



**HAL**  
open science

# APPROCHE DIDACTIQUE DE L'ÉVALUATION ET DE SES PRATIQUES EN MATHÉMATIQUES

Nathalie Sayac

► **To cite this version:**

Nathalie Sayac. APPROCHE DIDACTIQUE DE L'ÉVALUATION ET DE SES PRATIQUES EN MATHÉMATIQUES. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2019, 39/3 (116), pp.283-331. hal-04369346

**HAL Id: hal-04369346**

**<https://hal.science/hal-04369346v1>**

Submitted on 2 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# APPROCHE DIDACTIQUE DE L'ÉVALUATION ET DE SES PRATIQUES EN MATHÉMATIQUES

Nathalie Sayac\*

## DIDACTIC APPROACH OF ASSESSMENT AND ITS PRACTICES IN MATHEMATICS

**Abstract** – This article presents a didactic framework on assessment, designed to think and analyze “assessment facts” (Chevallard, 1986) by combining scientific knowledge in assessment (in the diversity of the scientific fields concerned) and didactic knowledge. It takes into account both disciplinary content and professional realities, to define a new scientific approach to assessment, which is more didactic and deliberately anchored in the reality of classroom practices. This is illustrated in the paper with the analysis of one teacher’s assessment practices in school mathematics. The notion of assessment episode is central to understand assessment in mathematics in all its forms, beyond its usual functions (diagnostic, formative, certifying), as well as assessment logic, which allows one to consider the individual dimension of teachers’ assessment practices.

**Key words:** assessment practice, didactic, professional judgement, assessment episode, assessment logic

## ENFOQUE DIDACTICO DE LA EVALUACIÓN Y DE SUS PRÁCTICAS EN MATEMATICAS

**Resumen** – Este artículo presenta un marco didáctico para la evaluación concebido para pensar y analizar los «hechos evaluativos» (Chevallard, 1986) conjugando el conocimiento científico de la evaluación (en la diversidad de los campos científicos involucrados) y el conocimiento didáctico. El marco toma en consideración tanto los contenidos disciplinarios como las realidades profesionales que permiten definir un nuevo enfoque científico de la evaluación. Este enfoque es más didáctico y voluntariamente arraigado en la realidad de las prácticas en el aula, tal como lo demuestra en el artículo la descripción de la práctica evaluativa en matemáticas de una profesora de primaria. El concepto de episodio evaluativo es central en el análisis para entender la evaluación en matemáticas en todas sus formas, más allá de sus funciones habituales (diagnóstico, formativa, certificativa) así como la noción de lógica evaluativa que permite considerar la dimensión individual de las prácticas de evaluación de los profesores..

---

\* Université Paris-est Créteil, LDAR. [nathalie.sayac@u-pec.fr](mailto:nathalie.sayac@u-pec.fr)

*Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 39, n°3 pp. 283-329, 2019*

**Palabras-claves:** evaluación, didáctica, episodio evaluativo, juicio profesional, lógica evaluativa

#### RÉSUMÉ

Cet article présente un cadre didactique de l'évaluation qui a été conçu pour penser et analyser les « faits évaluatifs » (Chevallard, 1986) en conjuguant savoirs scientifiques en évaluation (dans la diversité des champs scientifiques concernés) et savoirs didactiques. Il prend en compte à la fois des contenus disciplinaires et des réalités professionnelles permettant de définir une nouvelle approche scientifique de l'évaluation, plus didactique et volontairement ancrée dans la réalité des pratiques en classe comme la description de la pratique évaluative en mathématiques d'une professeure des écoles exposée dans l'article en témoigne. La notion d'*épisode évaluatif* y est centrale pour appréhender l'évaluation en mathématiques sous toutes ses formes, au-delà de ses fonctions usuelles (diagnostique, formative, certificative), de même que celle de *logique évaluative* qui permet de prendre en compte la dimension individuelle des pratiques d'évaluation des professeurs.

**Mots-Clés :** évaluation, didactique, épisode évaluatif, jugement professionnel, logique évaluative

L'évaluation est un sujet qui a toujours suscité de nombreux débats au sein de différents groupes directement ou indirectement concernés par les problématiques qu'elle soulève (parents, institutions scolaires, chercheurs, etc.), mais qui a tardé à intéresser les didacticiens des mathématiques (Coppé, 2018). Nous avons fait ce constat dans un numéro antérieur de la revue RDM (Sayac & Grapin, 2015), mais nous considérons aujourd'hui qu'il est dépassé par le fait que plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques s'y sont intéressés depuis et ont produit des travaux permettant de montrer la pertinence d'une approche didactique de l'évaluation.

Chevallard et Feldman avaient pourtant, dès 1986, enjoint les didacticiens à s'intéresser à l'évaluation via les « faits évaluatifs » :

[Le didacticien] doit se rendre à l'évidence : les faits d'évaluation qu'il peut alors y (la classe) observer ne sont pas simplement un existant contingent, un mal nécessaire que l'on pourrait ignorer, mais bien l'un des aspects déterminants du processus didactique qui règle et régule tout à la fois les comportements de l'enseignant comme l'apprentissage des élèves. (Préface, p. 2)

Deux ans plus tard dans une publication de l'IREM d'Aix-Marseille, Chevallard (1988) s'est de nouveau intéressé à l'évaluation, mais cette fois sous l'angle de l'échec scolaire, en insistant sur la place que la didactique pouvait avoir dans cette problématique. Il a indiqué que cette place se trouve dans l'étude des situations d'attribution d'échec (hétéro ou auto-attribution) qu'il a plus précisément nommés « verdicts d'échec ». Il a souligné combien les enseignants, les élèves, les parents sont dépourvus face à de telles situations et que ce désarroi mène généralement à des conduites personnelles dont les effets, incontrôlés et empreints d'assujettissements personnels, sont souvent négatifs. En conclusion de cette publication, Chevallard a précisé que :

L'analyse didactique des « échecs » et des dysfonctionnements, à tous les niveaux de l'institution scolaire, constitue un champ immense d'investigation, fondé sur les notions d'objets didactiques (p.75).

Engagée depuis de nombreuses années dans des travaux autour de l'évaluation et des inégalités scolaires en mathématiques, nous nous sommes confrontée à la difficulté d'étudier différents « faits évaluatifs » sans avoir de cadre adapté permettant de les appréhender à partir d'éléments liés au savoir en jeu, mais aussi d'éléments externes (liés au contexte, aux sujets enseignant ou élève, etc.) interférant avec la relation didactique entre l'enseignant et les élèves. Nous avons donc élaboré, dans le cadre de notre HDR,

un cadre didactique permettant d'étudier les « faits évaluatifs » en mathématiques, dans toute leur complexité.

