

CONCEPTION ET EXPERIMENTATION D'UNE SITUATION SUR LA STRUCTURE D'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DES NOMBRES COMPLEXES

Raja TANAZEFTI* - Imène GHEDAMSI**

Résumé - Cet article étudie les potentialités des relations établies entre les objets mathématiques pour concevoir des situations visant l'introduction de la structure euclidienne des nombres complexes. Les résultats montrent la possibilité de convaincre les étudiants de l'obligation de considérer systématiquement un plan orienté lorsqu'ils travaillent dans le plan d'Argand. L'existence concrète des nombres complexes a émergé grâce au raisonnement géométrique des étudiants conduisant à la nécessité de compléter la droite réelle pour visualiser ces nombres.

Mots-clefs : Nombres complexes, plan d'Argand, situation didactique, structure euclidienne.

Abstract - This contribution is an attempt to study the effectiveness of outlining relations between mathematical objects; and deploying these relations to design activities aiming to introduce the Euclidian structure of complex numbers. The results show the possibility to convince students about the obligation to systematically consider a direct frame when working in the complex plane. The *concrete* existence of complex numbers has emerged thanks to students' geometrical reasoning leading to the shortness of real lines in shaping these numbers.

Keywords: Complex numbers, Argand space, didactical situation, Euclidian structure.

INTRODUCTION

Dans le cadre de ce travail, nous analysons une situation qui vise à introduire la structure euclidienne vectorielle de \mathbb{C} . Notre objectif ultime est d'initier les élèves de fin du lycée aux structures d'espace vectoriel euclidien et d'espace affine euclidien de l'ensemble des nombres complexes. Cette situation s'articule autour de trois enjeux cognitifs majeurs : 1) revisiter les connaissances antérieures des élèves concernant la droite réelle (Hui et Lam, 2013) et son usage en vue des opérations sur les réels ; 2) utiliser la droite réelle afin de poser les conditions de construction du plan complexe (Lakoff et Nuñez, 2000); 3) utiliser ce plan en vue des opérations sur les nombres complexes.

Dans la continuité des travaux de Ghedamsi (2017), nous prenons appui sur l'ingénierie didactique en tant que méthodologie de recherche de la Théorie de Situations Didactiques (Brousseau, 1998). En particulier, nous mettons en œuvre la grille multidimensionnelle d'analyse conjointe du travail des élèves et de la médiation du professeur (Ghedamsi, 2017) afin de mettre en évidence les opportunités d'apprentissage et le rôle du professeur dans la progression de ces apprentissages. Cette grille comporte trois dimensions d'étude centrées sur les phases d'action de formulation et de validation des élèves. À côté d'une dimension d'analyse spécifique à la gestion des interactions, les interventions du professeur sont étudiées du point de vue de la gestion du travail des élèves durant ces trois phases.

Nous étudions en particulier l'implication des élèves dans toutes les phases de travail de recherche, de formulation et de validation, ainsi que l'accompagnement par le professeur à l'organisation de leurs connaissances, et à la construction du plan d'Argand et sa mise en œuvre pour la visualisation des opérations sur les complexes. Nous mettons spécifiquement l'accent sur les possibilités de pallier à un manque rapporté dans un travail antérieur (Ghedamsi et Tanazefi, 2015), concernant l'obligation de considérer systématiquement un repère orthonormé direct quand il s'agit de travailler dans le plan complexe.

* Université de la Manouba - Tunisie - tanazefiraja@yahoo.fr

** CY Cergy Paris Université - France - imene.ghedamsi-lecorre@cyu.fr

L'étude historique et didactique entreprise en vue de la conception d'une ingénierie sur les nombres complexes a mis en évidence l'intérêt, entre autres, de prendre en considération la preuve d'orthonormalité et d'orientation du plan complexe. Cette preuve est fondamentale pour au moins deux raisons : rapprocher la distinction entre la structure de corps et celle d'espace affine euclidien de \mathbb{C} ; et penser les aspects unificateur et simplificateur des nombres complexes en termes de changements de structures de \mathbb{C} . Ceci permet en particulier de :

- interpréter géométriquement les opérations dans le corps \mathbb{C} , non seulement pour une meilleure distinction avec les opérations dans \mathbb{R} , mais aussi pour mieux définir le rôle des transformations planes usuelles dans un travail avec les nombres complexes ;
- exploiter la validité géométrique des nombres complexes pour simplifier la résolution de problèmes géométriques.

I. CONTEXTE ET OBJECTIF DE LA SITUATION

Il s'agit de construire un milieu expérimental ayant pour objectifs la construction du plan complexe pour pouvoir interpréter géométriquement les éléments de \mathbb{C} ainsi que les opérations sur les nombres complexes. La situation est formée de deux parties comme décrit ci-dessous.

