



HAL
open science

CONCEPTION ET EXPERIMENTATION D'UNE SITUATION SUR LA STRUCTURE D'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DES NOMBRES COMPLEXES

Imène Ghedamsi, Raja Tanazefi

► **To cite this version:**

Imène Ghedamsi, Raja Tanazefi. CONCEPTION ET EXPERIMENTATION D'UNE SITUATION SUR LA STRUCTURE D'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DES NOMBRES COMPLEXES. 13EME COLLOQUE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DE L'ATDM - Nécessité de changements innovants dans les pratiques de formation en mathématiques : pistes de réflexion et d'action, Éditions ATDM: Tunis Copyright © ATDM, 2023, 978-9938-78-716-0. hal-04369823

HAL Id: hal-04369823

<https://hal.science/hal-04369823>

Submitted on 4 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

ACTES DU 13^{ÈME} COLLOQUE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES DE L'ATDM

Nécessité de changements innovants dans les pratiques de formation en mathématiques : pistes de réflexion et d'action

Hammamet – Tunisie du 18 au 21 mars 2023



Samia ACHOUR, Sonia BEN NEJMA, Mounir DHIEB, Imène GHEDAMSI,
Faten KHALLOUFI-MOUHA & Rahim KOUKI (Eds)



ACTES DU 13^{ème} COLLOQUE DE DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES DE L'ATDM

Nécessité de changements innovants dans les pratiques de formation en
mathématiques : pistes de réflexion et d'action

Hammamet - Tunisie du 18 au 21 mars 2023

Samia ACHOUR, Sonia BEN NEJMA, Mounir DHIEB, Imène GHEDAMSI,
Faten KHALLOUFI-MOUHA & Rahim KOUKI (Eds)

2023 - Éditions ATDM : Tunis
Copyright © ATDM

ISBN 978-9938-78-716-0

Sommaire

PREAMBULE	1
TEXTES DES CONTRIBUTIONS.....	3
Un outil méthodologique pour l'analyse du concept image d'un enseignant dans un cours d'analyse réelle	5
Inen AKROUTI	
Ingénierie Didactique de Recherche & Développement : un processus collaboratif entre chercheurs et professeurs	19
Fatma FATTOUM et Imène GHEDAMSI	
Conception et expérimentation d'une situation sur la structure d'espace affine euclidien des nombres complexes	31
Raja TANAZEFTI et Imène GHEDAMSI	
Une Approche didactique sur le raisonnement par récurrence en classe de 3 ^{ème} année section Mathématiques.....	43
Walid SOLTANI	
Une réflexion sur l'IA dans l'enseignement supérieur	53
Najoua HAJ ALI et Wided GUEZGUEZ	
Métaphore et Soustraction	63
Imed MAHNENE	
Les mathématiques au service des problèmes sanitaires épineux : cas de la modélisation mathématique de l'antibiorésistance.....	73
Brahim DEKHILI	
Étude comparative des pratiques enseignantes dans un cours sur le théorème de Thalès .	83
Slim MRABET	
Catégorisation de quelques problèmes de proportionnalité	93
Mohamed Wardi OUN	

PREAMBULE

L'association tunisienne de didactique des mathématiques (ATDM) créée officiellement en 2007 rassemble une communauté de chercheurs, enseignants, praticiens et étudiants dans un cadre de réflexions et d'échanges autour de questions vives en éducation mathématique à tous les niveaux de l'enseignement primaire, secondaire et supérieur en Tunisie. En effet, la qualité de l'enseignement et de la formation initiale et continue des enseignants est une préoccupation permanente des autorités en charge de l'éducation en Tunisie. Cette ambition s'est, notamment, traduite par l'adoption de la loi d'orientation n° 2002-80 du 23 juillet 2002, relative à l'éducation et à l'enseignement scolaire et de la loi n° 2008 -10 du 11 février 2008, relative à la formation professionnelle. Le ministère de l'éducation est chargé, dans le cadre de la politique générale de l'état, de définir les choix nationaux dans les domaines de l'éducation, de l'enseignement scolaire et de la formation professionnelle, d'élaborer les plans et les programmes y afférents, de les mettre en œuvre et d'en évaluer les résultats. L'engagement des membres de l'ATDM à promouvoir une culture fondée sur l'étude des mathématiques et de leur enseignement s'inscrit dans cette perspective et en réponse aux demandes renouvelées de la société, aux besoins du développement du pays et dans la perspective de l'édification d'une économie nationale fondée sur le savoir. La recherche de cette qualité de l'éducation est l'une des raisons qui a motivé l'ATDM non seulement à mettre en place des colloques réguliers et contribuer aux différentes manifestations scientifiques nationales telles que celle de l'ATSM et internationales (INDRUM, ADIMA, EMF, CIFEM, CERME, CoMHisMA, ASI, etc.) mais aussi à diffuser des travaux de recherche en didactique des mathématiques et des pistes de réflexions diverses restituées en des actes de colloques à tous les niveaux de la communauté éducative. A partir de l'année 2023, la publication des actes de l'ATDM permettra de constituer une collection de référence sur les thèmes que ces journées se sont données pour objet. Il ne s'agit pas de simples « actes » mais d'un défi que nous avons relevé pour faire profiter les acteurs du système éducatif tunisien, les chercheurs et les doctorants des avancées scientifiques des travaux nationaux et internationaux en didactique des mathématiques. Dans cette logique, les objectifs de cette diffusion sont nombreux, d'abord, documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants de mathématiques, les pratiques professionnelles et les ressources didactiques en lien avec le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques dans plusieurs domaines (algèbre, analyse, géométrie, statistiques, etc.). Ensuite, constituer un environnement d'archivage documentaire de travaux de recherche en didactique des mathématiques réalisés depuis une trentaine d'années dans le cadre de l'institut supérieur de l'éducation et de la formation continue. Cette diffusion à large spectre permettra aux différents intervenants du système éducatif tunisien de mettre en pratique ces travaux, de les rendre opérationnels et fonctionnels et de fonder une réflexion sur les programmes d'enseignement des mathématiques à tous les niveaux et les ressources didactiques pour les enseignants et les élèves. Il s'agit d'identifier des actions pratiques à mettre en œuvre aux différents niveaux du système éducatif pour améliorer la qualité des enseignements et des apprentissages en mathématiques et motiver les apprenants. Finalement, cette initiative de publication permettra d'élargir la communauté des chercheurs, favoriser les échanges sur les thématiques en vigueur et contribuer à la formation des étudiants de licence et de master ainsi que de nouveaux

chercheurs dans ce domaine. La didactique des mathématiques s'est toujours construite dans une tension entre des réalisations théoriques et des réalités de l'enseignement et dans une dynamique de formation et d'action. C'est dans ce sens que nous souhaitons instaurer de nouvelles traditions qui seraient plus liées à notre identité culturelle. Ce premier recueil de communications propose d'impliquer toutes les structures communautaires dans le but de se démarquer par une culture mathématique qui prend en compte la didactique des mathématiques comme une composante essentielle de son développement. Les conférences présentées feront l'objet de publication dans le prochain numéro de la revue méditerranéenne en éducation mathématique, scientifique et technologique (ISSN 2811-6666).

La recherche d'une synergie optimale entre les membres de l'ATDM pour une meilleure qualité de l'éducation mathématique en Tunisie a justifié la diffusion des actes tout en s'interrogeant sur les enjeux d'enseignement de certaines notions, les pratiques d'enseignement-apprentissage de certains contenus disciplinaires et interdisciplinaires. L'exploitation des nouvelles technologies de l'information et de la communication dans les différentes activités scolaires et de formation, les ingénieries didactiques, les dispositifs de formation, etc. La mise à la disposition de la communauté éducative et scientifique des travaux présentés lors des journées de haut niveau organisées par l'ATDM, par le biais des actes des colloques qui seront régulièrement diffusés à partir de cette année (2022/2023) participe de cette volonté de questionnements et d'échanges.

Aussi, voudrais-je réitérer mes remerciements et mes vives félicitations à tous ceux et celles qui ont contribué à la création de notre association, à l'évolution des recherches en didactique des mathématiques en Tunisie par leur dévouement, l'encadrement des étudiants et des jeunes chercheurs tunisiens et tous les membres qui se sont pleinement consacrés à l'élaboration et à la mise en place de ces actes.

Merci à la présidente de l'ATDM Samia Achour, à Mounir Dhieb l'un des fondateurs pionniers de l'association et tous les collègues membres du bureau exécutif, des comités scientifiques et d'organisation des manifestations scientifiques de l'ATDM qui se sont succédés depuis 17 ans pour faire de ces rencontres un lieu de partage et de plaisir, au comité de rédaction et de coordination pour la préparation scientifique, l'évaluation et la production de ce premier jet d'actes. Cette première réalisation de l'ATDM contribue à la reconnaissance scientifique internationale des travaux tunisiens. Que ce contenu soit une source d'inspiration pour les prochains colloques.

Sonia Ben Nejma
Secrétaire Générale
Au nom de l'ATDM

TEXTES DES CONTRIBUTIONS

Pour citer un article

Nom(s) et Prénom(s) (2023). Titre de l'article. In Achour, S., Ben Nejma, S., Dhieb, M., Ghedamsi, I., Khalloufi, F., & Kouki, R. (Eds.). *Actes du 13^{ème} Colloque de Didactique des Mathématiques (ATDM 2023)*, pages. Editions ATDM. ISBN 978-9938-78-716-0

Exemple

Fattoum, F., & Ghedamsi, I. (2023). Ingénierie Didactique de Recherche & Développement : un processus collaboratif entre chercheurs et professeurs. In Achour, S., Ben Nejma, S., Dhieb, M., Ghedamsi, I., Khalloufi, F., & Kouki, R. (Eds.). *Actes du 13^{ème} Colloque de Didactique des Mathématiques (ATDM 2023)*, pp. 19-30. Editions ATDM. ISBN 978-9938-78-716-0

UN OUTIL METHODOLOGIQUE POUR L'ANALYSE DU CONCEPT IMAGE D'UN ENSEIGNANT DANS UN COURS D'ANALYSE REELLE

Inen AKROUTI*

Résumé – Ce travail présente une analyse des entretiens menés avec des enseignants d'analyse réelle à l'université à partir d'un outil méthodologique spécifique que nous présenterons dans cet article. A travers ces entretiens, nous avons cherché à regarder l'impact des conceptions de ces enseignants sur leur pratique en classe. En effet, les travaux antérieurs sur les conceptions des enseignants se centre sur leurs conceptions à propos l'enseignement des mathématiques et n'ont pas abordé l'enseignement d'un concept spécifique tel que l'intégrale.

Mots-clefs : Concept image, conception, représentation sémiotique, intégrale, Calculus

Abstract – This paper presents a study based on interviews with some teachers who teach Calculus. We focus on how they organize their lessons from a specific methodological tool that we will present in the following sections. Our Methodologic tool for analyzing teacher conception is based on concept image, the duality of mathematic concepts, and semiotic representation.

Keywords: Concept image, conception, semiotic representation, integral, Calculus

I. INTRODUCTION

Nous partons de notre conviction que l'accès aux conceptions d'un enseignant sur les fondements d'un concept mathématique enseigné, son origine, ses relations avec les autres concepts, fournit des éléments d'interprétation de son action didactique, et permet d'inférer des éléments importants et révélateurs de sens de cette action. En effet, de nombreuses recherches ont montré que, outre les contenus et les stratégies pédagogiques, les conceptions des enseignants vis-à-vis des sciences influencent les choix des situations proposées aux élèves et la façon d'enseigner et ce, indépendamment du niveau scolaire, du contexte culturel et du domaine scientifique (Brickhouse, 1990 ; Roletto, 1998 ; Péliissier, Venturini & Calmettes, 2007 ; Water-Adams, 2006). Brousseau (1997) définit l'épistémologie du professeur comme étant « l'ensemble de ses connaissances, savoirs, méthodes et croyances explicites ou implicites sur la façon de trouver, apprendre ou organiser un savoir ». Par ailleurs, Ghedamsi (2008) considère que l'étude des conceptions des enseignants conduit à « l'identification du modèle d'enseignement mis en œuvre à l'aide de variables explicatives référant à ces connaissances » (p. 98). De son côté, Thompson (1992) précise que les conceptions des enseignants sont à déterminer à travers l'étude de : "What a teacher considers to be desirable goals of the mathematics program, his or her own role in teaching, the students' role, appropriate classroom activities, desirable instructional approaches and emphases, legitimate mathematical procedures, and acceptable outcomes of instruction [...]." (135).

Dans le cadre de ce travail, nous nous focalisons sur les conceptions des enseignants de mathématiques qui font partie de leur concept image, à l'université, sur le concept d'intégrale, et sur les stratégies possibles pour l'enseigner. Pour ce faire, nous avons réalisé des entretiens semi-directifs auprès d'enseignants tunisiens à l'entrée à l'université, vu que le thème d'intégrale est central dans les programmes, en particulier en première année. Nous avons choisi ce type d'entretiens qui se situe entre les entretiens directifs et non directifs, et qui se compose dans une première étape d'une liste de questions préparées à l'avance, pour favoriser l'interaction et l'échange entre le chercheur et l'enseignant interrogé, et orienter la discussion vers des objectifs bien définis. Ces entretiens ont visé par des questions ouvertes, la

*Université de Jendouba / Université de Carthage – Tunisie – inenakrouti@isshj.u-jendouba

signification de l'intégrale de Riemann et la façon de l'introduire en classe, tout en laissant aux enseignants un espace de temps suffisant pour s'exprimer d'une façon générale sur ce thème.

L'objet de ce travail consiste donc à présenter et analyser ces entretiens à partir d'un outil méthodologique spécifique que nous présenterons dans les sections qui suivent. Les travaux antérieurs sur le concept d'intégrale nous servent de référence pour analyser et catégoriser les conceptions des enseignants sur ce thème. Nous cherchons également à confirmer l'hypothèse de l'impact des conceptions des enseignants sur l'implémentation de situations en classe, à s'interroger sur les conséquences qui en découlent sur l'apprentissage des étudiants, et à mettre ces résultats au service de la formation des enseignants.

II. CADRE CONCEPTUEL DE REFERENCE

Tall & Vinner (1981) considèrent le concept image d'un individu comme l'ensemble des structures cognitives associées au concept. Il comprend tous les processus, images mentales et propriétés contenus dans le concept : "the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes" (152). Ils ajoutent que le concept image évolue et se stabilise suivant l'expérience de l'individu. Sur ce point, Habineza (2013) souligne que cette expérience peut être acquise à partir d'observations personnelles, de l'expérience des autres personnes ou de livres. Tall & Vinner (1981) utilisent l'expression « the evoked concept image » pour indiquer la partie du concept image présente à un moment donné. A côté de ces travaux, d'autres ont mis l'accent sur l'importance des conceptions et leurs rôles capitaux dans le développement d'une signification d'un concept mathématique notamment l'intégrale. Ils considèrent que les conceptions sont parmi les composantes fondamentales qui constituent le concept image de l'individu (Ghedamsi & Fattoum, 2018 ; Klinger, 2019 ; Akrouti & Mrabet, 2023). De son côté, Sfard (1991) considère que l'individu possède une conception structurelle, quand il pense au concept mathématique de manière statique et le conçoit comme un objet abstrait, et une conception opérationnelle quand il se focalise sur les processus, algorithmes et actions contenus dans le concept.

Dans le cadre de cette recherche, nous considérons la relation suivante comme la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction f : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$. L'analyse de cette définition nous permet d'identifier les deux statuts de la notion de notre concept : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$ représente le statut processus et $\int_a^b f(x)dx$ représente le statut objet. Sfard & Linchevski (1994) parlent d'une conception pseudo-structurelle alors que Zandieh (2000) parle d'un autre statut de la notion de dérivée et l'appelle pseudo-objet. Nous utilisons également ce statut de la notion dans notre analyse. Nous considérons alors l'existence de trois statuts : un statut processus qui favorise l'aspect opérationnel, un statut pseudo-objet qui se focalise sur le résultat sans indiquer comment il est obtenu, et un statut objet qui met en œuvre les deux statuts de la notion : le processus et l'objet.

Dans son analyse conceptuelle de l'intégrale définie, Habineza (2010, 2013) identifie quatre opérations qui caractérisent chaque aspect du statut de la notion. Il souligne qu'on ne pourrait procéder à un statut de la notion qu'en évoquant au moins une opération des quatre citées ci-dessous. Par ailleurs, Sealy (2014) identifie quatre étapes dans le processus de conceptualisation de la notion. En se basant sur ces deux travaux, nous avons constaté que chaque opération appelée correspond à une étape de développement de la structure sous-jacente de l'intégrale. Nous présentons alors les opérations et les étapes qui les correspondent :

- La subdivision ou la décomposition de l'intervalle d'intégration en sous-intervalles, on va appeler ceci l'étape de partition ;

- La multiplication ou le produit pour calculer la valeur de l'intégrale sur chaque sous-intervalle considéré ; on va appeler ceci l'étape de la relation multiplicative de la procédure simple produit ;
- L'addition de toutes les procédures simple produits considérées pour calculer la valeur approximative de l'intégrale ; on va appeler ceci l'étape de la somme ;
- Le passage à la limite pour calculer la valeur exacte de l'intégrale ; on va appeler ceci l'étape de la limite.

Nous interprétons ces quatre opérations et les quatre étapes qu'elles accompagnent de la manière suivante :

- La première étape est celle de $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; elle correspond à la décomposition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de type $[x_i, x_{i+1}]$; en cas de décomposition uniforme, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ est la longueur de chaque sous-intervalle considéré.
- La deuxième composante est $f(x_i)\Delta x$, ce produit représente une approximation de la distance parcourue sur un sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$; elle représente la valeur de l'aire du rectangle de longueur Δx et de hauteur $f(x_i)$;
- La troisième composante est $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$; elle représente la somme de toutes les approximations sur l'intervalle $[a, b]$;
- La quatrième composante est $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$; elle représente le résultat final cherché qui est la valeur de l'intégrale en question.

Nous présentons ces composantes et les opérations qu'elles accompagnent en fonction des statuts de la notion d'intégrale que nous avons soulignée plus haut :

	Processus	Processus-objet	Objet
Partition	$\frac{b-a}{n}$	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	Δx
Relation multiplicative	$f(x_i)\Delta x$	$A_i = f(x_i)\Delta x$	A_i
Somme	$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x.$	$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$	S_n
Limite	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$	$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$	L
Intégrale définie	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$	$\int_a^b f(x)dx$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$	$\int_a^b f(x)dx$

Tableau 1 - Les différents statuts de l'intégrale

A_i : L'aire du rectangle de longueur $f(x_i)$ et de largeur Δx .

S_n : La somme de toutes les approximations considérées.

L : La limite vers laquelle les sommes considérées convergent.

Nous considérons donc que l'enseignant :

- appelle les deux statuts processus et objet lorsqu'il évoque à la fois le processus qui a conduit au résultat ainsi que le résultat lui-même. Il favorise dans ce cas chez les étudiants un répertoire didactique d'ordre structurel ;
- se focalise sur le statut pseudo-objet quand il donne le résultat sans indiquer la procédure suivie pour y aboutir, et se limite donc au statut objet. Dans ce cas, il favorise chez les étudiants un répertoire didactique d'ordre pseudo-structurelles ;
- se focalise sur l'aspect opérationnel quand il évoque le processus et quand il semble échouer à réifier ce processus en un objet. Il favorise ainsi chez les étudiants un répertoire didactique d'ordre opérationnel.

Par conséquent, afin d'obtenir un apprentissage conceptuel qui favorise des connaissances d'ordre structurel, il faut faire recours à la fois aux statuts processus et objet. Soulignons que les connaissances d'ordre pseudo-objet indiquent des difficultés d'ordre structurel (Akrouti, 2019), et que les statuts objet et pseudo-structurel ne pourraient pas être identifiés simultanément. En fait, la présence de la conception pseudo-objet indique que la réification a échoué et que le passage d'une conception processus à une conception objet n'est pas achevé.

Duval (1993) considère que la conceptualisation d'un objet mathématique n'est accessible que par l'existence d'au moins deux registres de représentation. Pour l'intégrale, les représentations sémiotiques qui pourraient être mises en œuvre sont : la représentation verbale, la représentation graphique, la représentation numérique et la représentation symbolique. Habineza (2013) rejoint Duval (1993) dans l'idée que dans la pratique, aucune de ces représentations n'est mobilisée toute seule. Étudiants, mathématiciens et enseignants devront passer d'une représentation à une autre pour exprimer leurs idées, et que c'est à travers la mise en relation des représentations qu'un concept se mobilise : « However, in practice, none of these representations stand alone; students or other mathematicians often move through representations to express their ideas, and one could argue that it is in the linking of representations that a concept 'comes alive' to us » (Habineza, 2013, p. 41).

En nous référant à quelques travaux antérieurs sur notre thème (Johns, 2018 ; Akrouti, 2020 ; Akrouti & Mrabet, 2023), nous avons soulevé deux conceptions relatives à l'intégrale, celles de primitive et de mesure de grandeur. Chaque conception comprend un certain nombre de procédures. La conception de primitive se base sur le Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA) et revient à la recherche d'une primitive. La conception de mesure de grandeur, dans la pratique, elle comprend deux procédures : La procédure d'aire ou la procédure ponctuelle et la procédure de processus d'approximation et qui finit par passage à la limite ou la procédure globale. Cependant, nous rencontrons une procédure intermédiaire ou locale qui consiste à faire la somme d'un certain nombre d'approximation. À la suite de cela, nous supposons que le concept image d'un individu se compose des éléments suivants.

		Conception	Procédure
		Primitive	TFA
Concept image	Conceptions	Mesure d'une grandeur	Procédure simple produit ou procédure ponctuelle $f(x) \times x$ ou forme basique
			Procédure de somme ou procédure locale $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$
			Procédure de processus d'approximation ou procédure globale $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$

	Processus cognitif	Intériorisation : représentation mentale (interpréter l'intégrale en termes d'aire sous la courbe d'une fonction)
		Condensation : transformation en procédures aisément accessibles (découpage du domaine d'intégration, approcher l'aire principale par la somme des aires des rectangles de longueur $f(x_i)$ et de largeur Δx)
		Réification : unification des procédures (le passage à la limite pour calculer la valeur exacte de l'intégrale)
Représentation sémiotique		Représentation symbolique.
		Représentation visuelle (graphiques, schéma, geste du corps)
		Représentation numérique
		Représentation verbale

Tableau 2 - La composition du concept image

III. ADAPTATION D'UN OUTIL METHODOLOGIQUE D'ANALYSE

L'outil méthodologique d'analyse que nous adaptons se compose de quatre colonnes issues des différentes représentations, et de quatre lignes issues des différentes procédures, dont chacune comporte les opérations qui pourraient être utilisées dans le processus d'élaboration d'une solution.

Cet outil nous fournit un cadre décrivant les différentes étapes du processus de conceptualisation de la notion d'intégrale. Il est basé sur la décomposition de la structure de l'intégrale en composantes qui mettent en œuvre successivement les opérations suivantes : la subdivision, le produit, la sommation et la limite. Notre cadre est alors organisé de la manière suivante :

- 1- Quand l'enseignant évoque à la fois les statuts processus et objet, nous considérons qu'il met en œuvre un répertoire didactique qui favorise des connaissances d'ordre structurel. Nous utilisons dans ce cas le symbole (■).
- 2- Quand l'enseignant se limite à donner le résultat sans expliquer le chemin pour y arriver, nous considérons qu'il met en œuvre un répertoire didactique qui se focalise sur des connaissances d'ordre pseudo-structurel. Nous utilisons dans ce cas le symbole (■).
- 3- Quand l'enseignant se limite au statut processus, nous considérons qu'il met en œuvre un répertoire didactique qui se focalise sur des connaissances d'ordre opérationnel. Nous utilisons dans ce cas le symbole (●).

Le tableau ci-dessous résume toutes les possibilités que nous pourrions rencontrer en analysant la conception d'un enseignant. Il est important de souligner, que chaque enseignant évoque une seule procédure. Nous ne pouvons pas identifier deux procédures différentes telles que par exemple la recherche d'une primitive et le recours à la procédure d'aire. Donc dans notre démarche qui suit, nous regardons la procédure au début, puis nous procédons à l'analyse.

Statut de la notion			Représentations sémiotiques												
			Verbale			Numérique			Graphique			Symbolique			
			●	◐	■	●	◐	■	●	◐	■	●	◐	■	
Procédure utilisée	Aire	Partition													
		Produit													
		Somme													
		Limite													
	Primitive	Partition													
		Produit													
		Somme													
		Limite													
	Somme	Partition													
		Produit													
		Somme													
		Limite													
	Limite de somme	Partition													
		Produit													
		Somme													
		Limite													

Tableau 3 – Adaptation d'un outil méthodologique d'analyse d'un concept image

IV. LES CHOIX METHODOLOGIQUES

1. Contexte

Pour apporter le point de vue des enseignants sur l'enseignement de l'intégrale, les choix qu'ils font en classe, ainsi que le répertoire didactique associé susceptible d'être mis en place, nous avons fait le choix de procéder dans une première étape, par des entretiens semi-directifs. Ces entretiens se situent entre les entretiens directifs et non directifs, et se composent d'une liste de questions préparées à l'avance qui servent de première entrée à la problématique souhaitée. Le chercheur a ensuite la possibilité d'interagir au fur et à mesure, d'échanger avec l'enseignant interrogé, et de poser des questions en fonction des réponses recueillies, ce qui permet d'avoir des retours variés sur un même point. Ce type d'entretien, qui a l'inconvénient de ne pas être identique pour toutes les personnes interrogées, aide le chercheur à avoir des précisions sur les points qu'il juge utile, et à orienter la discussion vers le sens qu'il souhaite. En plus, le chercheur peut toujours comparer les différentes réponses à une même question, tout en restant ouvert à des informations et à des points importants mais imprévus. Les entretiens ont eu lieu en mars 2018. L'objectif principal est de se renseigner sur le concept images de chaque enseignant sur l'intégrale de Riemann, et l'impact de cela sur la façon d'enseigner cette notion. Nous cherchons également à analyser la distance qui sépare les pratiques de l'enseignant en classe par rapport aux pratiques de référence.

2. Méthodologie relative aux entretiens

Cette partie porte sur l'analyse des pratiques enseignantes, détectées au cours des entretiens semi-directifs que nous avons menés. Cela suppose qu'on s'interroge d'abord sur les conceptions des enseignants sur l'intégrale de Riemann et ce, pour identifier le potentiel des pratiques pertinentes que l'enseignant soit en mesure de développer chez les étudiants pour soutenir le développement d'un mode d'enseignement approprié.

Nous avons fait ces entretiens individuels avec trois enseignants qui ont enseigné l'intégrale de Riemann en première année de l'enseignement supérieur. Ces enseignants ont été choisis en fonction de leurs profils. Ils ont des expériences différentes du point de vue de l'ancienneté dans l'enseignement, et du niveau scolaire des étudiants (des étudiants excellents, moins bons et passables). Le dernier critère est de choisir des enseignants qui ont exercé dans des institutions différentes.

Le premier enseignant a plus que 20 ans d'expérience d'enseignement. Il exerce dans un institut préparatoire pour les écoles d'ingénieurs. Les étudiants sont de haut niveau (la moyenne au Baccalauréat est entre 15 et 17). Le deuxième enseignant a plus que 30 ans d'expérience. Il exerce dans un institut préparatoire et il a également enseigné l'intégrale de Riemann dans une faculté des sciences pour des étudiants de la branche « mathématiques ». Les étudiants de cet enseignant ont réussi leur Baccalauréat avec une moyenne passable. Le troisième a plus que 25 ans d'expérience. Il exerce dans une faculté des sciences et il était à l'IPEST (NBP), où les étudiants sont de très haut niveau (plus que 19 de moyenne au Baccalauréat) et également à la faculté des sciences avec des étudiants passables et même faibles. Tous les étudiants des trois enseignants appartiennent à classes sociales variées.

Nous pensons que ces trois enseignants constituent un échantillon varié. Pour commencer, nous disposons de questions qui servent de point de départ pour des échanges entre chercheur et enseignants. Nous avons opté pour des questions relativement ouvertes pour offrir à l'enseignant interviewé la liberté de s'exprimer, et avons changé pour chaque enseignant l'ordre et la formulation des questions. Lors des entretiens, les enseignants ne disposent d'aucun document. Ils sont appelés à écrire ou à faire des représentations graphiques pour éclairer certains points.

Les entretiens ont duré entre 20 et 35 mn. Ils sont enregistrés sur dictaphone puis transcrits. Nous avons confronté les enseignants aux transcriptions faites pour nous assurer du sens dans la traduction des mots en arabe utilisés lors des échanges. Pour des choix méthodologiques, nous appelons le premier enseignant A, le deuxième B et le troisième C. Notre analyse se compose de deux parties : une analyse globale de l'ensemble des trois interviews et une analyse séparée pour chaque interviewé.

V. RESULTATS

1. Premier enseignant

En répondant à notre première question, l'enseignant A interprète l'intégrale en termes d'aire sous la courbe d'une fonction, délimitée par les deux droites verticales dont les équations sont relatives aux deux bornes d'intervalles. Dans notre grille d'analyse, nous considérons qu'il s'agit d'une conception de mesure de grandeur mais sous une forme basique. L'enseignant exprime ensuite ce qu'il vient d'expliquer par le graphique de la figure 1. Ensuite, il évoque les subdivisions et la décomposition de l'aire sous la courbe en des rectangles en découpant l'intervalle d'intégration en sous-intervalles de longueurs égales. Nous mettons donc ce signe (■) devant la ligne « partition » et « la représentation verbale » puisque l'enseignant s'est exprimé verbalement sur le processus qui va amener au calcul de l'intégrale en démontrant que plus les subdivisions sont petites, plus l'approximation est meilleure. Il n'a pas précisé que la longueur de ces sous-intervalles n'est que Δx dans l'expression de l'intégrale, et se limite donc au processus seulement. Par la suite, nous mettons un cercle noir (●) devant la colonne représentation symbolique. Graphiquement, il a montré comment il met en œuvre l'aire des rectangles pour calculer l'intégrale initiale. Nous mettons donc le symbole suivant (■).

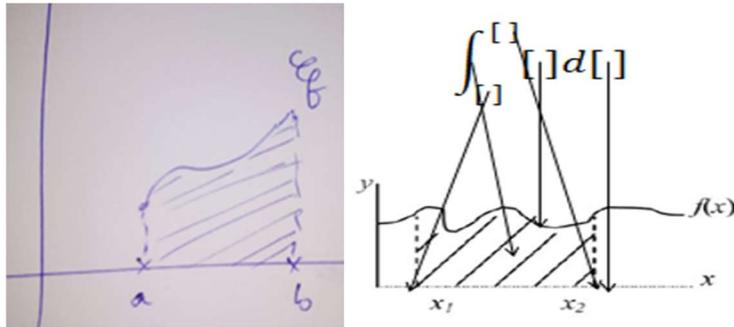


Figure 1 – conception basique de mesure de grandeur (procédure ponctuelle)

Nous schématisons la réponse de l'enseignant B par la figure 2.

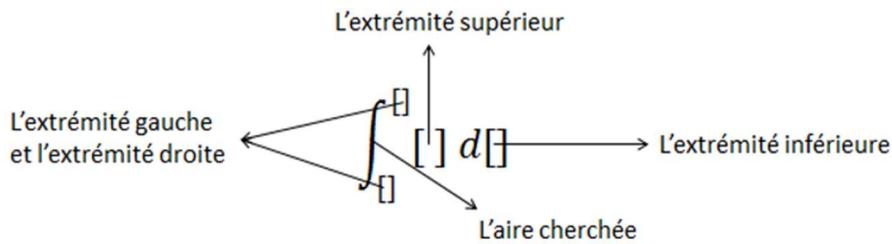


Figure 2 – concept image issue de la procédure ponctuelle (la forme basique)

Ensuite, l'enseignant donne la définition de l'intégrale de Riemann sans enchaîner avec ce qu'il a dit précédemment. Il a ainsi appelé le statut objet sans revenir à la procédure qui a donné lieu à ce statut. Nous mettons donc le symbole (■) au croisement de la ligne limite et la colonne représentation symbolique. Pour la procédure, il a fallu montrer que la somme dans l'expression de l'intégrale n'est que la somme de $f(x) \times dx$. Enfin, l'enseignant évoque le lien entre la somme et l'aire en appelant les deux statuts de la notion. Il souligne que les sommes de Riemann ne sont que les sommes des aires des rectangles avec lesquelles l'aire a été approximée. Ainsi, nous mettons le symbole (■) devant la ligne somme et la colonne représentation symbolique. Pour la représentation graphique de la somme, il a mis en œuvre les statuts objet et processus comme le montre la figure 3. Nous mettons donc le symbole (■) au croisement de la ligne somme et la colonne représentation graphique.

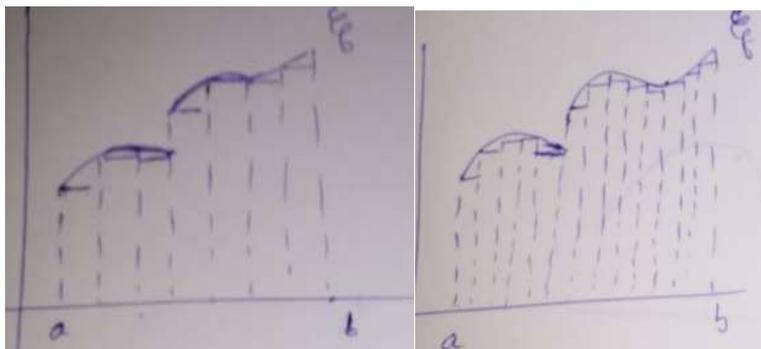


Figure 3 - l'approximation de l'intégrale

La composition du concept image de l'enseignant A est résumé dans le tableau suivant :

Le statut de la notion	Procédure simple produit ou procédure ponctuelle			
	Représentations			
	Verbale	Graphique	Numérique	Symbolique
Partition	☐	☐		●
Produit		☐		●
Somme	☐	☐		☐
Limite				■

Tableau 4 – Le concept image de l'enseignant A

Remarquons l'absence du registre numérique du concept image de l'enseignant A, avec la présence du registre graphique dans les trois premières lignes. Ceci est tout à fait attendu, car la représentation graphique de l'étape de limite est délicate et nécessite le recours à l'outil informatique pour qu'elle soit sollicitée. Cependant, le registre symbolique est présent dans les différentes étapes sous des statuts différents. La conception objet est fréquemment présente au niveau de la représentation graphique, et moins présente dans la représentation verbale. Pour la limite, on la retrouve dans une représentation symbolique sous forme de conception pseudo-objet.

2. Deuxième enseignant

L'enseignant B considère le calcul intégral comme un calcul cumulatif : « [...] plutôt la limite de fil passant de fonction étagée donc en quelques sortes c'est comme on l'a toujours dit c'est le calcul d'aire ». Il se place alors dans un contexte de calcul approché. Verbalement, il a parlé de subdivisions de l'intervalle d'intégration pour mettre en œuvre un processus de calcul des intégrales. On va donc mettre un cercle (●) au croisement de la ligne partition avec la colonne représentation verbale. Ensuite, il a montré graphiquement (figure 4) comment la décomposition de l'intervalle d'intégration va servir au calcul de l'intégrale en jeux. Il a donc évoqué une conception structurelle pour la représentation graphique (la présence des deux statuts de la notion processus et objet en même temps). Nous mettons au croisement de la ligne partition et la colonne représentation graphique le symbole (☐). Enfin, il souligne que le dx n'est que ces petites répartitions qui seront balayées sur tout le segment d'intégration, ce qui correspond au symbole (☐) au croisement de la ligne partition et la colonne représentation symbolique. En parlant des rectangles d'approximations, l'enseignant B a montré que la longueur d'un rectangle n'est que $f(x)$ et que sa largeur n'est que dx , ainsi, l'aire est le produit de ces deux grandeurs. Ceci correspond au symbole (☐) au croisement de la ligne produit avec la colonne représentation symbolique. Il considère les approximations faites comme des surfaces qui vont balayer tout l'intervalle d'intégration. Par la suite, l'intégrale n'est que la somme de toutes ces surfaces, ce qui correspond au symbole (☐) au croisement de la ligne somme et la colonne représentation verbale. De même pour la représentation graphique, il a montré que l'aire globale est la somme de tous les autres rectangles, ce qui correspond au symbole (☐) au croisement de la ligne somme et la colonne représentation graphique. Pour la représentation symbolique, il a parlé du processus de cette somme $f(x)$ sans qu'il ne l'interprète dans le registre symbolique. Nous mettons alors un cercle (●) au croisement de la ligne somme et la colonne représentation symbolique. L'enseignant B considère l'intégrale comme la limite du fil passant de fonctions étagées, ce qui correspond au symbole (☐) au croisement de la ligne limite et la colonne représentation verbale. Pour la représentation graphique, il évoque les deux statuts processus et objet sans écrire l'expression mathématique de l'intégrale. Dans le registre symbolique, il ne parle que du statut objet, ce qui correspond au symbole (☐) au croisement de la ligne limite et la colonne représentation graphique, et au symbole (■) au croisement de la même ligne avec la colonne de représentation symbolique.