Cet article vise à présenter ce cadre et à montrer en quoi il peut se revendiquer d'une approche didactique enrichie de travaux plus largement inscrits en sciences de l'éducation, permettant ainsi d'étudier et d'analyser plus finement les phénomènes relatifs aux rapports entre enseignement, apprentissages mathématiques et évaluation de ces apprentissages.

Dans une première partie nous exposerons des éléments contextuels et scientifiques sur lesquels nous nous sommes appuyée pour concevoir ce cadre didactique de l'évaluation. Dans une seconde partie, nous présenterons les deux axes qui le structurent et qui permettent d'appréhender les pratiques évaluatives des enseignants en prenant en compte à la fois des contenus disciplinaires et des réalités professionnelles. Finalement dans une troisième partie nous décrivons la pratique évaluative d'une professeure des écoles établie à partir du cadre didactique présenté.

## ÉLÉMENTS CONTEXTUELS & SCIENTIFIQUES

Nous avons choisi, dans cette première partie, de présenter d'une part les notions clés qui aident à penser l'évaluation dans une approche didactique et d'autre part, les travaux scientifiques qui ont favorisé l'émergence du cadre didactique de l'évaluation que nous proposons. Parmi les notions clés, nous avons retenu : les différentes fonctions de l'évaluation, le concept de régulation, le modèle des moments de l'étude et le contrat didactique. Ces entrées sont celles qui sont principalement retenues/rencontrées dans les travaux sur l'évaluation portés par des chercheurs en sciences de l'éducation ou en didactique des mathématiques. Nous présenterons ensuite des travaux centrés sur les professeurs-évaluateurs et sur les tâches évaluatives parce que l'approche didactique de l'évaluation que nous défendons se veut ancrée dans la réalité des pratiques en classe.

### **Notions clés pour penser l'évaluation dans une approche didactique**

#### *Les différentes fonctions de l'évaluation*

Les premiers travaux visant à considérer l'évaluation dans une perspective de développement des apprentissages ont été portés par des chercheurs anglo-saxons. C'est Scriven qui a été le premier en 1967 à utiliser le terme *Formative Evaluation* pour qualifier les

processus d'évaluation ayant un rôle dans « *the on-going improvement of curriculum* » (p. 41) et à distinguer évaluations sommatives et évaluations formatives. Deux ans plus tard, Bloom a repris cette distinction dans son livre intitulé « *Learning for Mastery* », mais en utilisant cette fois le terme *Formative Assessment* pour décrire « *any assessment before the big one* » (p. 48). En 1971, Bloom, Hasting et Madaus ont produit un Handbook « *Formative and Summative Evaluation* », dans lequel ils montrent comment l'évaluation formative, intégrée aux processus d'apprentissage peut améliorer les apprentissages des élèves, quelle que soit la discipline.

Il a ensuite fallu près de vingt ans pour que la vision de *Formative Assessment* recouvre les processus d'évaluation dans une acception plus large prenant en compte le rôle des enseignants, mais aussi celui des élèves dans ces processus (Sadler, 1989 ; Torrance, 1993). Dans une synthèse de travaux autour de l'évaluation formative, les chercheurs anglais Black et Wiliam (1998) ont donné une définition de *Formative Assessment* qui servira de référence pour de nombreux travaux par la suite :

We use the general term assessment to refer to all those activities undertaken by teachers – and by their students in assessing themselves – that provide information to be used as feedback to modify teaching and learning activities. Such assessment becomes formative assessment when the evidence is actually used to adapt the teaching to meet student needs. (p. 140)

L'article qui a eu le plus d'influence dans les mondes éducatif et scientifique est incontestablement « *Inside the black box : raising standards through classroom assessment* » que Black et Wiliam ont écrit la même année. Dans cet article, ces chercheurs défendent l'idée que le développement d'une approche formative de l'évaluation est au service des apprentissages des élèves, particulièrement pour ceux qui sont le plus en difficulté.

Le terme de *Assessment for Learning* (AfL), qui n'a pas d'équivalence en français<sup>1</sup>, est apparu pour la première fois en 1986 dans un chapitre d'un livre de Black, mais c'est en 1999 qu'il a été repris et popularisé par l'*Assessment Reform Group*<sup>2</sup> (ARG) qui l'a utilisé pour qualifier, plus largement, tout type d'évaluation visant à améliorer les apprentissages des élèves. En 2009, lors d'un

<sup>1</sup> Même si le terme d'évaluation soutien d'apprentissage (ESA) proposé par Linda Allal et Dany Laveault (2009) s'en rapproche.

<sup>2</sup> Groupe de chercheurs influent au Royaume Uni, actif de 1989 à 2010, ayant travaillé ensemble pour aider les différents acteurs de l'éducation (agences, décideurs politiques, enseignants) à prendre en compte les travaux scientifiques sur l'évaluation pour mieux comprendre ses rôles, buts et impacts dans les systèmes scolaires.

colloque international, la définition d'*Assessment for Learning* a été adoptée :

*Assessment for Learning* is part of everyday practice by students, teachers and peers that seeks, reflects upon and responds to information from dialogue, demonstration and observation in ways that enhance ongoing learning. (Klenowski, p. 264)

La distinction formelle entre *Formative Assessment* et *Assessment for Learning* n'est pas centrale pour comprendre les enjeux d'une approche didactique de l'évaluation, mais elle nous intéresse dans la mesure où elle permet de distinguer les approches qui les sous-tendent. Dans *Formative Assessment*, il s'agit principalement d'utiliser l'évaluation pour concevoir et adapter son enseignement, alors que dans *Assessment for Learning* tout ce qui peut concourir à promouvoir les apprentissages des élèves est pris en compte, jusqu'à la motivation des élèves et l'impact émotionnel de l'évaluation.

Crahay (1999) a précisé que cette nouvelle conception de l'évaluation s'intégrant dans les processus d'enseignement n'a pas été simple à accepter, notamment dans le monde francophone. Mottier Lopez (2015) a précisé que les travaux francophones d'Europe se sont d'abord employés à décortiquer les différentes fonctions de l'évaluation des apprentissages des élèves. C'est ainsi que Cardinet (1983) a proposé de distinguer une troisième fonction de l'évaluation en plus des fonctions de régulation et de certification, la fonction d'orientation.