1) Une partie qui étudie la droite réelle et l'interprétation géométrique des réels à travers :

- Un retour sur l'interprétation géométrique de l'ensemble des réels (relier l'algébrique au géométrique).
- Une interprétation géométrique des opérations dans \mathbb{R} et particulièrement l'assimilation de la multiplication par (-1) à une rotation d'angle π (Conner et al., 2007).

2) Une partie qui traite de la construction du plan complexe à travers :

- La construction de l'axe des imaginaires. Il s'agit de montrer la nécessité de construire un deuxième axe et de déterminer sa position par rapport à l'axe des réels pour pouvoir représenter géométriquement les nombres complexes.
- Interprétation géométrique des nombres complexes : Si l'on accepte de prolonger l'ensemble des nombres à un ensemble contenant ces nombres, comment est-il possible de relier l'algébrique et le géométrique ?

Les interactions en classe suscitées par cette situation vont être soutenues par les questions suivantes : Que pensez-vous de cette affirmation : La multiplication d'un réel par (-1) revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle π ? Que pensez-vous de cette affirmation : La multiplication d'un nombre par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle $\pi/2$? Que pensez-vous de cette affirmation : On peut vérifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme en utilisant les nombres complexes ?

Cette situation a été expérimentée, durant deux séances de cours de deux heures chacune, dans la même classe de troisième année mathématiques qui a bénéficié de la mise en œuvre du projet introduisant la notion de nombres complexes et leurs propriétés. Cette classe est formée de 32 élèves âgés entre 17 et 18 ans. Le professeur, était présent avec deux observateurs qui avaient à leur charge de réaliser un enregistrement de la séance et de noter l'intégralité des échanges qui ont eu lieu entre pairs ou entre professeur et élèves. Tous ces éléments ont été transcrits pour constituer le corpus de base de notre analyse.

II. ANALYSE A PRIORI DE LA SITUATION

Rappelons que plusieurs chercheurs ont souligné l'importance de mettre l'accent sur le lien existant entre la multiplication par i et l'effet d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. En effet, ils ont précisé que l'introduction justifiée de i permettra la validation de l'usage d'un repère orthonormé, condition fondamentale pour distinguer la structure de corps de \mathbb{C} de sa structure de \mathbb{R} -espace vectoriel ainsi que pour pouvoir interpréter géométriquement les éléments de \mathbb{C} et des opérations sur ces éléments. Dans ce contexte, nous citons Driver et Tarran (1989), Lakoff et Nuñez (2000), Hui et Lam (2013), Conner et al (2007), Anevskaja et al (2014), Karakok et al (2014).

1. Aperçu global et variables didactiques

Les actions du professeur dans le cadre de cette situation s'articulent autour de deux activités :

A1 : Retour sur l'interprétation géométrique des nombres réels ainsi que des opérations sur ces nombres en mettant l'accent sur la relation entre la multiplication par (-1) et une rotation adéquate. Condition nécessaire pour pouvoir passer à l'interprétation géométrique des nombres complexes. Cette micro action est formée par une seule question.

A2 : Construction de l'axe des imaginaires ce qui permettra par la suite la construction du plan complexe puis l'interprétation géométrique des éléments de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Les variables didactiques qui vont permettre d'accompagner le travail des élèves et de structurer sa nature sont de deux types : 1) variables micro didactiques en lien avec la nature des notions mathématiques en jeu Vd1 (Représentation mathématique de \mathbb{R}), Vd2 (Interprétation de la somme de deux nombres), Vd3 (Interprétation de la multiplication par un réel), Vd4 (Composition d'application du plan), 2) variables macro didactiques plutôt général à la pratique de l'activité mathématique VD1 (Mode d'intervention de la notion), VD2 (Registre et conversion entre représentations sémiotiques), VD3 (Registre et conversion entre représentations mathématique).

Les connaissances préalables requises de la part des élèves pour s'investir dans le travail relatif à cette situation sont les suivantes : Connaissances relatives à la droite des réels, aux transformations du plan, aux opérations algébriques dans l'ensemble des nombres complexes, aux notions de vecteurs. Le savoir visé et qui va faire l'objet d'une institutionnalisation par le professeur est le plan complexe.

2. Enoncé de la situation et développement mathématique

a) La droite réelle : une interprétation vectorielle des réels

Dans la séquence ci-dessous, un professeur tente de convaincre ses élèves que les démarches les ayant menés à l'introduction de l'ensemble des nombres complexes et à généraliser les opérations sur les réels à cet ensemble sont raisonnables :

Professeur 1 : Rappelez-vous la droite réelle...
Feriel : Qu'est-ce qu'elle a à faire ici ? Et après... ?
Khaled : Bon... à chaque nombre réel, on fait correspondre un point de cette droite...
Minyar : D'ailleurs, à tout point de cette droite, on peut faire correspondre un nombre réel...
Professeur 2 : La multiplication d'un nombre réel par (-1) revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle π .
Ahmed : Mais comment peut-on parler de rotation ? Est-ce que le plan est orienté ?