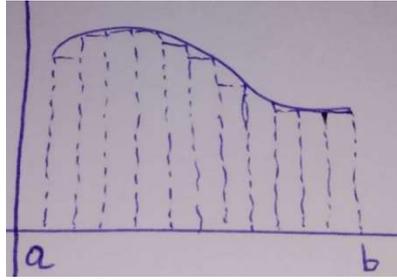


Figure 4 - La conception de l'enseignant B

Le concept image de l'enseignant B est illustré dans le tableau suivant :

Le statut de la notion	Limite d'approximation			
	Représentations			
	Verbale	Graphique	Numérique	Symbolique
Partition	●	☐		☐
Produit	●			☐
Somme	☐	☐		●
Limite	☐	☐		■

Tableau 5 - Concept image de l'enseignant B

Le registre numérique est également absent du concept image de l'enseignant B. Ceci nous semble contredire son point de vue sur l'enseignement de l'intégrale. Au cours de l'entretien, l'enseignant B précise qu'il considère le calcul intégral comme un calcul cumulatif, ce qui suppose le recours à des approximations numériques. Les représentations graphiques sont présentes. Ceci est attendu puisque l'enseignant B a déjà choisi de se mettre dans le contexte de mesure de grandeur (aire). La limite et la somme sont évoquées dans les représentations verbale et graphique dans une conception d'objet. Le registre symbolique est présent pour les quatre composantes avec des conceptions différentes. Nous schématisons la réponse de l'enseignant B comme suit :

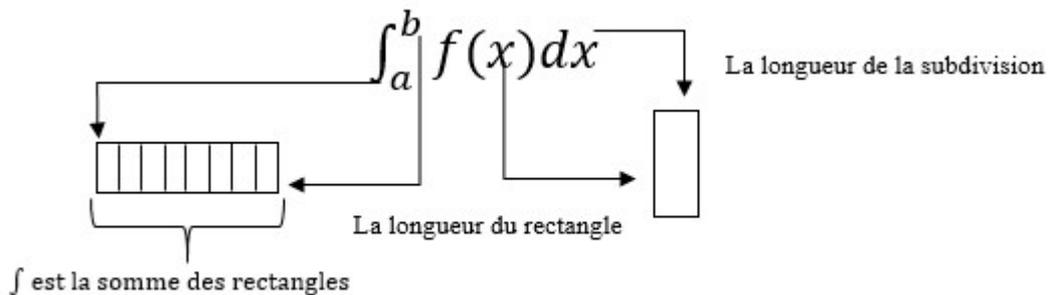


Figure 5 - Interprétation de la réponse de l'enseignant B

3. Troisième enseignant

Contrairement aux deux premiers, l'enseignant C considère le calcul intégral comme un calcul de primitive, et souligne qu'il s'agit d'une jonction entre le discontinu et le continu, et que les dx ne sont que la somme des quantités discrètes vu que, lorsqu'elles deviennent très petites, elles seront considérées comme continues. Cet enseignant se focalise sur l'opérationnalité de l'intégrale pour faire des calculs d'aire, de volume, de distance... Ce calcul se base sur le Théorème Fondamental de l'Analyse. C'est donc le statut processus qui est appelé. Nous mettons alors un cercle noir (●) au croisement de la ligne limite et la colonne représentation symbolique. Il en est de même pour l'exemple numérique choisi par cet enseignant : nous mettons un cercle noir (●) au croisement de la ligne limite et la colonne représentation

symbolique. Au cours de ces échanges, l'enseignant C a évoqué verbalement le lien entre la somme et l'intégrale mais il n'a pas montré comment se fait ce passage. Nous mettons (■) au croisement de la ligne somme et la colonne représentation verbale, idem au croisement de cette ligne et la colonne représentation symbolique. Ensuite, il a évoqué verbalement et dans le registre symbolique, que les dx sont de petites subdivisions. Nous mettons donc (⊙) au croisement de la ligne répartition avec la colonne représentation verbale et la colonne représentation symbolique. Enfin, il a donné la méthode de calcul d'un volume dans les registres verbal, graphique et symbolique. Nous mettons par la suite (●) au croisement de la ligne produit avec les registres verbal, graphique et symbolique.

a et b représentent les deux bornes de l'intervalle d'intégration

$$\int_a^b f(x) dx$$

La fonction à intégrer

Figure 6 - Concept image de l'enseignant

Le concept image de l'enseignant C est résumé dans le tableau suivant :

Le statut de la notion	Calcul de primitive			
	Représentations			
	Verbale	Graphique	Numérique	Symbolique
Partition	⊙			⊙
Produit	⊙	⊙		⊙
Somme	■			■
Limite			●	●

Tableau 6 – Concept image de l'enseignant C

Cet enseignant évoque des représentations verbales et symboliques, ce qui est attendu car au cours de l'entretien, il a souligné qu'il choisit une introduction métaphorique de l'intégrale puis il propose la définition formelle. L'étape de la limite est présente sous forme numérique et symbolique dans la conception processus. La représentation graphique est évoquée seulement pour l'étape produit, sous forme de statut objet. Les quatre niveaux qui reconstruisent la structure de l'intégrale sont évoqués symboliquement par l'enseignant C avec différents statuts. Cependant, nous considérons que cette vision de l'enseignement de l'intégrale qui va à contre-sens des instructions officielles est très peu représentée.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans le tableau ci-dessous, nous résumons puis comparons tous les résultats obtenus :

Enseignants		A	B	C
Conception de mesure de grandeur		×	×	
Conception de primitive				×
Représentation verbale	Partition	☉	●	☉
	Produit		●	☉
	Somme	☉	☉	■
	Limite		☉	
Représentation graphique	Partition	☉	☉	
	Produit	☉		☉
	Somme	☉	☉	
	Limite		☉	
Représentation numérique	Partition			
	Produit			
	Somme			
	Limite			●
Représentation symbolique	Partition	●	☉	☉
	Produit	●	☉	☉
	Somme	☉	●	■
	Limite	■	■	●

Tableau 7 - Résumé des résultats obtenus

Les trois enseignants ont évoqué des concepts images différents qui se réfèrent à des conceptions variées. Les enseignants A et B se basent sur la procédure ponctuelle pour faire accéder les étudiants à la signification de l'intégrale de Riemann. L'idée est que la notion d'aire, qui met en œuvre cette procédure, et plus facilement accessible et supposée ne représentant aucune difficulté théorique. Or cela n'est pas toujours vrai. Selon Haddad (2012), les étudiants n'ont pas les connaissances suffisantes sur la notion d'aire pour l'utiliser et rencontrent souvent des difficultés et des ambiguïtés à plusieurs niveaux. Le statut objet est évoqué par les trois enseignants dans les différentes étapes de la construction de l'intégrale. Ceci est attendu et confirme le résultat d'autres travaux antérieurs qui soulignent que l'enseignement de l'analyse réelle s'inscrit dans un cadre strictement formel (Ghedamsi, 2008) et que le point de vue structurel est adopté et favorisé par les enseignants (Akrouti, 2021). L'enseignement de mathématiques à l'université, en particulier l'intégrale, se caractérise par un formalisme accru ce qui rend la conceptualisation difficilement acquise. Le statut objet est appelé dans les représentations verbale, graphique et symbolique. Le niveau de limite est évoqué dans le registre symbolique en termes de statut objet pour A et B et statut processus pour C, et il en est de même pour les niveaux produit et somme, qui sont mobilisés dans au moins deux représentations. L'enseignement de l'intégrale est basé sur le registre symbolique qui est qualifié par sa forte dimension formelle. Les trois enseignants ont aussi utilisé le registre verbal pour articuler leurs conceptions. Il semble que leur verbalisation a servi à soutenir leurs conceptions dans d'autres représentations. Le registre graphique est présent chez les enseignants A et B alors qu'il est quasi absent chez l'enseignant C. Ceci revient aux contextes dans lesquels les enseignants ont choisi de travailler. Le contexte de primitive pour C est un contexte algébrique qui est plus au moins un contexte algorithmique, alors que le contexte de mesure de grandeur sollicité par A et B est un contexte qui suppose favoriser un apprentissage proceptuel et flexible (Gray et Tall, 1994). Cependant, nous avons remarqué que la conception de mesure de grandeur n'amène pas toujours à ce type d'apprentissage. La qualité des apprentissages

dépend de la nature de la procédure utilisée. En effet, la procédure ponctuelle contient la procédure d'aire, et celle-ci développe des connaissances d'ordre pseudo-structurel et évoque un concept image incomplet. Le passage d'une représentation à une autre est considéré comme un indicateur du développement des connaissances adéquates. Nous avons remarqué qu'il est sollicité au moins dans deux représentations différentes.

Le concept image de l'enseignant se construit et se développe en fonction de son expérience à travers un certain nombre d'observations et de circonstances. Par ailleurs, L'enseignant transforme à ses étudiants sa façon d'envisager les choses, développe implicitement sa conception dans les tâches qu'il propose en classe, et dirige ainsi leur activité mathématique de ces étudiants. Il fait acquérir aux étudiants les pratiques qu'il juge utiles pour inférer la définition et les propriétés du concept mathématique dont il enseigne. Ceci amène à développer chez eux des connaissances particulières qui deviennent par la suite favorisées dans leur répertoire personnel et pourrait se transformer en conception. Ces résultats nous poussent à penser à l'épistémologie de l'enseignant qui est, aux termes de Brousseau (1998), « *l'ensemble de ses connaissances, de ses savoirs, de ses méthodes et de ses croyances explicites ou implicites sur la façon de trouver, d'apprendre ou d'organiser un savoir* ». Cette épistémologie qui a un impact sur l'implémentation de séquences d'apprentissage, devrait à notre avis faire l'objet d'une formation des enseignants.

REFERENCES

- Akrouti, I. (2019). Les difficultés liées à l'apprentissage de l'intégrale définie à l'entrée en classe préparatoire. *Septième édition du colloque l'Espace Mathématique Francophone*, Paris Octobre 2018, 615-619. Edition de l'IREM de Paris ISBN : 978-2866123918.
- Akrouti, I. (2020). Conceptions de l'intégrale de Riemann des étudiants en Classe préparatoire. In T. In Hausberger, M. Bosch & F. Chelloughi (Eds.), *Proceedings of the third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020)*. Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM, 53-62. ISSN 24961027.
- Akrouti, I. (2021). Que représente le concept d'intégrale définie pour les étudiants à l'entrée à l'université ? *Web of Conferences*, 39 (01010). eISSN: 2271-2097.
- Akrouti, I., & Mrabet, S. (2023). Conceptions des étudiants des classes préparatoires en Tunisie sur l'intégrale de Riemann. *EpiDEMES*, 2, (in press).
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Brickhouse, N.W. (1990). Teachers' beliefs about the nature of science and their relationship to classroom practice. *Journal of Teacher Education*, vol. 41, n° 3, p. 53-62.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. (Thèse : <https://tel.archives-ouvertes.fr/search/index/?q=Ghedamsi&submit=>). Université de Bordeaux.
- Ghedamsi, I., & Fattoum, F. (2018). Etude de l'évolution des images de la convergence de suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(2), 207-259.
- Habineza, F. (2010). *Developing first-year mathematics student teachers' understanding of the concepts of the definite and the indefinite integrals and their link through the fundamental theorem of calculus: An action Research Project in Rwanda*. Dissertation of the University of KwaZulu-Natal, Pietermaritzburg.

- Habineza, F. (2013). A case study of analyzing student teachers' concept images of the definite integral. *Rwandan Journal of Education*, 1(2), 38-54, eISSN : 2312-9239.
- Haddad, S. (2012). *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien*. [Thèse de l'Université Virtuelle de Tunis (ISEFC) et Université Paris Diderot (Paris 7)].
- Jones, S.R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 122-141.
- Jones, S. R. (2014). Adding it all up: Reconceiving the introduction to the integral. *Mathematics Teacher*, 107(5), 372-377.
- Jones, S.R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 9-8.
- Pélissier, L., Venturini, P., & Calmettes, B. (2007). L'épistémologie souhaitable et l'épistémologie implicite dans l'enseignement de la physique. De l'étude sur l'enseignement en seconde à la démarche d'investigation au collège. In *Actes des 3es journées nationales inter-IUFM sur la recherche et la formation des enseignants en épistémologie et histoire des sciences et des techniques (ReForHST)*, Caen 31 mai au 1 juin, 8-13.
- Roletto, E. (1998). La science et les connaissances scientifiques : points de vue de futurs enseignants. *Aster*, n° 26, 11-30. DOI : 10.4267/2042/8690
- Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergences des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Rasslan, S., & Tall, D (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norwich, UK.
- Sealy, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 230–245.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Zandieh, M.J. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 103-127.

INGENIERIE DIDACTIQUE DE RECHERCHE & DEVELOPPEMENT : UN PROCESSUS COLLABORATIF ENTRE CHERCHEURS ET PROFESSEURS

Fatma FATTOUM* - Imène GHEDAMSI**

Résumé - Fondée sur la Théorie des Situations Didactiques, cette étude ambitionne de mettre en évidence les possibilités de conception d'un outil méthodologique d'ingénierie de recherche et développement. Le résultat final met l'accent sur la nécessité de prendre en compte les actions effectives du professeur afin d'engager une collaboration visant la conception de situations d'enseignement.

Mots-clefs : Ingénierie de recherche, ingénierie de développement, pensée réflexive, actions du professeur.

Abstract - Our research is guided by the Theory of Didactic Situations towards the conception of a methodological tool that aims to investigate the relationship between fundamental research and development. This paper presents an attempt to state methods orientations concerning this issue and the final design.

Keywords: Engineering of research, engineering of development, reflective thinking, teachers actions.

INTRODUCTION

Le domaine de la recherche en didactique des mathématiques porte en soi des ouvertures d'action didactique concrète et transformatrice du terrain institutionnel notamment par le biais de la conception de projets d'enseignement/apprentissage de notions mathématiques, alternatifs aux projets institutionnels. Les chercheurs inscrits dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau, utilisent la méthodologie d'ingénierie didactique (Gonzalez-Martin et al., 2014). Cette méthodologie se structure en quatre étapes fondamentales (Bloch, 2006) plus ou moins analogues aux étapes attestées par les ingénieries de Recherche & Développement (RD) : 1) Recherche fondamentale et mise en place d'un projet conceptuel ; 2) Recherche appliquée et mise en place d'un projet probatoire ; 3) Développement d'un prototype expérimental du projet ; 4) Implémentation et étude d'efficacité selon des critères qui varient en fonction du domaine dans lequel est mobilisé l'activité d'ingénierie. La composante développementale est particulièrement fondée sur des éléments optimisant les potentialités de distribution ou diffusion du projet finalement conçu.

Néanmoins, l'aspect développemental n'aborde pas explicitement la question des conditions de diffusion et d'implémentation institutionnelle du projet, tandis que l'étude de l'efficacité du projet a pour objectif principal d'identifier d'autres phénomènes didactiques, de contrôler les choix théoriques et de réformer les composantes de recherche (Artigue, 2011 ; Ghedamsi, 2017 ; Perrin-Glorian, 2019). En même temps que s'imposait la nécessité de revisiter cette méthodologie afin de traiter ces questions, des études des classes ordinaires et des actions du professeur (Robert et Rogalski, 2002 ; Bloch, 2006 ; Ghedamsi et Fattoum, 2018) soulignent la nécessité de réinterroger le rôle du professeur et celui des choix institutionnels dans toutes les étapes de conception et d'expérimentation de l'ingénierie. Ghedamsi (2017), Ghedamsi et al. (2019) et Perrin-Glorian (2019) mettent l'accent sur deux éléments essentiels pour la conception et l'expérimentation d'une ingénierie de recherche et développement visant un projet d'enseignement et d'apprentissage de notions mathématiques. Le premier élément concerne la nécessité de garder la dimension de contrôle par les composantes de recherche. Le deuxième élément est lié à la gestion du professeur en situations de classes ordinaires, aux actions qui accompagnent cette gestion et aux possibilités de leur adaptation et de leur évolution

* Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue - Tunisie - fatmafattoum@yahoo.fr

** CY Cergy Paris Université - France - imene.ghedamsi-lecorre@cyu.fr

au vu de certaines situations problématiques. Perrin-Glorian (2019) souligne que "C'est surtout ce deuxième niveau [élément] qui la distingue de l'ingénierie didactique classique ou ingénierie didactique de recherche (IDR). La séquence doit être non seulement viable dans les classes ordinaires mais y être diffusable.". Cependant, les tentatives de théorisation d'ingénierie didactique de recherche et développement pensée dans le cadre de l'action didactique sont rares ; ce qui a pour conséquence une méthodologie qui reste une méthodologie de recherche et non d'action didactique (Artigue, 2008 ; 2017). Dans notre recherche nous avons essayé, à travers la mise en place d'un dispositif méthodologique de conception d'une ingénierie didactique de recherche et développement (Fattoum, 2021), d'appuyer la dimension collaborative entre chercheurs et professeurs en interreliant les différentes étapes de l'ingénierie didactique par le biais d'un processus de réflexivité guidée (Husu, 2008) engageant ainsi professeur et chercheur à tous les niveaux ; de sa conception à son expérimentation.

L'objectif de cette contribution est d'illustrer les ouvertures théoriques qui permettent de penser les potentialités d'une collaboration efficace entre chercheurs et professeurs visant la conception commune de ressources pour l'enseignement des mathématiques. Le choix d'exemplifier l'exploration théorique à travers le concept de convergence de suites permet à son tour de signifier la pertinence des résultats pour les ingénieries mathématiques.

I. RÉFLEXIVITÉ ET ENGAGEMENT DANS UN PROCESSUS DE DÉVELOPPEMENT

1. *Introduction : Prise en compte du terrain institutionnel visé*

Notre question de départ est liée aux moyens à mettre en œuvre pour négocier le besoin d'une ingénierie sur un concept mathématique complexe, ici celui de la convergence de suite, avec les acteurs institutionnels, pour ensuite être en mesure de déclencher un processus de collaboration dont l'objectif final est la dévolution, aux professeurs, des expérimentations et des adaptations et régulations que ces ingénieries nécessitent. La première étape du travail, basée sur l'exploration de la réalité institutionnelle, nous a permis de recenser un corpus de données sous forme de transcriptions de séances de classes, de questionnaires et d'entretiens en direction des élèves. Les résultats des analyses de ces données devraient permettre aux professeurs de prendre de la distance par rapport à leurs actions et de les interroger. La question des assises théoriques de notre démarche initialement empirique nous a portés vers l'étude de travaux de recherche concernant les pratiques réflexives. En effet, les interactions préliminaires avec les professeurs, basées sur les difficultés des élèves concernant les suites et leurs limites et explicitement identifiées dans les analyses faites des choix institutionnels y compris la gestion du professeur, ont déclenché une attitude autoréflexive chez ces professeurs. Cette attitude apparaît comme une composante essentielle du processus de collaboration. Ces premiers aspects empiriques ont fondé notre étude des travaux de recherche, en sciences de l'éducation, concernant les pratiques réflexives avec comme fil, conducteur ce que nos premiers résultats, fortement reliés à la dimension épistémologique des savoirs mathématiques, ont apporté comme éclairage. Par ailleurs, en dépit de la pluralité des approches de la réflexivité (psychologie, sciences sociales, sciences de l'éducation), Couturier (2013) souligne qu'en littérature les auteurs s'accordent à décrire la pratique réflexive comme une démarche méthodologique relevant du rapport à soi fondée sur l'introspection, puis l'explication de l'implicite présent dans l'action.

2. *Le paradigme réflexif en éducation : De quoi s'agit-il ?*

Le paradigme réflexif introduit, dans l'étude du développement professionnel du métier d'enseignant, a été d'abord initié par Dewey (1933) à travers la notion de *reflective thinking* qu'il décrit comme étant :

Active, persistent, and careful consideration of any belief or supposed form of knowledge in the light of the grounds that support it, and the further conclusions to which it tends, constitutes reflective thought. Any one of the first three kinds of thought may elicit this type; but once begun, it is a conscious and voluntary effort to establish belief upon a firm basis of reasons. (Dewey, 1933, p. 2).

Par la suite, Schön (1983), à travers la notion de *reflective practitioner*, expliquait que :

When a practitioner reflects in and on his practice, the possible objects of his reflection are as varied as the kinds of phenomena before him and the systems of knowing in practice that he brings to them. He may reflect on the tacit norms and appreciations that underlie a judgment, or on the strategies and theories implicit in a pattern of behaviour. He may reflect on the feeling for a situation that has led him to adopt a particular course of action, on the way in which he has framed the problem he is trying to solve, or on the role he has constructed for himself within a larger institutional context. (p.62).

Depuis on a enregistré à travers les années, une multitude de travaux (Van Manen, 1977 ; 1995 ; Schon, 1983 ; Holborn, Wideen et Andrews, 1992 ; Plessis-Belair, 2000 ; Larrivee, 2008 ; Sellars, 2012 ; etc.) qui partagent le même fondement : le praticien (dans ce cas le professeur) construit son savoir professionnel à partir de son action et de la réflexion consciente sur ses causes et ses conséquences. Selon ces travaux, la planification d'une dialectique action vs. réflexion, avec pour objectif final la modification de l'action future afin de la rendre plus efficace, requiert l'usage délibéré, régulier et méthodique de dispositifs qui permettraient de modéliser le processus de réflexion qu'elle nécessite. Larrivee (2000) souligne à cet effet que :

The process of becoming a reflective practitioner cannot be prescribed. It is a personal awareness discovery process. While it is not possible to prescribe a linear process or define a stepbystep procedure, there are actions and practices that are fundamental to developing as a reflective practitioner. (p. 296).

Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons au processus de réflexion sur l'action, où le professeur opère un retour réflexif a posteriori de son action. Notre objectif n'est pas celui d'analyser le développement professionnel du métier de professeur de mathématiques, ni de porter les professeurs intervenant dans cette recherche à adopter ce processus de réflexion et d'en étudier les effets. Notre intérêt est fondamentalement méthodologique : comment cadrer théoriquement la discussion du besoin de l'ingénierie sur la convergence de suite entre professeurs et chercheurs sachant que les premiers éléments empiriques mettent l'accent sur les intérêts des aspects réflexif et critique de la discussion ? C'est ce qui explique aussi que nous ne portons pas un regard particulier sur le processus de réflexion dans l'action car ceci suppose une certaine maturité de la part du professeur dans la systématisation de la relation action/réflexion qui déboucherait sur une modification instantanée et conséquente de l'action.

En particulier les travaux en éducation se sont intéressés à la modélisation de la démarche réflexive chez le professeur conformément au processus de réflexion sur l'action. Dans tous les cas, ces modèles comportent quatre phases qui renvoient successivement à : Une phase de prise de conscience d'une situation problématique dans son action (1) Une phase d'analyse des causes et des conséquences de la situation problématique (2) ; Une phase de structuration de la nouvelle action (3) ; Une phase d'expérimentation de la nouvelle action qui amorce à son tour un nouveau cycle de la démarche réflexive (4).

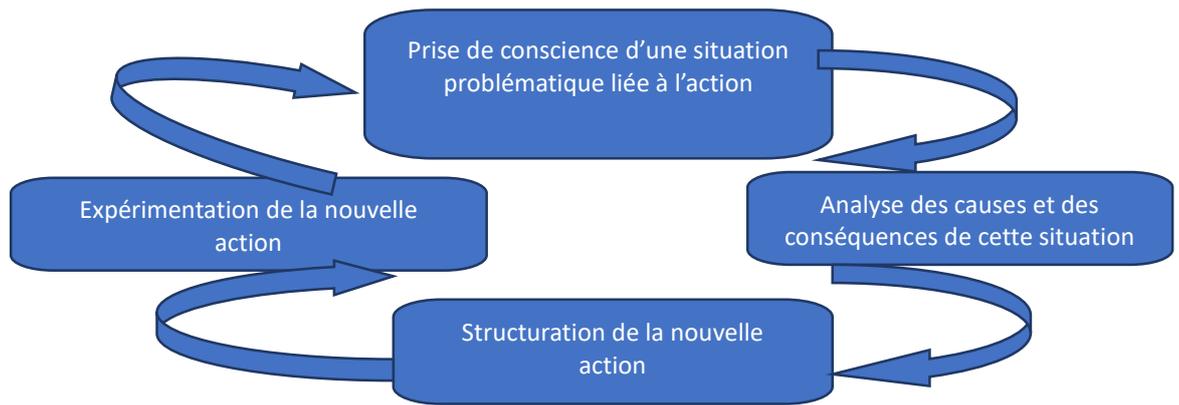


Figure 1 - Les phases de la démarche réflexive

L'entrée dans le processus, décrit par ces quatre phases (Figure 1), suppose de la part du professeur un engagement et une ouverture d'esprit qui lui permettraient de transformer son action spontanée et non réfléchie en une expérience ayant des significations, et dont la mise en évidence constitue un moyen de réguler cette action et de l'améliorer dans sa pratique future. Au moins deux types d'assises fondent l'émergence des différentes significations.

- Le premier type postule le rôle de la théorie et des concepts théoriques pour confronter l'action du professeur et l'amener à l'examiner. Les travaux qui en relèvent s'inscrivent dans la lignée de ceux de Dewey (Dewey, 1933 ; Desjardins, 2000 ; Pallascio et Lafortune, 2000).

- Le deuxième type table sur les savoirs d'expérience professionnelle du professeur et leur importance pour expliquer et étudier les choix de ses actions. Ce point de vue, initialement développé par Schön, a donné lieu à une multitude de travaux sur les pratiques réflexives dans et sur l'action (Schon, 1994 ; Perrenoud, 1996, 2001 ; Legendre, 1998 ; Larrivee 2000).

Dans tous les cas, le professeur devrait entreprendre sa planification comme on entreprend une démarche de résolution de problèmes ; la validation des résultats est alors soit théorique soit empirique. Dans le cadre de cette recherche, nous envisageons les deux formes de validation du fait que l'enjeu de notre problématique est fondé sur la collaboration entre chercheurs et professeurs. Nous pouvons aussi avancer une autre raison, en conformité avec notre objectif, de réinterroger un certain clivage existant entre la recherche et l'action ; entre savoirs professionnels, liés dans ce cas à l'enseignement des mathématiques, issus de la recherche et ceux issus de l'expérience. Legendre propose à cet effet d'aller plus loin :

Il s'agit plutôt de chercher à dépasser la dichotomie théorie/pratique, dans le sens d'une interaction plus dialectique de ces formes de savoirs en arrimant davantage le savoir théorique aux questions que pose la pratique. (Legendre, 1998, p. 381).

En nous basant sur les travaux qui ont permis de regrouper par thèmes les études portant sur la réflexion, il nous a été possible de mettre en évidence deux éléments importants, les mécanismes/processus de réflexivité et la hiérarchisation des niveaux de réflexion. Ces deux éléments vont faire l'objet d'étude des paragraphes suivants.

3. Mécanismes visant le déclenchement de la réflexivité

Afin d'être en mesure de tirer profit de ces travaux dans le contexte de l'élaboration d'un dispositif de conception d'ingénieries didactiques de développement basé sur la collaboration entre professeurs et chercheurs, il est important de souligner les mécanismes éventuels (Oberger, 1992 ; Locke, 1997 ; Torchon, 1996 ; Jorro, 2005 ; Husu, 2008) qui vont permettre de déclencher chez le praticien des doutes concernant son action et d'en expliciter les implicites. Nous écartons toute réduction de la complexité du processus de réflexion sur l'action à la

capacité du professeur de s'abstraire des éléments contingents qui conditionnent son action par sa seule volonté. Certains travaux en sciences sociales (Larrivee, 2000 ; Cunliffe, 2004) ont d'ailleurs mis l'accent sur le processus inconscient et continu d'ajustement au réel qui accompagne toute action humaine. Si on prend, par exemple, le cas où le contrat de validation en classe de géométrie de début du lycée ne peut s'appuyer exclusivement sur les figures géométriques, l'ajustement efficace du professeur, s'il y a dysfonctionnement des règles qui régissent ce contrat, est une action en grande partie incorporée dans son inconscient. Par ailleurs, si nous supposons que ce professeur a la capacité d'analyser cette action et d'en inférer des instructions pour augmenter consciemment l'efficacité pragmatique de son action, il constatera qu'il est plus performant si, par exemple, il recense et catégorise les arguments potentiels. Par contre, lorsque l'analyse concerne les causes et les conséquences de cette action dans le but de la réformer, on est au cœur de l'activité réflexive et ici, le professeur explorera les significations de son action pour en identifier les aspects qui peuvent l'affecter et/ou la rendre plus performante. La distinction entre ces trois manières d'appréhender le rapport du professeur à son action, souligne les spécificités de l'activité réflexive et met en évidence la nécessité, de la part du professeur, d'objectiver sa relation à son action en prenant du recul par rapport à ses propres habitudes. Le professeur est amené à prendre de la distance par rapport aux standards d'explication qui donnent l'illusion de comprendre son action de façon transparente, et de prendre conscience de la perspective théorique ou empirique à partir de laquelle il construit ses analyses.

Parmi les outils (ou mécanismes) utilisés comme support pour déclencher la réflexion chez les professeurs de l'éducation, nous citons le journal de bord (Jorro, 2005) la rétroaction vidéo (Baribeau, 1996) ou la réflexion guidée (Husu, Toom, et Patrikamen, 2008). Ce dernier outil s'inscrit particulièrement dans le contexte de notre recherche et consiste en une interaction avec le professeur sous forme d'entretien structuré sur la base des résultats de séances de classes assurées par ce professeur et transcrites en verbatim.

Le but est d'amener le professeur à mentionner les décisions et les paramètres qui ont influencé son action, les incidents critiques et leur analyse. Guider son discours et l'interpréter, permet d'approfondir sa réflexion pour contribuer ainsi à son développement professionnel. (Lefebvre, 2015, p. 80).

4. *Réflexivité et niveaux de réflexion*

Les quatre phases de la démarche réflexive décrites ci-dessus (Figure 1), ne s'effectuent pas forcément dans le même ordre ; elles peuvent même se chevaucher lorsque deux actions différentes du professeur sont envisagées au même moment. Dans tous les cas, chacune de ces phases requiert de la part du professeur un certain niveau ou contenu de réflexion.

Il existe une pluralité de définitions attribuées à la notion de réflexion. Nous nous intéressons ici seulement aux travaux qui y réfèrent dans le cadre de la démarche réflexive en éducation (Holborn, Wideen et Andrews, 1992 ; Hatton et Smith, 1995 ; Couturier, 2013, etc.). Ces travaux s'accordent en général sur le fondement psycho-cognitif de cette notion et la définissent comme étant un processus mental, conscient et volontaire, qui intervient dans l'étude d'une situation en engageant une prise de distance, par rapport à cette situation, débouchant sur la production de connaissances. Il est largement reconnu au sein de la communauté des chercheurs en sciences de l'éducation, que la réflexion contribue au développement professionnel du praticien qui réfléchit (Schon, 1983 ; Husu, 2008). L'existence d'une certaine hiérarchisation dans la réflexion, traduite dans la littérature à travers le concept de catégories de réflexion ou niveaux de réflexion, montre l'impact du contenu de la réflexion sur le processus mental que cette réflexion engendre.

Bien que les travaux qui étudient cette hiérarchisation, dans le cas des praticiens de l'éducation, n'énoncent pas explicitement un rapport entre les niveaux de réflexion qu'ils décrivent et les différentes phases de la démarche réflexive, ils s'accordent sur l'existence de différents niveaux plus ou moins comparables.

Le modèle de Van Manen (1977) définit trois niveaux de réflexion qu'il classe dans un ordre croissant : *high level*, *higher level* et *highest level*. Au premier niveau, *high level*, la réflexion est pragmatique. Le professeur focalise sur le choix des techniques les plus efficaces pour atteindre ses objectifs d'enseignement. A ce niveau il est question d'optimiser les moyens à mettre en œuvre, les objectifs visés ne peuvent être ni critiqués ni modifiés. Mais en l'absence de normes définissant *le meilleur choix*, l'auteur précise :

When there exist alternative, conflicting, or competing principles, and, therefore, when there are a multitude of technical recommendations available, a pragmatic form of deliberative rationality is necessary. (Van Manen, 1977, p. 226).

Au deuxième niveau de réflexion, *higher level*, la pratique se réfère au processus d'analyse et de clarification des expériences individuelles, aux significations, aux perceptions, etc. dans le but d'orienter les actions pratiques. Au troisième niveau de réflexion, *highest level*, un niveau encore plus élevé de rationalité réflexive est nécessaire pour délibérer de la valeur des objectifs éducatifs. Il est question, à ce niveau, d'une critique constante de la domination des institutions, et de la prise en compte des critères sociaux, moraux ou autres.

S'inscrivant dans le cadre particulier de l'éducation des adultes, Mezirow (1997) développe sa théorie de l'apprentissage transformationnel. Cet apprentissage concerne l'adulte qui a acquis un ensemble cohérent d'expériences qui l'amène à construire un cadre de référence qui façonne, délimite et sélectionne ses attentes, sa perception et sa cognition. Ainsi l'adulte a tendance à rejeter les idées qui ne sont pas pertinentes de son point de vue et qui ne sont pas en harmonie avec son cadre de référence. Selon Mezirow, *transformative learning* permet à l'adulte d'entrer dans un processus réflexif de changement et de transformation de son cadre de référence qui devient plus large et plus inclusif.

We transform our frames of reference through critical reflection on the assumptions upon which our interpretations, beliefs, and habits of mind or points of view are based. We can become critically reflective of the assumptions we or others make when we learn to solve problems instrumentally or when we are involved in communicative learning. We may be critically reflective of assumptions when reading a book, hearing a point of view, engaging in task-oriented problem solving, or self-reflectively assessing our own ideas and beliefs. Self-reflection can lead to significant personal transformations. (Mezirow, 1997, p. 7).

Mezirow associe à l'apprentissage transformationnel sept niveaux de réflexion dont ceux cités plus haut. Le tableau 1 ci-dessous synthétise les sept niveaux de réflexion en question.

Niveau (ou contenu) de réflexion	Commentaire
Descriptive	Description de la situation - aucune analyse
Affective	Réflexion sur le sentiment, les émotions en lien avec l'action
Discriminante : Technique et Pratique	Réflexion sur l'efficacité, les causes, le contexte en lien avec l'action
Jugement de valeur	Réflexion sur les valeurs (positives et négatives)
Conceptuelle	Conscience de sa prise de conscience, compréhension de son action
Psychique	Réflexion sur le jugement précipité, les intérêts et les anticipations
Théorique (Critique)	Réflexion sur les règles reconnues, les attentes sociales (théorie, social, émotion)

Tableau 1 - Niveaux de réflexion de Mezirow (Lefebvre 2015, p. 91)

L'originalité des niveaux de réflexion de Mezirow est double. D'abord ces niveaux renvoient à des divers déterminants du professeur et incluent d'autres dimensions telles que la dimension émotionnelle (affective, psychique) ou sociale (théorique). D'autre part, la réflexion entendue par Mezirow s'inscrit dans le paradigme réflexif et renvoie explicitement à un retour critique de la pensée du professeur sur elle-même pour prendre de la distance par rapport à une situation problématique émergeant de son action en vue de sa réformation.

Hatton et Smith (1995) interprètent les niveaux de réflexion de Van Manen (1977), décrits plus haut, en ces termes : Van Manen (1977), who proposed three levels derived from Habermas (1973). The first level, technical reflection, [...]. The second, practical reflection, [...]. The third level, critical reflection. (Hatton et Smith, 1995, p.35).

En se basant fondamentalement sur les travaux de Van Manen (1977), les deux auteurs dressent une catégorisation comportant quatre niveaux de réflexion afin d'analyser le contenu de réflexion du professeur lors des différentes phases de la démarche réflexive.

- Le premier niveau *descriptive writing*, n'est pas accompagné d'une réflexion particulière et se limite à rapporter simplement une situation sans aucune explication spécifique.
- Le deuxième niveau *descriptive reflection*, s'accompagne d'explications de la situation en fonction du contexte de l'action. Ces explications sont fondées sur la dimension technique.
- Le troisième niveau *dialogic reflection*, renvoie à une forme d'exploration des raisons de l'action en fonction de l'expérience et les solutions potentielles. Ces raisons sont fondées sur la dimension pratique.
- Le quatrième niveau *critical reflection*, concerne les règles reconnues (y compris celles en lien avec les mathématiques savantes), les aspects éthiques, culturel, etc. Il renvoie à la dimension théorique.

Par ailleurs, Hatton et Smith mettent l'accent sur les exigences relatives aux différents niveaux de réflexion.

The descriptive [...] is more easily mastered and utilized than either the exploratory dialogic or demanding critical forms, both of which require knowledge and experiential bases that take some time to develop. (Hatton et Smith, 1995, p. 45).

Ils précisent concernant la réflexion critique : critical dimensions need to be fostered from the beginning, for teaching is a moral business concerned with means and ends.(Hatton et Smith, 1995, p. 46). Le tableau 2 ci-dessous met en évidence un parallélisme qui peut exister entre les différentes approches des niveaux de réflexions adoptées par les auteurs que nous venons de citer.

Hatton & Smith (1995)	Mezirow (1997)	Van Manen (1977)
Descriptive writing	Descriptive	
Descriptive reflection	Affective – Discriminante - Jugement de valeur	High level
Dialogic reflection	Discriminante	Higher level
Critical reflection	Théorique	Highest level

Tableau 2 - Comparaison des niveaux de réflexion de Mezirow, Hatton & Smith et Van Manen

Les niveaux de réflexion, communs aux trois auteurs, se distinguent en fonction de l'objet sur lequel porte la réflexion. Ainsi, le premier niveau commun s'attache à un objet directement ancré dans l'action, à savoir la recherche de moyens afin de répondre avec efficacité aux objectifs fixés. Le deuxième niveau commun, se distingue du premier par un certain détachement, et une réflexion qui se décentre peu à peu de l'action même et peut renvoyer à l'expérience du sujet dans le cadre de cette action. Finalement, au troisième niveau commun, la réflexion est davantage théorique et la réflexivité porte particulièrement sur le statut même

d'enseignant en général, sur l'influence de la profession et sur les questions notionnelles abordées.

Notons que les adjectifs comparatifs (high, higher, highest) ainsi que les numéros attribués aux niveaux de réflexion, ne donnent pas une supériorité ou une valeur intellectuelle plus importante aux contenus de réflexion des uns par rapport aux autres. L'importance de ces niveaux de réflexion est fondamentalement liée aux possibilités de décrire le contenu et la nature de la réflexion et de déceler les divers aspects de la réflexivité. Lefebvre (2015) souligne dans le même contexte, qu'il s'agit d'écarter l'idée de gradation en privilégiant une approche qui tient compte des dimensions individuelles et met l'accent sur la diversité de l'expérience humaine.

Bien que les travaux de recherche n'associent pas explicitement les divers niveaux (ou contenus) de réflexion avec une ou des phases particulières de la démarche réflexive, ils s'accordent sur l'existence d'au moins trois types de contenus de réflexion du sujet en situation de réflexivité (quoi, pourquoi, comment, quand ...), que nous adoptons dans la suite de notre recherche : 1) Technique lié au contexte de l'enseignement, ses divers aspects et moyens tel que le programme et les recommandations des instances pédagogiques ; 2) Pratique lié à l'expérience du professeur de l'enseignement et l'apprentissage de la discipline, en tant qu'enseignant, étudiant ou autre ; 3) Théorique portant sur des règles reconnues et des éléments théoriques manifestes y compris ceux de la discipline.

Pour ce qui est du professeur de mathématiques, si l'on admet que les questionnements épistémologiques impliquant l'étude des conditions d'adéquation des connaissances mathématiques n'écartent pas les connaissances mathématiques pour l'enseignement de cette étude, alors ces questionnements se retrouvent à tous les niveaux de réflexion. On décrit le contenu de la réflexion du professeur, à travers ces trois niveaux, dans les trois premières phases de la démarche réflexive.

II. DISPOSITIF MÉTHODOLOGIQUE DE CONCEPTION D'UNE INGÉNIERIE DE RECHERCHE ET DÉVELOPPEMENT

1. *Méthode pour l'engagement du professeur dans une réflexion collective avec le chercheur*

La figure suivante (Figure 2) modélise notre approche de la question de la démarche réflexive dans une recherche problématisant l'action du professeur, cette action étant intimement liée au contenu mathématique en jeu, et engage la collaboration entre professeurs et chercheurs. L'objectif est d'une part, d'analyser les enjeux de cette action, c'est-à-dire ses causes et ses conséquences, et d'autre part, de mettre en place une alternative à cette action en fonction du contenu mathématique en jeu. L'analyse de ces enjeux est fondée aussi bien sur la théorie, ce que nous chercheurs, pouvons apporter comme éclairage, que sur la pratique du professeur et donc ce qu'il saurait en tirer dans un contexte réflexif.