Ces différents types d'évaluation, en lien avec des fonctions spécifiques, occupent une place importante dans les travaux en sciences de l'éducation. Néanmoins, cette approche enferme l'évaluation dans des catégories distinctes qui ne le sont pas forcément dans la réalité des pratiques de classe et peut amener les professeurs à concevoir/penser l'évaluation comme disjointe des processus d'enseignement et d'apprentissage. Elle mérite donc d'être repensée dans un cadre didactique de l'évaluation.

### *Le concept de régulation*

Les travaux de Linda Allal<sup>3</sup> ont fortement influencé le domaine de l'évaluation dans les pays francophones. En effet, même si c'est Cardinet qui a introduit le premier la notion de régulation de l'enseignement et des apprentissages en 1977 (en s'inspirant de l'analyse des systèmes cybernétiques), c'est bien Allal (1979,

---

<sup>3</sup> Chercheuse américaine s'étant installée en Suisse à la fin des années 80 ayant ainsi contribué à diffuser les travaux sur l'évaluation formative en Europe.

1988) qui l'a conceptualisée le plus, permettant ainsi une vision élargie de l'évaluation formative telle que proposée par Bloom, Hasting et Madaus en 1971. Elle a distingué trois formes de régulation associées à l'évaluation formative (Allal, *ibid.*) :

- *La régulation interactive* a lieu quand l'évaluation formative est fondée sur des interactions de l'élève avec les autres composantes de la situation, c'est-à-dire avec l'enseignant, avec les autres élèves et/ou avec du matériel permettant une auto-régulation de l'apprentissage.

- *La régulation rétroactive* intervient lorsque l'évaluation formative est réalisée à la fin d'une phase d'enseignement.

- *La régulation proactive* intervient lorsque différentes sources d'information permettent l'élaboration de nouvelles activités d'enseignement/apprentissage conçues pour prendre en compte les différences entre les élèves.

Allal et Mottier Lopez (2005) ont précisé, dans leur synthèse portant sur les travaux en langue française réalisés autour de l'évaluation, que les approches novatrices de l'évaluation formative combinent toutes ces trois formes de régulation et que les activités d'enseignement s'organisent autour de plusieurs modalités de régulation interactive fondées sur des démarches d'évaluation informelle (observation, discussion, échanges) auxquelles s'ajoutent des évaluations plus formelles (contrôles, interrogations écrites ou orales, etc.) en vue d'une régulation rétroactive plus efficace. Nous considérons que cette approche de l'évaluation, où les rôles de l'élève et de l'enseignant sont redistribués, laissant une place bien plus importante à l'élève dans l'évaluation et la régulation de ses apprentissages, s'inscrit dans une approche didactique des apprentissages. En effet, dans la Théorie des situations, ce qui intéresse Brousseau (1995), ce sont les régulations et perturbations produites par un enseignant dans un système didactique. Il considère d'ailleurs que le classement des *régulations didactiques* suivant la répartition des responsabilités entre le système qui diffuse une connaissance et celui qui la reçoit et l'apprend lui permet de mieux décrire et comprendre ce qui se joue du point de vue des apprentissages dans une situation didactique.

Cette notion de régulation apparaît donc comme essentielle pour penser l'évaluation dans une approche didactique.



Outre la régulation, le concept de *moment* développé par Chevallard (1999) aide à penser l'évaluation dans une approche didactique. En étudiant des organisations didactiques dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, Chevallard a réalisé que certains types de situations étaient nécessairement présents, même s'ils pouvaient varier en qualité et en quantité. Il les a appelés *moments* et a précisé que :

La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est d'abord une *dimension* dans un espace multidimensionnel, un *facteur* dans un processus multifactoriel. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise *au bon moment*, ou, plus exactement, *aux bons moments* : car un moment de l'étude se réalise généralement *en plusieurs fois*, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps. À cet égard, on notera que l'ordre mis, ci-après, sur les différents moments didactiques est en fait largement arbitraire, parce que les moments didactiques sont d'abord une réalité *fonctionnelle* de l'étude, avant d'en être une réalité chronologique. (pp.19-20)

Dans ce modèle, le *sixième moment* de l'étude est celui de l'*évaluation* qui s'articule<sup>4</sup> au moment de l'institutionnalisation. Ce moment permet de « faire le point », d'examiner ce que *vaut*<sup>5</sup> ce qui a été appris, c'est pour Chevallard un moment de *vérédiction*.

Concernant le modèle des moments, Chevallard (1999) précise qu'il permet de poser clairement le problème de la réalisation des différents moments de l'étude. Nous nous sommes appuyés sur ce modèle pour étudier plus spécifiquement ce sixième moment de l'étude.

### *La notion de contrat didactique*

Inscrivant l'émergence du concept de contrat didactique chez Brousseau entre deux courants (systémique et interactionniste), Sarrazy a mis l'accent sur l'aspect communicationnel du contrat didactique qu'il voit comme « *le produit d'un mode spécifique de communication didactique (lié à l'épistémologie de l'enseignant) instaurant un rapport singulier de l'élève au savoir mathématique et à la situation didactique* » (p. 93), certains contrats pouvant générer des "bruits" faisant obstacle à la communication de connaissances. Cette dimension de communication didactique entre l'élève et le savoir médiée par l'enseignant est à rapprocher de l'idée de négociation didactique développée par Chevallard et Feldman (1986) pour décrire les « faits évaluatifs » ; c'est

<sup>4</sup> Chevallard considère qu'il en est, à certains égards, un sous-moment.

<sup>5</sup> C'est Chevallard qui met en italique ce mot pour lui donner plus de poids.

pourquoi il nous semble important de la retenir dans une approche didactique de l'évaluation.

De même, la dimension différentielle d'un contrat didactique nous paraît également devoir être retenue pour étudier l'évaluation dans une approche didactique. Ce positionnement rejoint celui de Sensevy (2008) qui considère que le contrat didactique évolue et se modifie au cours des différents moments de la leçon, et celui de Perrin-Glorian et Hersant (2003) qui ont défini des niveaux différenciés de structuration du contrat didactique (*macrocontrat*, *méscontrat* et *microcontrat*) pour mieux prendre en compte les interactions, au niveau local, des actions entre le professeur et les élèves.

Nous convoquerons ces considérations relatives au contrat didactique pour définir, dans notre cadre, un contrat didactique spécifique aux moments d'évaluation.

### **Des travaux pour penser l'évaluation dans une approche didactique**

Les travaux sur l'évaluation pouvant s'inscrire dans une approche didactique sont nombreux et ont fait l'objet de la première partie de notre note de synthèse (Sayac 2017a). Nous avons choisi, pour cet article, de n'en retenir que certains, directement en lien avec le cadre didactique de l'évaluation que nous avons développé et que nous présenterons dans la partie suivante. Ces travaux sont centrés sur les professeurs dans leur rôle d'évaluateurs et sur les tâches évaluatives qu'ils proposent à leurs élèves.