Que pensez-vous de cette séquence ? En particulier, comment vous interprétez l'intervention 2 du professeur ?

Dans cette situation, la première question, offre aux élèves l'opportunité de retourner sur l'interprétation géométrique des réels, matérialisée par la droite réelle, puis de conjecturer que la multiplication d'un réel par (-1) est la rotation d'angle π , la validation peut être graphique ou algébrique. La métaphore "*multiplier par (-1) c'est faire une rotation d'angle π* " constitue une condition nécessaire pour la construction du plan complexe et permet de le distinguer du plan de dimension deux (Lakoff et Nuñez, 2000, Hui et Lam, 2013, Chin et Jiew, 2020). Les élèves savent déjà, depuis la fin du collège, qu'à tout nombre réel est associé un point d'une droite graduée d'origine un point noté O, appelée droite des réels, et à tout point de cette droite est associé un nombre réel.

En termes de catégories mathématiques ceci se traduit par l'isomorphisme entre \mathbb{R} en tant que \mathbb{R} espace affine ou en tant que \mathbb{R} espace vectoriel et la droite réelle.

La multiplication d'un nombre réel par (-1) peut être interprétée comme étant la rotation d'angle π et de centre l'origine O de la droite. Dans le plan orienté, si M est un point de la droite réelle et M' son symétrique par rapport à l'origine O de la droite, alors ces points vérifient le système :
$$\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi(2\pi) \end{cases}$$
 Par suite M' est bien l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle π . Notons que l'usage de la rotation est possible à ce niveau du cursus car les élèves ont l'habitude de manipuler le plan affine euclidien.

b) Construction de l'axe des imaginaires en respectant la condition $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{C}$ où la somme est directe orthogonale

Dans la suite du débat, Ahmed lance la question suivante :

Ahmed : Si on peut représenter les réels sur la droite réelle, comment on peut représenter les nombres complexes ?

Emna : Il nous faut une autre droite...il y a deux parties là...

Professeur 3 : Myriam, peux-tu nous expliquer ce que tu veux dire par là ?

Aziz : Mais on s'est mis d'accord qu'un nombre complexe admet une partie réelle et une partie imaginaire...

Skander : Tu veux dire que la droite réelle comporte la partie réelle ... Comment on construit l'autre droite ?

Professeur 4 : Oui...il nous faut une condition...

Khaled : Nous avons utilisé $\sqrt{-1}$ et nous avons $(\sqrt{-1})^2 = -1$...

Professeur 5 : La multiplication d'un nombre par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle $\pi/2$.

Linda : Nombres complexes ! Comment !

Que pensez-vous de cette séquence ? En particulier, comment vous interprétez l'intervention 5 du professeur ? Quelle est l'apport d'une telle intervention pour la "représentation graphique" des nombres complexes ?

La séquence proposée dans la deuxième question, va permettre aux élèves, dans un premier temps de construire l'axe des imaginaires et ce en utilisant d'abord les résultats de la première question et ensuite en validant la métaphore : "*multiplier par i c'est faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$* ". Dans un deuxième temps, ils vont déduire la construction du plan complexe et par suite la justification de la nature du repère que cette structure exige. Dans un troisième temps les élèves vont ainsi pouvoir considérer un nombre complexe comme étant à la fois un point du plan ou un vecteur. (Lakoff et Nuñez, 2000 ; Driver et Tarran, 1989 ; Hui et Lam, 2013).

Les élèves ont déjà été introduits aux écritures algébriques des nombres complexes ($a + \sqrt{-1}b$ où a et b sont des nombres réels). Comme tout nombre réel a , peut être représenté par un point de la droite réelle et comme $\sqrt{-1}b$ n'est pas un réel, alors il va être représenté par un point d'une droite (une seule variable b) autre que la droite réelle. La question est de déterminer la position de cette droite par rapport à la première. Comme $\mathbb{R} \cap \sqrt{-1}\mathbb{R} = \{0\}$, les deux droites vont se couper au point O , et puisque la multiplication par (-1) revient à faire une rotation d'angle π , la multiplication par $\sqrt{-1}$ revient à faire une rotation d'angle θ , par suite multiplier par $(\sqrt{-1})^2$ c'est faire une rotation d'angle 2θ . Comme $(\sqrt{-1})^2 = -1$, alors la rotation d'angle 2θ n'est autre que celle d'angle π . Donc $2\theta = \pi$ et par suite $\theta = \frac{\pi}{2}$. On conclut alors que multiplier un nombre réel b par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point B , d'abscisse b , de la droite réelle par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. Travail possible des élèves et médiation du professeur

3.1 La droite réelle : une interprétation vectorielle des réels

Nous commençons cette situation par un retour sur l'interprétation géométrique des réels pour plusieurs raisons. D'une part, la correspondance nombres réels/points de la droite réelle s'avère nécessaire pour pouvoir aborder la suite de la situation soit, l'interprétation des imaginaires puis des complexes. D'autre part, de nombreux élèves peinent à conceptualiser cette bijection entre éléments de \mathbb{R} et points de la droite réelle, comme souligné par Castella :