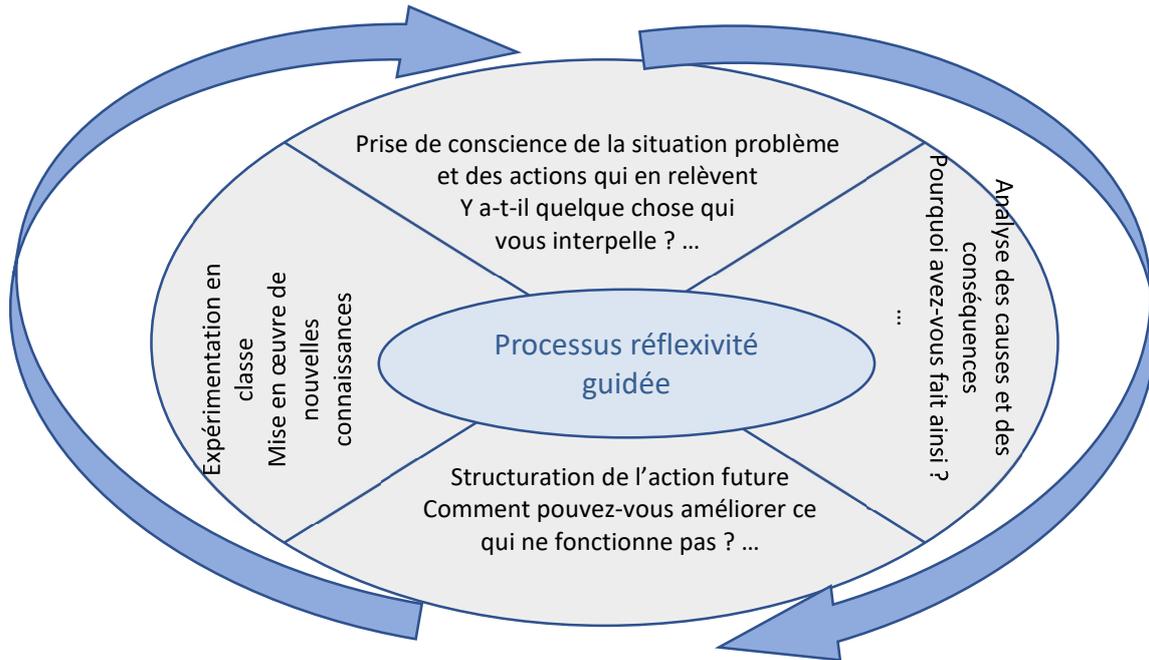


Figure 2 - Modélisation de la réflexivité guidée

Notre méthode expérimentale est fondée sur le concept de la réflexivité guidée. Nous nous appuyons sur ce concept pour mettre en place l'entretien, en direction du professeur, élaboré sur la base des résultats des séances de classe ordinaire qu'il a préalablement assurées. Le professeur va être confronté à des situations problèmes relatant ses actions antérieures. A travers la discussion de cette situation le professeur va être amené à décrire et analyser les causes de ses actions en s'appuyant, par exemple, sur des arguments théoriques ou sur des décisions prises dans des situations pratiques similaires, ainsi que les conséquences de ses actions et leur impact sur la compréhension et la conceptualisation des concepts en jeu. Le professeur prend de la distance par rapport à la situation, porte un regard extérieur objectif et réinterroge la situation avec une vision différente. Il intègre de nouvelles connaissances, réadapte son action, la modifie et structure une nouvelle action pour une prochaine expérience, qui constituera à son tour le début d'un nouveau cycle de la démarche réflexive adoptée.

Ce modèle s'inscrit donc dans le dispositif méthodologique global de conception et d'expérimentation d'une ingénierie didactique de développement. Il constitue un axe fondamental de notre approche du rôle de la recherche dans l'action didactique. Rappelons à cet effet que l'ingénierie didactique, méthodologie de recherche, liée à la TSD, a suscité ces dernières années un intérêt particulier motivé par le besoin de voir les résultats des recherches investis comme ressources pour l'institution. Beaucoup de travail reste à faire dans cette direction. Artigue (2016) évoque l'ingénierie didactique comme étant une méthodologie de recherche qui n'a pas su donner naissance à des outils performants d'action didactique. Les utilisateurs potentiels des résultats de ces recherches sont les professeurs. Il est donc nécessaire que le professeur, principal partenaire du chercheur éprouve la nécessité et le besoin d'une ingénierie didactique et participe de manière concrète à son élaboration. L'attitude réflexive du professeur et son implication dans la collaboration professeur/chercheur, va constituer un tremplin pour faciliter la reproductibilité de l'ingénierie didactique. Cette reproductibilité est un élément essentiel dans la viabilité des ingénieries didactiques et leur disponibilité en tant que ressources pour l'enseignement.

5. *Le dispositif en vue de la conception et l'expérimentation d'une ingénierie R&D*

Nous avons entrepris au début de ce chapitre une étude sur la notion de réflexivité du professeur et ses potentialités à s'engager dans un processus de collaboration impliquant professeur et chercheur en vue de la conception d'une ingénierie destinée à l'action didactique. A côté de l'aspect collaboratif fondé sur les enjeux épistémologiques des objets d'enseignement considérés, la réflexivité contribue à favoriser des actions plus délibérées donc potentiellement plus efficaces. Elle permet au professeur d'optimiser et d'améliorer les fondements de ses choix et de ses actions en classe. Nous nous basons sur cette étude pour la construction d'une ingénierie didactique, portant sur la convergence de suite en troisième année mathématiques, qui contribue à l'étude de la relation entre la recherche fondamentale et l'action (Artigue, 2016). Nous ambitionnons de mettre en place certains principes méthodologiques qui pourraient être utilisés pour planifier et expérimenter une telle ingénierie didactique. Pour la construction de l'ingénierie didactique (ID), nous nous appuyons sur la théorie des situations didactiques (TSD) pour aborder la question de l'ingénierie à la fois comme une recherche fondamentale et comme un outil prêt à être utilisé pour l'action (Artigue, 2016 ; Ghedamsi, 2023).

Le principe fondamental qui régit la mise en place du dispositif méthodologique de l'ingénierie repose sur trois idées essentielles basées sur la collaboration entre professeurs et chercheurs : (1) La nécessité de déclencher le besoin d'une telle ingénierie chez les professeurs ; (2) La nécessité de négocier les termes des situations expérimentales de cette ingénierie ; (3) La nécessité de laisser au professeur la liberté pour plus de flexibilité en fonction du contexte de la classe.

Nous nous appuyons sur l'aspect recherche d'une ingénierie didactique pour définir les quatre étapes de notre dispositif comme présenté dans la figure 3.

1. La première étape concerne l'analyse du contexte institutionnel relatif à l'objet d'étude. Elle implique essentiellement les trois facteurs suivants :

- L'organisation mathématique et les choix institutionnels des moyens à mettre en œuvre pour introduire un objet d'enseignement donné.
- La réalité de la classe où une attention particulière sera accordée aux actions du professeur déployées pour accompagner le travail des élèves.
- Le travail des élèves et en particulier les difficultés effectives qu'ils rencontrent pour manipuler l'objet d'enseignement.

L'articulation de ces trois éléments permet d'identifier les actions du professeur impliquées dans les situations problématiques, en lien avec les objets mathématiques visés par l'ingénierie, et leur impact sur le travail des élèves et les difficultés qu'elles génèrent.

2. La deuxième étape fondée sur le processus d'ajustement, des actions impliquées dans les situations problématiques, à travers un projet collaboratif qui vise essentiellement la genèse d'un besoin d'une alternative à l'enseignement des objets mathématiques visés. Dans cette étape, il s'agit de la mise en œuvre des quatre phases du modèle de réflexivité (prise de conscience de la situation problématique, analyse des causes et des conséquences des actions du professeur qui ont régi cette situation, nouvelles connaissances et actions alternatives, expérimentation en classe) médiatisé par le chercheur, de telle sorte que :

- Le premier palier prend en charge les trois premières phases de ce modèle et aboutit à des déclarations de la part du professeur sur des adaptations conséquentes de ses actions, et la construction de nouvelles connaissances sur l'enseignement des objets visés.
- Le deuxième palier prend en charge la quatrième phase de ce modèle, et permet de vérifier la concrétisation de ces adaptations lors des pratiques réelles.

3. La troisième étape se structure en trois paliers :

- L'appui sur le modèle théorique, construit sur une base double (historique épistémologique/institutionnelle) des situations de l'ingénierie et sur les exigences cognitives, notamment celles répertoriées dans le contexte de la classe, permettent la mise en place des enjeux des situations expérimentales et par conséquent la catégorisation des variables didactiques respectives.

- L'investigation des valeurs des différentes variables et leur perfectionnement se fait en tandem avec le processus de négociation de l'ingénierie sur la base des actions, déjà identifiées, que le professeur va y impliquer.

- Les situations expérimentales seront sujet de régulations à chaud, prenant en compte les variables didactiques et leurs valeurs ainsi que les actions du professeur qui leur sont assujetties.

Cette étape aboutit à la finalisation du projet expérimental à la lumière des modifications convenues entre chercheurs et professeurs et son implémentation en classe.

4. La quatrième étape concerne l'étude des choix qui fond la mise en œuvre du dispositif méthodologique de conception d'ingénierie de R&D. Cette étude comporte une dimension clinique relative aux choix spécifiques liés aux objets mathématiques visés et à leur enseignement.

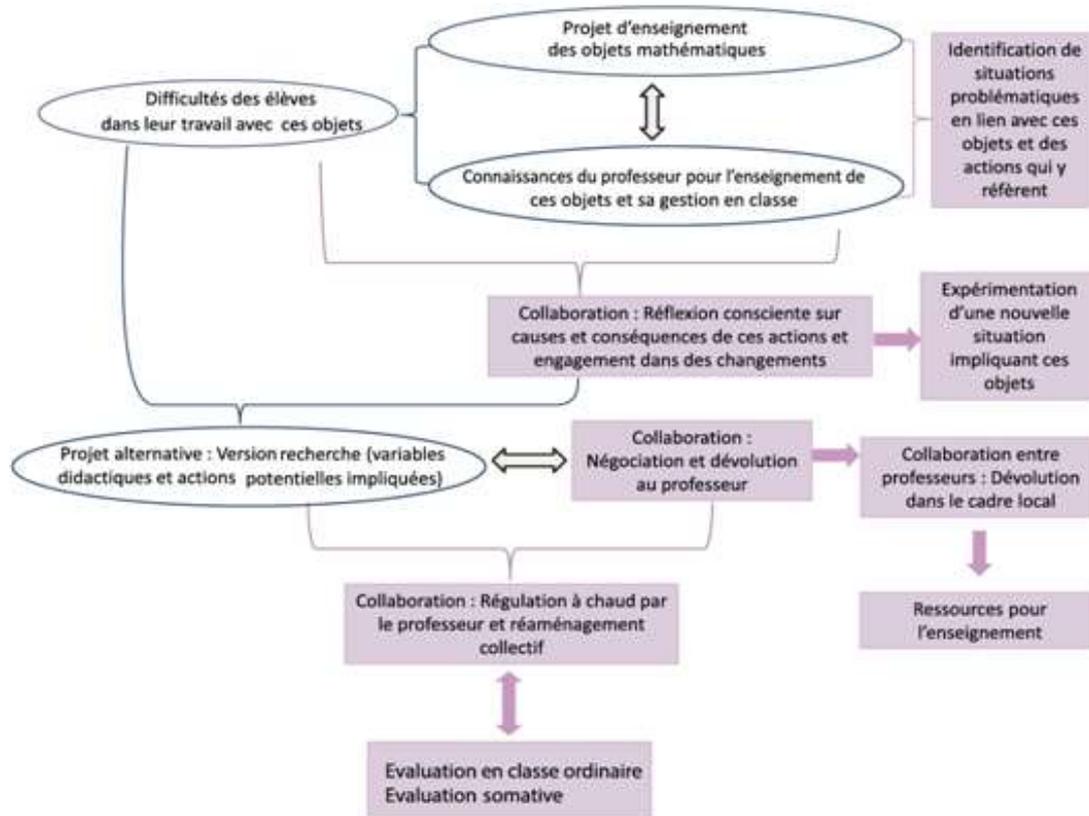


Figure 3 - Dispositif méthodologique pour une ingénierie de R&D

REFERENCES

- Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (ed.), *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08* in Copenhagen, April 21-April 25, 2008, pp. 7-16.
- Artigue, M. (2017). The Challenging Relationship Between Fundamental Research and Action in Mathematics Education. In G. Kaiser (ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* 145-163, DOI 10.1007/978-3-319-62597-3_10.

- Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7.
- Couturier, Y. (2013). Critique de la réflexivité (mais est-ce possible ?), *Phronsis*, 2(1), pp. 8-14.
- Dewey, J. (1933). How we think. A restatement of the relation of reflective tinkering to the educative process. *Boston, MA : D.C. Heath & Co. Publishers*.
- Fattoum, F. (2021). *Dispositif méthodologique de conception d'une ingénierie didactique de recherche développement- Cas de la convergence de suites en fin du lycée*. Thèse de doctorat. Université de Tunis, Tunisia.
- Ghedamsi, I., & Fattoum, F. (2018). Etude de l'évolution des images de la convergence de suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(2), 207-259.
- Ghedamsi, I., & Fattoum, F. (2020). Méthode pour l'engagement du professeur du lycée dans la question de la transition vers l'université. *Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* Sep 2020. INDRUM 2020 (pp. 433-442).
- Ghedamsi, I., & Lecorre, T. (2021) Transition from high school to university calculus: a study of connection. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 563–575.
- Ghedamsi, I. (2023). *Sur les modèles d'investigation des pratiques en mathématiques. Une perspective de conception d'une ingénierie R&D*. Editions Universitaires Européennes. (112p) ISBN 978-620-3-45563-2.
- González-Martín, A., Bloch, I., & Durand-Guerrier, V., Maschietto, M. (2014). Didactic Situations and Didactical Engineering in University mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117-134.
- Hatton, N., & Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: towards definition and implementation. *Teaching and Teacher Education*, 11(1), pp. 33-49.
- Holborn, P., Wideen M., & Andrews, I. (dir.) (1992). *Devenir enseignant. T.I. À la conquête de l'identité professionnelle* (Trad. J. Heynemand et D. Gagnon). Montréal : Éditions Logiques.
- Husu, J., Toom A., & Patrikamen, S. (2008). Guided reflection as a mean to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice*, 9(1), 37-51.
- Larrivee, B. (2000). Transforming Teaching Practice: Becoming the critically reflective teacher. *Reflective Practice*, 1(3), pp. 293-307.
- Larrivee, B. (2008). Meeting the Challenge of Preparing Reflective Practitioners. *The New Educator*, 4(2), pp. 87-106.
- Legendre, M.F. (1998). Pratique réflexive et étude de cas : quelques enjeux à l'utilisation de la méthode des cas en formation des maîtres. *Revue des sciences de l'éducation*, 24(2), pp. 397-406.
- Mezirow, J. (1997). To the editors: transformation theory out of the context. *Adult education Quarterly*, 48(1), pp. 60-62.
- Perrin-Glorian, M. J. (2019). A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. *Actes du 1er Congrès : la TACD en question, questions à la didactique*. Rennes 2019. Hal 0231 4052.
- Plessis-Bélaïr, G. (2000). La didactique de la communication orale dans une perspective de développement de la pensée critique. In R. Pallascio et L. Lafortune, (dir.), *Pour une pensée réflexive en éducation* (pp. 263-279). Sainte-Foy: Presses de l'Université du Québec.
- Robert, A., & Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.
- Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner*. N.Y: Basic Books. *Jossey-Bass higher education series*. San Francisco, CA, US: Jossey-Bass.
- Sellars, M. (2012). Teachers and change: The role of reflective practice. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 55, 461 – 469.
- Van Manen, M. (1995). On the epistemology of reflective practice. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 1(1), 33-50.
- Van Manen M. (1977). Linking ways of knowing with ways of being practical. *Curriculum Inquiry*, 6(3), 205-228.

CONCEPTION ET EXPERIMENTATION D'UNE SITUATION SUR LA STRUCTURE D'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DES NOMBRES COMPLEXES

Raja TANAZEFTI* - Imène GHEDAMSI**

Résumé - Cet article étudie les potentialités des relations établies entre les objets mathématiques pour concevoir des situations visant l'introduction de la structure euclidienne des nombres complexes. Les résultats montrent la possibilité de convaincre les étudiants de l'obligation de considérer systématiquement un plan orienté lorsqu'ils travaillent dans le plan d'Argand. L'existence concrète des nombres complexes a émergé grâce au raisonnement géométrique des étudiants conduisant à la nécessité de compléter la droite réelle pour visualiser ces nombres.

Mots-clefs : Nombres complexes, plan d'Argand, situation didactique, structure euclidienne.

Abstract - This contribution is an attempt to study the effectiveness of outlining relations between mathematical objects; and deploying these relations to design activities aiming to introduce the Euclidian structure of complex numbers. The results show the possibility to convince students about the obligation to systematically consider a direct frame when working in the complex plane. The *concrete* existence of complex numbers has emerged thanks to students' geometrical reasoning leading to the shortness of real lines in shaping these numbers.

Keywords: Complex numbers, Argand space, didactical situation, Euclidian structure.

INTRODUCTION

Dans le cadre de ce travail, nous analysons une situation qui vise à introduire la structure euclidienne vectorielle de \mathbb{C} . Notre objectif ultime est d'initier les élèves de fin du lycée aux structures d'espace vectoriel euclidien et d'espace affine euclidien de l'ensemble des nombres complexes. Cette situation s'articule autour de trois enjeux cognitifs majeurs : 1) revisiter les connaissances antérieures des élèves concernant la droite réelle (Hui et Lam, 2013) et son usage en vue des opérations sur les réels ; 2) utiliser la droite réelle afin de poser les conditions de construction du plan complexe (Lakoff et Nuñez, 2000); 3) utiliser ce plan en vue des opérations sur les nombres complexes.

Dans la continuité des travaux de Ghedamsi (2017), nous prenons appui sur l'ingénierie didactique en tant que méthodologie de recherche de la Théorie de Situations Didactiques (Brousseau, 1998). En particulier, nous mettons en œuvre la grille multidimensionnelle d'analyse conjointe du travail des élèves et de la médiation du professeur (Ghedamsi, 2017) afin de mettre en évidence les opportunités d'apprentissage et le rôle du professeur dans la progression de ces apprentissages. Cette grille comporte trois dimensions d'étude centrées sur les phases d'action de formulation et de validation des élèves. À côté d'une dimension d'analyse spécifique à la gestion des interactions, les interventions du professeur sont étudiées du point de vue de la gestion du travail des élèves durant ces trois phases.

Nous étudions en particulier l'implication des élèves dans toutes les phases de travail de recherche, de formulation et de validation, ainsi que l'accompagnement par le professeur à l'organisation de leurs connaissances, et à la construction du plan d'Argand et sa mise en œuvre pour la visualisation des opérations sur les complexes. Nous mettons spécifiquement l'accent sur les possibilités de pallier à un manque rapporté dans un travail antérieur (Ghedamsi et Tanazefi, 2015), concernant l'obligation de considérer systématiquement un repère orthonormé direct quand il s'agit de travailler dans le plan complexe.

* Université de la Manouba - Tunisie - tanazefiraja@yahoo.fr

** CY Cergy Paris Université - France - imene.ghedamsi-lecorre@cyu.fr

L'étude historique et didactique entreprise en vue de la conception d'une ingénierie sur les nombres complexes a mis en évidence l'intérêt, entre autres, de prendre en considération la preuve d'orthonormalité et d'orientation du plan complexe. Cette preuve est fondamentale pour au moins deux raisons : rapprocher la distinction entre la structure de corps et celle d'espace affine euclidien de \mathbb{C} ; et penser les aspects unificateur et simplificateur des nombres complexes en termes de changements de structures de \mathbb{C} . Ceci permet en particulier de :

- interpréter géométriquement les opérations dans le corps \mathbb{C} , non seulement pour une meilleure distinction avec les opérations dans \mathbb{R} , mais aussi pour mieux définir le rôle des transformations planes usuelles dans un travail avec les nombres complexes ;
- exploiter la validité géométrique des nombres complexes pour simplifier la résolution de problèmes géométriques.

I. CONTEXTE ET OBJECTIF DE LA SITUATION

Il s'agit de construire un milieu expérimental ayant pour objectifs la construction du plan complexe pour pouvoir interpréter géométriquement les éléments de \mathbb{C} ainsi que les opérations sur les nombres complexes. La situation est formée de deux parties comme décrit ci-dessous.

- 1) Une partie qui étudie la droite réelle et l'interprétation géométrique des réels à travers :
 - Un retour sur l'interprétation géométrique de l'ensemble des réels (relier l'algébrique au géométrique).
 - Une interprétation géométrique des opérations dans \mathbb{R} et particulièrement l'assimilation de la multiplication par (-1) à une rotation d'angle π (Conner et al., 2007).
- 2) Une partie qui traite de la construction du plan complexe à travers :
 - La construction de l'axe des imaginaires. Il s'agit de montrer la nécessité de construire un deuxième axe et de déterminer sa position par rapport à l'axe des réels pour pouvoir représenter géométriquement les nombres complexes.
 - Interprétation géométrique des nombres complexes : Si l'on accepte de prolonger l'ensemble des nombres à un ensemble contenant ces nombres, comment est-il possible de relier l'algébrique et le géométrique ?

Les interactions en classe suscitées par cette situation vont être soutenues par les questions suivantes : Que pensez-vous de cette affirmation : La multiplication d'un réel par (-1) revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle π ? Que pensez-vous de cette affirmation : La multiplication d'un nombre par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle $\pi/2$? Que pensez-vous de cette affirmation : On peut vérifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme en utilisant les nombres complexes ?

Cette situation a été expérimentée, durant deux séances de cours de deux heures chacune, dans la même classe de troisième année mathématiques qui a bénéficié de la mise en œuvre du projet introduisant la notion de nombres complexes et leurs propriétés. Cette classe est formée de 32 élèves âgés entre 17 et 18 ans. Le professeur, était présent avec deux observateurs qui avaient à leur charge de réaliser un enregistrement de la séance et de noter l'intégralité des échanges qui ont eu lieu entre pairs ou entre professeur et élèves. Tous ces éléments ont été transcrits pour constituer le corpus de base de notre analyse.

II. ANALYSE A PRIORI DE LA SITUATION

Rappelons que plusieurs chercheurs ont souligné l'importance de mettre l'accent sur le lien existant entre la multiplication par i et l'effet d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. En effet, ils ont précisé que l'introduction justifiée de i permettra la validation de l'usage d'un repère orthonormé, condition fondamentale pour distinguer la structure de corps de \mathbb{C} de sa structure de \mathbb{R} -espace vectoriel ainsi que pour pouvoir interpréter géométriquement les éléments de \mathbb{C} et des opérations sur ces éléments. Dans ce contexte, nous citons Driver et Tarran (1989), Lakoff et Nuñez (2000), Hui et Lam (2013), Conner et al (2007), Anevskaja et al (2014), Karakok et al (2014).

1. Aperçu global et variables didactiques

Les actions du professeur dans le cadre de cette situation s'articulent autour de deux activités :

A1 : Retour sur l'interprétation géométrique des nombres réels ainsi que des opérations sur ces nombres en mettant l'accent sur la relation entre la multiplication par (-1) et une rotation adéquate. Condition nécessaire pour pouvoir passer à l'interprétation géométrique des nombres complexes. Cette micro action est formée par une seule question.

A2 : Construction de l'axe des imaginaires ce qui permettra par la suite la construction du plan complexe puis l'interprétation géométrique des éléments de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Les variables didactiques qui vont permettre d'accompagner le travail des élèves et de structurer sa nature sont de deux types : 1) variables micro didactiques en lien avec la nature des notions mathématiques en jeu Vd1 (Représentation mathématique de \mathbb{R}), Vd2 (Interprétation de la somme de deux nombres), Vd3 (Interprétation de la multiplication par un réel), Vd4 (Composition d'application du plan), 2) variables macro didactiques plutôt général à la pratique de l'activité mathématique VD1 (Mode d'intervention de la notion), VD2 (Registre et conversion entre représentations sémiotiques), VD3 (Registre et conversion entre représentations mathématique).

Les connaissances préalables requises de la part des élèves pour s'investir dans le travail relatif à cette situation sont les suivantes : Connaissances relatives à la droite des réels, aux transformations du plan, aux opérations algébriques dans l'ensemble des nombres complexes, aux notions de vecteurs. Le savoir visé et qui va faire l'objet d'une institutionnalisation par le professeur est le plan complexe.

2. Enoncé de la situation et développement mathématique

a) La droite réelle : une interprétation vectorielle des réels

Dans la séquence ci-dessous, un professeur tente de convaincre ses élèves que les démarches les ayant menés à l'introduction de l'ensemble des nombres complexes et à généraliser les opérations sur les réels à cet ensemble sont raisonnables :

Professeur 1 : Rappelez-vous la droite réelle...
Feriel : Qu'est-ce qu'elle a à faire ici ? Et après... ?
Khaled : Bon... à chaque nombre réel, on fait correspondre un point de cette droite...
Minyar : D'ailleurs, à tout point de cette droite, on peut faire correspondre un nombre réel...
Professeur 2 : La multiplication d'un nombre réel par (-1) revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle π .
Ahmed : Mais comment peut-on parler de rotation ? Est-ce que le plan est orienté ?

Que pensez-vous de cette séquence ? En particulier, comment vous interprétez l'intervention 2 du professeur ?

Dans cette situation, la première question, offre aux élèves l'opportunité de retourner sur l'interprétation géométrique des réels, matérialisée par la droite réelle, puis de conjecturer que la multiplication d'un réel par (-1) est la rotation d'angle π , la validation peut être graphique ou algébrique. La métaphore "*multiplier par (-1) c'est faire une rotation d'angle π* " constitue une condition nécessaire pour la construction du plan complexe et permet de le distinguer du plan de dimension deux (Lakoff et Nuñez, 2000, Hui et Lam, 2013, Chin et Jiew, 2020). Les élèves savent déjà, depuis la fin du collège, qu'à tout nombre réel est associé un point d'une droite graduée d'origine un point noté O, appelée droite des réels, et à tout point de cette droite est associé un nombre réel.

En termes de catégories mathématiques ceci se traduit par l'isomorphisme entre \mathbb{R} en tant que \mathbb{R} espace affine ou en tant que \mathbb{R} espace vectoriel et la droite réelle.

La multiplication d'un nombre réel par (-1) peut être interprétée comme étant la rotation d'angle π et de centre l'origine O de la droite. Dans le plan orienté, si M est un point de la droite réelle et M' son symétrique par rapport à l'origine O de la droite, alors ces points vérifient le système :
$$\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi(2\pi) \end{cases}$$
 Par suite M' est bien l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle π . Notons que l'usage de la rotation est possible à ce niveau du cursus car les élèves ont l'habitude de manipuler le plan affine euclidien.

b) Construction de l'axe des imaginaires en respectant la condition $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{C}$ où la somme est directe orthogonale

Dans la suite du débat, Ahmed lance la question suivante :

Ahmed : Si on peut représenter les réels sur la droite réelle, comment on peut représenter les nombres complexes ?

Emna : Il nous faut une autre droite...il y a deux parties là...

Professeur 3 : Myriam, peux-tu nous expliquer ce que tu veux dire par là ?

Aziz : Mais on s'est mis d'accord qu'un nombre complexe admet une partie réelle et une partie imaginaire...

Skander : Tu veux dire que la droite réelle comporte la partie réelle ... Comment on construit l'autre droite ?

Professeur 4 : Oui...il nous faut une condition...

Khaled : Nous avons utilisé $\sqrt{-1}$ et nous avons $(\sqrt{-1})^2 = -1$...

Professeur 5 : La multiplication d'un nombre par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle $\pi/2$.

Linda : Nombres complexes ! Comment !

Que pensez-vous de cette séquence ? En particulier, comment vous interprétez l'intervention 5 du professeur ? Quelle est l'apport d'une telle intervention pour la "représentation graphique" des nombres complexes ?

La séquence proposée dans la deuxième question, va permettre aux élèves, dans un premier temps de construire l'axe des imaginaires et ce en utilisant d'abord les résultats de la première question et ensuite en validant la métaphore : "*multiplier par i c'est faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$* ". Dans un deuxième temps, ils vont déduire la construction du plan complexe et par suite la justification de la nature du repère que cette structure exige. Dans un troisième temps les élèves vont ainsi pouvoir considérer un nombre complexe comme étant à la fois un point du plan ou un vecteur. (Lakoff et Nuñez, 2000 ; Driver et Tarran, 1989 ; Hui et Lam, 2013).

Les élèves ont déjà été introduits aux écritures algébriques des nombres complexes ($a + \sqrt{-1}b$ où a et b sont des nombres réels). Comme tout nombre réel a , peut être représenté par un point de la droite réelle et comme $\sqrt{-1}b$ n'est pas un réel, alors il va être représenté par un point d'une droite (une seule variable b) autre que la droite réelle. La question est de déterminer la position de cette droite par rapport à la première. Comme $\mathbb{R} \cap \sqrt{-1}\mathbb{R} = \{0\}$, les deux droites vont se couper au point O , et puisque la multiplication par (-1) revient à faire une rotation d'angle π , la multiplication par $\sqrt{-1}$ revient à faire une rotation d'angle θ , par suite multiplier par $(\sqrt{-1})^2$ c'est faire une rotation d'angle 2θ . Comme $(\sqrt{-1})^2 = -1$, alors la rotation d'angle 2θ n'est autre que celle d'angle π . Donc $2\theta = \pi$ et par suite $\theta = \frac{\pi}{2}$. On conclut alors que multiplier un nombre réel b par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point B , d'abscisse b , de la droite réelle par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. Travail possible des élèves et médiation du professeur

3.1 La droite réelle : une interprétation vectorielle des réels

Nous commençons cette situation par un retour sur l'interprétation géométrique des réels pour plusieurs raisons. D'une part, la correspondance nombres réels/points de la droite réelle s'avère nécessaire pour pouvoir aborder la suite de la situation soit, l'interprétation des imaginaires puis des complexes. D'autre part, de nombreux élèves peinent à conceptualiser cette bijection entre éléments de \mathbb{R} et points de la droite réelle, comme souligné par Castella :

L'idée de la correspondance bijective entre les nombres et les points d'un axe est loin d'être une évidence limpide. (Castella, 1996, p. 36)

Nous prévoyons que les élèves, qui ont largement travaillé sur cette correspondance dans les niveaux antérieurs, peuvent interpréter géométriquement les réels, comme des points de la droite réelle. Ils vont faire une conversion entre le registre algébrique et le registre graphique affine pour répondre à la première intervention du professeur : *Rappelez-vous la droite réelle...* Il est à rappeler, qu'en termes de catégorie, la correspondance nombres-points, traduit un isomorphisme entre l'ensemble \mathbb{R} des réels et la droite affine, dans la catégorie des espaces affines. Pour Lakoff et Nuñez (2000) c'est la présence du signe moins dans i^2 qui les a incités au retour sur la droite réelle :

Since $i^2 = -1$, let us begin our thinking about i with the conceptualization of (-1) and other negative numbers. Given the Numbers are Points on a Line metaphor, we form the Number-Line blend, in which all the real numbers-including the positives, the negatives, and zero-are conceptualized as spread out along a line, with zero at a point called the origin. (Lakoff et Nuñez, 2000, p. 424)

D'après les scientifiques cognitivistes, la perception de la multiplication d'un réel par (-1) comme une rotation d'angle π , est conceptualisée en termes de rotation mentale :

Cognitively, we visualize the relationship between the positive and negative numbers using a rotational transformation from the positive to the negative numbers a "flipping over" of the positive part of the line onto the negative part of the line around the origin, preserving distance (Lakoff et Nuñez, 2000, p. 424).

De son côté Barrera (2012) a confirmé la signification géométrique des opérations élémentaires entre les nombres réside dans l'idée de *transformation*.

Pour l'interprétation géométrique de la multiplication d'un réel par (-1) , les élèves peuvent voir le point N d'abscisse un réel $(-x)$ comme étant l'image du point $M(x)$ par la symétrie centrale de centre O ou par l'homothétie de centre O et de rapport (-1) . Mais comme la consigne est de montrer qu'il s'agit d'une rotation et que cette multiplication se conceptualise en termes de rotation mentale (Lakoff et Nuñez, 2000), les élèves vont juste formuler les éléments caractéristiques de cette rotation à savoir le centre et l'angle puis les valider en utilisant le

registre algébrique. Le professeur va exploiter le retour sur la droite réelle pour souligner certaines caractéristiques géométriques de \mathbb{R} et en particulier la multiplication par (-1) en tant que rotation d'angle π .

3.2 Construction de l'axe des imaginaires avec la condition $R \oplus iR = C$ où la somme est directe orthogonale

Rappelons que, comme il a été signalé par Barrera (2012), l'interprétation géométrique des nombres complexes peut atténuer le degré d'abstraction de ces nombres et en fournir ainsi une meilleure visualisation et par suite une meilleure conceptualisation de ce concept :

Les nombres complexes ont cessé d'être imaginaires à partir du moment où il a été possible de leur donner une représentation et une réalité dans le cadre de la géométrie, réalité que le signe $\sqrt{-1}$ ne suffisait pas à leur en donner. (Barrera et al., 2012, p. 2).

Cette interprétation ne peut se faire sans la construction du plan complexe donc de l'axe des imaginaires, obtenu par transformation géométrique de la droite réelle tout en préservant sa structure, comme souligné par Flament, (2003). Le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$, unité de l'axe des imaginaires est *le signe de perpendicularité*.

Il convient donc de considérer la rotation comme moyen d'aborder la construction du plan complexe puisque : By an association of ideas the rotation through $\frac{\pi}{2}$ is associated with $\sqrt{-1}$ (Driver et al., 1989, p. 123). A cet effet nous essayerons de construire le deuxième axe après avoir montré la nécessité de son existence.

Le travail des élèves concernant la construction du plan complexe est structuré au niveau de la formulation sur la possibilité de décomposer de manière unique tout nombre complexe comme la somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, connaissance acquise dans la situation précédente. Dans ce cas la partie réelle peut être interprétée géométriquement par un point d'une droite D (la droite réelle, étudiée dans la première partie de la situation). Ils sont amenés par la suite à travers l'application du schème de la droite réelle et assimilation, à conjecturer que la deuxième partie (ib), qui n'est pas réelle, ne peut être associée à un point de la droite réelle. Ce travail pragmatique, de décomposition des nombres complexes va permettre de valider l'existence d'une autre droite Δ , à laquelle vont appartenir les points associés aux nombres imaginaires (ib), quand b varie dans \mathbb{R} .

Position relative des deux axes

Etant donné que le nombre zéro est à la fois réel et imaginaire du fait que $0 = i0$, les élèves vont pouvoir formuler que le deuxième axe Δ passera par le point O de l'axe des réels D, d'abscisse zéro. Il en résulte donc que le point O, origine de la droite D, appartient aussi à la droite Δ . Les élèves peuvent valider que les deux droites D et Δ sont sécantes et que leur point d'intersection est le point O.

Comme la multiplication par (-1) est interprétée comme étant une rotation de centre O et d'angle π et que le nouvel axe est matérialisé par les nombres (ib) où b est un réel, pour déterminer l'angle entre les deux axes, les élèves peuvent procéder de deux manières :

- Soit, ils conjecturent que la multiplication par $\sqrt{-1}$ revient à faire une rotation d'angle θ , ils déduisent alors que la multiplication par $(\sqrt{-1})^2$ revient à composer deux rotations du même angle, qui n'est autre que la rotation d'angle 2θ . L'égalité entre les deux rotations permet de conclure que l'angle 2θ est égal à π . Par suite $\theta = \frac{\pi}{2}$ et enfin formuler que multiplier un nombre par $\sqrt{-1}$ revient à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Soit, ils supposent l'existence d'un nombre n tel que multiplier un nombre par n revient à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis déduire que ce nombre ne peut être que $\sqrt{-1}$: In the rotation plane, rotation by 180° is multiplication by the number (-1) . Suppose... there is some number n such that rotation by 90° is multiplication by n . It will follow that two rotations by 90° is multiplication by n^2 (Lakoff et Nuñez, 2000, p. 428).

Un lien est alors établi entre les points A et A' d'affixes respectives le réel (a) et le nombre imaginaire (ia) à travers la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

La séquence proposée, dans la question 2 de la situation, permet aux élèves de répondre à la question relative à l'apport de l'intervention 5 du professeur : *la multiplication par $\sqrt{-1}$ revient à trouver l'image du point correspondant par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$* . En effet, étant donné le nombre complexe $z = a+ib$, il est possible que les élèves répondent de l'une des deux manières :

- Ils considèrent le point A d'abscisse a de l'axe des réels et le point B d'abscisse (ib) de l'axe des imaginaires. Le point C défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, est le point du plan complexe associé au nombre complexe z .

- Ils considèrent un point A d'abscisse (a) sur l'axe des réels, un point B_1 sur le même axe d'abscisse (b), l'image de B_1 par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'après ce qui précède, est le point B de l'axe des imaginaires d'abscisse (ib), le point C défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, est le point du plan complexe associé au nombre complexe z .

A ce niveau de l'étude, la médiation du professeur va aider les élèves à formuler l'identification entre nombres complexes et points du plan complexe.

Au terme de cette situation, le professeur va pouvoir institutionnaliser : 1) la notion de plan complexe en tant qu'"*espace affine*": à tout nombre complexe on associe un unique point du plan complexe appelé image de ce nombre complexe et réciproquement, à tout point de ce plan on associe un unique nombre complexe appelé affixe de ce point (la fonction affixe est vue comme un isomorphisme dans la catégorie des espaces affines) ; 2) la notion de plan complexe en tant qu'"*espace vectoriel*": à tout nombre complexe on associe un unique vecteur appelé image du nombre complexe et réciproquement. (En termes de catégorie, la fonction affixe est vue comme un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels).

La médiation du professeur va focaliser sur un approfondissement de la distinction entre plan complexe et plan euclidien.

III. ANALYSE A POSTERIO

Dans toute l'analyse concernant la situation du plan complexe, le travail des élèves est étudié à travers les trois dimensions recherche (R), formulation (F) et validation (V). La médiation du professeur est analysée à travers les actions qu'il a mise en œuvre pour gérer le travail des élèves relatif à cette situation (A1 et A2).

1. La droite réelle : une interprétation vectorielle des réels

Nous commençons par résumer dans un tableau les interventions des élèves et du professeur.

Professeur A1		173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224
Elèves	R	237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 256, 257, 258, 263, 264, 265, 269
	F	209, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 259, 260, 261, 262, 268, 270
	V	266, 267

Tableau 1 – Répartition des interventions – Interprétation géométrique des réels

Nous avons enregistré lors de cette expérimentation relative à l'interprétation géométrique des réels, un total de 109 interventions, réparties entre 52 interventions du professeur et 57 interventions des élèves. Les interventions des élèves se sont déroulées la plupart du temps entre pairs pour : (1) Interpréter géométriquement les nombres réels ; (2) Interpréter géométriquement la multiplication d'un réel par (-1) ; (3) Interpréter géométriquement les opérations dans \mathbb{R} .