#### *Travaux centrés sur les professeurs-évaluateurs*

Au début des années 1990, plusieurs ouvrages<sup>6</sup> publiés autour de l'évaluation en mathématiques se sont intéressés aux professeurs, en tant qu'acteurs de l'évaluation. Ils ont témoigné, à partir de différentes approches (historique, psychologique, sociologique, épistémologique, idéologique et politique), de l'importance des effets de la perception qu'ont les enseignants de leur rôle dans les apprentissages mathématiques des élèves et de l'influence des contextes sociaux sur les pratiques d'enseignement et d'évaluation.

Dans cette même perspective, des recherches ont été menées pour étudier la façon dont les professeurs de mathématiques mettaient en œuvre dans leur(s) classe(s) les nouvelles orientations

---

<sup>6</sup> « *Assessment and learning of Mathematics* » édité par Gilah Leder en 1992, et deux ouvrages édités par Mogens Niss suite au colloque ICME6 : « *Cases of Assessment in Mathematics Education* » et « *Investigations into Assessment in Mathematics Education* », en 1993.

nationales promulguées dans leur pays autour de l'évaluation formative ou l'*Assessment for Learning* (dans la province d'Ontario, au Canada : Suurtamm, Koch & Arden, 2010 ; au Portugal et en Norvège : Nortvedt, Santos & Pinto 2016). Ces chercheurs ont mis en évidence les difficultés rencontrées par les professeurs pour appliquer ces nouvelles orientations et les dilemmes auxquels ils sont confrontés (conceptuels, pédagogiques, culturels et politiques), en lien avec leurs croyances et leurs conceptions de l'apprentissage.

La nécessité de prendre en compte la spécificité du savoir évalué constitue un autre axe de recherche pour étudier les professeurs-évaluateurs. Les enseignants doivent disposer de connaissances disciplinaires et didactiques suffisantes pour, à la fois concevoir des évaluations permettant d'évaluer les savoirs mathématiques dans toutes leurs dimensions et, à la fois être en capacité d'interpréter et de prendre en compte les réponses des élèves.

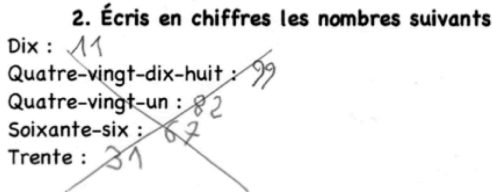
Dans un chapitre intitulé « *classroom assessment in mathematics* » du Handbook de McMillan portant sur les « *Research on classroom Assessment* » McGatha et Bush (2013) ont répertorié plusieurs recherches centrées sur l'étude d'évaluations formatives mises en place dans des classes de mathématiques. Elles ont conclu que :

Even though the pedagogy involved in formative assessment seem generic, the teachers' content knowledge was the crucial element for creating effective assessment tasks and providing useful feedback (p. 453).

Dans sa thèse, Vantourout (2004) a également montré combien il est important, pour les professeurs, de disposer de compétences adaptées et solides pour porter des jugements évaluatifs valides. Avec Maury (Vantourout & Maury, 2006), il a plus particulièrement étudié les connaissances disciplinaires en jeu lors de ces situations fictives d'évaluation et montré que des connaissances disciplinaires et didactiques des professeurs acquises lors de leur formation initiale ou de leur cursus étaient indispensables pour conduire une analyse didactique pertinente des productions des élèves.

Dans l'étude que nous avons menée sur les pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles (Sayac, 2017b), nous avons également pu constater combien le manque de connaissances mathématiques et/ou didactiques pouvait impacter l'évaluation en classe, aussi bien du point de vue du jugement du professeur que de l'activité de l'élève.

Dans l'exemple ci-dessous issu d'une évaluation sur l'écriture des nombres entiers proposées en CE1, un élève a produit des réponses adaptées à son interprétation du mot « suivant » (consécutif), mais l'enseignant les a réfutées (en les barrant, voir Figure 1) alors qu'elles témoignaient d'une connaissance réelle et même approfondie de l'écriture des nombres entiers.



**Figure 1.-** Tâches d'écriture de nombres proposées en évaluation en CE1  
 Quel(s) impact(s) (cognitif, émotionnel, contractuel, etc.) cette correction peut-elle avoir sur les apprentissages de cet élève ? Va-t-il accepter le jugement porté par le professeur sur sa production ? Va-t-il remettre en question ses connaissances pourtant avérées sur l'écriture des nombres entiers ? Quelle incidence va-t-elle avoir sur le contrat didactique qui lie cet élève et son professeur ? Etc.

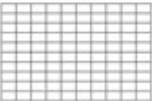
Ces questions témoignent de l'importance qu'il convient d'accorder à l'évaluation dans un processus d'apprentissage et de la nécessité de penser l'évaluation dans une approche didactique qui intègre des éléments issus d'autres champs scientifiques (psychologie cognitive, sociologie, etc.).

### *Travaux sur les tâches évaluatives*

La question des tâches proposées lors des évaluations est également centrale pour penser l'évaluation dans une approche didactique.

Thompson et Kaur, (2011) et Thomson et Bleiler (2013) défendent la nécessité d'une approche multidimensionnelle de l'évaluation en mathématiques. Ces chercheuses suggèrent que, quel que soit le domaine traité, les professeurs proposent des tâches permettant d'évaluer les connaissances mathématiques des élèves selon quatre dimensions SPUR : *Skills* (S), compétences relatives aux algorithmes et aux procédures, *Properties* (P), propriétés du savoir en jeu, *Uses* (U), usages avec un focus sur les applications et *Représentations* (R), relatives aux diagrammes, images ou représentations visuelles de concepts. Voilà une illustration (figure

2) de cette approche concernant la multiplication décimale proposée au grade 5<sup>7</sup> :

Skills	Evaluate: $0.6 \times 1.5$ .	
Properties	If $0.6 \times A = 15$ , what would $0.06 \times A$ equal? How do you know? What about $60 \times A$ ?	
Uses	Find the cost of 0.6 kilos of meat costing 1.50 euros per kilo.	
Representations		If the figure represents 1 unit, illustrate $0.6 \times 1.5$ .

**Figure 2.** - Multiplication décimale évaluée selon l'approche SPUR

La question de la validité est également un concept à considérer lorsque l'on s'intéresse aux tâches mathématiques proposées en évaluation.