L'idée de la correspondance bijective entre les nombres et les points d'un axe est loin d'être une évidence limpide. (Castella, 1996, p. 36)

Nous prévoyons que les élèves, qui ont largement travaillé sur cette correspondance dans les niveaux antérieurs, peuvent interpréter géométriquement les réels, comme des points de la droite réelle. Ils vont faire une conversion entre le registre algébrique et le registre graphique affine pour répondre à la première intervention du professeur : *Rappelez-vous la droite réelle...* Il est à rappeler, qu'en termes de catégorie, la correspondance nombres-points, traduit un isomorphisme entre l'ensemble \mathbb{R} des réels et la droite affine, dans la catégorie des espaces affines. Pour Lakoff et Nuñez (2000) c'est la présence du signe moins dans i^2 qui les a incités au retour sur la droite réelle :

Since $i^2 = -1$, let us begin our thinking about i with the conceptualization of (-1) and other negative numbers. Given the Numbers are Points on a Line metaphor, we form the Number-Line blend, in which all the real numbers-including the positives, the negatives, and zero-are conceptualized as spread out along a line, with zero at a point called the origin. (Lakoff et Nuñez, 2000, p. 424)

D'après les scientifiques cognitivistes, la perception de la multiplication d'un réel par (-1) comme une rotation d'angle π , est conceptualisée en termes de rotation mentale :

Cognitively, we visualize the relationship between the positive and negative numbers using a rotational transformation from the positive to the negative numbers a "flipping over" of the positive part of the line onto the negative part of the line around the origin, preserving distance (Lakoff et Nuñez, 2000, p. 424).

De son côté Barrera (2012) a confirmé la signification géométrique des opérations élémentaires entre les nombres réside dans l'idée de *transformation*.

Pour l'interprétation géométrique de la multiplication d'un réel par (-1) , les élèves peuvent voir le point N d'abscisse un réel $(-x)$ comme étant l'image du point $M(x)$ par la symétrie centrale de centre O ou par l'homothétie de centre O et de rapport (-1) . Mais comme la consigne est de montrer qu'il s'agit d'une rotation et que cette multiplication se conceptualise en termes de rotation mentale (Lakoff et Nuñez, 2000), les élèves vont juste formuler les éléments caractéristiques de cette rotation à savoir le centre et l'angle puis les valider en utilisant le

registre algébrique. Le professeur va exploiter le retour sur la droite réelle pour souligner certaines caractéristiques géométriques de \mathbb{R} et en particulier la multiplication par (-1) en tant que rotation d'angle π .

3.2 Construction de l'axe des imaginaires avec la condition $R \oplus iR = C$ où la somme est directe orthogonale

Rappelons que, comme il a été signalé par Barrera (2012), l'interprétation géométrique des nombres complexes peut atténuer le degré d'abstraction de ces nombres et en fournir ainsi une meilleure visualisation et par suite une meilleure conceptualisation de ce concept :

Les nombres complexes ont cessé d'être imaginaires à partir du moment où il a été possible de leur donner une représentation et une réalité dans le cadre de la géométrie, réalité que le signe $\sqrt{-1}$ ne suffisait pas à leur en donner. (Barrera et al., 2012, p. 2).

Cette interprétation ne peut se faire sans la construction du plan complexe donc de l'axe des imaginaires, obtenu par transformation géométrique de la droite réelle tout en préservant sa structure, comme souligné par Flament, (2003). Le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$, unité de l'axe des imaginaires est *le signe de perpendicularité*.

Il convient donc de considérer la rotation comme moyen d'aborder la construction du plan complexe puisque : By an association of ideas the rotation through $\frac{\pi}{2}$ is associated with $\sqrt{-1}$ (Driver et al., 1989, p. 123). A cet effet nous essayerons de construire le deuxième axe après avoir montré la nécessité de son existence.

Le travail des élèves concernant la construction du plan complexe est structuré au niveau de la formulation sur la possibilité de décomposer de manière unique tout nombre complexe comme la somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, connaissance acquise dans la situation précédente. Dans ce cas la partie réelle peut être interprétée géométriquement par un point d'une droite D (la droite réelle, étudiée dans la première partie de la situation). Ils sont amenés par la suite à travers l'application du schème de la droite réelle et assimilation, à conjecturer que la deuxième partie (ib), qui n'est pas réelle, ne peut être associée à un point de la droite réelle. Ce travail pragmatique, de décomposition des nombres complexes va permettre de valider l'existence d'une autre droite Δ , à laquelle vont appartenir les points associés aux nombres imaginaires (ib), quand b varie dans \mathbb{R} .