Un aperçu global de la répartition des interventions des élèves laisse apparaître une prédominance des interventions relatives à la rubrique formulation avec 30 interventions, presque la moitié des interventions des élèves dans cette situation, ce qui est prévu pour cette question puisqu'il s'agit d'un retour sur les connaissances antérieures. Le nombre des interventions relatives à la rubrique recherche sont 25, cependant celles de validation sont de 2 interventions. Elles concernent la recherche et la validation algébrique des trois solutions de l'équation en jeu. Les élèves, comme il a été prévu, ont su interpréter géométriquement tout réel par un point d'une droite dont la nomination diffère d'un élève à l'autre : 213. Elèves : *les abscisses des points d'une droite*, 216. Habib : *Droite des réels*, 217. Yosr : *Droite vectorielle*, 218. Mehdi : *Droite graduée orientée*.

Le professeur ne s'est pas contenté de ces appellations, il a essayé de réorganiser les connaissances antérieures des élèves, comme nous le voyons dans cet échange :

P₁₈₃ : Ça veut dire quoi pour vous la droite des réels ?
226. Charfi : Représentation
P₁₈₄ : Ça veut dire quoi ?
227. Elèves : On associe à chaque réel un point
P₁₈₅ : d'accord, et que pensez-vous de la réciproque ?
228. Iheb : A chaque point on peut associer un nombre réel
P₁₈₈ : Très bien, alors à chaque réel x on associe le point M de la droite mais aussi ?
231. Elèves : Un vecteur
P₁₈₉ : Quel vecteur ?
232. Yosr : vecteur \overrightarrow{OM}

Remarquons que le professeur essaie de sensibiliser les élèves, implicitement, quant à l'isomorphisme entre la droite réelle et \mathbb{R} en tant qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Concernant la multiplication par (-1), comme il a été prévue, les élèves l'ont interprété comme étant une symétrie centrale, une homothétie de rapport (-1) ou encore comme une rotation : 259. Habib : *c'est comme on effectue une symétrie centrale de centre O* , 262. Iheb : *Homothétie de centre O et de rapport (1)*. Les élèves, qui ont considéré cette multiplication par (-1) comme une rotation d'angle π ont pu même le valider : 256. Elèves : *la rotation de centre O et d'angle π ,*

259. Iskander : (au tableau)
$$\left\{ \begin{array}{l} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi (2\pi) \end{array} \right.$$

Le professeur les encourage et essaye de justifier pourquoi nous avons besoin de voir cette multiplication par (-1) comme une rotation : P₂₁₆ : (...) *mais la consigne est de le voir comme rotation, on va voir la raison dans la suite de la situation.* Nous pouvons voir la médiation du professeur, vis-à-vis des élèves, qui ont proposé d'interpréter l'addition des réels, il n'a pas écourté le travail des élèves et a essayé de laisser des ouvertures :

263. Malek : *On peut interpréter la somme de réels ?*
 P₂₁₇ : *Très bonne question, qui peut répondre ?*
 264. Iskander : *Nous avons dit qu'un nombre on peut le voir comme un vecteur*
 P₂₁₈ : *D'accord, vous pouvez prendre des exemples.*
 265. Elèves : *Ah somme de vecteurs.*
 P₂₁₉ : *Très bien, prenez par exemple 2+3, allez-y Malek, au tableau.*
 266. Malek : *(au tableau) 2+3=5, on considère M(2), N(3) et E(5), alors :*
 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OE}$



L'interprétation de la multiplication par un réel a été proposée par le professeur que l'on décèle chez lui l'essai de mener les élèves à introduire implicitement la structure d'espace affine et celle d'espace vectoriel de R. Nous pouvons voir ceci dans les échanges :

P₂₂₀ : *maintenant si on multiplie un réel quelconque a par un autre 2 par exemple ?*
 268. Elèves : $\overrightarrow{OM} = a \overrightarrow{OF}$
 269. Elèves : *L'image de M par l'homothétie de centre O et de repère (a)*

A la fin de cette première question le professeur fait un bilan sur les connaissances acquises. Notons que la représentation géométrique des réels, qui est un isomorphisme des R-espace vectoriel de dimension un, les élèves n'ont pas trouvé beaucoup de difficultés pour en répondre. Ce qui n'est pas le cas pour l'interprétation des opérations sur les nombres réels à l'aide des transformations. Ceci peut être expliqué par la non assimilation de cette représentation tout au long du cursus scolaire. En effet, un aperçu sur le programme officiel peut révéler le manque d'apprentissage spécifique sur les transformations planes pour l'interprétation géométrique des opérations sur les réels. La nécessité des transformations dans l'interprétation de ces opérations est soulignée par plusieurs chercheurs :

Si les points d'une droite sont des nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de transformation. (Barrera, 2012, p. 58).

2. *Construction de l'axe des imaginaires avec la condition $R \oplus iR = C$ où la somme est directe orthogonale*

Nous commençons par résumer dans un tableau les interventions des élèves et du professeur.

Professeur	A1	226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239
	A2	241, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257 258 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268
Elèves	R	273, 274, 275, 283
	F	276, 277, 278, 279, 284, 285, 286, 287, 291, 298, 301, 302, 304, 306, 307, 308. 309, 310, 311, 312, 313
	V	280, 281, 282, 288, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 299, 300, 303, 305.

Tableau 2 - Répartition des interventions – Plan complexe

Nous avons enregistré lors de cette expérimentation relative à l'introduction du plan complexe, un total de 87 dont 8 supposées neutres 4 pour le prof et 4 pour les élèves. Les 79 interventions

sont réparties entre 39 interventions des élèves et 40 interventions du professeur. Un aperçu global de la répartition des interventions des élèves laisse apparaître une prédominance des interventions relatives à la rubrique formulation avec 21, presque la moitié des interventions des élèves (soit 54 %), ce qui est prévu pour cette question. Les interventions concernant la validation (36%) et en moindre pourcentage, les interventions qui concernent la rubrique recherche (10%).

Les interventions relatives à la dimension recherche se sont déroulées la plupart du temps entre pairs pour : (1) Déterminer l'ensemble décrit les imaginaires ; (2) Déterminer la position de l'ensemble des imaginaires par rapport à l'axe des imaginaires ; (3) Déterminer l'interprétation géométrique d'un nombre complexe.

Les interventions relatives à la rubrique formulation concernent : (1) Formuler que l'ensemble des imaginaires est une droite ; (2) Formuler que la droite des imaginaires coupe l'axe des réels en son origine ; (3) Formuler qu'un nombre complexe est la somme de vecteurs.

Les interventions relatives à la rubrique validation concernent : (1) Valider que l'axe des imaginaires est une droite ; (2) Valider la position relative de l'axe des imaginaires par rapport à celui des réels (origine et angle) ; (3) Valider la relation entre nombre complexe et plan complexe.

La médiation du professeur, ses différentes actions et les adaptations éventuelles apportées sont en lien avec les actions A1 et A2. Les recherches sont en lien avec les actions A2 qui amènent les élèves à mobiliser la représentation cartésienne des nombres complexes. Cette action a régi presque la totalité du travail de formulation et validation des élèves.

Les élèves se sont mis d'accord sur la nécessité d'avoir un deuxième axe pour représenter les nombres complexes, 273. Habib : *Pour les réels on a une seule partie donc on peut les représenter sur une droite mais pour les nombres complexes on a deux parties, partie réelle et partie imaginaire donc on a besoin de deux droites*, 274. Mehdi : *Pour les réels on a une seule partie c'est la partie réelle, pour les nombres complexes on a deux parties partie réelle et partie imaginaire*, 275. Amine : *Pour les nombres complexes on a deux parties donc on a besoin d'une autre droite*, 276. Yosr : *Puisqu'on a deux parties donc il y a deux droites, une pour représenter les parties réelles et l'autre droite pour représenter les parties imaginaires*

P₂₃₁ : Et pourquoi une droite ?
280. Iheb : parce qu'on a ib

La dimension

P₂₂₉ : Pour quoi elle doit être une droite d'après vous ?
278. Malek : Pour obtenir un plan
[...]
281. Malek : On doit avoir la dimension d'un plan

Position du deuxième axe

284. Yosr : La droite va passer par O
[...]
288. Iskander : (...) si $b = 0$, on sera sur la droite des réels
P₂₃₉ : Très bien, jusque-là on a $\mathbb{R} \cap i \mathbb{R} = \{0\}$ et si z est réel, il est sur la droite des réels et s'il est imaginaire il va être sur une droite qui passe par l'origine O mais on n'a pas encore sa position par rapport à la droite des réels.

Il est à signaler que l'écriture d'un nombre complexe, qui fait appel à deux paramètres, a permis aux élèves de faire le lien avec leurs connaissances antérieures concernant l'utilisation des deux axes, l'axe des abscisses et celui des ordonnées. Ils l'expriment, à la suite de la suggestion du

professeur P₂₂₉ : *Pour quoi elle doit être une droite d'après vous ?* Ainsi 278. Malek : *Pour obtenir un plan.* On décèle aussi l'action du professeur qui essaye d'expliquer, implicitement aux élèves que ce qu'ils viennent de formuler n'est autre que la notion de base $(1, i)$ de \mathbb{R} en tant qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel P₂₃₂ : *Très bien, pour les réels on indexe avec 1, l'unité est 1, et pour les imaginaires bi , on indexe avec i , l'unité est i .* Et la réponse naturelle des élèves 281. Malek : *On doit avoir la dimension d'un plan,* 282. Elèves : *C'est 2.* Rappelons que c'est à l'aide de cette représentation mathématique que :

Les nombres complexes sont pleinement acceptés, grâce à l'apparition de modèles permettant de les représenter comme points du plan, ce qui leur donne une existence concrète, (Baumann, 2005, p. 93)

Comme convenu lors de la négociation et signalé dans l'analyse a priori, le professeur a procédé à des adaptations dans ses actions A1 et A2, la distinction entre plan complexe et plan de dimension deux. Il ne cesse de mettre l'accent sur la définition du plan complexe en insistant sur la nature du repère :

P₂₅₅ : (...) le plan dans lequel on travaille est un plan particulier c'est le plan complexe et ce plan doit être muni d'un repère orthonormé direct sinon c'est faux. Dans ce plan tout nombre complexe est représenté par un point.

306. Arbi : un point ou un vecteur.

P₂₅₆ : Bonne question, qu'en pensez-vous ?

307. Elèves : Les deux, c'est la même position.

P₂₅₇ : Alors, (...)

308. Arbi (au tableau) : le plan complexe est le plan (...)

P₂₅₈ : Très bien, donc le plan complexe est un plan muni d'un repère orthonormé direct dans lequel on représente les nombres complexes.

A côté de l'accompagnement des élèves dans leur travail de recherche, formulation et validation, la médiation du professeur a permis aux élèves d'alimenter leur répertoire de connaissances, non seulement sur la nature justifiée du repère et du plan, mais aussi sur la représentation d'un nombre complexe par un point ou un vecteur de ce plan. Barrera (2013) souligne la nécessité de cette représentation pour la conceptualisation de ces nombres : [...] les représentations géométriques des nombres complexes sont nécessaires pour développer l'acquisition générale de ces nombres. (Barrera, 2013, p. 3).

CONCLUSION

Il est communément admis qu'une situation d'enseignement des nombres complexes dépend de la capacité du professeur à substituer aux méthodes classiques des situations adéquates et adaptées pour faire face aux difficultés rencontrées par les élèves (Anveska et al., 2014).

L'objectif de cette situation, qui se veut alternative aux méthodes standards, renvoie à la construction du plan complexe et l'interprétation géométrique des éléments de \mathbb{C} en prenant appui sur des analogies conséquentes faites avec la droite réelle dans son lien avec les nombres réels. Il s'agit d'abord de revisiter les connaissances antérieures des élèves concernant la droite réelle ainsi que l'interprétation géométrique des opérations dans \mathbb{R} , en particulier l'interprétation de la multiplication par (-1) comme une rotation d'angle π .

Ensuite, construire l'axe des imaginaires et le plan complexe. Les élèves étaient totalement impliqués dans toutes les étapes de cette situation, que ce soit la dimension recherche, formulation ou validation. Le professeur, qui ne cesse de réorganiser leurs connaissances, délègue aux élèves l'instanciation de l'introduction du plan complexe ainsi que l'interprétation géométrique des opérations sur ces nombres. Cette introduction a permis de mettre l'accent sur l'obligation de considérer systématiquement un repère orthonormé direct quand il s'agit de travailler dans le plan complexe. La mise en place du projet expérimental a aussi tenu compte

de l'attitude réflexive du professeur et de son engagement à ajuster ses actions pour optimiser sa gestion de la classe.

REFERENCES

- Anevaska, K., Gogovska, V., & Malcheski, R. (2015). The role of complex numbers in interdisciplinary integration in mathematics teaching. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 191, 2573–2577. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.553>
- Barrera, R. (2012). *Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Université Paris-Diderot - <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/84/26/06/PDF/TheseRaquelBARRERA2012.pdf>
- Barrera, R., & Kuzniak, A. (2012). Etude des significations données par des élèves de terminales à la multiplication des nombres réels et complexes dans un contexte de géométrisation. In *VI Colloque International: Analyse statistique implicative*.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. N. Balacheff, Ed. La pensée sauvage.
- Castela, C. (1996). La droite des réels en seconde : point d'appui disponible ou enjeu clandestin. *IREM de ROUEN*.
- Chin, K. E., & Jiew, F. (2020). Knowing and grasping of two university students: The case of complex numbers. *Mathematics Enthusiast*, 17(1), 272–306. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1487>
- Conner, M. E., Rasmussen, C., Zandieh, M., & Smith, M. (2007). Student understanding of complex numbers. In *Proceedings of the 10th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.
- Driver, D. A., & Tarran, D. S. G. (1989). Five approaches to the teaching of complex numbers. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 8(3), 122–127.
- Ferro, L., A., Triana, J., G., & Mendoza, S., M. (2020). A geometric interpretation of the multiplication of complex numbers. *Journal of Physics Conference Series*, 1674 (December), 012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1674/1/012005>
- Ghedamsi, I. (2017). Modèles d'investigation des pratiques institutionnelles en mathématiques. *HDR, Note de synthèse, Université de Tunis*. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00361848>
- Ghedamsi, I., & Tanazefi, R. (2015). Sur les difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de secondaire. *Petit x*, 98, 29-52.
- Hui, T. S., & Lam, T. T. (2013). On the teaching of complex numbers. *Learning Science and Mathematics*, (8). <https://doi.org/10.1080/0020739960270113>
- Karakok, G., Stephenie, H. S., & Dyben, A. (2014). Secondary teachers' conception of various forms of complex numbers. *J Math Teacher Educ.* <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9288-1>
- Lakoff, G., & Nuñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Come From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books.

UNE APPROCHE DIDACTIQUE SUR LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE EN CLASSE DE 3^{ÈME} ANNÉE SECTION MATHÉMATIQUES

Walid SOLTANI*

Résumé - Notre communication s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement par récurrence en arithmétique dans la classe de 3^{ème} année secondaire, section Mathématiques. Notre principal objectif consiste à identifier les difficultés et les obstacles rencontrés par les élèves lors de l'introduction de ce raisonnement en classe de mathématiques. Ce travail nous a permis d'obtenir plusieurs résultats, dont les plus importants sont liés à la complexité de l'enseignement-apprentissage du raisonnement par récurrence en arithmétique et à la grande variété des procédures arithmétiques chez les élèves.

Mots-clés : Raisonnement, récurrence, Arithmétique, algorithme, logique.

Abstract - Our paper focuses on the teaching and learning of induction reasoning in arithmetic in grade 3, mathematics section. Our main objective is to identify the difficulties and obstacles encountered by students when introducing this mathematical reasoning into the class. This work allowed us to obtain several results including the most important ones related to the complexity of teaching and learning of induction reasoning in arithmetic and to a wide variety of arithmetic procedures taken by students.

Keywords: Reasoning, Mathematical induction, Arithmetic, Algorithm, Logic.

INTRODUCTION

La compétence relative au développement du raisonnement en mathématiques est un enjeu de taille pour la réalisation de toute activité mathématique. Mais, On trouve, souvent, des élèves qui ont du mal à justifier leurs démarches ou à mobiliser une preuve. C'est une conséquence qui porte à la fois sur les causes profondes de l'incompréhension des démarches mathématiques de raisonnement et les conditions de leur accessibilité. Plusieurs travaux en didactiques des mathématiques (Arsac, 1988 ; Durand-Guerrier, 2005 ; Chellougui, 2004 ; Barrier, 2009 ; Mesnil, 2014, etc.) ont mis en avant des difficultés persistantes chez les apprenants pour conduire un raisonnement.

L'arithmétique offre une plate-forme puissante permettant aux élèves de conduire des raisonnements (Battie, 2003 ; Raval, 2003). Parmi les raisonnements en arithmétique, la récurrence est un type de preuve qui pose certaines difficultés et obstacles de compréhension chez les apprenants dans l'enseignement-apprentissage (Durand-Guerrier, 2007 ; Grenier, 2012 ; Gardez et Grenier, 2016 etc.). Nous nous intéressons à l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement par récurrence en arithmétique dans la classe de 3^{ème} année secondaire, section Mathématiques. Notre principal objectif consiste à identifier les difficultés rencontrées par les élèves lors de l'introduction de ce raisonnement en classe.

Dans la première partie, nous présentons un point de vue épistémologique et didactique sur l'arithmétique et le raisonnement par récurrence. Dans la seconde partie, nous étudions la place du raisonnement par récurrence dans les curricula tunisiens en centrant notre travail sur l'enseignement de l'arithmétique en 3^{ème} année Mathématiques. Dans la dernière partie, nous présentons une étude empirique auprès des élèves de 3^{ème} année section mathématiques, qui se réalise en deux étapes. La première, porte sur une observation de classe ordinaire concernant

* Université Virtuelle de Tunis – Tunisie – wsoltani2016@gmail.com

l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement par récurrence en arithmétique. La deuxième étape comporte une analyse des productions des groupes d'élèves. Pour analyser ces productions, nous avons choisi les deux dimensions, syntaxique et sémantique, de la sémiotique de Charles W. Morris (Morris, 1938¹, cité dans Hottois, 1997) en vue de repérer les erreurs syntaxiques, sémantiques et mixtes. Dans ce repérage, nous tentons de faire apparaître les éléments structurant le raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité et conclusion) et de relever les outils algébriques utilisés par les élèves dans la production des réponses.

I. BREF APERÇU ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE SUR L'ARITHMÉTIQUE ET LA RÉCURRENCE

1. Arithmétique

L'arithmétique occupe une place importante en mathématiques. En effet, dans l'ensemble des mathématiques enseignées, Ravel (2002) distingue trois fonctions de l'arithmétique : fonction structurelle, fonction diversité des modes de raisonnements possibles et fonction algorithmique. Notons, qu'elle pourrait faire l'objet d'un travail sur le raisonnement mathématique. Il est possible dans ce champ d'aborder de façon relativement empirique et ludique les principaux modes de raisonnements. Elle souligne à ce propos :

« En arithmétique, la nécessité de maîtriser le raisonnement me paraît très intéressant pour la formation scientifique des élèves. Il me semble plus important de les former (les élèves) au raisonnement difficile qu'on rencontre dans les exercices d'arithmétique en particulier dans ceux donnés au bac » (Ravel, 2002, p. 111).

Elle ajoute :

« Ajoutons que si, historiquement, l'arithmétique est un domaine qui comporte de nombreux algorithmes, elle présente également toutes sortes de types de raisonnement » (Ravel, 2003, p. 266).

Par ailleurs, Battie (2003) effectue une étude épistémologique de l'arithmétique. Elle a mis en évidence les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage des raisonnements mathématiques. Elle a éprouvé le besoin de distinguer deux dimensions dans le raisonnement en arithmétique, la dimension *organisatrice* et la dimension *opératoire*. Nous nous intéressons dans notre travail aux deux *formes organisatrices* : la récurrence et aux *pôles opératoires* aux différentes manipulations algébriques.

2. La récurrence

Vidal (2005) effectue une étude historique et épistémologique du raisonnement par récurrence ou (par induction). Il identifie que l'origine du principe de récurrence est très controversée. Certains historiens ont dits que c'est Euclide qui en est à la source alors que d'autres ont dits qu'il s'agit de Maurolico (1494-1575) ou de Pascal (1623-1662). En fait, cela dépend de ce que l'on entend par "origine du principe de récurrence" : soit l'utilisation de l'induction *incomplète*² qui en a été l'élément déclencheur, soit sa formalisation qui en fait une démarche rigoureuse et fiable. Il semblerait que Pascal soit le premier à avoir rédigé de manière formelle ce raisonnement. On doit tenir compte de l'apport des nombreux mathématiciens qui ont réalisé

¹ Morris C.W. (1938) Foundations of the theory of signs. Chicago : Chicago University Press.

² C'est à dire à une généralisation établie sur la base des cas particuliers.

des recherches postérieures à Pascal, parmi eux Peano (1858-1932) qui a formulé les cinq axiomes permettant de construire l'ensemble \mathbb{N} .

Il a fallu énormément de temps pour que le raisonnement par récurrence soit accepté par la communauté mathématique en tant que moyen de démonstration valide. Deux obstacles ont engendré cette difficulté d'acceptation. D'une part, l'utilisation de l'induction *incomplète* pour des résultats qui ont mené des généralisations erronées ; d'autre part, l'intervention de l'infini dans ce raisonnement.

L'induction *incomplète* était utilisée par les mathématiciens avant la formalisation du raisonnement par récurrence (induction *complète*) malgré qu'elle engendre des incompréhensions, et un débat entre les philosophes, les mathématiciens et les empiristes. De nos jours, l'induction *incomplète* est utilisée non seulement en mathématique mais aussi dans des disciplines scientifiques (physique, biologie, informatique, etc.). Selon le philosophe et mathématicien Henri Poincaré (1854-1912), l'induction utilisée dans le domaine mathématique est le principe de *récurrence*. Dans les autres domaines scientifiques, l'induction utilisée correspond à l'induction *incomplète*. Nous illustrons ces propos par un extrait de la science et l'hypothèse de Poincaré qui selon lui :

« L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. » (Poincaré, 1902, cité par Grenier, 2012, p. 27)

Égré (2015) effectue une étude historique et épistémologique de la récurrence et montre bien que les justifications qu'en donnent Poincaré, Frege et les formalistes (par exemple Hilbert) diffèrent à l'évidence les unes des autres, ce qui témoigne la difficulté de la réduire à un principe qui irait de soi.

L'incompréhension et les difficultés des apprenants du concept raisonnement par récurrence

La récurrence n'est pas enseignée comme étant un concept. En effet, elle semble se limiter à une manipulation algébrique et mécanique des étapes (Harel, 2002); elle devient ainsi une technique qui permet d'obtenir des résultats généraux à partir d'un nombre de cas particuliers (Harel, 2001; Harel, 2002; Dogan, 2016) ou une technique de preuve mal compris (Grenier, 2012 ; Grenier et Gardes, 2016) ou un algorithme (Soltani, 2019).

En mathématiques, le raisonnement par récurrence a la double spécificité de permettre la construction d'objets et d'être un outil de preuve fondateur de nombreux résultats en mathématiques discrètes (Grenier, 2012). Dans l'enseignement, le concept de récurrence est peu utilisé, souvent mal compris (Soltani, 2019), en partie parce qu'il nécessite une certaine maîtrise de connaissances de logique mathématique.

Or de nombreux travaux didactiques ont montré l'importance d'une prise en charge effective dans l'enseignement des notions de logique. Certains de ces travaux se sont centrés sur la notion d'implication (Fabert & Grenier, 2011) ou la quantification implicite dans les propositions implicatives (Durand-Guerrier, 2000). D'autres travaux ont montré l'importance de la construction par les élèves et les étudiants d'un langage logique précis (Chellougui, 2003 & 2009 ; Durand-Guerrier, 2005 ; Mesnil, 2014).

Au niveau épistémologique, Grenier (2012) souligne qu'il est nécessaire de clarifier le concept de la récurrence afin de pouvoir comprendre le sens de ce principe et de le discuter au niveau didactique : Les quantificateurs « il existe » et « pour tout » sont indispensables pour

comprendre le sens de ce principe ; ils sont souvent implicites dans l'enseignement et parfois remplacés par des formulations inadéquates.

L'implication doit être comprise au sens de la logique mathématique. Par exemple $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ peut être vraie pour des valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ est faux. C'est-à-dire qu'une propriété peut être héréditaire à partir d'un certain rang, et n'être cependant jamais vraie. La vérification de « l'initialisation » est donc nécessaire. Le rapport du principe de récurrence avec l'infini est souvent une source de difficultés. La complexité est due au fait que l'on prétend démontrer une propriété relative à un nombre fini d'éléments, mais en étudiant seulement une valeur générique n . En fait, ce rapport avec l'infini n'est pas l'essentiel des obstacles à sa compréhension ; on peut l'aborder autrement.

Gardes, Gardes et Grenier (2016) font l'hypothèse que les difficultés rencontrées par les élèves/étudiants pour mettre en œuvre et rédiger un raisonnement par récurrence sont liées aux ambiguïtés de rédactions repérées dans les manuels scolaires et dans les corrigés rédigés par les enseignants. Ceci révèle un manque de compréhension de principe de récurrence. Ils soutiennent que les enseignants qui le pratiquent pensent parfois à aider les élèves à bien distinguer la variable générique de la variable quantifiée universellement mais ils précisent que les enseignants doivent se rendre compte qu'ils créent un indicateur non-pertinent de validité du raisonnement par récurrence.

Dans leur étude, ces auteurs évoquent plusieurs difficultés d'étudiants dans leur analyse d'un questionnaire comportant trois parties : difficultés qui concernent la rédaction d'une preuve par récurrence; difficultés techniques pour développer une preuve par récurrence; difficultés dans le changement de variable, en effet, l'utilisation d'une variable fictive dans l'étape d'hérédité (comme $n=k$) est source de certaines difficultés chez les apprenants qui sont habitués à utiliser et manipuler la variable n .

II. LA RÉCURRENCE DANS LES CURRICULA TUNISIENS

1. La récurrence dans le programme officiel de mathématiques

Le programme officiel (2008)³ évoque une typologie des raisonnements mathématiques (inductif, déductif, absurde, récurrence). Le raisonnement par récurrence est un objet d'enseignement mentionné dans ce programme pour les classes de 3^{ème} année secondaire, toutes sections confondues.

Contenu disciplinaire	Aptitudes à développer
• Suites numériques	Exploiter le principe de récurrence pour montrer qu'un réel est un majorant ou un minorant d'une suite ou pour étudier les variations d'une suite.
• Arithmétique • Principe de récurrence	Démontrer une propriété sur les entiers naturels en utilisant le principe de récurrence.

Tableau1 - Le raisonnement par récurrence dans le contenu disciplinaire, classe 3^{ème} année secondaire, section mathématiques

³ Programme fixé par la loi du 11 février 2008, modifiant et complétant la loi d'orientation du 23 juillet 2002, relative à l'éducation et à l'enseignement scolaire.

La récurrence est bien citée au sein des chapitres suites et arithmétique à voir avec les élèves de troisième année secondaire.

2. La récurrence dans le chapitre Arithmétique du manuel 3^{ème} année, section Mathématiques

Le contenu du chapitre Arithmétique du manuel⁴ de 3^{ème} année Mathématique accorde une place importante à l'aspect du raisonnement qui lui-même engendre l'aspect algorithmique (Soltani, 2019). Le raisonnement par récurrence occupe une place considérable dans le chapitre *Divisibilité dans IN* du manuel de la 3^{ème} année. Il est présenté explicitement dans un paragraphe intitulé "*Principe de récurrence*" comme suit :

Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à n_0 .

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- P_{n_0} est vraie,
 - si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie,
- alors P_n est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0 .

Figure 1 - Extrait du manuel scolaire "3^{ème} math tome II" page 128

Ce principe propose un raisonnement pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier naturel, est vraie à partir d'un certain rang, à l'aide de deux conditions à vérifier : *Initialisation* et *Hérédité* du raisonnement par récurrence.

La condition qui correspond à l'*Hérédité* n'est pas conforme aux règles sémantiques. D'une part, la variable n n'est pas introduit, d'autre part, l'implication « $P(n)$ implique $P(n+1)$ » devra être vraie.

Ce raisonnement est introduit comme un algorithme de preuve qui manque une certaine rigueur (Soltani, 2019).

III. INVESTIGATION EXPÉRIMENTALE

1. Observation d'une classe ordinaire.

Nous avons effectué une observation d'une classe ordinaire⁵ pendant une séance de cours. Cette séance concerne l'enseignement du raisonnement par récurrence qui a été introduite avec l'activité suivante :

Activité 3

On se propose de montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'entier $4^n + 2$ est divisible par 3
On note pour tout entier $n \geq 1$, P_n la propriété " $4^n + 2$ est divisible par 3".

1. Vérifier que P_1 est vraie.
2. a. Vérifier que $4^{n+1} + 2 = 4(4^n + 2) - 6$.
b. En déduire que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
3. Supposons qu'il existe des entiers naturels n pour lesquels P_n n'est pas vraie.
Soit q le plus petit de ces entiers.
a. Que peut-on dire de P_{q-1} ?
b. Conclure.

Figure 2 - Extrait du manuel scolaire "troisième maths tome II" page 128

⁴ Le chapitre 7 Divisibilité dans IN du manuel de 3^{ème} année, pages 126-143.

⁵ Classe 3^{ème} année section mathématiques constituent de 16 élèves d'âges entre 17-18ans.

Lors de la correction de cette activité, les élèves sont incapables de généraliser le concept de la récurrence qui est l'objectif de cette activité. Ils trouvent des difficultés pour formuler $P(n+1)$ à partir de $P(n)$.

La correction commence par l'Initialisation sans faire l'identification de la propriété $P(n)$. Dans l'*Hérédité*, le quantificateur universel et l'implication sont absents : il s'agit des pratiques habituelles dans le manuel scolaire.

Nous avons conclu que le raisonnement par récurrence est proposé comme un algorithme et un modèle de preuve. En effet, Le cours proposé lors de cette séance ne permet pas aux élèves de mettre en place le fonctionnement et la conduite du raisonnement par récurrence.

Par suite l'enseignement de ce raisonnement en arithmétique nécessite des connaissances antérieures essentiellement en lien avec l'ensemble des entiers naturels et l'utilisation de l'unique manuel officiel pour enseigner les raisonnements mathématiques est insuffisant. (Grenier, 2012 ; Gardez et Grenier, 2016).

2. Analyse des productions des groupes d'élèves

La deuxième partie de l'investigation expérimentale est déroulée avec la même classe de la 3^{ème} année Mathématique⁶ et avec la présence du même enseignant responsable du cours.

Nous avons préparé quatre situations mathématiques qui nécessitent le raisonnement par récurrence, nous avons fait travailler les élèves par groupes⁷. Le but de cette expérimentation est d'analyser les démarches mobilisées par les élèves pour conduire le raisonnement par récurrence dans chacune des productions des quatre situations.

Situation 1	Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $B(n) = 7^n - 2^n$ est divisible par 5.
Situation 2	Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $2^n \geq n$
Situation 3	Démontrer que : pour tout entier naturel n , l'entier $n(n+1)$ est pair.
Situation 4	Soit a un entier naturel, Démontrer que : $4a^3 - a$ est un multiple de 3.

Tableau 2 - Les quatre situations proposées aux élèves (Soltani, 2019)

Nous avons recueilli 16 copies des quatre groupes d'élèves. Chaque groupe a produit quatre réponses relatives aux quatre situations.

Pour mener l'analyse des résultats, nous avons commencé par identifier les éléments qui structurent ce raisonnement. Puis, nous avons effectué une description des différentes méthodes utilisées par les élèves dans chaque raisonnement, plus précisément nous avons décrit les manipulations algébriques dans l'ensemble des entiers naturels (factorisation, développement, calcul). Par ailleurs, nous avons identifié les erreurs sémantiques, syntaxiques et mixtes dans les preuves produites.

⁶ La classe contient 16 élèves d'âges entre 17-18ans.

⁷ Quatre groupes de 4 élèves chacun. Il est à noter que le travail a été fait en groupes sur une feuille distribué.

Nous avons choisi pour analyser les productions des groupes élèves les deux dimensions, syntaxique et sémantique, de la sémiotique de Charles W. Morris (Morris, 1938, cité dans Hottois, 1997) pour repérer les erreurs syntaxiques, sémantiques et mixtes. Dans ce repérage, nous tentons de faire apparaître les éléments structurant le raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité et conclusion) et de relever les outils algébriques utilisés par les élèves dans la production des réponses. Nous présentons dans la suite une analyse des productions suivant :

L'étape d'*initialisation* du raisonnement par récurrence est la plus maîtrisée par les élèves. Ce qui n'est pas le cas pour les deux autres étapes, l'*hérédité* et la *conclusion*.

D'une manière générale, dans les productions des quatre groupes d'élèves, ces deux étapes n'étaient pas suffisamment maîtrisées, formulées et justifiées. En effet, certaines productions montrent une incohérence dans les manipulations algébriques pour identifier la propriété $P(n)$ et pour exprimer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$. Ce qui nous a conduit à identifier différents types d'erreurs : sémantique, syntaxique et mixte.

Parmi les erreurs de type syntaxique : il y a une omission de l'implication et du quantificateur universel dans l'étape de l'*hérédité*. En plus, on trouve un mauvais usage de l'implication et du quantificateur à cette étape.

Dans certaines productions, nous avons remarqué que les écritures des symboles d'équivalence et du quantificateur universel ne justifient pas les démarches du raisonnement conduit. Il s'agit des erreurs de type sémantique.

Les erreurs mixtes sont repérées dans les étapes du raisonnement sans aucun lien logique lors de la justification de l'*hérédité*. Également, dans certaines productions, il y a une confusion entre les symboles des connecteurs logiques : \Leftrightarrow et \Rightarrow .

Nous illustrons ce propos par deux exemples extraits de nos travaux de recherche (Soltani, 2019). Il s'agit des productions de deux groupes d'élèves de la situation 1 et 3, que nous désignons par Groupe A et Groupe C.

Preuve produite par le Groupe A

L1	Pour $n=0$, on a $B(0)=0$ donc $B(0)$ vrai
L2	• on suppose que $B(n)=7^n-2^n$ est divisible par 5
L3	Jusqu'à l'ordre n .
L4	• on montre que $B(n+1)=7^{n+1}-2^{n+1}$ est divisible par 5
L5	En effet : $B(n+1)=7^{n+1}-2^{n+1}=7 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n$
L6	$=7(7^n-2^n) + 7 \cdot 2^n + 2(-2^n+7^n) - 2 \cdot 7^n$.
L7	$=B(n)(7+2) + 7 \cdot 2^n - 2 \cdot 7^n$.
L8	$=9B(n) + 7 \cdot 2(2^{n-1}-7^{n-1})$
L9	$=9B(n) - 14B(n-1)$
L10	$B(n-1)=7^{n-1}-2^{n-1}$.

Tableau 3 - Preuve de la situation produite par le Groupe A

Dans cette preuve, d'une part, la propriété $P(n)$ à démontrer n'est pas identifiée et d'autre part, l'initialisation n'est pas vérifiée. L'expression présentée dans L1 n'est pas explicitement vérifiée. L'étape de l'*hérédité* (L2-L5) n'est pas justifiée. En effet, l'implication est implicite, l'entier naturel n n'est pas introduit, la formulation de $B(n+1)$ à partir de $B(n)$ n'est pas justifiée, les manipulations algébriques (factorisation, division euclidienne et combinaison linéaire) qui

sont utilisées pour démontrer que "B(n+1) est divisible par 5" ne sont pas pertinentes. La conséquence de la récurrence est absente.

Preuve produite par le Groupe B

L1	$B(n)=7^n - 2^n / 5.$
L2	pour $n=0$
L3	$7^0 - 2^0=0$ divisible par 5
L4	vrai
L5	on suppose qu'elle est divisible par 5 et montrons qu'elle est
L6	vrai et on la démontré l'ordre de (n+1)
L7	$7^{n+1}-2^{n+1} = 7^n \cdot 7 - 2^n \cdot 2$
L8	$= 7 \cdot 7^n - 2^n \cdot (7-5)$
L9	$= (5+2) \cdot 7^n - 2^n \cdot 2$

Tableau 4 - Preuve de la situation produite par le Groupe B

Ce groupe ne prend pas en considération l'étape d'identification de la propriété P(n), l'étape d'initialisation est mal vérifiée. En effet, les expressions de cette étape au niveau de L1, L2 et L3 portent des erreurs mixtes et leur sens est perdu. L'étape d'hérédité est exprimée de la ligne L5 jusqu'à L6 par : "*on suppose qu'elle est divisible par 5 et montrons qu'elle est vrai et on la démontré l'ordre de (n+1)*" qui présentent des erreurs mixtes vu l'absence de l'introduction de la variable n, les propriétés P(n) et P(n+1) ne sont pas présentés, et l'omission du connecteur logique « *implique* ». La conséquence de la récurrence est absente.

L'analyse des productions des groupes d'élèves nous a permis d'identifier des difficultés pour développer et pour appliquer le raisonnement par récurrence. Ces difficultés sont des indicateurs d'obstacles chez certains élèves dans la maîtrise et l'usage de ce raisonnement en Arithmétique. Elles sont principalement liées aux maniements des éléments de logique (l'implication, les quantificateurs) et aux propriétés de la divisibilité dans IN.

CONCLUSION

L'analyse épistémologique et didactique a montré que l'arithmétique favorise l'apprentissage des raisonnements mathématiques et confirme la complexité de son enseignement.

L'étude des curricula a montré que le raisonnement par récurrence est présenté explicitement et de façon superficielle comme objet d'enseignement. Ce raisonnement est introduit en arithmétique comme outil de preuve pour démontrer une propriété qui dépend d'un entier naturel n . Cette introduction engendre des lacunes et des difficultés chez les enseignants et les élèves. L'analyse des productions des groupes d'élèves a montré que la maîtrise de l'outil algébrique est généralement acceptable à la différence de l'appropriation du raisonnement par récurrence qui présente certaines difficultés. La vérification de l'*hérédité* dans le raisonnement par récurrence exige une performance syntaxique en logique (implication et quantificateur) et pour les opérations algébriques (développement, factorisation, division euclidienne). Cette performance se trouve lacunaire dans la plupart des productions des élèves (Battie, 2003).

Ces difficultés rencontrées par les élèves sont parfois liées à l'insuffisance des connaissances logiques (Chellougui, 2009 ; Grenier, 2012 et Mesnil, 2014) et au manque de maîtrise des propriétés de l'ensemble des entiers naturels IN. Les résultats d'analyse ont mis en évidence la complexité d'un enseignement-apprentissage du raisonnement par récurrence en arithmétique.

