique aucune information quant à la nature ondulatoire ou non du phénomène étudié, que l'hypothèse ondulatoire n'est donc en aucune mesure nécessaire pour analyser les signaux obtenus et que, par voie de conséquence, le formalisme des paquets d'ondes se révèle en fait plutôt inadapté pour étudier ces phénomènes.

Pour mettre en évidence la validité d'une approximation ondulatoire des phénomènes étudiés, il faudrait mettre en œuvre un maillage spatial conséquent par des capteurs de la zone étudiée afin de tester la validité des propriétés associées aux ondes : vitesse de propagation constante, loi d'atténuation relative en fonction de la distance à la source, existence d'un front d'onde. Le déplacement d'un seul capteur en chacune des positions du maillage spatial avec répétition de l'expérience pourrait éventuellement constituer une alternative à condition que les phénomènes soient (qualitativement) reproductibles « à l'identique » et que l'on soit en mesure de garantir l'identité des conditions initiales pour chacune de ces expériences.

Il apparaît intéressant d'étudier les conséquences des principes et corrections proposées ici dans d'autres branches de la Physique ne serait-ce que la Mécanique Quantique qui fait un usage intensif de la notion de paquets d'ondes, ce qui sera initié dans un autre article. Il semble aussi intéressant de chercher à utiliser d'autres méthodes d'analyse que les paquets d'ondes ou les transformées de Fourier afin d'utiliser des analyses ne faisant pas d'hypothèses quant à la nature physique des phénomènes étudiés. Partant de premiers résultats expérimentaux et des propositions exposées dans [47], il apparaît intéressant de réaliser des mesures avec des excitations complexes potentiellement représentatives des conditions d'utilisation normale des installations ou des dispositifs testés ou encore de production des phénomènes physiques que l'on souhaite étudier. Par suite, il semble intéressant d'envisager l'utilisation de méthodes d'analyse permettant la comparaison des réponses obtenues pour chacun des stimuli constituant le corpus choisi.

Références

- [1] Millot L., Why using complex stimuli for acoustical measurements may be necessary to get physically relevant analysis results, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 126, p. 2199, 2009.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique - Volume I*, Hermann, Paris, 1998.
- [3] M. Lambert, *Introduction à la mécanique quantique*, Ellipses, 1998.
- [4] Y. Peleg and R. Pnini and E. Zaarur, *Quantum mechanics*, Schaum's outlines, Mc Graw Hill, 1998.
- [5] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, 1999.
- [6] J. Hladik and M. Chrysos, *Introduction à la mécanique quantique*, Dunod, 2000.

- [7] J.-L. Basdevant and J. Dalibard, *Mécanique Quantique*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2003.
- [8] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Education International, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005.
- [9] Ch. Ngô and H. Ngô, *Physique Quantique - Introduction*, Dunod, 2005.
- [10] J.-L. Basdevant, *12 leçons de mécanique quantique*, Vuibert, 2006.
- [11] M. Le Bellac, *Quantum Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [12] R. W. Robinett, *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2007.
- [13] G. Boffetta and R. Osborne, Computation of the direct scattering transform for the nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Computational Physics*, vol. 102, p. 252-264, 1992.
- [14] L. Yang and I. R. Epstein, Chemical wave packet propagation, reflection and spreading, *J. Phys. Chem. A*, vol. 106, p. 11676-11682, 2002.
- [15] L. de Broglie, *Eléments de théorie des quantas et de mécanique quantique*, Jacques Gabay, 2003.
- [16] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press, 1987.
- [17] A. Chaigne, *Ondes acoustiques*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- [18] L. de Broglie, *La physique quantique restera-t-elle indéterministe ?*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [19] E. J. Kelly, *The representation of seismic waves in frequency-wave number space*, Lincoln Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, 1964.
- [20] B. L. N. Kennett, Wavenumber and wavetype coupling in laterally heterogeneous media, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, vol. 87, p. 313-331, 1986.
- [21] D. Censor, Geometrical mechanics for particles in dissipative systems, *Physical Review D*, vol. 19, no. 4, p. 1108-1111, 1979.
- [22] D. Censor, Wave packets and localized pulses - a dual approach, *Physical Review A*, vol. 24, no. 3, p. 1452-1459, 1981.
- [23] Dudgeon D, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1984.
- [24] D. Censor, Electrodynamics, Topsy-Turvy special relativity, and generalized Minkowski constitutive relations for linear and nonlinear systems, *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 18, p. 261-284, 1998.
- [25] D. Censor, Quasi Doppler effects associated with spatio-temporal translator, moving and active boundaries, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 13, p. 145-173, 1999.
- [26] E. A. Robinson, History of the wave equation and transforms in engineering, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, vol. 9, Plenum Press, New York, 1990.
- [27] R. D. Donnelly and R. Ziolkowski, A method for constructing solutions of homogeneous partial differential equations; localized waves, *Proceedings : Mathematical and Physical Sciences*, vol. 437, no. 1901, p. 673-692, 1992.
- [28] F. H. Fröhner, Missing link between probability theory and quantum mechanics : the Riesz-Fejér theorem, *Z. Naturforsch.*, vol. 53a, p. 637-654, 1998.
- [29] T. Tao, Endpoint bilinear restriction theorems for the cone, and some sharp null form estimates, *arXiv :math/9909066v2*, 2000.