Position relative des deux axes

Etant donné que le nombre zéro est à la fois réel et imaginaire du fait que $0 = i0$, les élèves vont pouvoir formuler que le deuxième axe Δ passera par le point O de l'axe des réels D , d'abscisse zéro. Il en résulte donc que le point O , origine de la droite D , appartient aussi à la droite Δ . Les élèves peuvent valider que les deux droites D et Δ sont sécantes et que leur point d'intersection est le point O .

Comme la multiplication par (-1) est interprétée comme étant une rotation de centre O et d'angle π et que le nouvel axe est matérialisé par les nombres (ib) où b est un réel, pour déterminer l'angle entre les deux axes, les élèves peuvent procéder de deux manières :

- Soit, ils conjecturent que la multiplication par $\sqrt{-1}$ revient à faire une rotation d'angle θ , ils déduisent alors que la multiplication par $(\sqrt{-1})^2$ revient à composer deux rotations du même angle, qui n'est autre que la rotation d'angle 2θ . L'égalité entre les deux rotations permet de conclure que l'angle 2θ est égal à π . Par suite $\theta = \frac{\pi}{2}$ et enfin formuler que multiplier un nombre par $\sqrt{-1}$ revient à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Soit, ils supposent l'existence d'un nombre n tel que multiplier un nombre par n revient à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis déduire que ce nombre ne peut être que $\sqrt{-1}$: In the rotation plane, rotation by 180° is multiplication by the number (-1) . Suppose... there is some number n such that rotation by 90° is multiplication by n . It will follow that two rotations by 90° is multiplication by n^2 (Lakoff et Nuñez, 2000, p. 428).

Un lien est alors établi entre les points A et A' d'affixes respectives le réel (a) et le nombre imaginaire (ia) à travers la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

La séquence proposée, dans la question 2 de la situation, permet aux élèves de répondre à la question relative à l'apport de l'intervention 5 du professeur : *la multiplication par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$* . En effet, étant donné le nombre complexe $z = a+ib$, il est possible que les élèves répondent de l'une des deux manières :

- Ils considèrent le point A d'abscisse a de l'axe des réels et le point B d'abscisse (ib) de l'axe des imaginaires. Le point C défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, est le point du plan complexe associé au nombre complexe z .

- Ils considèrent un point A d'abscisse (a) sur l'axe des réels, un point B_1 sur le même axe d'abscisse (b), l'image de B_1 par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'après ce qui précède, est le point B de l'axe des imaginaires d'abscisse (ib), le point C défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, est le point du plan complexe associé au nombre complexe z .

A ce niveau de l'étude, la médiation du professeur va aider les élèves à formuler l'identification entre nombres complexes et points du plan complexe.

Au terme de cette situation, le professeur va pouvoir institutionnaliser : 1) la notion de plan complexe en tant qu'"*espace affine*": à tout nombre complexe on associe un unique point du plan complexe appelé image de ce nombre complexe et réciproquement, à tout point de ce plan on associe un unique nombre complexe appelé affixe de ce point (la fonction affixe est vue comme un isomorphisme dans la catégorie des espaces affines) ; 2) la notion de plan complexe en tant qu'"*espace vectoriel*": à tout nombre complexe on associe un unique vecteur appelé image du nombre complexe et réciproquement. (En termes de catégorie, la fonction affixe est vue comme un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels).

La médiation du professeur va focaliser sur un approfondissement de la distinction entre plan complexe et plan euclidien.

III. ANALYSE A POSTERIO

Dans toute l'analyse concernant la situation du plan complexe, le travail des élèves est étudié à travers les trois dimensions recherche (R), formulation (F) et validation (V). La médiation du professeur est analysée à travers les actions qu'il a mise en œuvre pour gérer le travail des élèves relatif à cette situation (A1 et A2).

1. La droite réelle : une interprétation vectorielle des réels

Nous commençons par résumer dans un tableau les interventions des élèves et du professeur.

Professeur A1		173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224
Elèves	R	237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 256, 257, 258, 263, 264, 265, 269
	F	209, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 259, 260, 261, 262, 268, 270
	V	266, 267

Tableau 1 – Répartition des interventions – Interprétation géométrique des réels

Nous avons enregistré lors de cette expérimentation relative à l'interprétation géométrique des réels, un total de 109 interventions, réparties entre 52 interventions du professeur et 57 interventions des élèves. Les interventions des élèves se sont déroulées la plupart du temps entre pairs pour : (1) Interpréter géométriquement les nombres réels ; (2) Interpréter géométriquement la multiplication d'un réel par (-1) ; (3) Interpréter géométriquement les opérations dans \mathbb{R} .