REFERENCES

- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de l'université Paris 7.
- Chellougui, F. (2003). L'utilisation des quantificateurs dans l'enseignement secondaire tunisien. *L'Ouvert*, 108, 25-33.
- Chellougui, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en didactique des mathématiques (RDM)*, 29(2), 123-154. La Pensée Sauvage Editions.
- Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Lyon 1.
- Dorgan, H. (2016). Mathematical Induction : deductive logic perspective. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 4(3), 315-330.
- Fabert, C., & Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x*, 87, 31-52. IREM de Grenoble.
- Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2016). État des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x*, 100, 67-98.
- Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, 88, 27-47. IREM de Grenoble.
- Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation.
- Hottois, G. (1997). *De la renaissance à la post-modernité*. Bruxelles : De Boeck Université.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire*. Thèse, de l'université de Montréal.
- Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.
- Morris, C.W. (1938). *Foundations of the theory of signs*. Chicago : Chicago University Press, cité in Hottois G. (1997), *De la renaissance à la post-modernité*. Bruxelles : De Boeck Université.
- Poincaré, H. (1902). *La science et l'hypothèse*. Flammarion, Paris.
- Raval, L. (2002) Arithmétique en terminale S spécialité Maths : Quel(s) enseignement(s) ? *Repères-IREM*, 46, 93-116. Topiques (éd).
- Sierpinska, A. (2005). Quelques réflexions sur la valeur des raisonnements mathématiques dans la formation de futurs citoyens et professionnels. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2005*, Conférence de clôture, 197-216.
- Soltani, W. (2019). *Une approche didactique des deux raisonnements par récurrence et par disjonction des cas en arithmétique en 3^{ème} année secondaire section Mathématiques*. Mémoire de master de didactique des mathématiques. ISEFC, Université Virtuelle de Tunis.
- Vidal, R. (2005). *Étude historique et critique de méthodes de démonstration en arithmétique, à paraître*. Thèse de doctorat de philosophie, Université Jean Moulin, Lyon III.

Curriculum et réformes en Tunisie

Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Mathématiques. (2008), République Tunisienne Ministère de l'éducation et de la formation, Direction de la Pédagogie et des Normes du cycle préparatoire et de l'enseignement secondaire.

Manuel des Mathématiques, 3^{ème} année de l'Enseignement Secondaire Section Mathématiques
- Tome II, (2007).Smida. H, Ghedamsi.I, Hammam.A et al. République Tunisienne Ministère
de l'Education, Centre National Pédagogique.

UNE REFLEXION SUR L'IA DANS L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Najoua HAJ ALI* - Wided GUEZGUEZ**

Résumé – L'intelligence artificielle n'arrête pas de montrer chaque jour de nouvelles avancées dans différents domaines. Ce papier traite l'utilisation de l'intelligence artificielle (IA) en éducation. Nous nous sommes intéressés dans la première partie de notre étude aux différentes applications de l'IA dans l'enseignement dans l'objectif d'améliorer les résultats et motiver les apprenants. Dans la deuxième partie du papier nous avons présenté l'expérience menée avec un modèle de l'intelligence artificielle générative (ChatGPT) pour la préparation de situations mathématiques destinées à des étudiants de 1^{ère} année universitaire. Les résultats permettent d'avancer que l'utilisation de l'intelligence artificielle peut renforcer l'apprentissage et aider les enseignants à mieux suivre et engager leurs étudiants.

Mots-clefs : Intelligence artificielle, Enseignement supérieur, Mathématique, ChatGPT.

Abstract – This paper examines the use of Artificial Intelligence (AI) in education to assist teachers to produce effectively pedagogical content. More precisely, we focus on generative AI as an innovative tool for creation of personal content. We discuss first benefits of artificial intelligence in education and how different models and techniques can be applied in education to enhance learning and motivate students. Then, we detail how ChatGPT (an AI model) can be used to design pedagogical situation to support teachers.

Keywords: Generative Artificial Intelligence, Learning, High Education, ChatGPT.

INTRODUCTION

Les progrès technologiques et en particulier l'intelligence artificielle (IA) a un impact majeur sur notre vie actuelle. L'IA est en plein essor, elle facilite de plus en plus plusieurs tâches que faisaient l'être humain. Plusieurs manifestations scientifiques ont consacré un ou des axes de travail sur l'IA. A titre d'exemple, le village Universitaire Africain (ITAUN)¹, le rendez-vous annuel des experts africains du numérique, des universitaires, des professionnels qui opèrent dans le domaine des TICs a consacré 5 journées de formation et conférences en ligne du 5 au 9 décembre 2022 intitulées « Semaine de l'IA en Afrique ». Plusieurs enregistrements sont mis en ligne².

Plusieurs domaines utilisent l'IA, à titre d'exemple, dans le domaine de l'agriculture (avec les capteurs qui récoltent des informations sur le bétail). Ces informations permettent de prendre des décisions sur comment agir pour avoir une meilleure production dans de meilleures conditions. Dans le domaine de la finance ; par exemple, la bourse utilise l'IA pour prédire les transactions gagnantes. Des résultats extraordinaires de l'utilisation de l'IA dans le domaine médical ont fait leurs preuves dans la prédiction des maladies, l'analyse des images médicales et les tests des vaccins, etc.

L'IA est née chez les philosophes et s'est développée avec les mathématiques. « Si les philosophes sont à l'origine de certaines idées fondamentales pour l'IA, la transformation de cette dernière en une véritable science a exigé l'introduction d'une dose de formalisation mathématique dans trois domaines fondamentaux : la logique, le calcul et les probabilités » (OCDE, 2022, p. 8).

* Université de Tunis ESSECT (LR11ES02 – LARIME) – Tunisie - NAJOUA.HAJALI@essect.u-tunis.tn

** Université de Tunis ESSECT (LARODEC) – Tunisie – widedguezguez@gmail.com

¹ Pour plus de précisions consulter ce lien <https://www.itaun.org/itaun/>

² Voici le lien <https://facebook.com/africanuniversitynetwork/videos/>

Dans la littérature, différentes définitions de l'IA ont été proposées. Historiquement, ces définitions ont été associées à quatre approches : (1) l'IA est un ensemble de systèmes qui pensent comme les humains, (2) l'IA est un ensemble de systèmes qui pensent rationnellement, (3) l'IA est un ensemble de systèmes qui agissent comme les humains et (4) l'IA est un ensemble de systèmes qui agissent rationnellement. (Russel et Norvig, 2010)

Dans ce papier, nous sommes intéressées par l'application de l'IA dans l'éducation. Nous nous focalisons sur la réponse aux questions suivantes : Est-ce que l'IA peut améliorer l'apprentissage des apprenants ? Si oui comment ? Est-ce que l'IA peut s'occuper de certaines tâches de l'enseignant ? Si oui lesquels ? Parallèlement, qu'en dit la didactique ? Est-ce qu'elle s'est emparée de la question de l'enseignement de l'IA et de l'utilisation de l'IA dans l'enseignement ? Est-ce qu'on peut intégrer l'IA dans la conception de situations d'apprentissage et si oui est-ce qu'elle favorise l'apprentissage ou non ? Si oui comment et si non pourquoi ?

Dans la première partie de notre papier, nous nous proposons d'exposer quelques applications de l'IA dans l'enseignement ainsi qu'un aperçu général sur l'intelligence artificielle générative. Dans la deuxième partie, une proposition d'utilisation de ChatGPT comme ressource externe de conception d'une situation d'apprentissage en math est détaillée. Cette situation est dédiée à des étudiants en 1^{ère} année université.

I. QUELQUES APPLICATIONS DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE DANS L'ENSEIGNEMENT

Dans cette partie, nous nous proposons de présenter quelques applications de l'IA en général et puis d'examiner de plus près le fonctionnement de l'IA générative et de son éventuel apport pour l'apprentissage.

1. *Intelligence artificielle et éducation*

Depuis son apparition, avec les travaux d'Alain Turing en 1950, l'intelligence artificielle a transformé la façon avec laquelle on travaille et on communique. L'IA ne cesse d'affecter tous les secteurs de notre vie (médecine, éducation, divertissement, etc).

La recherche dans le domaine de l'intelligence artificielle appliquée à l'éducation est en croissance significative. Plusieurs travaux de recherche explorent les applications offertes de l'IA pour améliorer toutes les phases du processus d'apprentissage (Chassignol, 2018). Mollick et Mollick (2022) estiment que l'IA peut surmonter trois obstacles pour favoriser l'apprentissage ; à savoir améliorer le transfert du savoir, confronter l'apprenant à prendre conscience de ce qu'il a appris et ce qu'il n'a pas appris (pas d'illusions) et former l'apprenant à évaluer de manière critique des énoncés, des justifications des corrections d'exercices. En 1991 durant la VI^{ème} école d'été de didactique des mathématiques et à l'occasion des XIII^{ème} journées francophones sur l'informatique, Balacheff a soulevé la question « didactique et intelligence artificielle » (Balacheff, 1994).

L'intelligence artificielle évolue par l'expérience : à mesure qu'elle accumule des connaissances, ses capacités s'affinent et elle parvient à résoudre des problèmes complexes, tout comme l'esprit humain. Cependant, l'IA bénéficie d'avantages en termes de rapidité, d'efficacité et de traçabilité par rapport à l'humain. Divers outils d'IA sont dédiés à l'amélioration même du processus d'apprentissage. Plusieurs études et articles ont mis en avant les succès des tuteurs intelligents, des systèmes éducatifs en ligne intégrant l'IA (Almasri, 2019).

Chaque apprenant a ses propres compétences. Pour être plus performant en termes d'évaluation et de consolidation, l'IA peut aider à adapter les exercices et les évaluations selon le niveau de l'apprenant et son historique. De même les hints et le feed-backs au niveau des évaluations peuvent être plus précis en se basant sur les algorithmes de l'IA. En plus l'IA peut générer des exercices adaptés à chaque profil d'apprenant. L'analyse des notes attribuées est beaucoup plus facile et performante avec cette technique qui peut fournir des prédictions et des statistiques détaillées par objectif d'apprentissage (Minn, 2022).

Chaque apprenant apprend d'une façon différente selon ses conceptions, son style d'apprentissage (Raleiras, Nabizadeh, & Costa, 2022) et ses prérequis. Le fait de présenter le même curriculum à tous les apprenants ne prend pas en considération cette particularité humaine. Plusieurs travaux concernant un apprentissage personnalisé offrant un chemin particulier pour chaque apprenant ont été publiés. Ces travaux présentent des modèles basés sur l'IA pour un apprentissage adaptatif. Chaque apprenant a son propre style d'apprentissage, l'apprentissage automatique (Machine Learning) la branche la plus connue en IA a fait ses preuves pour la classification des apprenants ou la composition de clusters des apprenants. Mais les systèmes existants ne sont pas bien adaptés aux changements continus d'où la nécessité d'adopter un modèle d'apprentissage incrémental (dynamique) qui a pour objectif de permettre au modèle d'apprentissage de s'adapter à de nouvelles données sans oublier ses connaissances existantes sans refaire le modèle mais en faisant une mise à jour du modèle construit (Munir, Vogel et Jacobsson, 2022).

L'enseignant passe une bonne partie de son temps à effectuer des tâches dont l'IA peut s'en occuper ce qui va lui permettre d'utiliser ce temps à mieux interagir avec les apprenants et renforcer leurs compétences. Des outils de l'IA peuvent être utilisés pour l'analyse des commentaires écrits par les apprenants et la détections de sentiments concernant le cours présenté. De même, l'IA peut être utilisée pour un filtrage de candidats et l'admission des apprenants en se basant sur la prédiction de performance. Les techniques de l'apprentissage automatique (Machine Learning) permettent une analyse d'images et de voix des apprenants qui peut aider les décideurs à prédire ceux qui sont abondants et qui risquent de ne pas terminer leurs cursus (Shaik et al., 2022).

Selon les théories de l'apprentissage, l'apprenant apprend par l'erreur (Astolph, 1992, Balacheff, 1995 et Fabre, 2019). Ce concept peut être modélisé en IA par l'apprentissage par renforcement qui se base sur l'affectation de récompenses (positives ou négatives) à une action particulière étant donné un état. En littérature, plusieurs travaux ont été proposés : dans un système d'apprentissage intelligent basé sur l'apprentissage par renforcement (Reinforcement Learning), un curriculum personnalisé est proposé à l'apprenant pour lui garantir une meilleure expérience d'apprentissage (Erickson et al., 2020). L'apprentissage par renforcement est utilisé pour la génération automatique de tests et des indices de réponses pour une évaluation selon l'historique de l'apprenant. etc. La contrainte majeure de l'application de ces algorithmes c'est qu'ils nécessitent un nombre important d'expériences pour converger et donner de bon résultats, chose non évidente en éducation. Malgré cette contrainte de convergence, les applications de l'apprentissage par renforcement en éducation restent un domaine de recherche d'actualité qui vise à rendre les systèmes d'apprentissage plus intelligents (Singla et al., 2021)

En apprentissage classique, le tuteur est amené à prendre plusieurs décisions selon des situations données. Les systèmes intelligents pour l'éducation peuvent être équipés par les différents algorithmes de prise de décision en IA.

2. Intelligence artificielle générative et particulièrement ChatGPT

L'intelligence artificielle générative (une branche de l'IA) est un sujet d'actualité depuis décembre 2022 après le lancement de ChatGPT (Chat-based Generative Pre-trained Transformer). ChatGPT est un modèle de l'IA développé par Open AI pour la création de contenu selon des requêtes de l'utilisateur. L'IA générative a comme objectif de développer des modèles et des algorithmes pour la création de contenu de différents types tel que du texte, des images et des vidéos, etc.

Récemment, plusieurs travaux développent l'utilisation de l'IA générative pour l'enseignement (Cooper, 2023). Plus particulièrement, cette branche de l'IA permet le développement de modèles pour la création de contenus pédagogiques personnalisés qui favorisent l'engagement et la motivation des étudiants. De même, ces outils peuvent aider les enseignants pour la production de ressources pédagogiques (cas de notre étude), pour l'analyse des résultats des étudiants et pour leur assistance, etc.

Ce bot a des capacités particulières à répondre à plusieurs questions dans différents domaines. Ce bot est un tuteur disponible 24/24 et 7/7 pour supporter les étudiants et répondre à leurs requêtes. Par exemple, ChatGPT est utilisé pour aider les apprenants en informatique en programmation (Qureshi, 2023). Il sert à expliquer et générer des extraits de code, fournir les ressources nécessaires pour un langage de programmation, diagnostiquer et résoudre des problèmes techniques, prédire, assister et expliquer des bugs, etc.

ChatGPT 3 évolue dans le temps, il apprend de mieux en mieux. Pendant l'élaboration de la situation de classe le concepteur de la situation de classe est appelé à voir à ce moment-là si ChatGPT est expert dans le domaine sur lequel il va le questionner ou non et préparer sa situation en fonction de l'expertise du moment de ChatGPT dans le domaine.

ChatGPT a donné naissance à de nouveaux modes d'apprentissage. L'utilisation de ChatGPT comme ressource externe impose un changement dans la conception des scénarios pédagogiques. En 2015, en examinant quelques définitions du concept compétence Basque (2015) a décelé quelques constantes. Une compétence se définit dans l'action ; c'est un savoir-agir contextualisé (à travers des situations) qui requiert la mobilisation de ressources (internes et externes) et qui se manifeste dans une performance (compétence dans une situation donnée). Pour Masciotra, Jonnaert et Daviau (cités dans Joannert et al., 2005), la compétence est « l'intelligence des situations » (Basque, 2015). Ainsi, pour atteindre une compétence visée tout le travail est dans l'élaboration de la famille de situations à laquelle fait appel cette compétence et la délimitation des ressources internes et externes nécessaires pour la réalisation de l'ensemble des tâches auxquelles fait appel chaque situation.

Nous nous proposons d'examiner l'intégration de ChatGPT dans la conception d'une situation de classe.

II. CHATGPT POUR LA CONCEPTION DE SITUATIONS EN MATH

Nous nous proposons dans cette partie, de délimiter les exigences de la conception d'une situation de classe intégrant une IA générative en particulier ChatGPT, de déterminer les objectifs de la situation, énoncer le contenu de l'exercice de la situation, et enfin communiquer une analyse de la situation.

1. Conception d'une situation

Avant d'entamer la conception d'une situation d'enseignement de mathématiques et d'inviter les apprenants à réaliser différentes tâches en utilisant comme ressource externe ChatGPT, nous avons commencé par nous familiariser avec ChatGPT et le prétester. Nous avons relevé des points très importants ; ChatGPT n'est pas expert en mathématique, il peut fournir des inexactitudes. Par ailleurs, ChatGPT est universel donc dans la conception de la situation, la gestion du contrat didactique est requise.

Notre objectif est de montrer comment un enseignant peut utiliser l'IA (en particulier ChatGPT) pour concevoir une situation de classe qui favorise l'apprentissage.

Nous avons sélectionné un concept spécifique, la diagonalisation des matrices carrées, relevant du programme de première année universitaire. Dans la création de notre exercice, nous avons commencé par interroger ChatGPT sur son expertise en algèbre linéaire. Sa réponse indiquant qu'il n'était pas un expert dans ce domaine, nous avons pris en compte la possibilité d'inexactitudes dans ses réponses. De plus, chaque enseignant établit un contrat didactique propre, ce qui implique que les informations fournies par ChatGPT pourraient présenter des aspects manquants et des aspects superflus par rapport au contrat didactique.

Par ailleurs, une question nous a préoccupée ; l'écriture d'une matrice nécessite une écriture mathématique spécifique, comment écrire à ChatGPT une matrice ? Les écritures les plus courantes utilisées sont le « Latex » et « insérer une équation dans Word » est ce qu'il connaît le Latex ? Est-ce qu'il comprend l'écriture équation de Word ? Et, lorsqu'on a posé la question à ChatGPT on a réalisé qu'il comprend aussi bien le Latex qu'une équation Word insérée avec un collage brut dans l'invite de ChatGPT d'une formule copiée de Word.

On propose aux apprenants, qui ont déjà des connaissances fondamentales sur la question à traiter, un exercice à réaliser à la maison et on prévoit une séance de consolidation en classe.

On a choisi une matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui admet 3 valeurs propres

distinctes et comme elle est d'ordre 3 donc elle est diagonalisable. On a calculé à la main le polynôme caractéristique et ses racines qui sont les valeurs propres. Méthode habituelle pour les apprenants dans des conditions ordinaires (sans l'intervention de ChatGPT). Par la suite, nous avons sollicité la réponse de ChatGPT à la question suivante. : La matrice

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

La réponse de ChatGPT comporte à la fois des éléments corrects, des imprécisions, des omissions et des éléments superflus. En conséquence, nous avons élaboré un scénario composé de deux étapes distinctes : une première phase impliquant la réalisation d'un exercice à domicile, suivie d'une seconde phase de consolidation lors d'une séance dédiée. Dans la suite, nous détaillons les objectifs de cette approche, la conception de l'exercice et de la séance de consolidation, et nous présentons l'énoncé de l'exercice.

2. Objectifs de la situation

- Apprendre à montrer si une réponse est exacte sans avoir à la trouver,
- Permettre aux apprenants d'observer la nécessité ou la non nécessité de présence de certaines étapes de la solution d'une activité (ici donnée par ChatGPT),
- Habituer les apprenants au contrôle de la validité de leurs réponses,

- Apprendre à l'apprenant à retrouver une erreur, à justifier que c'est une erreur et à la corriger,
- Former les apprenants à critiquer et évaluer les explications.

3. *Enoncé de l'exercice*

Dans cet exercice nous voulons apprendre à justifier qu'une matrice est diagonalisable ou non. Pour ce faire nous nous sommes fait aider par ChatGPT. On lui a écrit l'invite : La

matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ? Voici ci-après ce qu'il a répondu :



La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?



Oui, la matrice



$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

est diagonalisable.

Pour le prouver, nous devons vérifier si elle possède trois vecteurs propres linéairement indépendants. Pour ce faire, nous devons calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A :

- En calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$, où I est la matrice identité et λ est une constante inconnue, nous obtenons l'équation caractéristique suivante :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0$$

- Nous pouvons utiliser des méthodes algébriques pour résoudre cette équation et obtenir trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, et $\lambda_3 = 5$.
- Pour chaque valeur propre, nous devons trouver les vecteurs propres correspondants en résolvant le système d'équations linéaires $(A - \lambda)x = 0$. Après avoir résolu ces systèmes d'équations, nous obtenons les vecteurs propres suivants :
 - Pour $\lambda_1 = -1$, nous avons le vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 - Pour $\lambda_2 = 1$, nous avons le vecteur propre $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - Pour $\lambda_3 = 5$, nous avons le vecteur propre $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme nous avons trouvé trois vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice A est diagonalisable. En effet, si on place ces vecteurs propres dans une matrice P, on peut obtenir une matrice diagonale D avec les valeurs propres correspondantes sur la diagonale, telle que $A = PDP^{-1}$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice P.

Figure 1 - Détails de la situation pour ChatGPT

1. Sans calculer le polynôme caractéristique vérifier si les valeurs propres générées par ChatGPT sont toutes exactes. Justifier.
2. Relever la (ou les) valeur(s) propre(s) inexacte(s).
3. Relever la (ou les) valeur(s) propre(s) exacte(s).
4. Relever un aspect manquant.
5. Relever un aspect superflu.
6. Ecrire la solution de l'exercice à votre manière.

4. Analyse et discussions

La conception de l'exercice repose sur quatre facteurs : réponse inexacte, réponse juste, aspect manquant et aspect superflu.

a) Réponse inexacte

En examinant la réponse détaillée de ChatGPT (dans les deux premiers modes), on relève des inexactitudes. Première inexactitude à laquelle on est confronté les valeurs propres ne sont pas toutes exactes. Notre question est comment l'apprenant peut s'en rendre compte ? D'où la nécessité d'introduire une nouvelle question dans l'énoncé de l'exercice : « Sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres générées par ChatGPT sont-elles toutes exactes ? Justifier. » Plusieurs scénarios sont possibles. (1) A cette question l'apprenant va chercher comment répondre à la question si une valeur propre est exacte ou non.

(2) Ou bien il va dire que la valeur propre fournie par ChatGPT doit annuler le polynôme caractéristique donc l'apprenant est amené à montrer qu'un déterminant est nul

(3) ou bien il va utiliser le fait que si une matrice est diagonalisable alors cette matrice et la matrice diagonale qui lui est semblable ont même déterminant et il trouve que ce n'est pas le cas alors il y a une inexactitude dans les valeurs propres.

Ces différents scénarios vont être discutés pendant la séance de consolidation. Cette question va amener les apprenants à travailler sur plusieurs concepts du cours. On peut rajouter la question : « Parmi les valeurs propres données par ChatGPT lesquelles sont exactes et lesquelles ne le sont pas ? L'apprenant va conclure que 1 est une valeur propre exacte alors que -1 et 5 ne le sont pas.

b) Réponse juste

L'apprenant démontre la justesse de la valeur propre (1) en montrant qu'elle annule le polynôme caractéristique.

c) Aspect manquant

ChatGPT n'a pas développé le polynôme caractéristique.

d) Aspect superflu

Le calcul des vecteurs propres est superflu pour montrer qu'une matrice est diagonalisable (c'est lié avec le contrat didactique) car la matrice admet trois valeurs propres distinctes et dans la question ce n'est pas demandé de diagonaliser la matrice.

Précisons que dans l'analyse ci-haut nous n'avons pas donné toutes les réponses possibles. Nous nous sommes limités à un exemple de réponse pour chaque question et l'analyse des productions des apprenants va participer à la mise en place de la séance de consolidation qui suit.

La séance de consolidation comprend les actions suivantes :

- Récapituler tous les points soulevés.
- Discuter les différentes méthodes possibles des justifications des réponses justes et institutionnaliser la meilleure.
- Discuter les différentes méthodes possibles de justifier une inexactitude.
- Discuter pourquoi les aspects superflus le sont.
- Discuter pourquoi les aspects manquants le sont.

CONCLUSION

Avant d'intégrer ChatGPT dans le processus d'apprentissage, l'enseignant et l'apprenant doivent comprendre les capacités de l'outil. Dans l'objectif d'explorer les réponses fournies par GPT et comment les utiliser pour favoriser l'apprentissage, nous avons posé une série de questions à ChatGPT. L'interface de chatGPT accepte les formules mathématiques écrites en LaTeX ainsi que les collages bruts de formules copiées depuis Word.

Lorsque l'apprenant utilise ChatGPT comme ressource externe, cela nécessite souvent une mobilisation de connaissances plus étendue sur le sujet à résoudre que de connaissances nécessaires pour simplement répondre à la question posée.

Reprenons l'exemple et ajoutons la question suivante : Est-il nécessaire de chercher

Trouver une inexactitude n'est pas seulement la pointer et espérer qu'elle ne devra plus être commise mais aussi encourager les apprenants à la réflexion et la démarche méta. Car, pour trouver l'erreur il faut une certaine distanciation par rapport à la méthode qui permet de trouver les valeurs propres (calculer le polynôme caractéristique et trouver ses racines).

On laisse les apprenants seuls trouver l'erreur et justifier qu'il y a une erreur. Ainsi, ChatGPT prends le rôle de l'apprenant et l'apprenant prend le rôle de l'enseignant ce qui favorise son

apprentissage. Il y a plusieurs manières de faire, on peut lancer une discussion en classe pour récolter toutes les méthodes possibles et on choisit la meilleur (plus simple, plus courte et nécessite moins de calcul et moins de temps).

Cet exemple nous montre qu'avec l'avenue de ChatGPT nous pouvons concevoir de nouvelles situations qui favorisent l'apprentissage.

Par ailleurs, très souvent les apprenants manquent de pratique ce qui les met en défaut devant la compréhension d'un concept ce qui induit leur incapacité à transférer leurs connaissances dans un autre contexte. Du fait que l'IA générative est capable de générer beaucoup d'exemples donc elle est peu coûteuse. Elle permet à l'apprenant de s'exercer sur beaucoup d'exemples donc elle va aider l'apprenant à comprendre le concept plus en profondeur. Ainsi elle va favoriser le transfert de connaissances. D'autres scénarios de situations d'apprentissage sont possibles. Ces scénarios dépendent du degré d'expertise de ChatGPT ou d'une autre IA générative dans le domaine questionné et du niveau d'apprentissage atteint.

En conclusion, ce travail nous a mené à poser la question suivante : comment penser la formation des enseignants avec les avancées spectaculaires de l'IA générative et ses modèles de création de contenu assez précis comme ChatGPT ?

REFERENCES

- Almasri, A. (2019). Intelligent Tutoring Systems Survey for the Period 2000- 2018. *International Journal of Academic Engineering Research (IJAER)*, 3(5), 21-37.
- Astolphi, J. (1992). Apprendre par franchissement d'obstacles? (s. l. Problématique des cycles et recherche, Éd.) *Repères. Recherches en didactique du français langue maternelle*(5), 103-116. doi:<https://doi.org/10.3406/reper.1992.2052>
- Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), pp. 9-42. Consulté en Janvier 2023, 27, sur <https://revue-rdm.com/1994/didactique-et-intelligence256/>
- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. Dans IMAG (Éd.), *Seminaire de l'équipe DidaTech* (pp. 219-244). France: Hal 01072247. Consulté en Janvier 30, 2023, sur <https://hal.science/hal-01072247>
- Basque, J. (2015). *Le concept de compétences : Quelques définitions*. (P. d. Québec, Éd.) Consulté le Décembre 07, 2021, sur MAPES (Modélisation de l'approche-programme en enseignement supérieur), Réseau de l'Université du Québec: <http://pedagogie.quebec.ca>
- Chassignol, M. (2018). Artificial Intelligence trends in education: a narrative overview. *Procedia Computer Science*, 136, 16–24.
- Cooper, G. (2023). Examining Science Education in ChatGPT: An Exploratory Study of Generative Artificial Intelligence. *Journal of Science Education and Technology*, 444-452.
- Erickson, J-A., Botelho, A-F., McAteer, S., Varatharaj, A., & Heffernan, N-T. (2020). The Automated Grading of Student Open Responses in Mathematics. *ACM*, 615–624.
- QueFabre, D. (2019). Décontaminer l'erreur de la faute dans l'apprentissage. Dans D. Fabre, *Transformer la violence des élèves. Cerveau, motivations et apprentissage* (pp. 195-217). DUNOD. Consulté le Janvier 30, 2023, sur <https://www.cairn.info/transformer-la-violence-des-eleves--9782100801152-page-195.htm>
- Qureshi, B. (2023). Exploring the use of chatgpt as a tool for learning and assessment in undergraduate computer science curriculum: Opportunities and challenges. *arXiv preprint arXiv*, 2304.11214.

- Minn, S. (2022). AI-assisted knowledge assessment techniques for adaptive learning environments. *Computers and Education: Artificial Intelligence*.
- Mollick, E-R., & Mollick, L. (2022, Décembre 23). New Modes of Learning Enabled by AI Chatbots: Three Methods and Assignements. *SSRN*, 21. doi:<https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4300783>
- Munir, H., Vogel, B., & Jacobsson, A. (2022, Avril 17). Artificiel Intelligence and Machine Learning Approaches in Digital Education : A Systematic Revision. *Information*, 13(4), 203. doi:<https://doi.org/10.3390/info13040203>
- OCDE. (2022). *Perspectives de l'OCDE sur l'éducation numarique 2021: Repousser les frontières avec l'IA, le Blochcain et les robots*. Paris: Editions OCDE. doi:<https://doi.org/10.1787/d5fe6bd0-fr>
- Raleiras, M., Nabizadeh, AH., & Costa, FA. (2022). Automatic learning styles prediction: a survey of the State-of-the-Art (2006–2021). *Journal of Computers in Education*, 9(4), 587–679.
- Russel, S., & Norvig, P. (2010). *Intelligence artificielle*. Paris: Pearson. Consulté en Janvier 30, 2023, sur <https://books.google.tn/books?id=DWTIFWSGxJMC&printsec=frontcover&hl=fr#v=onepage&q&f=false>
- Shaik, T., Tao, X., Li, Y., Dann, C., Mcdonald, J., Redmond, P., & Galligan, P. (2022). A Review of the Trends and Challenges in Adopting Natural Language Processing Methods for Education Feedback Analysis. *IEEE Access*.
- Singla, A., Rafferty A-N., Radanovic G., & Heffernan, N-T. (2021). Reinforcement Learning for Education: Opportunities and Challenges. *arXiv preprint*.

METAPHORE ET SOUSTRACTION

Imed MAHNANE*

Résumé - L'objectif de cet article est de montrer que la soustraction par emprunt dans le système décimal de position relève du mécanisme de métaphorisation. Nous n'allons pas nous limiter à illustrer la vision cognitive de ce système telle que présentée dans (Lakoff et Nunez, 2000), mais nous tendons à en générer une approche sémantico-cognitive en se basant sur l'étude de la nature métaphorisante de l'emprunt dans la soustraction, une nature qui découle de la métaphoricité du système décimal. Il est vrai que la vision présentée dans *Where Mathematics Comes From* n'accorde à l'enseignement des mathématiques que très peu d'intérêt et déclare dès le début que la question didactique est subsidiaire, Lakoff et Nunez cependant, recommandent aux enseignants et didacticiens des mathématiques de mettre en valeur les métaphores conceptuelles des mathématiques ancrées dans l'expérience physique et dans la vie quotidienne. Dans ce travail nous proposons trois techniques de soustraction sans recours à l'emprunt afin de montrer que l'emprunt relève de la nature métaphorique du système décimal positionnel et non de la soustraction en tant qu'algorithme de l'arithmétique.

Mots-clefs : Métaphore, soustraction, emprunt et démétaphorisation.

INTRODUCTION

La métaphore du discours littéraire est vaniteuse et jalouse, celle des mathématiques est discrète et timide. Un tel énoncé ne fournit aucune donnée concernant le rapport qui relie mathématiques et expression en langue naturelle, bien qu'il sous-entende que la métaphore n'a ni la même identité ni le même statut dans deux champs qui, aux yeux du sens commun, ne partagent que très peu de traits. Cependant, ce discours sur la métaphore part d'une vision qui présuppose la présence d'une certaine métaphoricité dans le mode d'expression formel des mathématiques (Konstantin, 2022), et même dans le mode de raisonnement mathématique comme le montre l'approche cognitive de la métaphore. Certes, la métaphore a constitué pour certains épistémologues (Bachelard, 1934) et didacticiens des mathématiques (Akrouti, 2022), un centre d'intérêt quant à sa classification parmi les obstacles de la pensée scientifique et de l'apprentissage des mathématiques ; une classification qui remonte à la philosophie platonicienne réduisant la métaphore à la sphère de l'expression esthétique/rhétorique qui transgresse la rigueur du discours scientifique. Et si l'on repense cette relation sous la lumière des études cognitives (Lakoff et Johnson, 1980), nous constatons que le rattachement exclusif de la métaphore au langage naturel est bel et bien à l'origine de cette classification qui a paradoxalement entravé toute investigation épistémologique et didactique de la métaphore.

D'après l'intitulé de notre article il y a lieu de citer l'existence d'un certain rapport entre métaphore et soustraction par emprunt. Ceci revient à mettre en question, non seulement la métaphore, mais aussi la soustraction en tant qu'opération traditionnelle de l'arithmétique. L'enjeu principal de cet article est, par conséquent, de démontrer l'existence de ce rapport et de lui fournir des représentations formelles qui le vérifient. En effet, la soustraction que nous entendons ici est celle qui est dite « soustraction par emprunt », opération qui consiste à retrancher une valeur située en bas d'une autre valeur située en haut et qui lui est inférieure. L'exemple suivant le montre :

* Institut Supérieur des Langues Appliquées et d'Informatique de Beja, Université de Jendouba – Tunisie - Thematranslation@gmail.com

$$\begin{array}{r}
 9 \quad ^1 5 \\
 - \\
 5 \quad 8 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

Parmi les arguments soutenant notre approche, nous mettons en avant :

- 1- L'emprunt d'une unité (ayant la valeur des dizaines) satisfait la définition aristotélicienne de la métaphore via le concept de « transport ».
- 2- Le langage arithmétique arabe rejoint la rhétorique par l'usage du terme « Isti ġara ». (Ibn Albanaa, 1985)

I. LE CONCEPT DE MÉTAPHORE DANS LA THÉORIE COGNITIVISTE

En se référant à des recherches neurologiques, (Mandler et Shebo, 1982 ; Butterworth, 1999; Dahaen, 1997), Lakoff et Nunez postulent que les mathématiques ne sont que la création de la raison humaine. Les humains naissent avec des capacités constituant l'arithmétique de base telles que :

- la subitisation, capacité permettant d'appréhender spontanément et sans comptage le nombre des éléments d'un ensemble de faible extension,
- la perception des relations arithmétiques simples ;
- la capacité d'estimer la multiplicité ;
- la capacité d'utiliser des symboles ;
- la capacité de calculer ;
- la capacité de mémoriser de petites tables.

Les auteurs de *Where Mathematics Comes From* ajoutent que le grand édifice des mathématiques dépasse de loin ces capacités de base, et posent la question des mécanismes cognitifs qui ont permis le passage de ces capacités simples aux formes sophistiquées des mathématiques (P. 26). La réponse à cette question ne paraît pas aussi facile puisque notre réflexion est en majeure partie inconsciente, et une bonne partie de notre mémoire l'est aussi (p. 28). D'après Lakoff et Nunez, pour appréhender des concepts mathématiques techniques on manie des concepts de la vie quotidienne, à savoir le concept de mouvement, les relations spatiales de base, la distribution des objets dans l'espace, la manipulation des objets comme la rotation et l'étirement, etc. (ibid). Ces usages montrent que les idées mathématiques sont enracinées dans l'expérience physique et dans la vie quotidienne. « Rather, it appears that the cognitive structure of advanced mathematics makes use of the kind of conceptual apparatus that is the stuff of ordinary everyday thought » (p. 30).

Les mécanismes principaux qui sont à l'origine des formes sophistiquées de raisonnement mathématique sont quatre : (a) les « schémas image » (images schématiques), (b) les schémas aspectuels, (c) les métaphores conceptuelles et (d) l'intégration conceptuelle (Lakoff et Nunez, 2000, p. 30). Nous nous limitons ici aux métaphores conceptuelles à savoir les métaphores ancrées (dites aussi enracinées) (grounding métaphors) et les métaphores par liage conceptuel (binding metaphors) faisant partie des mécanismes cognitifs qui permettent le passage de l'arithmétique innée telle que l'on perçoit chez les bébés et les primates à l'arithmétique des entiers naturels (Lakoff et Nunez, 2000, p.52). Alors que les métaphores enracinées permettent aux humains de projeter l'expérience de la vie quotidienne sur des concepts abstraits telle que l'addition (accumuler ou mettre des choses en tas), les métaphores par liage conceptuel servent à faire des liaisons entre deux branches des mathématiques tel que le liage de la géométrie et

de l'arithmétique par la conceptualisation des nombres comme des points ordonnés sur une ligne (Lakoff et Nunez, 2000, pp. 52-53).

Les quatre types de métaphores enracinées projetant l'expérience de la vie quotidienne sur les nombres et les opérations arithmétiques sont les suivants : L'Arithmétique Comme Collection d'Objets (Arithmetic As Object Collection), L'Arithmétique Comme Construction D'Objets (Arithmetic As Object Construction), la métaphore du Bâton de Mesure (The Measuring Stick) et L'Arithmétique Comme Mouvement Tout Au Long d'un Trajet (Arithmetic As Motion Along a Path). Les opérations de l'arithmétique sont également présentées dans la théorie cognitive de Lakoff et Nunez, sous la rubrique de cette dernière métaphore conceptuelle, comme des mouvements tout au long d'un trajet. Bien que le concept de mouvement nous soit très utile quant à la compréhension de l'emprunt dans la soustraction, nous allons de même nous servir de la définition aristotélicienne de la métaphore (le transport à une entité du terme qui en désigne une autre) et de la métaphore d'orientation telle qu'elle a été formulée dans (Lakoff et Johnson, 1980).

II. LA NATURE MÉTAPHORIQUE DU SYSTÈME DÉCIMAL POSITIONNEL

Le système de numération en usage dans notre vie quotidienne a certainement ses avantages, mais il ne faut pas perdre de vue les difficultés que les apprenants de l'étape primaire rencontrent quant à la compréhension de la structure positionnelle d'un nombre élevé de ce système dit décimal de position.

Parmi les problématiques que l'on peut dégager du débat sur l'apprentissage du système décimal celle qui se rattache au niveau élevé d'abstraction imposé par ce système aux sujets apprenants. Nous pouvons imaginer, chez un apprenant de la première ou de la deuxième année primaire lorsqu'il lit le nombre 50, le monologue suivant :

- Zéro c'est « rien ».
- 5 c'est le nombre des doigts de ma main.
- Comment se fait-il que 5 fasse dix fois le nombre des doigts de ma main si je lui ajoute 0 à sa droite ?
- Mon institutrice se contredit, je vais me renseigner auprès de maman.

Une fois la « logique » expliquée par l'enseignante est confirmée par le parent, l'enfant va non seulement trouver le système indéchiffrable, mais aussi le monde des adultes un monde inaccessible. Et si l'apprenant, à une étape plus avancée, aboutit à déchiffrer l'énigme du système de numération positionnel, cela ne peut témoigner que la maîtrise de quelques usages telle que l'affectation des opérations arithmétiques fondamentales, quant à la structure positionnelle dans sa profondeur conceptuelle, elle lui demeure toujours énigmatique.