Considérant que la validité se réfère au fait qu'une évaluation mesure bien ce qu'elle prétend mesurer (De Ketele & Roegiers (1993 ; Laveault & Grégoire, 2014), Grapin (2015) a développé, dans sa thèse, une méthodologie d'analyse de la validité de dispositifs d'évaluation à grande échelle en articulant des approches didactique, épistémologique et cognitive, en complément d'approches psychométriques. Ce travail, s'appuyant sur une analyse multidimensionnelle du savoir et réalisé dans le domaine de la numération à l'école, a été étendu au domaine de l'algèbre (Grugeon-Allys & Grapin, 2017) dans le cadre du projet ANR NéoPraEval<sup>8</sup>.

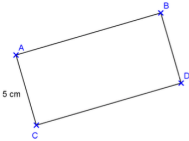
Dans le cadre d'une expérimentation visant à étudier les stratégies développées par les élèves de fin d'école confrontés à des QCM en mathématiques, nous avons pu réaliser l'intérêt de penser la validité des tâches évaluatives en lien avec les procédures des élèves. L'exemple ci-dessous permet d'illustrer ce point.

<sup>7</sup> Équivalent du CM2 (élèves de 10-11 ans)

<sup>8</sup> Nouveaux Outils pour de nouvelles PRATIques d'EVALuation et d'enseignement des mathématiques (2014-2018).

**Item 2**  
 ABCD est un rectangle dont la largeur est 5 cm.  
 Quelle doit être la longueur de ce rectangle pour  
 que son périmètre soit égal à 30 cm ?

6 cm  
 10 cm  
 25 cm  
 14 cm



1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Figure 3. - Item 2 d'un test

Nous avons conçu l'item 2 pour évaluer les connaissances des élèves relatives au calcul du périmètre d'un rectangle et nous avons choisi des distracteurs correspondant à des erreurs possibles (Sayac & Grapin, 2014). Le protocole expérimental nous a permis de réaliser que, pour répondre à cet item, un certain nombre d'élèves choisissent la réponse attendue (10 cm) en considérant que la longueur  $AB$  est double de la longueur  $AC$  (5 cm). Cette procédure, tout à fait valable au regard de la tâche proposée, remet en cause la validité de cet item puisqu'elle ne mobilise pas les connaissances que nous voulions évaluer.

Ces travaux sur la validité des tâches évaluatives qui, au-delà des questions de recouvrement, prennent en compte les procédures des élèves sont caractéristiques d'une approche didactique de l'évaluation.

Nous retenons de ces différents travaux l'importance à accorder aux tâches d'évaluation, aux interprétations et jugements des professeurs, mais également à la nécessité d'intégrer l'évaluation aux processus d'apprentissage. Ils nous ont aussi convaincue de la nécessité de prendre en compte des facteurs contextuels et individuels pour analyser plus finement les pratiques d'évaluation des professeurs en mathématiques et nous ont amenée à élaborer le cadre didactique de l'évaluation et de ses pratiques que nous allons, à présent, décrire.

## UN CADRE DIDACTIQUE DE L'EVALUATION ET DE SES PRATIQUES

Au début des années 90, Perrenoud précisait que les enseignants soucieux de bien évaluer étaient pris entre deux modèles « *un modèle didactique séduisant, mais qui ne dit pas grand-chose de l'évaluation et un modèle d'évaluation formative transdisciplinaire [...], qui s'est développé indépendamment de la didactique et du curriculum spécifique d'une discipline* » (1991, p. 56). Il nous semble qu'aujourd'hui, presque 30 ans plus tard, les

contextes scientifiques, institutionnels et politiques ont évolué et permettent davantage de concevoir l'évaluation d'un point de vue didactique, le *didactical assessment* qu'évoquait déjà Van den heuvel-Panhuizen en 1996.

Pour nous, cette approche didactique de l'évaluation doit d'une part être « épistémologiquement cohérente » avec la didactique des mathématiques (Shepard, 2000) et d'autre part prendre en compte les travaux en sciences de l'éducation didactiquement « compatibles », c'est-à-dire les travaux qui se préoccupent du contenu tout en prenant en compte les réponses et procédures des élèves, mais aussi les types de régulation proposés par les professeurs. Le cadre didactique de l'évaluation que nous proposons vise donc à étudier les « faits évaluatifs » (Chevallard, 1986) en conjuguant efficacement savoirs scientifiques en évaluation (dans la diversité des champs scientifiques concernés) et savoirs en didactique des mathématiques. Il s'inscrit dans le courant de *l'Assessment For Learning*, mais appliqué aux mathématiques.

### Positionnement théorique

Roditi et Chevallard ont tous deux évoqué l'évaluation comme un moment (principalement à visée certificative) ou une activité spécifique que l'enseignant doit assurer dans le cadre de l'enseignement qu'il dispense à ses élèves. Pour Roditi (2011), l'évaluation est une des activités organisatrices des pratiques enseignantes intégrant des dimensions personnelle, institutionnelle et professionnelle. Pour Chevallard (1999), l'évaluation est, comme nous l'avons déjà rappelé, le sixième moment de l'étude qui se situe dans le groupe IV « contrôles », même s'il précise également que « *l'ordre indiqué est largement arbitraire* » (p. 254). Étudier les pratiques évaluatives en mathématiques des professeurs revient donc à étudier une des activités caractérisant les pratiques enseignantes en mathématiques, activité spécifique se réalisant de manière plurielle et parfois contingente dans le courant de l'étude d'un thème mathématique.

Pour étudier cette activité spécifique, la double approche de Robert et Rogalski (2002) pourrait être adaptée puisqu'elle prend en compte l'enseignant à travers ses différentes activités, leurs finalités professionnelle et personnelle et leur inscription dans des contextes institutionnels et sociaux, mais cette approche ne suffit pas toujours à rendre compte de ce qui se joue, pour tous les acteurs concernés, autour de l'évaluation dans la réalité des pratiques de classe. Elle ne permet pas d'étudier avec une égale pertinence tous

les épisodes évaluatifs dans la diversité de leur nature et de leur réalisation dans les classes (notamment, les épisodes évaluatifs proposés en fin d'étude, tels que les contrôles ou les bilans<sup>9</sup>). La composante personnelle y a une place trop réduite alors que de nombreux travaux en sciences de l'éducation ou en *Maths Education* ont montré l'importance de la prise en compte des facteurs personnels dans l'activité d'évaluation. Elle ne permet pas non plus de prendre en compte les pratiques de notation qui jouent pourtant un rôle important dans la négociation didactique de nombreux épisodes évaluatifs.