Un aperçu global de la répartition des interventions des élèves laisse apparaître une prédominance des interventions relatives à la rubrique formulation avec 30 interventions, presque la moitié des interventions des élèves dans cette situation, ce qui est prévu pour cette question puisqu'il s'agit d'un retour sur les connaissances antérieures. Le nombre des interventions relatives à la rubrique recherche sont 25, cependant celles de validation sont de 2 interventions. Elles concernent la recherche et la validation algébrique des trois solutions de l'équation en jeu. Les élèves, comme il a été prévu, ont su interpréter géométriquement tout réel par un point d'une droite dont la nomination diffère d'un élève à l'autre : 213. Elèves : *les abscisses des points d'une droite*, 216. Habib : *Droite des réels*, 217. Yosr : *Droite vectorielle*, 218. Mehdi : *Droite graduée orientée*.

Le professeur ne s'est pas contenté de ces appellations, il a essayé de réorganiser les connaissances antérieures des élèves, comme nous le voyons dans cet échange :

P₁₈₃ : Ça veut dire quoi pour vous la droite des réels ?
226. Charfi : Représentation
P₁₈₄ : Ça veut dire quoi ?
227. Elèves : On associe à chaque réel un point
P₁₈₅ : d'accord, et que pensez-vous de la réciproque ?
228. Iheb : A chaque point on peut associer un nombre réel
P₁₈₈ : Très bien, alors à chaque réel x on associe le point M de la droite mais aussi ?
231. Elèves : Un vecteur
P₁₈₉ : Quel vecteur ?
232. Yosr : vecteur \overrightarrow{OM}


Remarquons que le professeur essaie de sensibiliser les élèves, implicitement, quant à l'isomorphisme entre la droite réelle et \mathbb{R} en tant qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Concernant la multiplication par (-1), comme il a été prévue, les élèves l'ont interprété comme étant une symétrie centrale, une homothétie de rapport (-1) ou encore comme une rotation : 259. Habib : *c'est comme on effectue une symétrie centrale de centre O* , 262. Iheb : *Homothétie de centre O et de rapport (1)*. Les élèves, qui ont considéré cette multiplication par (-1) comme une rotation d'angle π ont pu même le valider : 256. Elèves : *la rotation de centre O et d'angle π ,*

259. Iskander : (au tableau)
$$\left\{ \begin{array}{l} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi (2\pi) \end{array} \right.$$

Le professeur les encourage et essaye de justifier pourquoi nous avons besoin de voir cette multiplication par (-1) comme une rotation : P₂₁₆ : (...) *mais la consigne est de le voir comme rotation, on va voir la raison dans la suite de la situation.* Nous pouvons voir la médiation du professeur, vis-à-vis des élèves, qui ont proposé d'interpréter l'addition des réels, il n'a pas écourté le travail des élèves et a essayé de laisser des ouvertures :

263. Malek : *On peut interpréter la somme de réels ?*
 P₂₁₇ : *Très bonne question, qui peut répondre ?*
 264. Iskander : *Nous avons dit qu'un nombre on peut le voir comme un vecteur*
 P₂₁₈ : *D'accord, vous pouvez prendre des exemples.*
 265. Elèves : *Ah somme de vecteurs.*
 P₂₁₉ : *Très bien, prenez par exemple 2+3, allez-y Malek, au tableau.*
 266. Malek : *(au tableau) 2+3=5, on considère M(2), N(3) et E(5), alors :*
 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OE}$



L'interprétation de la multiplication par un réel a été proposée par le professeur que l'on décèle chez lui l'essai de mener les élèves à introduire implicitement la structure d'espace affine et celle d'espace vectoriel de R. Nous pouvons voir ceci dans les échanges :

P₂₂₀ : *maintenant si on multiplie un réel quelconque a par un autre 2 par exemple ?*
 268. Elèves : $\overrightarrow{OM} = a \overrightarrow{OF}$
 269. Elèves : *L'image de M par l'homothétie de centre O et de repère (a)*

A la fin de cette première question le professeur fait un bilan sur les connaissances acquises. Notons que la représentation géométrique des réels, qui est un isomorphisme des R-espace vectoriel de dimension un, les élèves n'ont pas trouvé beaucoup de difficultés pour en répondre. Ce qui n'est pas le cas pour l'interprétation des opérations sur les nombres réels à l'aide des transformations. Ceci peut être expliqué par la non assimilation de cette représentation tout au long du cursus scolaire. En effet, un aperçu sur le programme officiel peut révéler le manque d'apprentissage spécifique sur les transformations planes pour l'interprétation géométrique des opérations sur les réels. La nécessité des transformations dans l'interprétation de ces opérations est soulignée par plusieurs chercheurs :

Si les points d'une droite sont des nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de transformation. (Barrera, 2012, p. 58).

2. *Construction de l'axe des imaginaires avec la condition $R \oplus iR = C$ où la somme est directe orthogonale*

Nous commençons par résumer dans un tableau les interventions des élèves et du professeur.

Professeur	A1	226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239
	A2	241, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257 258 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268
Elèves	R	273, 274, 275, 283
	F	276, 277, 278, 279, 284, 285, 286, 287, 291, 298, 301, 302, 304, 306, 307, 308. 309, 310, 311, 312, 313
	V	280, 281, 282, 288, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 299, 300, 303, 305.