Les systèmes de numération ne sont formels que dans leur version écrite. La lecture orale des nombres récupère la langue naturelle et sert d'illustration pour leur formalisme embarrassant. Il est à constater que la lecture d'un nombre du système décimal explicite la valeur positionnelle des chiffres. Prenons à titre d'exemple 279 (deux cent soixante-dix-neuf) où trois symboles de l'écriture numérique sont représentés par cinq mots à l'oral. La représentation littérale de ce nombre assigne à chaque chiffre sa valeur par rapport aux autres chiffres du nombre selon sa position ; et une opération de multiplication implicitement effectuée est clairement à l'origine de la lecture de cette représentation numérique du nombre (le lecteur multiplie par des puissances de 10, d'ailleurs l'appellation du système décimal l'indique). (Lakoff et Nunez, 2000, p. 83)

Un autre exemple : 1 a la valeur d'une unité dans le nombre 61, mais la valeur de dix unités dans le nombre 16 ; et il paraît clairement que nous sommes devant le 1 qui n'est pas 1. Ce jeu de transfert évoque le concept de métaphore tel qu'il est défini par Aristote « Le transfert à une entité du terme qui en désigne une autre ... ».

Dire que le système de numération positionnel est métaphorique n'est pas une métaphore. De la définition citée ci-haut, nous pouvons constater que l'analogie entre le transport (d'un terme) constituant l'essence de la métaphore dans le langage naturel, et les valeurs assignées aux chiffres dans un nombre du système décimal positionnel conformément aux positions qu'ils occupent constitue une comparaison entre deux représentations sémiotiquement différentes. De cette comparaison ressort également la divergence entre la chaîne parlée à savoir la lecture du nombre 279 et la représentation numérique de ce dernier. Cette chaîne qui, en tant qu'adjectif numéral, ne contient aucune métaphore et n'est qu'une réécriture en langue naturelle d'un nombre à structure positionnelle. La substitution de positions entre les chiffres 1 et 6 dans les deux nombres 16 (le 1 qui compte plus qu'une seule unité) et 61 (le 6 qui compte plus que six unités) déjà cités met au clair l'aspect métaphorique du système décimal. Nous proposons *infra* une définition de la métaphore qui convient aux structures sémiotique et conceptuelle de ce système :

« La métaphore du système décimal/positionnel est le transfert à une valeur plus élevée du chiffre qui par convention désigne une autre n'excédant pas neuf unités ».

III. LA FONCTION MÉTAPHORISANTE DE LA SOUSTRACTION PAR EMPRUNT

Il est à noter que la définition aristotélicienne de la métaphore renferme déjà une métaphore (le *transfert/transport* d'un terme). Dans celle que nous venons de proposer, il y en a deux dont la deuxième est le comparatif (*plus élevé*). Les deux expressions « *valeurs élevées* » et « *valeurs basses* » sont très réputées dans le discours mathématique et ont pour signification respectivement (*grandes valeurs /petites valeurs*). Dans le premier cas il s'agit d'une métaphore d'orientation telle qu'elle est définie par la théorie cognitive (Lakoff et Johnson, 1980). Pour cette théorie, la métaphore n'est pas un ornement du langage, mais plutôt un outil de conception et une caractéristique de la pensée « Conceptual metaphor is a cognitive mechanism for allowing us to reason about one kind of thing as if it were another. This means that metaphor is not simply a linguistic phenomenon, a mere figure of speech. Rather, it is a cognitive mechanism that belongs to the realm of thought. » (Lakoff et Nunez, 2000, p.6).

Alors que les chiffres d'un nombre du système décimal sont horizontalement ordonnés, les positions sont conçues selon une métaphore verticalement orientée. La soustraction reflète fidèlement cette conception en plaçant le plus grand nombre en haut et le plus petit en bas, ce qui ne constitue pas une obligation quant à l'addition et la multiplication. Le terme *soustraction* commence par le préfixe *sous qui* « marque la position en bas par rapport à ce qui est en haut » (Le Robert, 1998)¹.

La métaphore spatiale *Le Plus Grand Est En Haut* que l'on constate dans la soustraction et généralement dans toutes les opérations traditionnelles de l'arithmétique, relève de l'expérience

¹ « Soustraire un nombre x d'un nombre y » est un énoncé qui comporte une orientation dans l'espace. Cette métaphore d'orientation relève de l'expérience culturelle et physique du sujet parlant. Certains jugements moraux que nous avons sur l'autre sont reliés à ce type de métaphores, à titre d'exemple, le terme *bassesse* exprime l'infériorité morale. Le terme qui lui correspond dans la langue arabe c'est *wadha'fa* (وضاعة). De même, la métaphore *Le Grand Est En Haut, Le Petit Est en Bas* relève de l'expérience du sujet parlant dans un monde hiérarchiquement structuré (la haute bourgeoisie, les petits cultivateurs), et assujetti à la puissance divine qui s'exerce du ciel vers la terre (Dieu est grand), (Allahu a'la wa akbar). Même lorsqu'il s'agit de l'addition et la multiplication, l'opérateur tend à situer le plus grand nombre en haut.

physique de nos corps (appréhender la grandeur en termes de hauteur). « The very idea of a linear symbol system arises from the peculiar properties of our bodies. And linear symbol systems are at the heart of mathematics. Our linear, positional, polynomial-based notational system is an optimal solution to the constraints placed on us by our bodies (our arms and our gaze), our cognitive limitations (visual perception and attention, memory, parsing ability), and possibilities given by conceptual metaphor » (Lakoff et Nunez, 2000, p. 86).

Cependant, le retranchement s'effectue toujours entre des unités, ce qui donne lieu à une démétaphorisation du système. Nous sommes alors face à des chiffres et non pas à des nombres. (Lakoff et Nunez, 2000, p. 88). Le mécanisme métaphorique dit emprunt récupère la structure positionnelle et relance la base du système au sein de la structure du système même (la valeur empruntée est égale à 10 unités).

Technique 1 : Inversement de l'ordre spatial

Dans la représentation suivante, nous essayerons d'effectuer une soustraction démétaphorisée. Cette démétaphorisation consiste à :

- inverser l'ordre qui est la projection de la métaphore spatiale d'orientation Le Plus Grand Est En Haut
- éviter le recours à l'emprunt.

Pour soustraire 19 de 57, nous pouvons imaginer une technique qui inverse la structure hiérarchique de la soustraction :

Etape 1

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 9 \\
 - \\
 5 \quad 7 \\
 = \\
 -4 \quad 2
 \end{array}$$

Cette représentation du reste - 42 à savoir -4 2 (La couleur rouge dans notre présentation indique qu'il s'agit d'une chaîne numérique et non pas d'un nombre), une écriture que nous appelons chaîne numérique et qui transgresse les normes de l'écriture des nombres négatifs, n'est pas exempte de signification vu la nature métaphorique de l'emprunt dans la soustraction.

Ce terme d'emprunt, faut-il le dire, est le substitutif du terme métaphore dans plusieurs recherches « Pour eux (Lakoff et Johnson), si exprimer notre expérience ou une partie de notre expérience passe nécessairement par l'usage de la métaphore, c'est parce que les concepts que nous empruntons pour appréhender ces expériences sont métaphoriques » (Ben Yacoub, 2014, p. 102). Cette représentation montre que pour un nombre négatif toutes les positions sont occupées par des valeurs négatives, puisque le nombre - 42 est la somme de -40 et -2, d'où le signe moins placé devant le chiffre 4 de la position des dizaines indique que le nombre -42 est métaphoriquement en symétrie avec son opposé positif 42. « For every positive number, there is a unique negative number, and conversely. Since positive and negative numbers are symmetric, we need to distinguish them by picking an orientation: The usual choice is that positive numbers are on the right of the origin and negative numbers are on the left » (Lakoff et Nunez, 2000, p. 90).

Etape 2

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \\ - \\ 5 \quad 7 \\ = \\ -4 \quad 2 \end{array}$$

Pour obtenir le résultat de cette opération nous allons déplacer le signe moins vers la position des unités :

$$4 \quad -2$$

Puis on retranche 1 de la valeur située dans la position des dizaines, on le convertit en unités et on l'ajoute à la valeur négative située dans la position des unités :

$$\begin{array}{r} (4 - 1) \quad (-2 + 10) \\ 3 \quad 8 \end{array}$$

Et on obtient le résultat de la soustraction

$$57 - 19 = 38$$

Si nous avons fait recours à cette méthode hors norme par rapport à l'écriture ordinaire des nombres négatifs, c'est pour éviter l'emprunt qui constitue un mécanisme de métaphorisation à l'origine d'une régénération métaphorique de la position des dizaines.

A chaque position du nombre situé en haut occupée par une valeur inférieure à celle qui y correspond dans le nombre situé en bas, nous avons affaire à un emprunt. Le monologue qui accompagne le recours à cet emprunt introduit la position des dizaines et vérifie la base du système. Cela revient à dire que si l'on a à effectuer une soustraction entre deux nombres composés chacun de 6 chiffres où l'emprunt est nécessaire au niveau de la troisième position (les centaines), celle-ci est considérée dans le monologue de l'opérateur comme étant la position des unités et celle qui la succède (les milliers) comme étant la position des dizaines.

La génération métaphorique d'une position des dizaines entre les centaines et les milliers fait preuve d'un recommencement de la lecture du nombre à chaque fois qu'un emprunt s'impose : c'est ainsi que le système décimal reprend sa fonction métaphorisante. Nous sommes face à une lecture multiple de ce nombre lorsqu'on cherche à retrancher une valeur d'une autre qui lui est inférieure.

Dans (Mahnane, 2015, p. 504) nous avons appelé cette position médiane *manzila bayna-almanzilatayn*. La définition que nous avons proposée se vérifie dans la soustraction par emprunt qui s'effectue par le transfert d'une dizaine suite à la dégradation des deux positions source et cible respectivement à la position des dizaines et celle des unités.

Technique 2 : Les restes négatifs

Nous poursuivons la recherche d'une méthode de soustraction qui pourrait nous aider à effectuer une soustraction sans avoir recours à l'emprunt². Nous rappelons que notre but est de montrer que l'emprunt est inévitable étant donné qu'il relève du mécanisme de fonctionnement

² Il est à signaler que les trois techniques présentées dans ce travail sont le fruit de notre effort personnel. Ces méthodes faisaient le sujet d'un débat approfondi avec Dr Leila Hamouda (Université de Tunis El Manar) et Dr Yassine Hachaichi (Université de Carthage) au Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur (LAMSIN), Université Tunis El Manar. Nous remercions vivement Dr Hachaichi de nous avoir renvoyé à « Vedic Mathematics, Or Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas (for One-line Answers to All Mathematical Problems) », un recueil sur les mathématiques védiques qui illustre un ensemble de règles (Nikhilam Sutras) dont une est (All from nine and the last from ten). Les techniques 2 et 3 que nous présentons dans notre travail dérivent donc de cette règle védique qui dit « Tous de neuf et le dernier de 10 ». Nous y reviendrons dans un article que nous mettons actuellement en chantier portant sur « Les Mécanismes Métaphoriques des Algorithmes ».

du système décimal positionnel. Cette méthode consiste à noter les restes sous la forme de valeurs négatives.

7 4 5 2 6

-

2 6 8 7 9

5 -2 -3 -5 -3

Une fois que le reste négatif de chaque position est trouvé, on cherche les valeurs positives qui doivent s'ajouter à cette chaîne composée de restes négatifs afin d'obtenir le résultat de l'opération. Nous savons que le reste est 47647, il nous faut alors ajouter 10 à -3, mais seulement 9 aussi bien à -5 qu'à -3 et -2, et de retrancher 1 de la valeur positive (+5) située à l'extrême gauche.

Si l'emprunt n'a pas eu lieu à une position quelconque de la chaîne, on reprend par l'ajout de 10, puis 9 etc. jusqu'à la dernière position à gauche de laquelle on doit retrancher 1. Nous proposons d'appeler le nombre n de positions où s'effectue un nombre n d'emprunts successifs **l'intervalle de métaphorisation** de la soustraction. Dans une même opération, on peut rencontrer plusieurs intervalles métaphoriques si l'emprunt se rompt et se reprend plusieurs fois. Et on propose d'appeler la ou les positions successives où l'emprunt est rompu **l'intervalle de suspension**.

Nous sommes face à deux questions :

Pourquoi n'ajoute-t-on pas 10 à toutes les valeurs négatives trouvées ?

Et pour quelle raison on retranche 1 de la seule valeur positive trouvée ?

7 4 5 2 6

-

2 6 8 7 9

5 -2 -3 -5 -3

-1 +9 +9 +9 +10

4 7 6 4 7

Une première réponse plutôt cognitive qu'arithmétique est fournie par (Yvon Keromnes 2013, p. 3) : « On peut difficilement penser sans ces métaphores, et lorsque l'on parle de mettre de côté les métaphores pour y voir plus clair, on est encore dans la métaphore ». En effet, même avec le recours à cette méthode qui ignore les emprunts, nous avons affaire à des emprunts qui s'effectuent à notre insu. On ajoute 10 au premier reste négatif qui provient du retranchement effectué entre les positions des unités. La compensation (une unité de la position des dizaines de mille) est décalée à la position finale ; et les emprunts (9000, 900, 90, 10) sont linéairement répartis sur les composants négatifs de la chaîne.

La technique des restes négatifs est applicable à toute soustraction par emprunt et permet d'effectuer la soustraction dans les deux sens. Dans cette chaîne -1 +9 +9 +9 +10 que nous appelons désormais **chaîne à compensation décalée** nous avons : 1 (à retrancher de la position des dizaines de mille), 9 (à ajouter à la position des milliers), 9 (à ajouter à la position des centaines), 9 (à ajouter à la position des dizaines) et 10 (à ajouter à celle des unités). Si l'on prend cette chaîne numérique pour une addition, on a : $(-10000) + (9000 + 900 + 90 + 10) = 0$. L'obtention du résultat se réalise par la génération de la chaîne de compensation décalée que

l'on peut appréhender comme étant la somme de deux vecteurs opposés, une appréhension qui nous renvoie à la métaphore du Bâton de Mesure. Si par contre la soustraction contient un intervalle de suspension, on doit retrancher 1 de la position où l'emprunt se rompt et ajouter 10 à la première position à laquelle l'emprunt est recommencé, puis 9, etc. Nous appelons désormais caisse de compensation la position de laquelle on retranche 1 à la fin de l'intervalle de métaphorisation. Elle est à la fois la fin de cet intervalle et le début de l'intervalle de suspension. L'unité ayant la valeur de la position « caisse de compensation » constitue la somme des compensations, et les valeurs à ajouter qui la précèdent en constituent les emprunts

Technique 3 : les restes en valeurs absolues

Notre hypothèse pose que la métaphore est une caractéristique du système décimal de position et ne dépend pas de la méthode que l'opérateur suit pour soustraire. Dans ce même cadre, nous continuons à chercher une autre méthode qui n'ait pas recours à l'emprunt.

Etape 1

A. 7 4 6 2 1
 -
 B. 3 7 7 6 9 →
 C. 4 -3 -1 -4 -8 | |
 D. 4 3 1 4 8

Au niveau C on note le reste des soustractions effectuées entre les positions de A et B qui se correspondent. Au niveau D on remplace les nombres négatifs de la chaîne par leurs valeurs absolues.

Etape 2

Au niveau E on sépare la valeur de la plus grande position :

E. 4 0 0 0 0

Nous le définissons ainsi : Un nombre à valeur close est un nombre dont la position la plus élevée est l'unique position non nulle.

Au niveau F on en sépare les valeurs des autres positions prises comme valeurs absolues.

Puis on soustrait F de E = 40000 - 3148 = G :

9 10
 4 0 0 0 0
 -1 3 1 4 8

G. 3 6 8 5 2 = A - B

Si nous prenons la valeur de la plus grande position du plus grand nombre (D) comme valeur négative (technique de l'inversement de l'ordre spatial : B - A) l'addition de G et D nous renvoie à la chaîne à compensation décalée qui est la somme de deux vecteurs opposés.

3 6 8 5 2
 +
 -4 3 1 4 8
 -1 9 9 9 10

L'addition classique vérifie cette somme nulle :

$$\begin{array}{r} 3 \ 6 \ 8 \ 5 \ 2 \\ + \\ -4 \ 3 \ 1 \ 4 \ 8 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Si la lecture d'un nombre du système décimal est cognitivement parlant un calcul, c'est-à-dire des multiplications par des puissances de 10, la multiplication de zéro donne une valeur nulle, et deux hypothèses sont à formuler à ce titre :

1/ Le lecteur prend la chaîne numérique pour une entité ou une image. Cette hypothèse n'est défendable que dans la mesure où le nombre des positions de la chaîne numérique est très limité ; et en l'occurrence, la lecture du nombre se rapporte à la subitisation.

2/ La lecture du nombre s'appuie sur le comptage des chiffres constitutifs de la chaîne numérique. Pour que la lecture du nombre E soit possible il faut appréhender chaque zéro selon la position où il est situé dans la chaîne (le zéro des unités, le zéro des dizaines etc.). La position finale d'un intervalle de métaphorisation dite « position caisse » ne peut pas être occupée par un nombre nul. Elle constitue la position de compensation des emprunts de l'intervalle de métaphorisation.

CONCLUSION

Il est clair que le coût cognitif de ces techniques de soustraction est assez élevé par rapport à la soustraction par emprunt. Le système décimal positionnel n'impose qu'un effort cognitif léger, chose que Lakoff et Nunez ont signalé dans plusieurs contextes de *Where Mathematics Comes From* « For beings like us, positional notation requires less cognitive effort, not just in recognition but especially in calculation. Procedures for adding, subtracting, multiplying, and dividing require less cognitive effort in positional notations than in nonpositional notations like Roman numerals. Imagine doing long division with Roman numerals ! » (p. 85)

Toutes les questions relatives à la métaphoricité du système décimal de position posées dans ce travail, même si quelques-unes d'entre elles ont été répondues d'une manière peu approfondie, leur investigation reste une tâche qui exige le concours de plusieurs disciplines. Les hypothèses que nous avons émises doivent constituer un champ de recherche commun où coopéraient sémanticiens cognitivistes, mathéux et didacticiens des mathématiques. Cette perspective interdisciplinaire est sensée prendre comme point d'appui les métaphores de l'arithmétique dans la vision cognitive dans le but de vérifier si la communication en langue naturelle répond à cette vision.

S'il s'avère inutile de proposer ces techniques pour l'enseignement de la soustraction à l'étape primaire puisque les nombres négatifs ne sont pas introduits dans les programmes de cette étape, il nous paraît nécessaire de reconcevoir les programmes des mathématiques dans une perspective cognitive dans le but d'humaniser le savoir mathématique et d'en franchir le mythe des mathématiques transcendantes de la philosophie platonicienne.

REFERENCES

- Akrouti, I. (2022). La Situation du barreau : une alternative possible pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 2022, Numéro thématique 1(Tome 1), 72-110.
- Bachelard, G. (1934). *Le Nouvel Esprit scientifique*. Paris, Alcan.

- Baharti Krsna Tirtha, Swami (1965). *Vedic Mathematics, Or Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas* (for One-line Answers to All Mathematical Problems). Hindu Vishvavidyalaya Sanskrit Publication Board, Banaras Hindu University.
- Konstantin, C., & Coulange, L. (2022). Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 2022, Numéro thématique 1 (Tome 1), 5-42.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. University of Chicago Press.
- Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. Basic Books.
- Keromnes, Y. (2013). Les Métaphores - et leur traduction - dans la vie quotidienne. *Revue SEPTET*, 5, 68-87. Hal-00944651.
- Barrera-Curin, R., Bulf, C. & Venant, F. (2016). Didactic, Semantic and Metaphors. *Analysis of Languages in Class of Geometry*, 21, 39-78.
- ابن البنا المرّاكشي (1985). *الرّوض المربع في صناعة البديع*. تح رضوان بنشقرّون، ط1 دار النّشر المغربيّة، الرّباط، المغرب.
- عماد محنان (2015). *تحليل الخطاب الهندسي في الثّراث العربي*، ط1 دار كنوز المعرفة، عمان، الأردن.

LES MATHÉMATIQUES AU SERVICE DES PROBLÈMES SANITAIRES ÉPINEUX : CAS DE LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DE L'ANTIBIORÉSISTANCE

Brahim DEKHILI*

Résumé - L'antibiorésistance est un problème de santé mondial qui touche l'Homme, l'animal et l'environnement. Il s'agit d'une question scientifique socialement vive (QSSV) liée à un mésusage des antibiotiques en médecine humaine, en médecine vétérinaire et en élevage. La lutte contre ce risque émergent est une véritable question de développement durable. Parmi les limites de certaines recherches scientifiques figure le fait qu'elles traitent le sujet dans le passé ou le présent sans se projeter dans le futur. Pour cerner le problème et chercher des évolutions ultérieures, la modélisation mathématique permet de travailler sur des schémas d'évolution afin de faciliter la compréhension du phénomène, de contrôler des maladies émergentes et d'évaluer l'efficacité des interventions.

Mots-clefs : Antibiotiques, antibiorésistance, QSSV, curriculum, modélisation mathématique.

Abstract - Antibiotic resistance is a global health problem that affects humans, animals and the environment. This is a socially vivid scientific question (QSSV) related to the misuse of antibiotics in human medicine, veterinary medicine and animal husbandry. The fight against this emerging risk is a real issue of sustainable development. Among the limitations of some scientific research that they treat the subject in the past or the present without projecting into the future. To identify the problem and look for subsequent developments, mathematical modeling makes it possible to work on evolution patterns in order to facilitate the understanding of the phenomenon, the control of emerging diseases and to evaluate the effectiveness of interventions.

Keywords: Antibiotics, antibiotic resistance, QSSV, curriculum, mathematical modelling.

INTRODUCTION

L'antibiorésistance est un problème de santé mondial lié à un mésusage des antibiotiques en médecine humaine, en médecine vétérinaire et en élevage. Un véritable problème qui menace la santé humaine, la santé animale et l'environnement, à savoir que l'antibiorésistance animale peut alimenter l'antibiorésistance humaine et vice-versa (Berger, 2016). Elle cause environ 700000 morts /an dans le monde (ECDC et EMA, 2009)¹, et si ce mésusage continue dans la même voie qu'aujourd'hui, l'organisation mondiale de la santé prévoit que le nombre de victimes de cette « guerre froide » pourra atteindre dix millions/an en 2050 (O'Neill et al., 2014). Les débats autour des antibiotiques sont nombreux et nous interpellent individuellement et collectivement. Ils sont bien médiatisés et vives dans la communauté scientifique, dans la société et en classe définissant ainsi une véritable question socialement vive (Legardez, 2006). En 2014, Keiji Fukuda², déclarait :

« Le monde s'achemine vers une ère post-antibiotique, où des infections courantes et des blessures mineures qui ont été soignées depuis des décennies pourraient à nouveau tuer »³.

L'antibiorésistance est à l'origine de pertes économiques énormes, ainsi que d'une pollution de l'environnement par les bactéries résistantes. La lutte contre ce problème est donc une véritable question de développement durable, au même statut que les autres fléaux qui menacent la santé et l'environnement. Dans le cadre de la lutte contre ce problème sanitaire, un groupe d'experts

* Université virtuelle de Tunis - Tunisie - dekhilibrahim@gmail.com

¹ ECDC : The European Centre for Disease Prevention and Control
EMA : European Medicines Agency

² Docteur et sous-directeur de l'OMS (Organisation Mondiale de la Santé)

³ <https://www.who.int/fr/news/item/30-04-2014-who-s-first-global-report-on-antibiotic-resistance-reveals-serious-worldwide-threat-to-public-health>

français propose des solutions directement opérationnelles qui pourraient être mises en place rapidement et transformer radicalement la qualité et la quantité de nos moyens de lutte (Ploy et al., 2019). Les auteurs affirment qu'une recherche translationnelle efficace ne peut se faire sans une multidisciplinarité d'acteurs : cliniciens, vétérinaires, méthodologistes, microbiologistes, chimistes, pharmacologues, pharmaciens, dentistes, biostatisticiens, bioinformaticiens, sciences humaines et sociales, économistes, éleveurs, patients et citoyens. Cependant si dans chacune de ces disciplines, il est possible d'étudier et d'interpréter les phénomènes de résistance dans le présent ou le passé, elles ne permettent pas de se projeter dans le futur. Seule la modélisation mathématique permet de travailler sur des schémas d'évolution, elle peut aider à mieux comprendre le phénomène et permettre de faire des hypothèses prospectives (Opatowski, 2013).

I. CHOIX DE L'OBJET D'ÉTUDE

Nous nous sommes intéressés et sensibilisés à l'étude des antibiotiques et du phénomène d'antibiorésistance par les débats médiatiques, les rapports alarmants de l'OMS, ainsi que par une récente recherche américaine qui nous classe, nous les Tunisiens, comme les deuxièmes plus grands consommateurs d'antibiotiques et les premiers, en termes d'évolution de la consommation quotidienne (Klein et al., 2018). Plusieurs autres recherches locales ont montré l'évolution de la consommation des antibiotiques d'environ 57,5 % entre 2010 et 2015 (Toumi, 2017) ce qui peut aggraver la situation en termes d'évolution des résistances bactériennes aux antibiotiques.

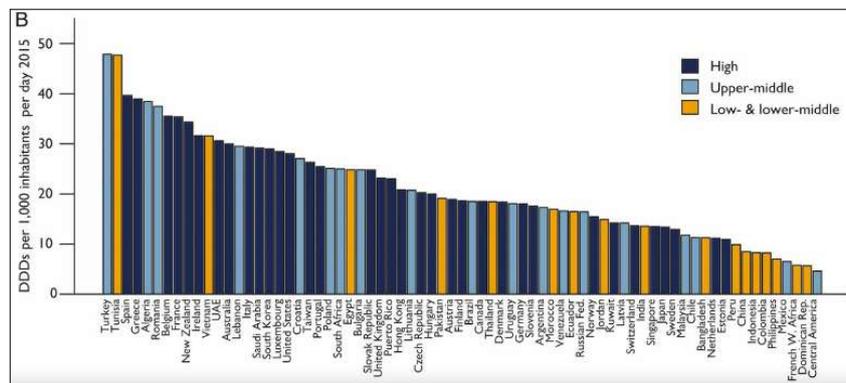


Figure 1 - Classement des pays selon la consommation des antibiotiques (Klein et al., 2018)

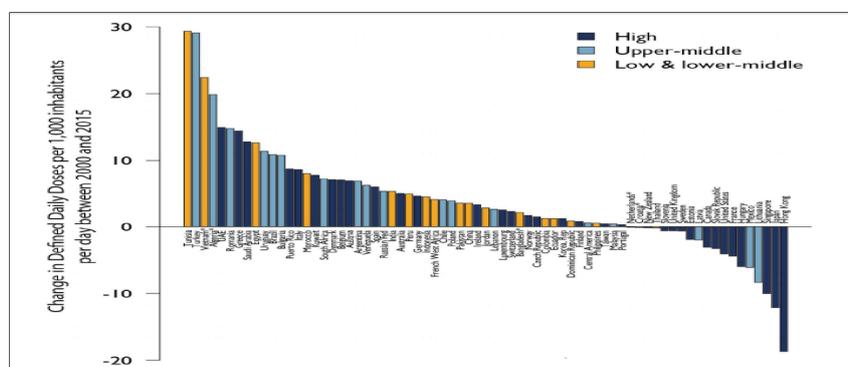


Figure 2 - Classement des pays selon l'évolution de la consommation des antibiotiques (Klein et al., 2018)

Les travaux de Baquero (1995), Baquero et al. (1998) et Bergman et al. (2006) ont montré une corrélation positive entre la consommation abusive des antibiotiques et l'amplification du phénomène d'antibiorésistance. La modélisation mathématique de l'antibiorésistance, associée à des études épidémiologiques, a permis de mettre en évidence ce lien fort qui existe entre la consommation d'antibiotique et l'évolution de l'antibiorésistance (Levin, 2001).

II. QUELQUES BASES THÉORIQUES

1. *Les questions socialement vives*

Notre recherche s'inscrit dans l'enseignement-apprentissage d'une question scientifique socialement vive émergente à l'échelle nationale et internationale. L'efficacité de l'enseignement des QSSV vise le développement de la citoyenneté en général et la citoyenneté scientifique en particulier. L'enseignement de ces questions n'est pas une simple transposition des savoirs scientifiques en contenus scolaires enseignables (Zinedine, 2009), mais exige des compétences spécifiques de la part de l'enseignant pour animer des questions qui portent parfois des valeurs. Pour montrer les enjeux liés à l'enseignement des questions controversées, nous exploiterons un outil présenté par Simonneaux (2014) et qui présente deux pôles opposés, l'un « chaud » et l'autre « froid ». La question peut être refroidie ou réchauffée selon le risque éducatif et la rationalité de l'enseignant. En effet les enseignants qui adhèrent une rationalité technoscientifique ont tendance à refroidir les questions. Par contre ceux qui souscrivent à une rationalité critique les réchauffent. La résistance bactérienne aux antibiotiques s'inscrit dans la didactique des QSSV. Il s'agit de mettre en évidence la façon dont les savoirs relatifs à l'antibiorésistance sont reproblématisés pour être enseignés. Les travaux de Simonneaux et Legardez (2011), montrent que l'enseignement des QSV vise la transformation de la société par les élèves.

« L'enjeu de l'enseignement des QSV, de ce point de vue devient un enjeu d'émancipation qui vise la capacité des élèves à transformer la société » (Simonneaux et Legardez, 2011, p. 22)

Le traitement des QSSV selon la vision transmissive a pour conséquence de former des citoyens conformistes versus la vision transformiste qui reste capable d'éduquer des citoyens critiques capables de questionner le monde actuel et de créer leur propre monde » (Panissal et al., 2016).

2. *Le curriculum*

Sociologiquement, le curriculum signifie une façon de penser « globalement ». Politiquement, c'est un plan d'action d'une organisation englobant le processus d'enseignement-apprentissage (intention, contenu, organisation, méthodes, environnement, parcours, supports, évaluation...). Aussi, c'est un parcours éducatif proposé aux apprenants (Perrenoud, 1993).

En plus, c'est l'organisation des contenus éducatifs, disciplinaires ou non-disciplinaires prescrits dans les instructions et dans les programmes, mais aussi les choix et les décisions des enseignants (Coquidé, Fortin et Lasson, 2010). Le curriculum peut intégrer des formes disciplinaires et des formes non disciplinaires comme les « éducations à » (Martinand, 2003).

3. *La modélisation mathématique*

Pour se projeter dans le futur et montrer comment évolue l'antibiorésistance dans l'avenir, nous nous intéressons dans notre recherche à l'étude de la modélisation mathématique. Eykhoff définit, en 1974, les modèles comme étant « des représentations des aspects essentiels d'un

« système fournissant une connaissance de ce système dans sa forme usuelle ». La description du système se fait à partir d'un ensemble de variables et d'équations établissant des relations entre ces variables (Zennir et al., 2019). La modélisation mathématique guidée par des données épidémiologiques, a permis de mettre en évidence une relation de causalité entre la consommation des antibiotiques et l'amplification du phénomène d'antibiorésistance (Levin, 2001). Les modèles mathématiques sont de deux types, simples ou complexes et l'adoption de l'un de ces modèles est tributaire de la perspective visée. En effet, un modèle simple comporte un minimum de variables et d'informations et la perspective est explicative. Par contre, le modèle complexe comporte un maximum de variables et d'informations et la perspective est anticipatrice. Pour l'antibiorésistance, les données de la médecine, de la microbiologie et de l'épidémiologie sont conjuguées afin de proposer aux décideurs des modèles qui seront exploités pour contrôler l'évolution du problème dans le futur (Opatowski, 2013)

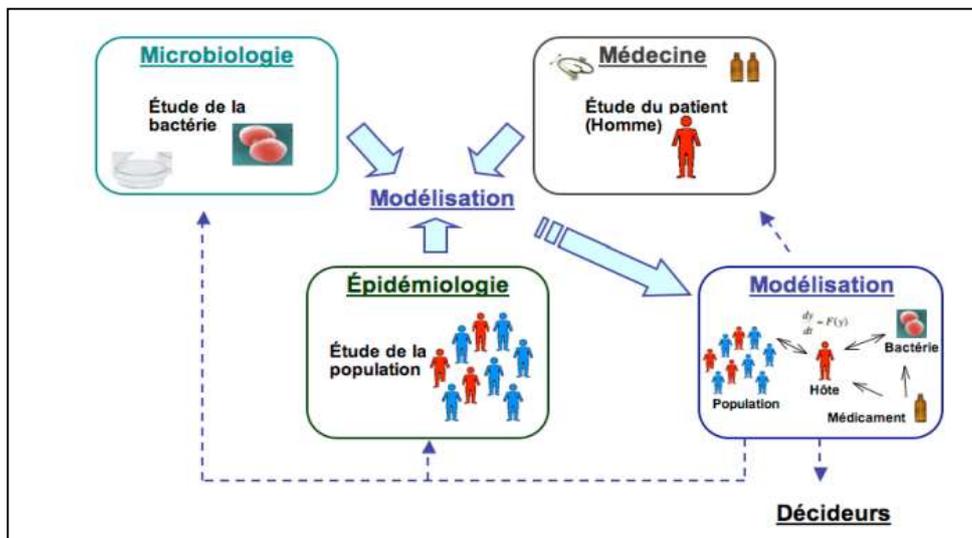


Figure 3 - Les Acteurs de la recherche sur la résistance et place de la modélisation (Opatowski, 2013)

III. PROBLÉMATIQUE

Notre travail est une étude longitudinale du curriculum tunisien de la 3^{ème} année Sciences expérimentales du programme des SVT. D'abord, nous avons cherché comment est transposé la problématique des antibiotiques et de l'antibiorésistance dans les curricula pour voir si le contenu respecte, ou non, les recommandations des instances internationales (UNESCO), les spécialistes des QSV et les spécialistes de l'éducation à la santé. Ensuite, nous avons cherché comment sont enseignés les antibiotiques et le phénomène d'antibiorésistance en classe. Enfin, nous avons réalisé une recherche bibliographique afin de montrer quelles sont les modèles mathématiques les plus cités dans la littérature dans le traitement de l'antibiorésistance.

IV. MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Nous avons commencé notre recherche par une analyse de contenu. Il s'agit de rechercher les cohérences et les incohérences entre le programme des programmes, le programme officiel des SVT tunisien et les manuels scolaires, ainsi que leur conformité avec les exigences et les recommandations des instances internationales (OMS, UNESCO...), les spécialistes des QSV et les spécialistes de l'éducation à la santé. Pour montrer comment sont enseignés les antibiotiques et le phénomène d'antibiorésistance en classe, nous avons adopté une démarche

basée sur l'observation de séances de classes ordinaires. Pour traiter l'émergence des bactéries résistantes à l'intérieur de populations bactériennes exposées aux antibiotiques, la dissémination des bactéries résistantes dans une population d'individus utilisant des antibiotiques et la dissémination des bactéries résistantes entre individus et le reste de l'environnement, nous avons adopté respectivement le modèle intra-hôte, le modèle inter-hôte et le modèle hôte-environnement (Boëlle, 2000). Dans ce présent travail, nous avons exploité deux grilles d'analyse (annexe 1 et annexe 2)⁴, l'une réservée pour l'analyse curriculaire et l'autre pour l'analyse des séances de classe ordinaire. Pour la modélisation mathématique de l'antibiorésistance, notre travail est basé sur une analyse bibliographique afin de montrer les modèles les plus utilisés dans la littérature.

V. RÉSULTATS

Les résultats de notre recherche montrent des incohérences internes et externes au sein du curriculum, qui se traduisent par une discordance entre ce qui est préconisé, à la fois par les professionnels de la santé, par les instances internationales et les didacticiens spécialistes des questions vives, et entre ce qui se trouve dans les documents officiels de l'enseignement des SVT en 3^{ème} année de l'enseignement secondaire en Tunisie. Ce constat est une première anomalie constatée au niveau de la transposition externe. Nos résultats montrent aussi, une défaillance au niveau de la transposition didactique interne. En effet, la majorité des enseignants traitent le sujet selon une approche transmissive. Citons ci-après l'exemple de l'enseignante En2. Lors de l'animation de la séance, la posture de l'enseignante est orientée plutôt dans une perspective transmissive dominante. En effet, sur un temps total d'enseignement-apprentissage estimé à 10mn 15s, 5mn 19s de parole sont au profit de l'enseignante En2, soit 52.27% du temps alloué à cette séquence. L'enseignante transmet les savoirs et cherche à obtenir des réponses prédéfinies. Pour ce faire, elle a coupé les interventions des élèves, freinant toute coopération en classe dans la construction du savoir. Tout cela se déroulait dans une absence totale de problématisation. Cette méthode plutôt interrogative et dogmatique a usé le temps alloué pour enseigner cette partie qui n'a pas dépassé 10mn 15s. La méthode d'enseignement appliquée par l'enseignante était plutôt interrogative de type question/réponse donnant un aspect maïeutique. Au début, les élèves ont répondu aux interrogations de l'enseignante. Parfois même, ils ont complété les phrases inachevées de l'enseignante.

- Enseignante : « Ces bactéries résistantes peuvent rejoindre les nappes d'eau. »

- Elève E3 : « Contamination des eaux potables ».

Cette méthode d'enseignement directive qui ignore le caractère vif et controversé de la question n'engage pas les élèves dans le débat et leur rôle reste de finir des phrases incomplètes de la part de l'enseignante ou de donner des réponses écourtées, parfois en un seul mot.

- Enseignante : « Est-ce qu'uniquement le lait et la viande sont contaminés ? »

- Elève E7 : « L'eau. »

Cette méthode transmissive, est en désaccord avec les recommandations de la dernière réforme éducative (réforme 2002) qui est fondée sur l'approche par compétences et inspirée des courants constructivistes et socioconstructivistes. Face à la dominance exercée par l'enseignante dans la présentation des connaissances, le rôle des élèves devient plus ou moins secondaire signalant une rupture du contrat didactique entre enseignante et élèves. Plusieurs sont les indicateurs qui indiquent cette rupture, parmi lesquels on peut citer les périodes de blocages et de silences qui caractérisent cette séance. En effet, la séance devient morcelée montrant sept phases de rupture et de silence où les élèves sont en silence prolongé ou totalement désintéressés. Dans cette

⁴ La grille 1 est un ensemble de recommandations scientifiques et didactiques
La grille 2 inspirée des travaux de Pannisal, Jeziorski et Legardez (2016)

situation éducative et sous l'influence de la posture de l'enseignante, les élèves se soumettent à un jeu de type question/réponse avec absence de dévolution, d'échange et de problématisation écartant toutes les initiatives d'un débat ou de co-construction du savoir et les élèves se trouvent dans un état de dépendance envers l'enseignante dont le rôle reste à confirmer ou à infirmer les idées. Dans ce discours dialogué, l'enseignante fait recours à des savoirs disciplinaires selon une approche positiviste et écarte les prises de position des élèves et freine l'émergence de nouvelles thématiques et questions venant de la part des élèves.

Enseignante : « Une utilisation inadéquate des antibiotiques peut causer des maladies » « De quels types de maladie parle-t-on ? »

E3 : « Des maladies digestives » E5 : « Caractéristiques génétiques. » E7 : « Des maladies héréditaires ».