Le cadre didactique de l'évaluation que nous proposons s'inscrit néanmoins dans la continuité des travaux de Robert et Rogalski (2002) et de Roditi (2011) sur les pratiques enseignantes et retient les principes de complexité et de stabilité de ces pratiques, mais il intègre des éléments développés dans d'autres cadres et accorde une place importante à la dimension personnelle des pratiques d'évaluation.

Parce que l'approche par les fonctions de l'évaluation ne correspond pas exactement à la réalité des pratiques de classe et que l'étiquetage des différentes fonctions de l'évaluation participe à opposer stérilement évaluation et apprentissages (William, 2000 ; Harlen, 2005), nous avons considéré que les différentes fonctions de l'évaluation usuellement utilisées dans les travaux sur l'évaluation ne devaient pas être au cœur d'un cadre didactique de l'évaluation. Ainsi, pour dépasser cette entrée par les différentes fonctions de l'évaluation, nous avons défini le concept d'*épisode évaluatif* que nous préciserons dans un premier temps, puis nous présenterons celui de *logique évaluative* dans un second temps. Nous montrerons comment la prise en compte simultanée de ces deux notions permet d'étudier les pratiques évaluatives des professeurs en mathématiques dans une perspective d'*Assessment for Learning*.

Le schéma ci-dessous fait la synthèse des éléments constitutifs du cadre que nous avons développé pour étudier les pratiques d'évaluation en mathématiques. Nous présenterons par la suite chacun d'eux, en explicitant en quoi ils contribuent à appréhender les « faits évaluatifs » dans une approche didactique.

---

<sup>9</sup> Dans leur thèse, Horoks (2006) et Chesnais (2009) se sont bien appuyées sur des contrôles pour analyser les pratiques de professeurs dans le cadre de la « double approche », mais elles ne les ont étudiés que du seul point de vue de la composante cognitive.



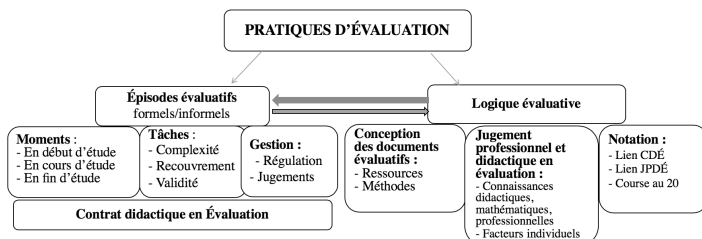


Figure 4.- Schéma récapitulatif du cadre didactique des pratiques d'évaluation

### Les épisodes évaluatifs

Pour aborder la question de l'évaluation dans une perspective didactique, la prise en compte de la temporalité des apprentissages est incontournable (sans s'y réduire), c'est pourquoi le modèle des moments de l'étude de Chevallard (1998), qui ne s'y réduit pas non plus, nous a paru adapté. Schubauer-Leoni (1991) perçoit également une dimension temporelle dans les moments d'évaluation puisqu'elle indique que « *les actes d'évaluation participent à scander le rythme des situations didactiques en marquant institutionnellement la progression du savoir* ». Nous retenons de ces deux propositions que l'évaluation des apprentissages des élèves se réalise tout au long de l'étude, de différentes manières et à différents moments<sup>10</sup>, à travers ce que nous nommons des *épisodes évaluatifs*.

Ce terme d'*épisode évaluatif* nous semble approprié pour désigner les moments spécifiques d'une leçon qui intègrent une dimension évaluative et qui s'inscrivent dans un processus didactique global. Un *épisode évaluatif* correspond donc à un moment de l'enseignement durant lequel l'enseignant se trouve en capacité de porter des jugements, de manière formelle ou informelle, sur l'état de connaissance de ses élèves par rapport à un savoir ou savoir-faire prescrit ou enseigné. Le concept d'*épisode évaluatif* impose également de penser l'évaluation dans une pluralité de moments, ce qui permet de dépasser le seul moment de l'évaluation sommative qui domine l'évaluation pratiquée en

<sup>10</sup> Le terme de moment employé par la suite se rapporte davantage à la dimension temporelle qu'il véhicule, même s'il ne se distancie pas du sens donné par Chevallard qui le considère d'abord comme « une *dimension* dans un espace multidimensionnel, un *facteur* dans un processus multifactoriel. » (p. 19)

France (CNETCO, 2014). Pour caractériser un épisode évaluatif, nous prenons en compte le moment où il est proposé, les tâches qui le constituent, ainsi que la gestion qui l'accompagne et le contrat didactique qui lui est associé. Ces éléments, que nous allons développer ci-après, sont cruciaux pour étudier le rôle qu'il joue dans le processus d'apprentissage et comment il s'y inscrit.

### *Le moment où il est proposé*

Le moment où un épisode évaluatif est proposé renseigne sur le rôle qu'il joue dans l'avancée du temps didactique de la classe. Pour Chopin (2006), le temps didactique est structuré par des événements didactiques, s'inscrivant dans un temps institutionnel, assurant la production d'un nouveau savoir. Les épisodes évaluatifs, dans la diversité de leur nature et des moments où ils apparaissent, participent donc de ce temps didactique (Chevallard & Mercier, 1987). Le moment où un épisode évaluatif est proposé peut nous renseigner sur le rôle qu'il est supposé assurer dans les processus d'enseignement et d'apprentissage : en début d'étude, il peut avoir une dimension de passerelle entre savoirs anciens et nouveaux pour les élèves, ou bien une dimension diagnostique permettant au professeur de programmer plus efficacement son enseignement. En cours d'étude, il permet une régulation plus fine de l'enseignement et des apprentissages des élèves. En fin d'étude, il a davantage une visée de vérification, au sens de dire le vrai (*veredictum*) de Chevallard (1990), ou de certification dans les moments de transition scolaire avec des tâches correspondant aux attentes institutionnelles de ces moments. Le moment où un épisode évaluatif est proposé peut être programmé à l'avance par l'enseignant ou bien advenir au cours d'une séance si l'enseignant juge opportun d'en proposer un à ce moment-là.

### *Les tâches évaluatives qui le constituent*

Au-delà du moment où se situe un épisode évaluatif, il est important d'étudier la nature des tâches évaluatives qui lui sont associées pour évaluer sa pertinence du point de vue du processus didactique dans lequel il s'inscrit.