- [30] W. Appel, *Mathématiques pour la physique*, H&K Editions, 2002.
- [31] M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*, Hermes, 1998.
- [32] S. Lewy, *Acoustique industrielle et aéroacoustique*, Hermes, 2001.
- [33] W. Chen and S. Holm, Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 115, no. 4, p. 1424-1430, 2004.
- [34] J. Dmochowski, J. Benesty and S. Affès, On spatial aliasing in microphone arrays, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 4, p. 1383-1395, 2009.
- [35] A. L. Gregory, S. Sinayoko, A. Agarwal and J. Lasenby, *An acoustic spacetime and the Lorentz transformation in aeroacoustics*, *arXiv :1403.7511v1*, 2014.
- [36] T. Zhu and J. M. Harris, Modeling acoustic wave propagation in heterogeneous attenuating media using decoupled fractional Laplacians, *Geophysics*, vol. 79, no. 3, p. T105-T116, 2014.
- [37] S. W. Rienstra and A. Hirschberg, *An introduction to Acoustics*, Eindhoven University of Technology, 2013 (<http://www.win.tue.nl/~sjoerdr/papers/boek.pdf>, 2015/01/29).
- [38] A. Zerva and O. Zhang, Estimation of signal characteristics in seismic ground motions, *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 11, p. 229-242, 1996.
- [39] T. Ajdler, L. Sbaiz and M. Vetterli, The plenacoustic function and its sampling, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 10, p. 3790-3804, 2006.
- [40] T. Ajdler, L. Sbaiz and M. Vetterli, Dynamic measurement of room impulse responses using a moving microphone, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 122, no. 3, 2007, p. 1636-1645.
- [41] J. Li and S. Liu, The application of time-frequency transform in mode identification of Lamb waves, *17th World Conference on Nondestructive Testing*, 2008.
- [42] F. Pinto and M. Vetterli, Coding of spatio-temporal audio spectra using tree-structured directional filterbanks, *2009 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, 2009.
- [43] F. Pinto, *Signal processing in space and time - a multidimensional Fourier approach*, Thèse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2010.
- [44] F. Pinto and M. Vetterly, Space/time-frequency processing of acoustic wave fields : theory, algorithms and applications, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, num. 9, pp. 4608-4620, 2010.
- [45] F. Pinto and M. Vetterly, Applications of short space-time Fourier analysis in digital acoustics, *2011 International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2011.
- [46] M. N. Do, D. Marchand-Maillet and M. Vetterli, On the bandwidth of the plenoptic function, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 21, no. 2, p. 708-717, 2012.
- [47] L. Millot, *Proposition d'une alternative au paradigme ondulatoire en Acoustique : les écoulements acoustiques*, 2015.
- [48] A. Farina, *Advancements in impulse response measurements by sine sweeps*, in Proceedings of the 122nd Audio Engineering Society, 2007.

- [49] S. Müller and P. Massarani, Transfer-function measurement with sweeps, *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 49, no. 6, 2001, p. 443-471.
- [50] G.-B. Stan, J.-J. Embrechts and D. Archambeau, Comparison of different impulse response measurement techniques, *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 50, no. 4, 2002, p. 249-262.
- [51] D. D. Rife and J. Vanderkooy, Transfer function measurement with maximum-length sequences, *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 37, 1989, pp. 419-444.