Tableau 2 - Répartition des interventions – Plan complexe

Nous avons enregistré lors de cette expérimentation relative à l'introduction du plan complexe, un total de 87 dont 8 supposées neutres 4 pour le prof et 4 pour les élèves. Les 79 interventions

sont réparties entre 39 interventions des élèves et 40 interventions du professeur. Un aperçu global de la répartition des interventions des élèves laisse apparaître une prédominance des interventions relatives à la rubrique formulation avec 21, presque la moitié des interventions des élèves (soit 54 %), ce qui est prévu pour cette question. Les interventions concernant la validation (36%) et en moindre pourcentage, les interventions qui concernent la rubrique recherche (10%).

Les interventions relatives à la dimension recherche se sont déroulées la plupart du temps entre pairs pour : (1) Déterminer l'ensemble décrit les imaginaires ; (2) Déterminer la position de l'ensemble des imaginaires par rapport à l'axe des imaginaires ; (3) Déterminer l'interprétation géométrique d'un nombre complexe.

Les interventions relatives à la rubrique formulation concernent : (1) Formuler que l'ensemble des imaginaires est une droite ; (2) Formuler que la droite des imaginaires coupe l'axe des réels en son origine ; (3) Formuler qu'un nombre complexe est la somme de vecteurs.

Les interventions relatives à la rubrique validation concernent : (1) Valider que l'axe des imaginaires est une droite ; (2) Valider la position relative de l'axe des imaginaires par rapport à celui des réels (origine et angle) ; (3) Valider la relation entre nombre complexe et plan complexe.

La médiation du professeur, ses différentes actions et les adaptations éventuelles apportées sont en lien avec les actions A1 et A2. Les recherches sont en lien avec les actions A2 qui amènent les élèves à mobiliser la représentation cartésienne des nombres complexes. Cette action a régi presque la totalité du travail de formulation et validation des élèves.

Les élèves se sont mis d'accord sur la nécessité d'avoir un deuxième axe pour représenter les nombres complexes, 273. Habib : *Pour les réels on a une seule partie donc on peut les représenter sur une droite mais pour les nombres complexes on a deux parties, partie réelle et partie imaginaire donc on a besoin de deux droites*, 274. Mehdi : *Pour les réels on a une seule partie c'est la partie réelle, pour les nombres complexes on a deux parties partie réelle et partie imaginaire*, 275. Amine : *Pour les nombres complexes on a deux parties donc on a besoin d'une autre droite*, 276. Yosr : *Puisqu'on a deux parties donc il y a deux droites, une pour représenter les parties réelles et l'autre droite pour représenter les parties imaginaires*

P₂₃₁ : Et pourquoi une droite ?
280. Iheb : parce qu'on a ib

La dimension

P₂₂₉ : Pour quoi elle doit être une droite d'après vous ?
278. Malek : Pour obtenir un plan
[...]
281. Malek : On doit avoir la dimension d'un plan

Position du deuxième axe

284. Yosr : La droite va passer par O
[...]
288. Iskander : (...) si $b = 0$, on sera sur la droite des réels
P₂₃₉ : Très bien, jusque-là on a $\mathbb{R} \cap i \mathbb{R} = \{0\}$ et si z est réel, il est sur la droite des réels et s'il est imaginaire il va être sur une droite qui passe par l'origine O mais on n'a pas encore sa position par rapport à la droite des réels.

Il est à signaler que l'écriture d'un nombre complexe, qui fait appel à deux paramètres, a permis aux élèves de faire le lien avec leurs connaissances antérieures concernant l'utilisation des deux axes, l'axe des abscisses et celui des ordonnées. Ils l'expriment, à la suite de la suggestion du

professeur P₂₂₉ : *Pour quoi elle doit être une droite d'après vous ?* Ainsi 278. Malek : *Pour obtenir un plan.* On décèle aussi l'action du professeur qui essaye d'expliquer, implicitement aux élèves que ce qu'ils viennent de formuler n'est autre que la notion de base $(1, i)$ de \mathbb{R} en tant qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel P₂₃₂ : *Très bien, pour les réels on indexe avec 1, l'unité est 1, et pour les imaginaires bi , on indexe avec i , l'unité est i .* Et la réponse naturelle des élèves 281. Malek : *On doit avoir la dimension d'un plan,* 282. Elèves : *C'est 2.* Rappelons que c'est à l'aide de cette représentation mathématique que :

Les nombres complexes sont pleinement acceptés, grâce à l'apparition de modèles permettant de les représenter comme points du plan, ce qui leur donne une existence concrète, (Baumann, 2005, p. 93)

Comme convenu lors de la négociation et signalé dans l'analyse a priori, le professeur a procédé à des adaptations dans ses actions A1 et A2, la distinction entre plan complexe et plan de dimension deux. Il ne cesse de mettre l'accent sur la définition du plan complexe en insistant sur la nature du repère :

P₂₅₅ : (...) le plan dans lequel on travaille est un plan particulier c'est le plan complexe et ce plan doit être muni d'un repère orthonormé direct sinon c'est faux. Dans ce plan tout nombre complexe est représenté par un point.