Enseignante : « Les maladies héréditaires ? Non il ne s'agit pas de maladies héréditaires. » E3 : « Les antibiotiques affectent l'appareil respiratoire. »

Enseignante : « Est-ce que les antibiotiques affectent l'appareil respiratoire ? »

Au terme de cette analyse, nous pouvons constater que la posture de l'enseignante En2 vise seulement l'éducation des élèves au « bon comportement » mais elle est incapable de changer le comportement des élèves en tant que citoyens et futurs parents. De même, dans les réponses des élèves, plusieurs indicateurs signalent l'acquisition d'un comportement conformiste.

Enseignante : « Non, ce n'est pas les travaux, elle est épuisée par les productions. Donc une production excessive du lait et de viandes... Malgré l'utilisation des médicaments (observer les deux seringues) parfois on peut utiliser aussi des hormones de croissance. C'est clair ou non ? »

Tous les élèves : « Oui madame »

Enseignante : « Ça va ? »

Tous les élèves : « Oui madame. »

En termes d'occurrence de la triade : antibiotiques, bactéries et résistance, on note que l'enseignante En2 a répété ces termes 16 fois, 6 fois pour le terme « résistance bactérienne » ce qui confirme l'idée que l'enseignante n'accorde pas d'importance au phénomène d'antibiorésistance en tant que fléau qui menace la santé et l'environnement. Les résumés du cours qui traite le cas des antibiotiques et le phénomène d'antibiorésistance sont réduits à deux phrases qui présentent l'idée que l'utilisation des antibiotiques à titre préventif ou comme facteur de croissance engendre certaines maladies et brise la chaîne alimentaire et l'écosystème.

Une revue des modèles mathématiques qui ont été proposés dans la littérature en relation avec l'étude de l'antibiorésistance révèle l'existence de nombreux modèles (annexe 3). Parmi ces modèles, on peut citer le modèle intra-hôte qui traite l'émergence des bactéries résistantes à l'intérieur de populations bactériennes exposées aux antibiotiques (D'Agata et al., 2008 ; Nikolaou et al., 2006), le modèle inter-hôte pour étudier la dissémination de bactéries résistantes dans une population d'individus utilisant des antibiotiques (Boëlle, 2000) et le modèle hôte-environnement pour étudier la dissémination des bactéries résistantes entre individus et le reste de l'environnement. Ces modèles mathématiques ont contribué à dégager une corrélation entre la consommation des antibiotiques et l'évolution de l'antibiorésistance (Levin, 2001). De même, ces modèles facilitent l'identification des facteurs de dissémination des bactéries résistantes afin d'installer des stratégies préventives et anticiper les conséquences.

CONCLUSION

L'analyse curriculaire montre des incohérences internes et externes des curricula. De même en classe, l'antibiorésistance est traitée de manière transmissive. La modélisation mathématique de l'antibiorésistance permet d'estimer l'évolution du phénomène dans le futur. Les résultats

de ce modeste travail constituent les bases d'un travail à suivre, à améliorer et à approfondir. Ainsi, on compte généraliser la question sur plusieurs établissements, dans des régions différentes, et impliquer le maximum d'enseignants. De même, nous proposerons des séquences didactiques à tester en classe et qui seront le point de départ pour repenser le traitement de ces questions vives. Dans la même ligne directrice, nous souhaitons que le nouveau curriculum tunisien soit exempt d'incohérences et traitera les questions socialement vives dans leur complexité et leur caractère polymorphe et interdisciplinaire. Ainsi une formation des enseignants à gérer ces questions vives en classe s'avèrerait nécessaire afin de garantir un enseignement efficient.

REFERENCES

- Aipe, Y., & Barthes, A. (2013). De la question socialement vive à l'objet d'enseignement : comment légitimer des savoirs incertains ? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 29, 33-44.
- Baquero, F. (1995). Pneumococcal resistance to beta-lactam antibiotics: a global geographic overview. *Microb Drug Resist*, 1(2), 115-120.
- Baquero, F., Negri, MC., Morosini, MI., & Blazquez, J. (1998). *Antibiotic-selective environments. Clinical Infectious Diseases* 27(Suppl 1), S5-11.
- Bergman, M., Huikko, S., Huovinen, P., Paakkari, P., & Seppala, H. (2006). Macrolide and azithromycin use are linked to increased macrolide resistance in *Streptococcus pneumoniae*. *Antimicrob Agents Chemother*, 50(11), 3646-3650.
- Boëlle, PY. « Rôle de la modélisation mathématique dans l'étude de la résistance bactérienne aux antibiotiques ». MISE AU POINT, 2000.
- Broussouloux, S., & Lamoureux, P. (2007). Le développement de l'éducation à la santé à l'école. Situations de la France et du Québec. *Les tribunes de la santé*, 3(16), 61-68.
- Carlet, J. & Lecoq, P. (2015). Tous ensemble, sauvons les antibiotiques, rapport du groupe de travail spécial pour la préservation des antibiotiques. *Ministère des affaires sociales, de la santé et des droits des femmes*, 149 pages. Disponible sur http://www.socialsante.gouv.fr/IMG/pdf/rapport_antibiotiques.pdf.
- Coquidé, M., Fortin, C., & Lasson, Ch. (2010). Quelles reconfigurations curriculaires dans le cadre d'enseignement intégré de science et de technologie ? In: AREF, *Actes du congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation*. Université de Genève, Septembre.
- D'Agata EM., Dupont-Rouzeyrol, M., Magal, P., Olivier D, & Ruan, S. (2008). The impact of different antibiotic regimens on the emergence of antimicrobial-resistant bacteria. *PLoS ONE*, 3(12): e4036.
- El Hage, F., & Saab, O. (2007). L'éducation à la santé au Liban entre simplification et complexité. L'intégration du paradigme de la complexité dans l'éducation à la santé, à travers l'analyse des manuels scolaires libanais des sciences de la vie. *Actes de l'IOST*, Analyse critique des manuels de sciences.
- Giordan, A., & Souchon, C. (éds.) (2008). *Une éducation pour l'environnement vers un développement durable*. Paris : Delagrave.
- Jourdan, D. (dir.) (2004). *La formation des acteurs de l'éducation à la santé en milieu scolaire*. Toulouse : Édition Universitaires du Sud.
- Klein et al. (2018). Global increase and geographic convergence in antibiotic consumption between 2000 and 2015. *PNAS*, 115(15) 201717295.
- Kouki, A. (2015). *L'effet du réchauffement d'une question socio-scientifique sur l'apprentissage et l'argumentation des élèves : Cas des OGM en 3^{ème} année secondaire*, Mastère, ISEFC.
- Legardez, A & Simonneaux, L. (2006). *L'école à l'épreuve de l'actualité. Enseigner les questions vives*. Préface de Jean-Pierre Astolfi. Paris, pp. 21-22.
- Legardez, A. (2006). Enseigner des questions socialement vives. Quelques points de repères. In: Legardez & Simonneaux (dir.), *L'école à l'épreuve de l'actualité. Enseigner les questions vives*. Ed. ES éditeur. Paris. ISBN 2-7101-1770-3.
- Levin, BR. (2001). Minimizing potential resistance: a population dynamics view. *Clinical Infectious Diseases*, 33 (Suppl 3): S161-169.

- Manderscheid, J.C., & Pithon, G. (2000). Pédagogie de l'éducation à la santé en milieu scolaire. *Spirale* 25, 49-68. <http://spirale-edu-revue.fr/spip.php?article249>
- Martinand, J-L. (2003). L'éducation technologique à l'école moyenne en France : problèmes de didactique curriculaire. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 3(1), 100-116.
- Ministère de santé. Plan d'action national de lutte contre la résistance aux antimicrobiens en Tunisie. Tunisie, 2019. Disponible sur [Plan d'action National de lutte contre la résistance aux antimicrobiens en Tunisie 2019-2023 - Ministère de la santé publique \(rns.tn\)](#)
- Nikolaou, M. & Tam, V.H. (2006). A new modeling approach to the effect of antimicrobial agents on heterogeneous microbial populations. *J Math Biol*, 52(2), 154-182.
- O'Neill, J. et al. (2014). Antimicrobial Resistance : Tackling a crisis for the health and wealth of nations. *The Review on Antimicrobial Resistance*.
- OMS. (1997). *L'école et son rôle dans l'éducation sanitaire et la promotion de la santé en général*. Genève : OMS.
- OMS. (2015). *Plan d'action mondial pour combattre la résistance aux antimicrobiens*. Genève. Suisse.
- Opatowski, L. (2009). *Modélisation Mathématique de La Dynamique de Diffusion de Bactéries Résistantes Aux Antibiotiques : Application Au Pneumocoque*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie – Paris.
- Oulton, C., Dillon, J., & Grace, M. (2004). Reconceptualizing the teaching of controversial issues. *International Journal of Science Education*, 26(4), 411-424.
- Panissal, N., Jeziorski, A., & Legardez, A. (2016). Une étude des postures enseignantes adoptées lors des débats sur des questions socialement vives (QSV) liées aux technologies de la convergence (NBIC) menés avec des élèves de collège. *DIRE* 8. Disponible sur: <http://www.unilim.fr/dire/786>. Consulté le 9 septembre 2019.
- Perrenoud, PH. (1993). Curriculum : le réel, le formel, le caché. In Houssaye, J. (dir.). *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*. Paris, ESF, pp. 61-76. Disponible sur http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1993/1993_21.html. Consulté le 28 décembre 2018.
- Ploy, M-C., Andremont, A., Valtier, B., Le Jeune, C., Del Bano, J., Dumartin, C., Guillemot, D. et al. (2020). Antibiorésistance : outils pour une recherche translationnelle efficace. *Therapies*, 75, n° 1 (janvier 2020): 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.therap.2019.12.001>.
- Roberge, M.-C., & Choinière, C. (2009). *Analyse des interventions de promotion de la santé et de prévention en contexte scolaire québécois au regard de leur cohérence et de leur contribution à l'approche École en santé*. Québec : Institut national de santé publique du Québec.
- Roegiers, X. (2008). L'approche par compétences en Afrique francophone : quelques tendances ? http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Publications/Working_Papers/currcom_pet_africa_ibewpci_7.pdf
- Saab, O. et al. (2012). L'éducation à la santé dans le curriculum libanais des Sciences de la vie : l'impératif d'une réforme vers une approche écologique. *Revue de recherche en éducation*. 17p. Disponible sur : https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2012_num_50_1_1092.
- Simonneaux, J. (2011). *Les configurations didactiques des questions socialement vives économiques et sociales*. HDR, Université de Provence, Aix-Marseille, 199 p.
- Simonneaux, L. (2006). Quel enjeu éducatif pour les questions biotechnologiques ? in Alain Legardez & Laurence Simonneaux (Dir.) *L'école à l'épreuve de l'actualité. Enseigner les questions vives*. Éd. ESF éditeur. Paris. ISBN 2-7101-1770-3.
- Simonneaux, L. (2014). Chapter 6. Activist Science and Technology Education. In L. Bencze & S. Alsop (dir.): *From Promoting the Techno-sciences to Activism – A Variety of Objectives Involved in the Teaching of SSIs*. Springer.
- Toumi, S. (2015). Etats des lieux sur la consommation nationale des antibiotiques. Ministère de la santé. Direction de la Pharmacie et du médicament. Tunis. Disponible sur <http://www.dpm.tn/images/pdf/atelier170317/ws-atr-17-03-2017-cons-atb.pdf> [Consulté le 8 juin 2019].
- Whitehead, D., & Russel, G. (2004). « How effective are health education programmes : resistance, reactance, rationality and risk ? Recommendations for effective practice » – *International Journal of Nursing Studies*, 41, 163-172.

Zennir K., Allahem, A., Boulaaras, S., & Cherif, B. (2019). Develop mathematical models to control the diffusion of antibiotic resistant bacteria to avoid a serious public health hazard. *WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS*, 18, 97- 104.

Zineddine, D. (2009). *Perception des risques et argumentation sur une question socialement vive chez des étudiants en licence : Mise en débat d'un projet de loi sur les OGM*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse. Toulouse. 690 pages

ANNEXES

Annexe 1

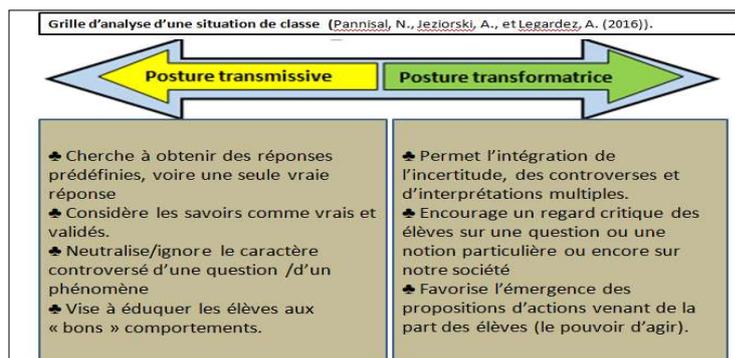
Grille 1: Exigences et recommandations scientifiques et didactiques

Exigences et recommandations	
A) Les Exigences et les recommandations scientifiques	
Les Exigences	Références (OMS, FAO et OIE)
Mieux faire connaître et comprendre le problème de la résistance aux antimicrobiens grâce à une communication, une éducation et une formation efficaces. Renforcer les connaissances et les bases factuelles par la surveillance et la recherche. Réduire l'incidence des infections par des mesures efficaces d'assainissement, d'hygiène et de prévention des infections. Optimiser l'usage des médicaments antimicrobiens en santé humaine et animale. Dégager les arguments économiques en faveur d'investissements durables qui tiennent compte des besoins de tous les pays et accroître les investissements dans la mise au point de nouveaux médicaments, outils diagnostiques, vaccins et autres interventions.	<i>OMS : Organisation Mondiale de la Santé</i> <i>Plan d'action mondial pour combattre l'antibiorésistance (2015)</i>
Sensibilisation du grand public et des professionnels de la santé. Développer les capacités des professionnels. Promouvoir les bonnes pratiques dans le système alimentaire et agricole ainsi que l'utilisation prudente des agents antimicrobiens. Renforcement de la gouvernance.	FAO: Food and agriculture organization of the United Nations. (Organisation des nations unies pour l'alimentation et l'agriculture)
Il y a des antibiotiques qui devraient être réservés à la médecine Humaine. Adopter une approche globale : Une seule santé ou « One health ».	OIE: World organisation for animal health (Organisation mondiale de la santé animale)
Interdiction de l'utilisation des antibiotiques comme facteur de croissance.	OMS, FAO et OIE
B) Les Exigences et les recommandations didactiques	
2.1 Exigences et recommandations didactique liés à l'éducation à la santé	Références (Saab, Berger, El Hage, 2012)
Selon l'Unesco et Unicef, un curriculum national conçu selon l'approche par compétences devrait insister principalement sur les « compétences de vie » et le « vivre ensemble en société », orientés vers le développement d'attitudes citoyennes, le respect de l'environnement, la préservation de sa santé et de celle d'autrui.	(Roegiers, 2008)
L'expérience a montré l'inefficacité de l'éducation à la santé basée sur une approche analytique biomédicale qui se limite à la transmission des informations sur la santé et qui se résume en une énumération d'interdits.	(Manderscheid et Pithon 2000)
Les professionnels en Sciences de l'éducation reconnaissent qu'informer n'induit nécessairement pas un changement conceptuel et que fournir des messages basés sur les risques et les dangers peut induire à un contre effet et renforcer les mauvais comportements.	(Giordan et Souchon, 2008 ; Whitehead et Russel, 2004)
La tendance actuelle en éducation à la santé consiste à concevoir des interventions contextualisées, ciblées, et conçues selon une approche écologique biopsychosociale qui vise le développement de compétences cognitives, méthodologiques et psychosociales.	(Roberge et Choinière, 2009)
Les programmes d'éducation à la santé en milieu scolaire doivent être conçus selon une approche écologique biopsychosociale et une logique interdisciplinaire développant des compétences de résolution de problèmes conformes aux principes du paradigme de la complexité et répondant ainsi aux problèmes de santé du réel vécu.	(El Hage et Saab 2007)

Pour être efficace, les programmes doivent remplir trois conditions : être inscrits dans la durée, agir simultanément sur plusieurs facteurs et faire appel à la participation active et interactive des élèves.	(Broussouloux et Lamoureux, 2007)
Les interventions ayant une approche écologique sont les plus recommandées et ceci depuis 1996, suite au développement du concept d'« école promotrice de la santé » préconisé par l'Organisation Mondiale de la Santé et adopté dans certains pays européens, aux États-Unis et au Québec.	(Deschesnes et Lefort, 2004 cité par Saab, 2012)
Selon les professionnels de la santé, les thèmes relatifs à l'éducation à la santé abordés en classes devraient être repris chaque année, en une sorte de spirale ascendante tenant compte de l'acquisition des connaissances et de la maturité croissante des apprenants.	(Jourdan, 2004)
Le manque d'information et la réduction des connaissances transmises entravent l'adoption des habitudes de vie saines.	(Berthet et Parada, 2006 cité par Saab, 2012)
La prise en compte de la complexité dans la transposition des thèmes relatifs à la santé.	(Bantuelle et Demeulemeester, 2008 ; Patel et al., 2009 cité par Saab, 2012)
Apprécier les enseignants et le personnel scolaire à leur juste valeur et leur fournir le soutien nécessaire pour qu'ils puissent travailler à la promotion à la santé. Les programmes de santé scolaire devraient être conçus surveillés et évalués pour garantir leur succès et les résultats souhaités.	OMS (Genève, 1997, p. 94)
2.2 : Exigences et recommandations didactique liés aux QSSV	Références
Renforcer l'activisme dans les contextes communautaires (prévention, sensibilisation, usage).	Sadler et al., 2007 ; Hodson, 2011 cité par Kouki, 2015
Prendre conscience du risque des applications abordées.	Oueslati-Smadhi, 2009
Favoriser une éducation scientifique citoyenne des élèves.	Simonneaux, 2010, Bayrhuber, 1999 ; Oueslati-Smadhi, 2009 ; Molinatti, 2010 cité par Kouki, 2015
La perception des risques.	Zineddine, 2009
Identifier la tension dans la sphère scientifique et académique.	Simonneaux, 2006
Le traitement des QSV controversées exige une neutralité de l'enseignant.	Oulton et al, 2004
La reproblématisation est une étape centrale dans la construction d'un savoir scolaire légitime tel que « l'éducation à ».	Alpe et Barthes, 2013
Le traitement des QSVE nécessite beaucoup de vigilance en raison de leur complexité et leur interdisciplinarité.	Simonneaux et al., 2014

Annexe 2

Grille 2: Grille d'analyse d'une situation de classe (Pannisal, N., Jeziorski, A., et Legardez, A. (2016)).



ÉTUDE COMPARATIVE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES DANS UN COURS SUR LE THÉORÈME DE THALÈS

Slim MRABET*

Abstract – The work of our Postgraduate diploma has shown that Thales theorem is a multifaceted concept, characterized by a variety of statements, figures and applications. A survey of Tunisian teachers showed a divergence in their conceptions about the school life of our concept. This motivated us to enter to 1st grade classes to discover the real difficulties they face in a lesson on Thales theorem. A return to school textbooks and certain research in didactics provided us with the tools necessary for the analysis of our classroom observation, especially for the figures and forms of Thales statements. The conclusion shows that although the textbook is unique, the teaching in two 1st S classes can be markedly different.

Key-words: Thales theorem, conceptions, figure, Thales statement, classroom observation.

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de rappeler brièvement des résultats d'un travail antérieur (Mrabet, 2010) ayant pour thème le théorème de Thalès et de les consolider à partir d'observations de classe. Une enquête que nous avons menée dans notre mémoire de DEA a permis d'analyser des choix que font des enseignants tunisiens sur les formes, les énoncés et les figures de Thalès. L'analyse des manuels de 9^{ème} année de base (9^{ème} B) et de 1^{ère} année secondaire (1^{ère} S) a montré que les différentes approches de ce théorème ne sont pas représentatives du concept de manière uniforme, et a permis de cerner l'espace de variation des configurations associées. Ces résultats nous ont conduit à aller dans des classes de 1^{ère} S et à assister à des cours sur le thème du théorème de Thalès. Ces observations de classe ont des objectifs multiples :

- Analyser les énoncés du théorème de Thalès effectivement enseignés en classe et les environnements mathématiques dans lesquels ils s'insèrent ;
- Délimiter l'espace de variation des figures de Thalès ;
- Analyser le topos dévolu à l'élève dans le cours sur le théorème de Thalès.

Nous tentons de montrer que suivant ces axes, bien que le manuel scolaire soit unique, l'enseignement dans deux classes de 1^{ère} S peut être nettement différent.

I. LES APPROCHES DU THORÈME DE THALÈS

Parmi la variété d'énoncés et de formes différentes du théorème de Thalès et des objets ostensifs divers qui leurs sont attribués, nous nous limitons dans notre analyse aux énoncés qui satisfont aux classifications de Brousseau (1995) ou celle de Duperret (1995). Nous nous contentons donc des énoncés plans et nous rappelons qu'il s'agit de deux approches essentielles : l'« homothétie » et la « projection ». Dans une figure formée de deux sécantes coupées par des parallèles, la deuxième approche se sépare en deux aspects : la « conservation des abscisses » et la « conservation du rapport de projection » suivant que, dans l'écriture de chaque rapport, nous considérons les segments choisis sur la même sécante ou sur les deux sécantes.

La figure caractéristique de Thalès dans un triangle semble être statique alors qu'elle cache deux dynamiques qui ont pu la faire naître (Duperret, 1995) :

*Université de Carthage - Tunisie - mrabet_slim@yahoo.fr

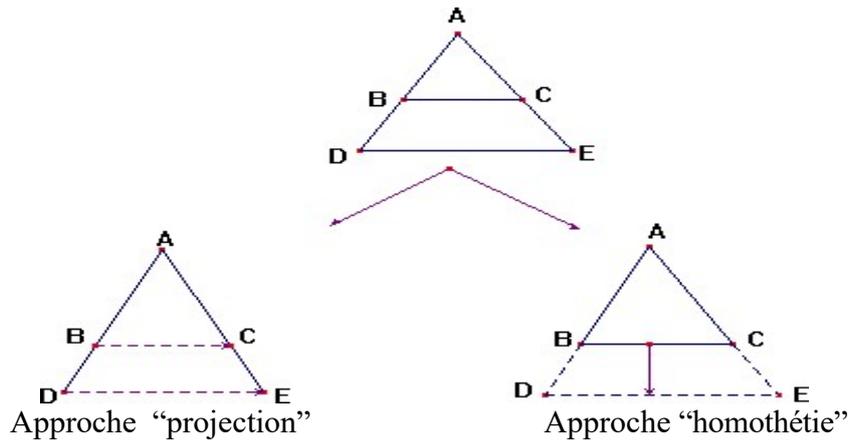


Figure 1 - Les approches du théorème de Thalès

L'approche "homothétie" propose des égalités de rapports relatives à deux triangles semblables: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

En écriture vectorielle, elle est définie par la relation: si $\vec{AB} = k\vec{AD}$ alors $\vec{AC} = k\vec{AE}$

Brousseau (1995) distingue deux cas dans l'aspect « projection » suivant que dans chaque rapport, on choisit les longueurs des segments d'une même droite ou celles d'une droite et de leurs images sur l'autre droite (Figures 2 et 3):

« La conservation des abscisses sur les sécantes »

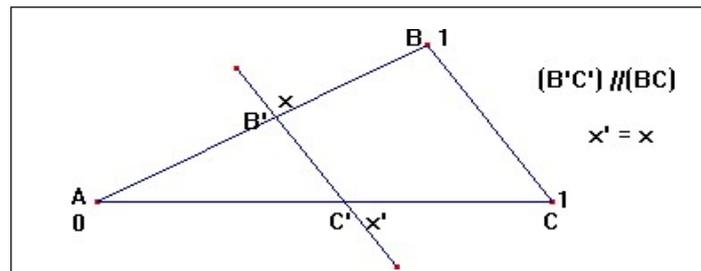


Figure 2 - L'approche « conservation des abscisses »

Nous avons : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$

En écriture vectorielle : si $\vec{AB} = k\vec{AB'}$ alors $\vec{AC} = k\vec{AC'}$

« La conservation du rapport de projection »

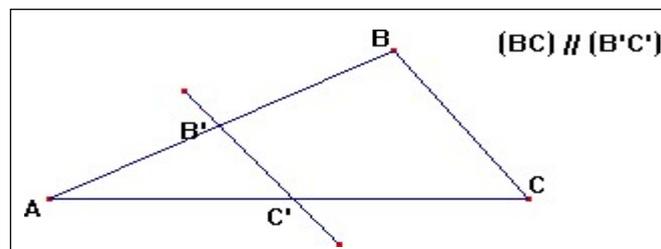


Figure 3 - L'approche « conservation du rapport de projection »

Nous avons $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

II. LES FIGURES DE THALÈS

Le travail de J. et F. Cordier (1991) a relevé trois variables essentielles des configurations de Thalès :

- l'angle des deux sécantes (aigu ou obtus) ;
- la disposition des parallèles (du même côté ou de part et d'autre du point d'intersection des sécantes) ;
- le nombre de parallèles envisagées.

Dans les observations de classe que nous faisons, nous analysons l'espace que l'enseignant réserve à la variation des figures de Thalès et le rôle qu'il donne à un changement de figure. Nous observons les trois variables de figure citées plus haut. Pour la variable: nombre de parallèles, nous précisons s'il s'agit de droites parallèles ayant une même direction ou de droites parallèles de deux ou plusieurs directions. Nous parlons dans ce dernier cas de familles de droites parallèles.

Nous répartissons l'ensemble des figures caractéristiques du théorème de Thalès en trois **catégories**: triangle, « triangle étendu » et « parallèles et sécantes ». Dans chaque catégorie il y a deux **types** de figures :

➤ **typique:**

- s'il s'agit d'un triangle avec nombre de parallèles à l'un des côtés ≤ 2 , un nombre de sécantes égal à 2 ; un angle aigu. Dans ce cas, nous distinguons les cas **triangle classique** si le point d'intersection des sécantes est du même côté par rapport aux parallèles, et **triangle papillon** si le point d'intersection des sécantes est entre les parallèles.
- s'il s'agit de « parallèles et sécantes » avec 2 sécantes et un nombre de parallèles égal au plus à 3, appartenant à une même famille de parallèles, angle aigu.

Cette catégorie inclut les cas suivants:

- le point d'intersection des sécantes existe et visible, ce qui correspond à la catégorie « triangle étendu » (cas 1 ou cas 2);
- le point d'intersection des sécantes existe et il n'est pas visible (cas 3);
- le point d'intersection des sécantes est inexistant (cas 4);

➤ **non typique** dans tous les autres cas.

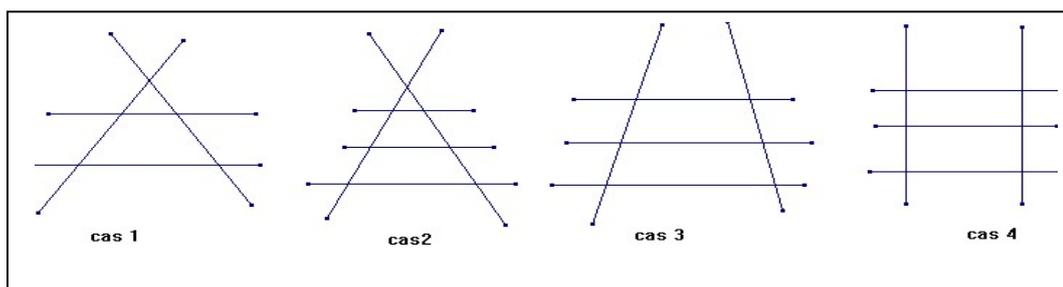


Figure 4 - Les figures de Thalès

III. ANALYSE DES MANUELS SCOLAIRES

Dans l'enseignement actuel, le théorème de Thalès est rencontré pour la première fois en 9^{ème} B, où seul le sens direct est présenté. Il est revu à deux moments : en 1^{ère} S avec l'ajout du sens réciproque, et en 2^{ème} S en profitant de l'arrivée des vecteurs. Dans le présent travail, nous nous intéressons à la transition collège-lycée, et donc nous ne traitons que les énoncés dans les manuels scolaires de 9^{ème} année de base (édition 2002), et de 1^{ère} année secondaire (édition 2003). Dans ces deux supports, les cours sur le théorème de Thalès s'appuient sur les notions

de projection et de proportionnalité. Ces deux notions sont introduites en 9^{ème} année de base : la notion de projection sur une droite selon une direction donnée apparaît au chapitre 10 intitulé "Repérage dans le plan" (p.118), précédant la leçon sur le théorème de Thalès, alors que la proportionnalité fait partie du chapitre 4 intitulé "Les quotients des nombres réels" (p.40).

1. Le manuel de 9^{ème} année de Base

Dans le cours de 9^{ème} B, l'approche principale du théorème de Thalès est la « projection ». L'« homothétie » vient en « application dans un triangle » de la première approche, supposée donc plus générale.

Le premier énoncé du théorème de Thalès est le suivant (page 137) :

"Soient deux droites du plan D et D' et A, B et C trois points distincts de D . Si A', B' et C' sont respectivement les projetés de A, B et C sur D' selon une direction différente de celle de D et de celle de D' , alors on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad "$$

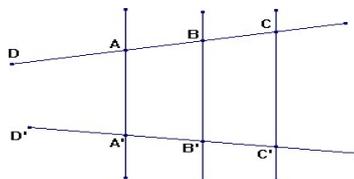


Figure 5 - Premier énoncé de Thalès en 9^{ème} B

Un deuxième énoncé relatif à la même approche est proposé (p.138):

"Soient deux droites du plan D et D' et A, B et C trois points distincts de D . Si A', B' et C' sont respectivement les projetés de A, B et C sur D' selon une direction différente de celle de D et de celle de D' , alors on a : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad "$

Les hypothèses sont les mêmes, mais la conclusion a changé.

Le théorème de Thalès appliqué au triangle est introduit par la suite à l'aide d'une nouvelle activité. Il est énoncé comme suit (p.140) :

"Si ABC est un triangle et M est un point de (AB) et N est un point de (AC) tel que (MN) est

parallèle à (BC) , alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

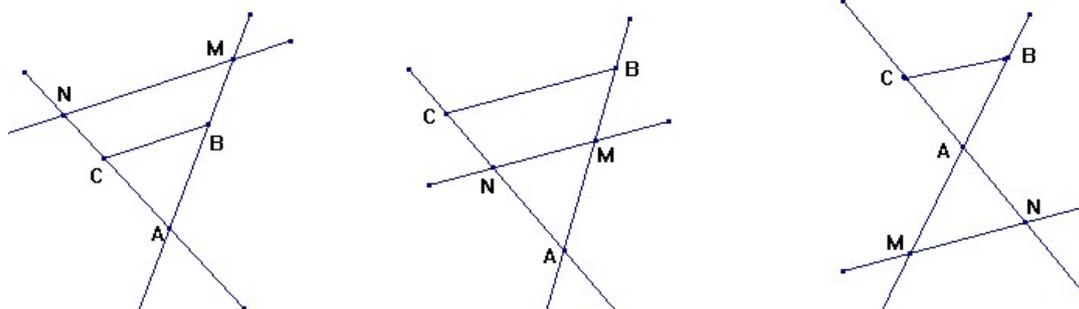


Figure 6 - Enoncé de Thalès dans un triangle en 9^{ème} B

2. Le manuel de 1^{ère} année secondaire

Le manuel actuel de 1^{ère} année secondaire, paru en 2003, modifie profondément les formes et

l'environnement du théorème de Thalès tels qu'ils étaient dans le manuel de 9^{ème} B ou dans le manuel de 1^{ère} S de 1997 et en propose une nouvelle version. Avant de comparer les contenus enseignés, précisons la place de ce concept dans le manuel de 1^{ère} S (de 2003): il est introduit au second chapitre de la partie « géométrie » après les travaux sur les angles.

La partie sur les vecteurs est renvoyée au chapitre 4, après la leçon sur les rapports trigonométriques qui, elle, suit la leçon sur le théorème de Thalès.

Le sens direct (p. 28)

Le théorème de Thalès dans le sens direct est énoncé comme suit:

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A,

M un point de (AB) et N un point de (AC).

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

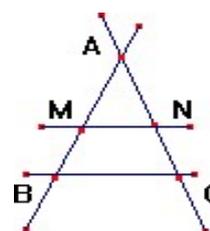


Figure 7 - Énoncé de Thalès en 1^{ère} S

L'approche suivie est l'« homothétie » à partir de la correspondance choisie dans le choix des segments bien qu'on parle de « droites sécantes ». L'approche « projection avec ses deux aspects » conservation des abscisses » et conservation des « approches de projections » disparaissent du cours.

Par rapport au manuel de 9^{ème} B, le nouveau manuel de 1^{ère} S de 2003 redonne vie à l'approche « homothétie » dans le sens direct du théorème de Thalès bien qu'on parle dans l'énoncé de « droites sécantes » au lieu de triangle. D'ailleurs, nous pouvons dire que, c'est quasiment la seule approche mobilisée dans les activités, dans la partie relative aux énoncés des théorèmes et dans les exercices de fin de chapitre.

Dans la rubrique « Retenir » (p. 28) où sont regroupés les différents objets de savoir institutionnalisés, apparaît un seul énoncé du théorème de Thalès intitulé : théorème de Thalès dans un triangle. Les énoncés vus en 9^{ème} B ne sont rappelés (traduits) nulle part. La figure associée est de catégorie « triangle étendu », alors que le choix des segments est conforme à l'« homothétie ». Dans ce manuel, les catégories de figure « triangle » et « parallèles et sécantes » (ou triangle étendu) sont confondues, et l'énoncé proposé à retenir ne suit pas un point de vue unique, quoique le titre indique que c'est le point de vue euclidien qui est visé. Dans les activités relatives au sens direct, l'énoncé utilisé est de type « homothétie » dans une catégorie de figure : « triangle ». Dans certains exercices, sont utilisées deux couleurs différentes pour les deux « triangles de Thalès » pour mettre en avant l'idée du passage d'un triangle à l'autre. Les énoncés relatifs à l'approche « projection » interviennent implicitement dans les applications de partage d'un segment dans une proportion donnée sans qu'une référence explicite, au niveau des énoncés, ne leur soit attribuée.

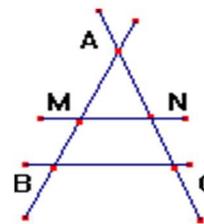
Le sens réciproque (p. 28)

Précisons que le mot « réciproque » renvoie souvent à un problème de logique relatif à la signification même de ce mot. Le programme de 1^{ère} S (2003) évoque ce point en demandant de faire la distinction entre une implication et une équivalence. Il nous semble que pour un élève en début d'apprentissage du raisonnement déductif, l'initiation à l'utilisation de la réciproque d'une propriété ne va pas de soi. Par exemple, devant un problème qui fait appel au théorème de Thalès, il doit choisir entre deux propriétés : le sens direct et la réciproque. Si l'on veut qu'il réussisse à faire le bon choix, il est nécessaire de lui apprendre explicitement la signification de ces notions (Mrabet, 2004).

Analysons les trois énoncés du sens réciproques proposés dans le manuel de 1^{ère} S (2003), tous relatifs à une figure de catégorie « triangle étendu ».

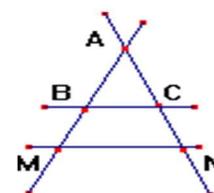
Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de [AB] et N un point de [AC] tous deux distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles



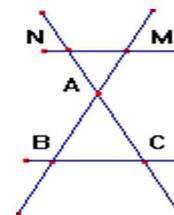
Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A tels que B appartient à [AM] et C appartient à [AN]

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles



Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A tels que A appartient à [BM] et A appartient à [CN]

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles



En 2003, le sens réciproque du théorème de Thalès est proposé dans une nouvelle version. L'approche « homothétie » est encore dominante dans le choix des segments, mais la figure associée est de catégorie « parallèles et sécantes » (ou triangle étendu). Dans le manuel de 1^{ère} S qui le précède, l'énoncé du théorème de Thalès est formulé avec des mesures algébriques, ce qui veut dire qu'un seul énoncé est associé à trois types de figure suivant la position des points. Ceci nous a poussé, dans notre mémoire de DEA, à poser des questions quant aux difficultés dues au fait qu'il existe des figures différentes caractéristiques du même énoncé. La difficulté chez l'élève est de pouvoir appliquer le même théorème sur une autre figure également caractéristique de l'énoncé. Cette compétence requiert un travail d'abstraction du théorème qui n'est pas facile. Ce problème qui existe pour les deux sens, apparaît plus clairement dans la réciproque. En effet, dans le sens direct, le parallélisme de droites est une propriété puissante, et les points A, B, C et A', B', C' sont d'autorité placés dans le même ordre.

Par rapport à un énoncé formulé à l'aide des distances, les mesures algébriques ont l'avantage d'éviter d'indiquer que les points sont placés dans le même ordre, une précision qui devient nécessaire si la réciproque est formulée à l'aide des distances (cas du manuel de 2003). Cependant, les mesures algébriques nécessitent d'autres compétences : elles renvoient à des réels éventuellement négatifs en mobilisant les notions d'axes orientés et d'abscisses de points.

IV. LES OBSERVATIONS DE CLASSE

Nous avons souhaité compléter notre analyse des manuels et nos résultats du DEA en nous plaçant du point de vue de l'élève, et avons donc décidé d'analyser l'enseignement du théorème de Thalès effectif en classe et d'identifier précisément les difficultés réellement rencontrées par les élèves. Ainsi, nous nous sommes allés dans des classes de 1^{ère} S pour observer des séances d'enseignement portant sur le chapitre 2 : Le théorème de Thalès et sa réciproque.

- La première est une classe d'un lycée de la région de Zaghuan. L'enseignant de cette classe (enseignant Z) a une ancienneté dans l'enseignement de plus de vingt ans; une ancienneté d'une année dans l'enseignement de la 1^{ère} S actuelle ; il n'a jamais enseigné la 1^{ère} S ancienne. Pour ce qui concerne ses connaissances sur l'enseignement en 9^{ème} B, il dit qu'il connaît bien le programme de ce niveau, mais il ne l'a jamais enseigné.

- La deuxième est une classe d'un lycée de Tunis. L'enseignante de cette classe (enseignante T) a une ancienneté dans l'enseignement de 9 ans, une ancienneté d'une année dans l'enseignement de la 1^{ère} S actuelle et de même pour la 1^{ère} S ancienne. Pour ce qui concerne ses connaissances sur l'enseignement en 9^{ème} B, elle dit qu'elle ne connaît pas le programme de ce niveau et qu'elle ne l'a jamais enseigné.

1. Comparaison des approches du théorème de Thalès

Nous menons une comparaison entre les deux enseignants suivant les deux axes que nous avons fixés : les approches et les figures de Thalès.