Le niveau de complexité d'une tâche évaluative est un élément important à considérer pour caractériser l'épisode évaluatif dans lequel elle s'inscrit. Nous présentons ci-dessous trois tâches

évaluatives proposées avec la même consigne « écris les nombres en chiffres »<sup>11</sup> :

Tâche 1 : 5 centaines 3 dizaines 6 unités

Tâche 2 : 7 centaines 8 unités

Tâche 3 : 8 centaines 12 dizaines 45 unités

Il est clair que ces tâches, de complexité variée (Sayac & Grapin, 2015), ne permettent pas d'évaluer de manière équivalente les connaissances des élèves relatives à la numération décimale et plus particulièrement à l'écriture des nombres entiers. Si un élève échoue à la tâche 3 cela ne signifie pas qu'il n'a acquis aucune connaissance concernant l'écriture des nombres entiers. Par contre, si un élève réussit la tâche 1, on ne pourra prétendre qu'il maîtrise véritablement l'écriture des nombres entiers que s'il est aussi capable de réussir les tâches 2 et 3.

Les tâches évaluatives proposées dans les différents épisodes évaluatifs associés à l'étude d'un même savoir sont également à étudier pour appréhender le recouvrement du savoir évalué par l'ensemble de ces tâches. Selon celui qui l'étudie (chercheur, enseignant, institution), le recouvrement est mis au regard d'un référent adapté : généralement épistémologique pour les didacticiens (Gugeon 1997, Grapin, 2015), curriculaire pour les enseignants (les programmes et instructions officielles) ou défini plus spécifiquement pour les autres<sup>12</sup>. Ce recouvrement, quel qu'il soit, est à relier à la validité des épisodes évaluatifs considérés que nous allons à présent détailler.

La question de la validité des épisodes évaluatifs est une question complexe. En 1989, Chevallard l'avait déjà appréhendée et avait indiqué que :

Quelles que soient les précautions prises, on pourra disputer à l'infini. On observera, surtout, que la validité de l'évaluation obtenue pourra être contestée sans toutefois que sa nature d'évaluation le soit, sauf à lier dogmatiquement l'une à l'autre – exigence déraisonnable et, dans les faits, largement ignorée. (p. 9)

---

<sup>11</sup> Ces tâches émanent de différentes évaluations que nous avons récoltées dans le cadre d'une recherche sur les pratiques évaluatives des professeurs des écoles (Sayac, 2017).

<sup>12</sup> Le PISA (*Programme for International Student Assessment*) piloté par l'OCDE évalue les compétences acquises par les élèves en fin d'obligation scolaire (quinze ans). Le recouvrement des items de cette évaluation correspond à l'ensemble des compétences dont tout citoyen moyen peut avoir besoin pour réussir dans sa vie quotidienne.

Pour autant, la question de la validité d'un épisode évaluatif, en lien avec les tâches évaluatives proposées lors de cet épisode, ne peut être absente d'un cadre didactique de l'évaluation et doit même y être spécifiquement définie. La validité évoquée dans la partie précédente s'applique aux tâches évaluatives et doit faire l'objet d'une étude approfondie, mais au-delà de cette approche locale, il est important d'adopter une approche plus globale pour considérer la validité d'un épisode évaluatif. Des chercheurs comme Moss (2003) ou Cizeck, (2009) s'inscrivant dans la continuité des travaux de Messick (1989) conçoivent la validité d'une évaluation en lien avec la qualité du jugement ou de l'interprétation émis à partir des réponses des élèves. Brookhart (2003) ou Rémond (2006) estiment, elles, que les critères de validité doivent porter sur les conditions qui permettent de rendre l'évaluation utile du point de vue des apprentissages des élèves.

Dans le cadre didactique de l'évaluation que nous proposons, la validité d'un épisode évaluatif s'étudie donc d'un point de vue local à partir de la validité des tâches évaluatives proposées lors de cet épisode et d'un point de vue global en lien avec la gestion de l'épisode par l'enseignant et sa place dans la progression des apprentissages.

#### *La gestion d'un épisode évaluatif*

La gestion d'un épisode évaluatif est déterminante pour considérer dans quelle mesure il participe au processus d'apprentissage des élèves. Selon cette gestion, les dimensions de régulation et de jugements inhérentes à tout épisode évaluatif seront plus ou moins fortes.

Ainsi, pour caractériser un épisode évaluatif, il est important d'étudier quel type de régulation la gestion de l'épisode considéré permet. En effet, selon la gestion adoptée, l'enseignant peut être à même de proposer, au-delà des jugements que l'épisode évaluatif lui permet de porter sur les apprentissages de ses élèves, une régulation qui pourra être interactive, rétroactive ou proactive (Allal, *ibid.*). Pour illustrer ce point, prenons l'exemple d'un professeur qui propose à ses élèves un exercice visant à travailler la technique d'une organisation mathématique (quatrième moment selon Chevallard, 1998). Il peut choisir de passer dans les rangs pour aider/accompagner ses élèves dans la réalisation de cet exercice et ainsi réguler les apprentissages de ses élèves, durant l'épisode. Mais il peut aussi gérer autrement cet épisode évaluatif en restant à son bureau et décider de regarder plus tard les productions de ses élèves. Dans ce cas, la régulation se fera *a posteriori* et sera forcément rétroactive.

Cette considération portée à la régulation en lien avec l'évaluation rejoint celle de Haspekian, Roditi et Kiwan (2016) qui ont développé une référence théorique pour étudier les interactions enseignant/élèves en classe du point de vue de la « régulation didactique ». Ces chercheurs proposent de caractériser cette régulation à partir de la nature des feedbacks proposés par l'enseignant, en réponse à une information d'élève.

Au-delà de la gestion d'un épisode évaluatif, il est également important de prendre en compte le contrat didactique qui lui est associé pour mieux comprendre ce qui se joue, du point de vue des apprentissages des élèves, durant cet épisode.

### *Le contrat didactique en évaluation*

Parce que la relation qui lie professeur et élèves lors d'un épisode évaluatif est, de notre point de vue, davantage empreinte de négociation didactique et d'enjeux psycho-cognitifs, nous considérons que l'établissement d'un contrat didactique spécifique est nécessaire. Ce contrat spécifique n'est ni un avenant au contrat didactique car il ne modifie pas les termes du contrat, ni une clause puisqu'il ne concerne qu'un moment spécifique du processus d'apprentissage. Il est néanmoins intimement lié au contrat didactique puisque les acteurs sont les mêmes et que les épisodes évaluatifs jouent un rôle dans l'avancée du savoir.