306. Arbi : un point ou un vecteur.

P₂₅₆ : Bonne question, qu'en pensez-vous ?

307. Elèves : Les deux, c'est la même position.

P₂₅₇ : Alors, (...)

308. Arbi (au tableau) : le plan complexe est le plan (...)

P₂₅₈ : Très bien, donc le plan complexe est un plan muni d'un repère orthonormé direct dans lequel on représente les nombres complexes.

A côté de l'accompagnement des élèves dans leur travail de recherche, formulation et validation, la médiation du professeur a permis aux élèves d'alimenter leur répertoire de connaissances, non seulement sur la nature justifiée du repère et du plan, mais aussi sur la représentation d'un nombre complexe par un point ou un vecteur de ce plan. Barrera (2013) souligne la nécessité de cette représentation pour la conceptualisation de ces nombres : [...] les représentations géométriques des nombres complexes sont nécessaires pour développer l'acquisition générale de ces nombres. (Barrera, 2013, p. 3).

CONCLUSION

Il est communément admis qu'une situation d'enseignement des nombres complexes dépend de la capacité du professeur à substituer aux méthodes classiques des situations adéquates et adaptées pour faire face aux difficultés rencontrées par les élèves (Anveska et al., 2014).

L'objectif de cette situation, qui se veut alternative aux méthodes standards, renvoie à la construction du plan complexe et l'interprétation géométrique des éléments de \mathbb{C} en prenant appui sur des analogies conséquentes faites avec la droite réelle dans son lien avec les nombres réels. Il s'agit d'abord de revisiter les connaissances antérieures des élèves concernant la droite réelle ainsi que l'interprétation géométrique des opérations dans \mathbb{R} , en particulier l'interprétation de la multiplication par (-1) comme une rotation d'angle π .

Ensuite, construire l'axe des imaginaires et le plan complexe. Les élèves étaient totalement impliqués dans toutes les étapes de cette situation, que ce soit la dimension recherche, formulation ou validation. Le professeur, qui ne cesse de réorganiser leurs connaissances, délègue aux élèves l'instanciation de l'introduction du plan complexe ainsi que l'interprétation géométrique des opérations sur ces nombres. Cette introduction a permis de mettre l'accent sur l'obligation de considérer systématiquement un repère orthonormé direct quand il s'agit de travailler dans le plan complexe. La mise en place du projet expérimental a aussi tenu compte

de l'attitude réflexive du professeur et de son engagement à ajuster ses actions pour optimiser sa gestion de la classe.

REFERENCES

- Anevaska, K., Gogovska, V., & Malcheski, R. (2015). The role of complex numbers in interdisciplinary integration in mathematics teaching. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 191, 2573–2577. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.553>
- Barrera, R. (2012). *Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Université Paris-Diderot - <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/84/26/06/PDF/TheseRaquelBARRERA2012.pdf>
- Barrera, R., & Kuzniak, A. (2012). Etude des significations données par des élèves de terminales à la multiplication des nombres réels et complexes dans un contexte de géométrisation. In *VI Colloque International: Analyse statistique implicative*.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. N. Balacheff, Ed. La pensée sauvage.
- Castela, C. (1996). La droite des réels en seconde : point d'appui disponible ou enjeu clandestin. *IREM de ROUEN*.
- Chin, K. E., & Jiew, F. (2020). Knowing and grasping of two university students: The case of complex numbers. *Mathematics Enthusiast*, 17(1), 272–306. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1487>
- Conner, M. E., Rasmussen, C., Zandieh, M., & Smith, M. (2007). Student understanding of complex numbers. In *Proceedings of the 10th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.
- Driver, D. A., & Tarran, D. S. G. (1989). Five approaches to the teaching of complex numbers. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 8(3), 122–127.
- Ferro, L., A., Triana, J., G., & Mendoza, S., M. (2020). A geometric interpretation of the multiplication of complex numbers. *Journal of Physics Conference Series*, 1674 (December), 012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1674/1/012005>
- Ghedamsi, I. (2017). Modèles d'investigation des pratiques institutionnelles en mathématiques. *HDR, Note de synthèse, Université de Tunis*. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00361848>
- Ghedamsi, I., & Tanazefi, R. (2015). Sur les difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de secondaire. *Petit x*, 98, 29-52.
- Hui, T. S., & Lam, T. T. (2013). On the teaching of complex numbers. *Learning Science and Mathematics*, (8). <https://doi.org/10.1080/0020739960270113>
- Karakok, G., Stephenie, H. S., & Dyben, A. (2014). Secondary teachers' conception of various forms of complex numbers. *J Math Teacher Educ.* <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9288-1>
- Lakoff, G., & Nuñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Come From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books.