L'enseignant Z

Pour l'enseignant Z, aussi bien pour le sens direct que pour la réciproque, plusieurs types d'énoncé coexistent dans le cours. L'enseignant ne suit pas le manuel qui limite les énoncés au triangle, dans une correspondance unique, celle de l'« homothétie », et accorde beaucoup d'importance à faire varier les choix des segments choisis sur les sécantes. Il fait en sorte que l'élève ne retienne pas une seule forme de l'énoncé. Pour introduire le théorème de Thalès, l'enseignant fait un aperçu historique en rappelant la légende de la mesure de la grande pyramide. L'enseignant ne met pas au même niveau d'importance les différents énoncés du théorème de Thalès. Pour lui, l'énoncé principal est de type « conservation des abscisses ». L'énoncé relatif à un triangle qui fait appel aux troisièmes côtés des triangles n'est qu'une application, alors que l'énoncé de type « conservation du rapport de projection » a été interdit dans la première séance, précisant qu'il **n'est pas du tout un énoncé de Thalès**, puis toléré et institutionnalisé dans la troisième séance comme étant une autre forme du théorème de Thalès. Pour introduire le sens réciproque, l'enseignant se sert du sens direct dans une correspondance de type « conservation des abscisses ». Il décompose cet énoncé en trois énoncés, chacun est relatif à une figure différente des autres, reprend la propriété directe de « la droite des milieux » comme un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès et montre la nécessité de chacune des conditions nécessaires à l'application de l'énoncé.

Le sens réciproque est étudié dans trois versions, chacune est caractérisée par une figure et sans soulever le problème logique sous-jacent.

Dans la dernière séance, l'enseignant fait allusion à un énoncé utilisant les mesures algébriques ou les vecteurs, et précise aux élèves qu'un énoncé plus général sera vu dans les années prochaines.

A la fin de ce chapitre, nous avons senti que les élèves n'ont pas saisi, parmi les énoncés divers qu'ils ont vus, les moments d'utilisation de chacun, ni ceux qui sont autorisés et ceux qui sont interdits.

L'enseignante T

L'enseignante qui n'a pas d'idée sur ce que les élèves ont vu en 9^{ème} B, limite l'énoncé du théorème de Thalès à une seule approche, celle de l'homothétie. Pour le formuler, elle reprend intégralement l'énoncé du manuel, et aucune allusion à un énoncé de type « conservation des abscisses » ou « conservation du rapport de projection » dans une figure « parallèles et sécantes » n'est faite, même dans une question qui appelle les droites graduées et les abscisses des points, ce qui n'était pas le cas pour l'enseignant Z. Dans l'écriture des rapports, l'enseignante se limite à une seule égalité, celle qui met en évidence le passage d'un triangle à l'autre.

Le sens réciproque du théorème de Thalès est démontré à partir d'une activité qui utilise le sens direct et la contraposée d'une propriété. Cette activité a entraîné des confusions nettes chez les élèves qui se trouvent face à trois énoncés : le sens direct, la réciproque et sa contraposée.

Pour introduire l'énoncé de la réciproque du théorème de Thalès, l'enseignante passe par l'énoncé de type « homothétie » dans le sens direct. Elle utilise cet énoncé dans une catégorie : « parallèles et sécantes », **interdit le mot triangle dans l'énoncé**, et explique que l'énoncé du théorème de Thalès n'est pas forcément dans un triangle.

Pour le sens réciproque, deux énoncés sont donnés, chacun est relatif à une figure, et l'enseignante met l'accent sur l'ordre des points.

2. Comparaison des figures de Thalès

L'enseignant Z

L'énoncé général du théorème de Thalès étant de type « conservation des abscisses », la figure associée est de type : « parallèles et sécantes ». La remarque de décontextualisation au niveau des égalités de rapports est également à redire pour les figures : quand il s'agit d'une figure de catégorie « triangle », l'enseignant revient à la catégorie supposée générale et fait des allers-retours entre les deux catégories. Nous trouvons un cas de figure non typique de type : « parallèles et sécantes », contenant trois sécantes où le point d'intersection des sécantes est invisible, alors que la question est relative à un triangle :

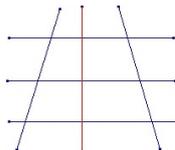


Figure 8 - Figure non typique de Thalès en 1^{ère} S

L'enseignant dit qu'il suffit de considérer à chaque fois deux sécantes pour appliquer le théorème de Thalès.

Au niveau des variables, nous trouvons une figure avec « plusieurs parallèles » appartenant à une même famille de parallèles dans le cas général relatif à un énoncé de type « conservation des abscisses », des cas (rares) où il faut isoler une ou des sous-figures ou ajouter une sur-figure, ou le cas d'un angle obtus ou le cas d'un triangle papillon. Dans ce cours, on a rarement trouvé une figure de Thalès plongée dans une figure plus complexe.

L'enseignante T

Dans le sens direct, l'énoncé utilisé est de catégorie « triangle », alors que dans le sens réciproque, les deux catégories : « triangle » et « parallèles et sécantes » coexistent.

Les variables de figure sont peu mobilisées, et les figures utilisées sont le plus souvent typiques : l'angle des sécantes est toujours aigu, le nombre de parallèles n'a pas dépassé 2, et le nombre de sécantes a dépassé 2 dans une seule occasion.

L'enseignante propose parfois une figure de catégorie « parallèles et sécantes » (ou triangle étendu) sous le titre « théorème de Thalès dans un triangle », et dans certains cas elle utilise une figure de catégorie « triangle ». Aucune différence entre les catégories de figure « triangle », « triangle étendu » et « parallèles et sécantes » n'est prise en compte.

Notons aussi que dans toute la séquence que nous avons observée, nous ne trouvons que deux cas de figures « papillon », l'angle des sécantes reste toujours aigu.

Au niveau des conséquences sur l'apprentissage des élèves dans les deux classes visitées, nous nous limitons dans ce travail à faire les deux remarques suivantes :

- Les élèves font des confusions nettes entre des éléments différents du cours : les deux sens du théorème de Thalès, le type de figure pertinent, ce qui est demandé de ce qui est cherché, les cas où on a besoin de deux ou de trois égalités, les cas où les points doivent être pris sur des segments ou sur des droites. A titre d'exemple, nous avons rencontré des cas où un élève utilise le parallélisme de droites pour montrer une égalité de rapports puis déduire le parallélisme de ces mêmes droites. Cet exemple, qui relève d'un problème d'ordre logique, montre la confusion que fait cet élève entre l'hypothèse et la conclusion de la question.
- Les élèves ont tendance à généraliser un énoncé dont le champ de validité est limité à une catégorie de figures, à une autre catégorie de figures. Ils oublient souvent de vérifier la condition de « l'ordre des points » pour appliquer la réciproque du théorème de Thalès.

CONCLUSION

Ce travail permet de montrer qu'au niveau des énoncés, pour les enseignants, les différentes approches du théorème de Thalès ne sont pas également représentatives du concept, et que parfois les enseignants eux-mêmes hésitent aussi bien sur les approches qu'ils vont enseigner que sur l'ordre de ces approches. En conséquence, nous avons senti à la fin des observations des séquences observées, que les élèves des deux classes visitées ne retiennent pas les mêmes énoncés, ni les mêmes figures associées.

La catégorie de figure relative à l'énoncé principal du théorème de Thalès diffère d'un enseignant à l'autre, et le passage entre les catégories de figure est passé sous silence et supposé comme allant de soi pour les élèves. Par exemple, quand la catégorie de figure « triangle étendu » est utilisée, elle est interprétée différemment par les deux enseignants. Dans les deux classes, les variables de figure sont peu mobilisées, les enseignants ont tendance à préférer les exemples typiques, vu qu'ils sont moins coûteux en temps d'apprentissage.

La figure typique du théorème de Thalès que nous avons déduite est la suivante:

Catégorie : triangle étendu, 2 parallèles, 2 sécantes, angle aigu des sécantes, point d'intersection des sécantes du même côté par rapport aux parallèles.

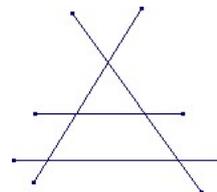


Figure 9 - Figure typique de Thalès en 1^{ère} S

En Tunisie, bien que le manuel scolaire d'un même niveau soit unique, l'enseignement effectivement reçu par les élèves des deux classes observées peut être nettement différent.

La part d'implicite dans le programme semble être un facteur qui explique cette différence. Nous pensons que cette hypothèse mérite d'être vérifiée.

REFERENCES

- Bkouche (1995). Autour du théorème de Thalès : variation sur les liens entre le numérique et le géométrique, in "Autour de Thalès". *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle*, pp. 7- 67.
- Brousseau, G. (1995). "Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université". In "Autour de Thalès". *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle*, pp. 87-124.
- Duperret, J.C. (1995) "Pour un Thalès dynamique". In "Autour de Thalès". *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle*, pp. 125-144.
- Mrabet, S. (2004). *Quelles conceptions ont les enseignants tunisiens du collège et du lycée sur le théorème de Thalès ?* Mémoire de DEA : Université de Tunis.
- Mrabet, S. (2010). *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*. Thèse de doctorat : Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).

Manuels scolaires

- Manuel Tunisien (2003). Mathématiques, 1^{ère} année de l'enseignement secondaire. Centre National Pédagogique.
- Manuel Tunisien (1999). Mathématiques, 9^{ème} année de base. Centre National Pédagogique.
- TUNISIE 2003, Programmes Mathématiques 1^{ère} année et 2^{ème} année secondaire. Ministère de l'Education et de la formation. Direction des programmes et des manuels scolaires, Tunis.

CATÉGORISATION DE QUELQUES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ

Mohamed Wardi OUNI* - Slim MRABET**

Abstract - The objective of this work is to contribute to research that highlights the importance of the conceptualization process. We focus on a central theme at the end of primary school and throughout middle school: proportionality, and on certain types of problems that characterize it. We start from an observation that challenged us: the ideas that govern the variation of these problems do not seem to be clear. Thus, in this work, we try to wonder about how to categorize these problems. We place ourselves in the context of Tunisian primary school, propose a set of situations that fall under proportionality in which we vary the data according to a logic that we explain, and provide teachers with a new categorization approach. We use representations in the form of tables which can have the dual role of allowing students to better understand the relationships between data and unknowns, and of helping teachers to unify certain resolution procedures.

Keywords: Conceptualization, proportionality, problems, categorization, procedures.

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Après une longue expérience avec le système d'enseignement tunisien, nous partons dans ce travail de notre inquiétude quant aux faibles résultats de nos élèves de 6^{ème} année du premier cycle de l'enseignement de base tunisien (élèves de 11 à 12 ans) en mathématiques, dans le concours d'accès aux collèges pilotes. A l'instar de beaucoup d'enseignants, nous nous sommes posé la question des raisons qui expliquent ces résultats. Des difficultés de traiter une situation de proportionnalité, de mettre en œuvre des stratégies de sa résolution et de délimiter des relations entre les concepts qui entrent en jeu, sont au cœur de cette question puisque le thème de proportionnalité est souvent central dans ces concours. Mais d'autres facteurs pourraient également intervenir relativement aux situations présentées à l'apprenant, et aux efforts fournis par les enseignants pour apprendre aux élèves à choisir des pistes adéquates de résolution. Après plusieurs années d'enseignement de ce niveau, nous pouvons affirmer que les élèves éprouvent en général, des difficultés notables liées à ce thème, et que certains enseignants ont du mal à expliquer à leurs élèves les procédures de résolution d'une manière claire et accessible à tous. Ainsi, nous rejoignons deux questions de Vergnaud (1994) :

- Peut-on trouver des schèmes pour regrouper ces problèmes dans des classes bien déterminées afin d'unifier les procédures de leur résolution ?
- Peut-on utiliser les représentations graphiques, les nombres de données et d'inconnues dans une situation pour mieux comprendre les relations qu'entretiennent les données et les inconnues et regrouper celles qui se ressemblent ?

I. METHODOLOGIE

Pour creuser cette question, nous avons consulté et analysé quelques sujets de mathématiques proposés dans ce concours, tout en mettant l'accent sur le thème de proportionnalité. Nous avons regroupé les épreuves de cinq concours proposés durant les années de 2007 à 2011, à raison de 3 problèmes par concours. Parmi les 15 problèmes retenus, 5 relèvent de la proportionnalité (grandeurs de l'espace de mesures M_1 exprimées en pourcentages). Nous avons procédé à une représentation sous forme de tableaux de toute situation de proportionnalité, précisant à chaque fois ce qui est donné et ce qui demandé, et expliquant les moyens de passage d'une

* CRE de Sousse, Ep boussina2 - Tunisie - ouniwardi@yahoo.fr

** Université de Carthage – Tunisie – mrabet_slim@yahoo.fr

représentation sous forme de tableaux aux procédures de résolution. Nous nous inspirons des travaux de Vergnaud (1990) pour mettre en avant le lien entre les données du problème et les conséquences sur l'apprentissage des élèves. Les données et les inconnues de chaque problème sont ainsi réparties sur 9 tableaux en faisant une classification croisée entre 3 colonnes et 2 lignes.

Dans les problèmes que nous traitons, nous avons toujours une donnée initiale, exprimée soit en pourcentage (ligne 1, colonne 1), soit en valeur réelle qui correspond à ce pourcentage (ligne 2, colonne 1), qui va subir soit une augmentation, soit une diminution. La forme générale des deux tableaux obtenus est la suivante où M_1 correspond aux grandeurs exprimées en pourcentages et M_2 aux valeurs correspondantes à ces grandeurs :

	L'initial	Augmentation	L'initial + Augmentation
M_1	100%	a%	b%
M_2	x	y	z

Tableau 1 - Avec augmentation

	L'initial	Diminution	L'initial - Diminution
M_1	100%	a%	b%
M_2	x	y	Z

Tableau 2 - Avec diminution

II. CADRE THÉORIQUE

En didactique, le travail sur les problèmes arithmétiques est un enjeu fort de l'enseignement mathématique de l'école. Le défi est de comprendre ce qui se joue pour le sujet dans la résolution, notamment cette dialectique (mentale) entre trouver une stratégie efficace dans la mémoire de l'élève des problèmes analogues, et l'élaboration d'une nouvelle stratégie si le problème n'est pas lié à une ancienne stratégie connue (Houdement, 2017). Les plus liés à notre sujet sont ceux qui mettent en évidence les procédures de résolution et/ou l'importance de la représentation graphique.

Vergnaud (1991) a développé l'analyse de la structure mathématique du problème de proportionnalité, à savoir les relations qui entretiennent les questions et les différentes données de l'énoncé, et a souligné l'importance du concept d'homomorphisme dans l'analyse des rapports entre le réel et sa représentation, tant dans la conceptualisation que dans la symbolisation. Il relie le problème de la sélection des éléments avec les opérations de pensée nécessaires à la lecture d'une représentation graphique, qui permettent de dégager sans ambiguïté les résolutions numériques. D'autre part, il pose le problème de la relation entre le rapport signifiant/signifié et l'organisation de la représentation spatiale d'un concept scientifique. Cette dernière va aider non seulement à représenter les relations, mais aussi à faire le passage de la représentation du problème à celle de sa solution. Sur ce point, Neshet (1988) a demandé à 46 élèves âgés de douze ans de représenter systématiquement par écrit les quatre termes appartenant aux deux espaces de mesure d'un ensemble de huit problèmes multiplicatifs complexes. La réussite augmente alors de manière spectaculaire, en passant de 38% à 73%. Sur ce point, Levain (1992) a présenté 50 problèmes multiplicatifs à un échantillon composé de 46 élèves de CM2. Les résultats montrent que la structure du problème détermine dans une large mesure la réussite ou l'échec des élèves. Pour la classification des problèmes, il remarque que les énoncés relevant d'une même structure mathématique appartiennent à une même classe de problèmes et que, en fonction de la valeur recherchée, une même classe de problèmes pourrait se subdiviser en plusieurs catégories.

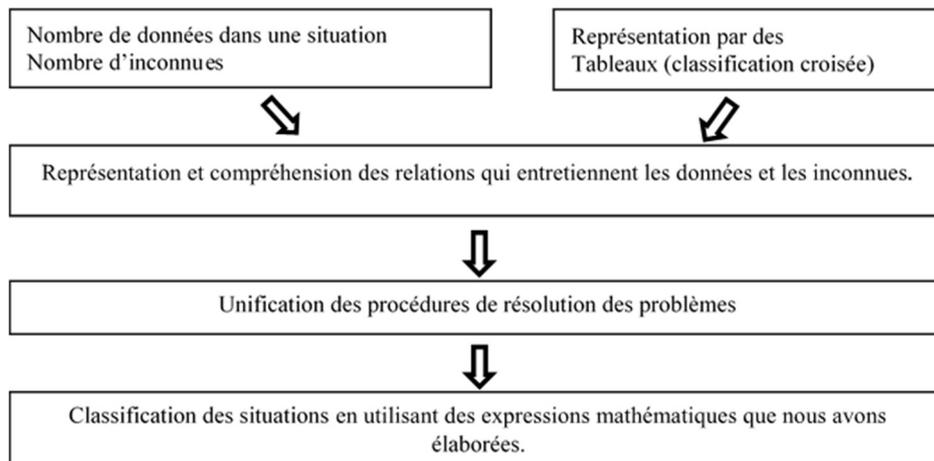
Selon Levain, les représentations symboliques ont le mérite d'être laconiques. Les propriétés de l'espace permettent de bien mettre en évidence les correspondances colonne à colonne et ligne à ligne, ce qui permet de dégager les solutions numériques.

Certaines recherches ont mis l'accent sur l'importance de la nature des données dans les problèmes de proportionnalité. Karplus et Karplus (1972) ont été des premiers qui ont analysé les procédures utilisées par les élèves pour résoudre un problème de proportionnalité, et qui ont remarqué que ces derniers utilisent incomplètement les données de l'énoncé pour une procédure additive, alors que Levain (1995) recommande de présenter plus systématiquement aux élèves les différentes structures de problèmes en faisant varier très largement les valeurs numériques (petit entiers, grand entiers, décimaux supérieurs et inférieurs à 1).

Mais à côté de la variation des valeurs numériques, nous pensons qu'il importe de présenter systématiquement aux élèves les différentes structures du problème posé, en faisant varier les données dans une classe de situations qui se ressemblent, et ce, pour aider les élèves à constituer un répertoire de procédures organisées et favoriser la compréhension des problèmes de proportionnalité. Ainsi, dans ce qui suit, nous tentons de trouver un moyen de classer les problèmes de proportionnalité qui, d'après Vergnaud (1991), ne se laissent pas se classer facilement : un même concept peut opérer dans plusieurs situations alors que plusieurs concepts agissent à l'intérieur d'une même situation.

III. CLASSIFICATION DES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ : UNE NOUVELLE APPROCHE

Cette approche suit le schéma suivant :



1. *Catégorie 1 : La classe des problèmes : C_5^2-1*

1.1. *Catégorie 1 - Grandeurs de l'espace de mesures M_1 exprimées en pourcentages*

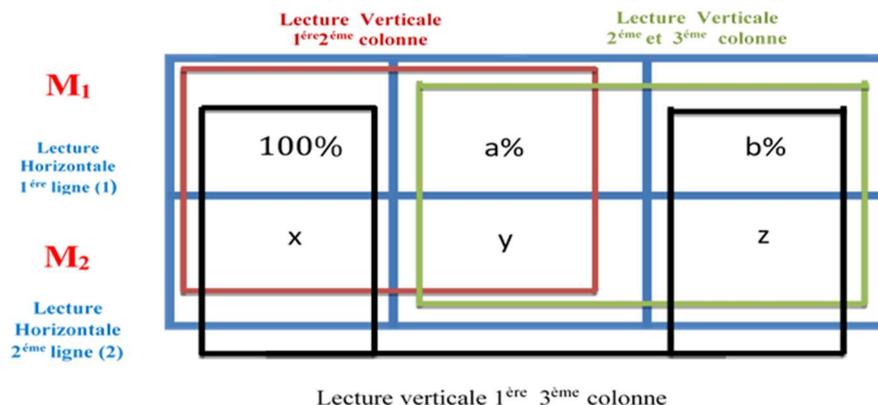


Tableau 3 – Différentes lectures (en pourcentages)

Remarquons que ce tableau permet de distinguer deux cas, suivant qu'il s'agit dans le problème d'une augmentation ou d'une diminution de la quantité initiale.

Pour une augmentation, nous avons les égalités:

$$100 + a = b, \quad x + y = z, \quad 100y = ax, \quad az = by \quad \text{et} \quad 100z = bx$$

Pour une diminution, nous avons les égalités

$$100 - a = b, \quad x - y = z, \quad 100y = ax, \quad az = by \quad \text{et} \quad 100z = bx$$

Nous avons ainsi un tableau de six cases « classification croisée : 2 lignes et 3 colonnes ».

Lecture horizontale :

1^{ère} ligne : relations additives (grandeurs exprimées en pourcentage).

2^{ème} ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en pourcentage).

Lecture verticale :

Il s'agit d'une proportionnalité simple pour chaque paire de colonnes choisie.

Dans cette catégorie, nous avons une donnée fixe qui occupe la 1^{ère} case de la 1^{ère} ligne (le taux de pourcentage de la quantité initiale est « 100% »), et deux données "variables"¹⁶ qui peuvent occuper les 5 autres cases, avec la contrainte suivante : la 1^{ère} inconnue qu'on va chercher doit être placée sur une même ligne avec deux données. Remarquons que, par conséquent, le cas où les deux données "variables" occupent la 2^{ème} et la 3^{ème} case de la 1^{ère} ligne est à éliminer. Dans cette catégorie, le nombre de cas possibles est donc: $C_5^2 - 1 = 9$.

Voici deux cas des 9 cas possibles, le travail sur le reste des cas est similaire :

1^{er} cas :

	(1)	(2)	(3)
(1)	100%	a%	b? %
(2)	x	y?	z?

Tableau 4 – 1^{er} cas - exemple d'augmentation

$$100 + a = b \quad \text{et} \quad y = \frac{ax}{100}, \dots$$

2^{ème} cas :

(1)	100%	a%	b? %
(2)	x?	y	z?
	(1)	(2)	(3)

Tableau 6 - 2^{ème} cas - exemple d'augmentation

	(1)	(2)	(3)
(1)	100%	a%	b? %
(2)	x	y?	z?

Tableau 5 – 1^{er} cas - exemple de diminution

$$100 - a = b \quad \text{et} \quad y = \frac{ax}{100}, \dots$$

(1)	100%	a%	b? %
(2)	x?	y	z?
	(1)	(2)	(3)

Tableau 7 - 2^{ème} cas - exemple de diminution

Dans ces deux cas, on commence par calculer b

Dans cette catégorie de problèmes, nous avons une donnée fixe qui occupe la 1^{ère} case de la 1^{ère} ligne (le taux de pourcentage de la quantité initiale est « 100% »), et deux données "variables" qui peuvent occuper les 5 autres cases avec la même contrainte citée plus haut. Le nombre de cas possibles dans cette catégorie est: $C_5^2 - 1 = 9$, aussi bien dans le cas d'une augmentation que dans le cas d'une diminution.

1.2. Catégorie 1 - Grandeurs de l'espace de mesure M_1 exprimées en fractions

Cette classe est représentée comme suit :

¹⁶ Tant qu'il n'est pas question d'une variable à déterminer, on parle d'une donnée "variable".

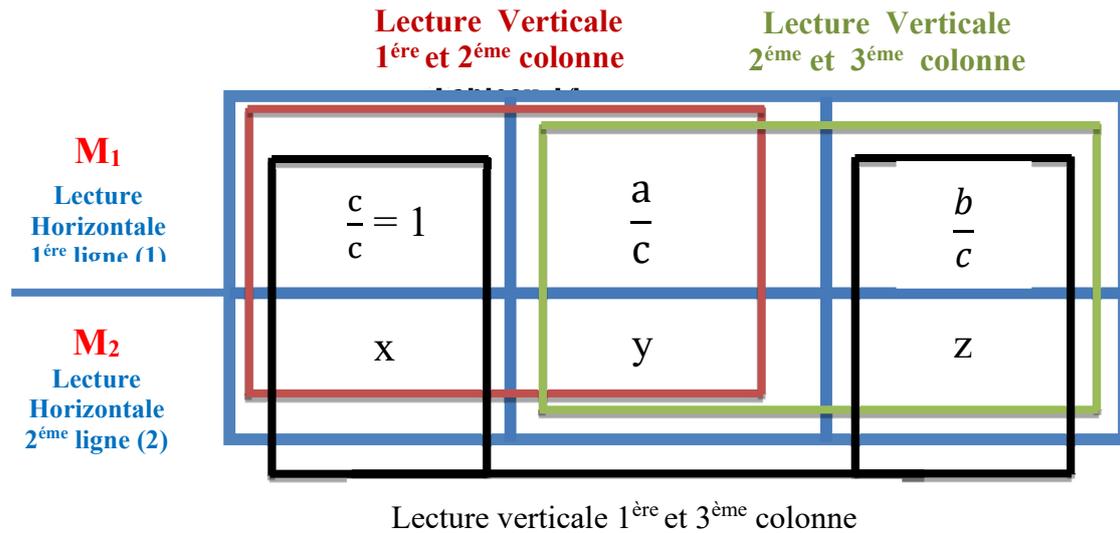


Tableau 8 – Différentes lectures (fractions)

Voici un cas :

(1)	$\frac{c}{c} = 1$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c} ?$
(2)	x	y?	z?
	(1)	(2)	(3)

Tableau 9 - Augmentation : exemple d'une seule inconnue à la première ligne

(1)	$\frac{c}{c} = 1$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c} ?$
(2)	x	y?	z?
	(1)	(2)	(3)

Tableau 10 - Diminution : exemple d'une seule inconnue à la première ligne

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{c} + \frac{a}{c}, y = \frac{ax}{c}, \dots$$

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{c} - \frac{a}{c}, y = \frac{ax}{c}, \dots$$

On commence par calculer $\frac{b}{c}$

C'est un cas où $\frac{b}{c}$ est la seule inconnue à la première ligne : il y a en tout 3 cas. Il y a aussi 3 cas où $\frac{a}{c}$ est la seule inconnue à la première.

Les 3 cas restants consistent à choisir deux inconnues dans la première ligne ($\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$) et faire varier la place de la troisième inconnue dans la deuxième ligne. En voici un exemple :

	(1)	(2)	(3)
(1)	$\frac{c}{c} = 1$	$\frac{a}{c} ?$	$\frac{b}{c} ?$
(2)	x	y	z?

Tableau 11 - Augmentation : exemple de deux inconnues à la première ligne

$$z = x + y, a = \frac{cy}{x}$$

	(1)	(2)	(3)
(1)	$\frac{c}{c} = 1$	$\frac{a}{c} ?$	$\frac{b}{c} ?$
(2)	x	y	z?

Tableau 12 - Diminution : exemple de deux inconnues à la première ligne

$$z = x - y, a = \frac{cy}{x}$$

On commence par calculer z

Les relations reliant les données du tableau:

* Pour une augmentation

$$\frac{c}{c} + \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

$$z = x + y$$

$$cy = ax ; az = by ; cz = bx$$

* pour une diminution

$$\frac{c}{c} - \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

$$z = x - y$$

$$cy = ax ; az = by ; cz = bx$$

Dans cette sous-catégorie de problèmes, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1^{ère} case de la 1^{ère} ligne (La fraction $\frac{c}{c} = 1$) et deux données “variables” qui peuvent occuper les 5 autres cases avec toujours les mêmes contraintes que plus haut. Le nombre de situations possibles est $C_5^2 - 1 = 9$

2. *Catégorie 2 : cas des problèmes de la proportionnalité simple composée, de la classe C_5^2-1*

Exemple

Une jupe coûtait 90^{DT}, son prix augmente de 10% puis augmente de 15%. Quel est son prix final ?

L'élève doit remplir les cases d'un premier tableau :

100%	10%	inc1 ?%
90 ^{DT}	inc2 ?	inc3 ?

Tableau 13 - Résolution d'un problème de proportionnalité simple composée : 1^{ère} étape

$$\text{inc}_1 = 100\% + 10\% = 110\%$$

$$\text{inc}_2 = \frac{90 \times 10}{100} = 9^{\text{DT}}$$

$$\text{inc}_3 = 90 + 9 = 99^{\text{DT}} / \text{ou } \frac{9 \times 110}{10} = 99^{\text{DT}} / \text{ou } \frac{90 \times 110}{100} = 99^{\text{DT}}$$

Puis, il remplit les cases d'un 2^{ème} tableau :

1 = 100%	15%	inc1 ?%
99 ^{DT}	inc2 ?	inc3 ?

Tableau 14 - Résolution d'un problème de proportionnalité simple composée : 2^{ème} étape

$$\text{inc}_1 = 100\% + 15\% = 115\%$$

$$\text{inc}_2 = \frac{99 \times 15}{100} = 14^{\text{DT}},850$$

$$\text{inc}_3 = 99 + 14,850 = 113^{\text{DT}},850$$

$$\text{ou } \text{inc}_3 = \frac{14,850 \times 115}{15} = 113^{\text{DT}},850 \quad \text{ou } \text{inc}_3 = \frac{99 \times 115}{100} = 113^{\text{DT}},850$$

Les contraintes de l'emplacement des variables et des données étant les mêmes que les cas précédents, les problèmes de la proportionnalité simple composée font partie de la classe $C_5^2 - 1$.

A partir de ce résultat, nous reprenons les sujets des concours tunisiens où tous les problèmes proposés font partie de cette catégorie.

Dans l'histogramme suivant, A désigne le cas d'une augmentation; B le cas d'une diminution. Les résultats obtenus sont les suivants :

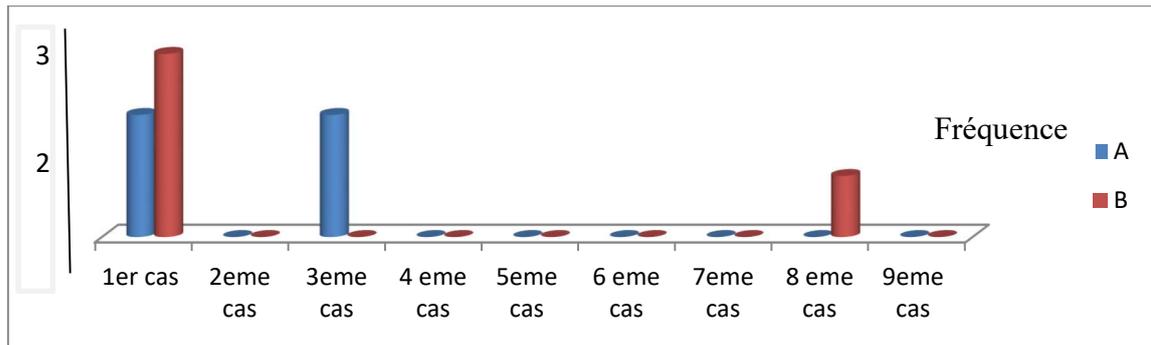


Figure 1 - Les 9 cas possibles dans les concours tunisiens

Nous avons remarqué que :

Un premier cas est répété 5 fois, un deuxième cas est répété 2 fois et un troisième cas est pris une seule fois.

Tous les autres cas ne font pas partie des sujets des concours. L'apprenant est testé deux fois dans un même cas à la même session. Ceci pose une question principale quant aux critères mis en place par les responsables de la préparation de ces épreuves.

3. Catégorie 3 : La classe des problèmes : $C_7^3 - 1$

Cette catégorie est représentée selon le tableau suivant :

M ₁	$\frac{d}{d}$	$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{c}{d}$
M ₂	x	x ₁	x ₂	x ₃
	(1)	(2)	(3)	(4)

Tableau 15 – Représentation de la classe de problèmes de la catégorie 3

Nous avons un tableau de huit cases (classification croisée de 2 lignes et 4 colonnes).

Les relations reliant les données du tableau :

$$d = a + b + c ; x = x_1 + x_2 + x_3 ; ax = dx_1 ; bx = dx_2 ; cx = dx_3$$

$$ax_2 = bx_1 ; bx_3 = cx_2 ; cx_1 = ax_3$$

Lecture horizontale :

1^{ère} ligne : relations additives (grandeurs exprimées en fractions).

2^{ème} ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en fractions).

Lecture verticale :

Il s'agit d'une proportionnalité simple pour toutes les paires de colonnes choisies.

Dans cette catégorie de situations, nous avons une donnée fixe qui occupe la 1^{ère} case de la 1^{ère} ligne ($\frac{d}{d} = 1$) et 3 données "variables" qui peuvent occuper les 7 autres cases avec la condition : la 1^{ère} inconnue qu'on va chercher doit être sur la même ligne avec 3 données, et le même cas à éliminer: lorsque les 3 données "variables" occupent la 2^{ème}, la 3^{ème} et la 4^{ème} cases de la 1^{ère} ligne.

Le nombre de situations possibles relativement à cette catégorie est : $C_7^3 - 1 = 34$.

Le nombre de données "variables" est 3

Le nombre d'inconnues est $7 - 3 = 4$.

Exemple :

Un agriculteur exploite un champ de superficie 160 hectares comme suit :

	Superficie totale	Superficie cultivée en blé	Superficie plantée en oliviers	Superficie cultivée en légumes
Les fractions	$1 = \frac{8}{8}$	$\frac{1}{4} = \dots$	$\frac{3}{8}$	inc ₁ ?
Superficie en hectares	160 hectares	inc ₂ ?	inc ₃ ?	inc ₄ ?

Tableau 16 – Un exemple de problème de la catégorie 3

Remplis les cases vides du tableau.

L'élève peut suivre les étapes suivantes

$$\text{inc}_1 = \frac{8}{8} - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8}; \text{inc}_2 = \frac{160 \times 2}{8} = 40 \text{ hectares}; \text{inc}_3 = \frac{40 \times 3}{2} = 60 \text{ hectares}$$

$$\text{ou } \frac{160 \times 3}{8} = 60 \text{ hectares}$$

$$\text{inc}_4 = \text{inc}_3 = \frac{160 \times 3}{8} = 60 \text{ hectares ou } \text{inc}_4 = 160 - (40 + 60) = 60 \text{ hectares}$$

4. Catégorie 4 : La classe des problèmes $C_9^4 - 1$

Nous représentons cette catégorie selon le tableau suivant :

M ₁	$\frac{e}{e} = 1$	$\frac{a}{e}$	$\frac{b}{e}$	$\frac{c}{e}$	$\frac{d}{e}$
M ₂	x	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Tableau 17 - Représentation de la classe de problèmes de la catégorie 3

Dans ce tableau, les données sont liées par les relations suivantes :

$$e = a + b + c + d ; \quad x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 ;$$

$$ax = ex_1 ; \quad bx = ex_2 ; \quad cx = ex_3 ; \quad dx = ex_4$$

$$ax_2 = bx_1 ; \quad ax_3 = cx_1 ; \quad ax_4 = dx_1 ; \quad bx_3 = cx_2 ; \quad bx_4 = dx_2 \text{ et } cx_4 = dx_3$$

Nous avons un tableau de dix cases : une classification croisée de 2 lignes et 5 colonnes.

Dans cette catégorie, nous avons une donnée fixe qui occupe la 1^{ère} case de la 1^{ère} ligne ($\frac{e}{e} = 1$)

et 5 données "variables" qui peuvent occuper les 9 autres cases avec les mêmes contraintes : la 1^{ère} inconnue qu'on va chercher doit être sur la même ligne avec 4 données ; le cas où les 4 données "variables" occupent la 2^{ème}, la 3^{ème}, la 4^{ème} et la 5^{ème} case de la 1^{ère} ligne est à éliminer.

Au total, le nombre de cas possibles dans cette catégorie est : $C_9^4 - 1 = 125$.

CONCLUSION

Pour conclure, nous ne prétendons pas apporter une solution immédiate aux difficultés d'enseignement de la proportionnalité, mais nous espérons avoir nourri la réflexion des enseignants sur le fait que, si l'on veut que les élèves progressent dans la résolution de

problèmes de proportionnalité, on peut penser à institutionnaliser des techniques. Dans notre lecture des épreuves des concours de mathématiques, nous avons cherché à déchiffrer la logique derrière la variation des valeurs numériques dans les problèmes proposés. Le codage que nous proposons définit une catégorie spécifique à partir des nombres de données “variables” et d’inconnues, avec des classes de problèmes à l’intérieur de chaque catégorie en fonction de la nature des données (entières ou fractionnaires) et/ou la nature de la proportionnalité (simple ou composée). Les procédures de résolution qui appellent des tableaux convenablement remplis font créer chez les élèves des invariants opératoires pour unifier la manière de résolution des problèmes d’une même classe. Remarquons que nous n’avons pas tenu compte de toutes les variables didactiques qui peuvent intervenir, mais notre méthode de catégorisation semble réduire les difficultés qui pourraient apparaître par la variation des catégories de situations. En effet, une première expérience que nous avons faite avec des élèves de 6^{ème} année primaire a montré que l’utilisation des tableaux de proportionnalité, dans cet esprit de catégorisation, a permis d’avoir, dans les différentes catégories, des progrès importants dans les productions des élèves (88% des élèves ont bien répondu). Ces derniers ont pu construire des réflexes pour fixer et distinguer les cases connues des cases inconnues, et des techniques pour la recherche des inconnues après les avoir ordonnées, mais ce travail est à creuser.

Cette idée de catégorisation qui se base sur des formules simples, pourrait être au service des enseignants de mathématiques du primaire, pour leur permettre de montrer aux élèves de nouvelles techniques de résolution. En outre, les expressions $C_p^n - 1$ peuvent être traduites grâce à un langage de balisage (HTML) et un langage de programmation (JavaScript) en un produit exécutable par un ordinateur, et peuvent donc servir comme moyen de validation des procédures utilisées, et de contrôle des résultats. Un tel langage pourrait-il contribuer à l’amélioration de l’auto-apprentissage des élèves et de l’apprentissage à distance ? Il nous semble que cette piste mérite d’être explorée.

REFERENCES

- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l’école. *Grand N*, 100, 59 - 78
- Karplus, R., Karplus, E.F. (1972). Intellectual development of young elementary school children : A longitudinal study. *School, Science and Mathematics*, 72, 735-742.
- Levain, J.P. (1995). *Proportionnalité simple, proportionnalité multiple*, Cycle III.
- Levain, J.P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 139-161
- Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems : theoretical approaches and empirical findings. In Hiebert J. and Behr M. (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale N.J : Erlbaum/Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics, 19-40.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

Annexe

Les 9 cas possibles de la catégorie $C_5^2 - 1$; a et b désignent des données

1^{er} cas

100%	a%	inc ₁ % ?
b	inc ₂ ?	inc ₃ ?

2^{ème} cas

100%	a%	inc ₁ % ?
inc ₂ ?	b	inc ₃ ?

3^{ème} cas

100%	a%	inc ₁ ?%
inc ₃ ?	inc ₂ ?	b

4^{ème} cas

100%	inc ₁ ?%	a%
b	inc ₂ ?	inc ₃ ?

5^{ème} cas

100%	inc ₁ ?%	a%
inc ₂ ?	b	inc ₃ ?

6^{ème} cas

100%	inc ₁ ?%	a%
inc ₃ ?	inc ₂ ?	b

7^{ème} cas

100%	inc ₂ ?%	Inc ₃ ?%
a	b	inc ₁ ?

8^{ème} cas

100%	inc ₂ ?%	inc ₃ ? %
a	inc ₁ ?	b

9^{ème} cas

100%	inc ₂ ?%	inc ₃ ?%
inc ₁ ?	a	b

2023 - Éditions ATDM : Tunis
Copyright © ATDM

ISBN 978-9938-78-716-0

ISBN 978-9938-78-716-0



9 789938 787160