Pour préciser la nature de ce contrat spécifique, l'approche de Perrin-Glorian et Hersant (2003) nous semble pertinente. Les différentes composantes du contrat didactique qu'elles définissent s'appliquent assez bien à la notion d'épisode évaluatif puisqu'elles concernent le domaine mathématique (tâches évaluatives), le statut didactique du savoir (moment), la nature et les caractéristiques de la situation didactique ainsi que le partage de responsabilité vis-à-vis du savoir entre le professeur et les élèves (gestion). Le niveau de *méscontrat* proposé par ces chercheuses nous paraît plus particulièrement adapté à l'échelle d'un épisode évaluatif. La notion de partage de responsabilité, utilisée dans un sens très local, permet également d'envisager la part plus ou moins grande que peuvent prendre les élèves dans un épisode évaluatif et ainsi rejoindre les courants de l'évaluation formative, voire formatrice (Bonniol, 1986 ; Nunziati, 1990). D'ailleurs Perrin-Glorian et Hersant précisent que :

A l'intérieur de ces *méscontrats* didactiques, le professeur prend une part plus ou moins grande de la responsabilité par rapport au savoir qu'il désire enseigner, d'une part dans la production de la

connaissance et, d'autre part, dans l'évaluation et la validation des réponses des élèves (p. 244).

Nous proposons de nommer ce contrat spécifique *Contrat Didactique en Évaluation* et de le définir comme le contrat qui lie élèves et enseignant lors d'un épisode évaluatif et qui, au-delà de leurs attentes mutuelles, prend en compte les conséquences développementales et personnelles pour chacun des protagonistes.

Pour conclure cette partie relative aux épisodes évaluatifs, nous retiendrons donc que, pour analyser un épisode évaluatif il convient, au-delà de l'étude des tâches évaluatives qui le constituent, du moment où il est proposé et de sa gestion, de prendre en compte le contrat didactique qui lui est attaché.

Pour étudier les pratiques d'évaluation en mathématiques d'un professeur, l'ensemble des *épisodes évaluatifs* proposés par un professeur à ses élèves doivent être considérés. Ces différents épisodes s'articulent les uns aux autres à partir d'une « logique évaluative » que nous allons à présent décrire.

### **La logique évaluative des enseignants**

L'étude des épisodes évaluatifs n'a de sens qu'à travers une étude plus globale des pratiques évaluatives des enseignants en mathématiques. Comment les conçoivent-ils ? Comment les intègrent-ils dans leur processus d'enseignement ? Quelle négociation didactique engendrent-ils ? Etc. Ces questions sont fondamentales pour comprendre ce qui est en jeu, du point de vue des apprentissages des élèves, lors des moments d'évaluation, c'est pourquoi elles occupent une place importante dans le cadre didactique de l'évaluation en mathématiques que nous avons développé.

La « logique évaluative » d'un enseignant, émanant de la complexité et stabilité de ses pratiques, se révèle à travers des indicateurs, plus ou moins observables selon le type d'épisode évaluatif étudié. Différents travaux autour de *classroom assessment* ou des pratiques d'évaluation, nous ont amenée à retenir comme indicateurs : a) la façon dont les professeurs conçoivent les épisodes évaluatifs qu'ils proposent à leurs élèves et les documents évaluatifs associés, b) les jugements que les professeurs sont amenés à émettre dans le cadre de ces épisodes évaluatifs et c) la notation qu'ils adoptent, en lien avec la négociation qu'elle engendre (Chevallard, 1986).

#### *La conception des épisodes évaluatifs*

Le travail documentaire des professeurs a fait l'objet de nombreux travaux (Gueudet & Trouche, 2010 ; Margolinas & Wozniak,

2010), mais dans les faits, peu autour de l'évaluation des apprentissages des élèves pourtant identifiée comme « *un des moments principaux d'une leçon* » (Gueudet & Trouche, 2010). L'élaboration des documents qui serviront de supports aux épisodes évaluatifs que les professeurs proposent à leurs élèves mérite donc d'être étudiée plus particulièrement. Nous proposons de nommer *document évaluatif* le document développé par un professeur lors d'une genèse documentaire et destiné à être utilisé lors d'un épisode évaluatif.

Dans la recherche que nous avons menée en 2014-2016 sur les pratiques évaluatives de professeurs des écoles en mathématiques, nous avons pu constater une grande variété de documents évaluatifs proposés aux élèves (Sayac, 2016b, 2017b), aussi bien dans la forme que dans le fond (nature et diversité des tâches évaluatives). Cette variété résulte de plusieurs éléments contextuels, dont la liberté pédagogique octroyée aux professeurs français et une formation à l'évaluation réduite, voire inexistante.

Pour élaborer ces documents évaluatifs, les professeurs utilisent une multitude de ressources de différentes natures (numériques, professionnelles, institutionnelles, personnelles, etc.) qu'ils assemblent, transforment et recomposent pour les adapter à leur programmation didactique commune (dans le cas de plusieurs professeurs) ou personnelle. Dans l'échantillon que nous avons étudié, 72% des professeurs des écoles ont déclaré élaborer leurs documents évaluatifs seuls, ce qui coïncide avec les enquêtes nationales ou internationale<sup>13</sup>. Or cette façon n'est pas neutre, aussi bien du point de vue des savoirs évalués que de la négociation didactique en jeu.

### *Le jugement professionnel et didactique en évaluation*

De nombreux chercheurs ont mis en évidence l'importance des jugements émis par les professeurs dans leur activité d'évaluation (Morgan & Watson, 2002 ; Scallon, 2004 ; Vantourout, 2004 ; Lafortune & Allal, 2008), certains conditionnant même la validité d'une évaluation à la qualité de ces jugements (Messick, 1989 ; Brookhart, 2003 ; Kane, 2006 ; Andrade & Cizek, 2009). Nous considérons également que les jugements portés par les professeurs sur les productions de leurs élèves, la façon dont ils les émettent et

---

<sup>13</sup> L'enquête TALIS (*Teaching And Learning International Survey*) de 2013 a révélé que 86% des professeurs français conçoivent seuls leurs évaluations (alors que la moyenne des autres pays de l'enquête se situe à 68%).

les utilisent sont au cœur d'une approche didactique de l'évaluation. Ces jugements s'inscrivent dans la lignée de travaux des chercheurs francophones sur le jugement professionnel en évaluation (Allal & Mottier Lopez, 2008, 2009 ; Lafortune & Allal, 2008) et plus particulièrement ceux de Mottier Lopez et Allal (2009) qui voient ce jugement comme « *un acte de discernement et une capacité à construire une intelligibilité des phénomènes d'évaluation en situation* » (p. 26). Pour nous, cette intelligibilité des phénomènes d'évaluation relève d'une *vigilance didactique* (Charles-Pézar, 2010), mais spécifiquement appliquée à l'évaluation, c'est pourquoi nous rajoutons le qualificatif de didactique au concept de jugement professionnel en évaluation et nous le désignons comme *jugement professionnel et didactique en évaluation*.

Le *jugement professionnel et didactique en évaluation* d'un professeur est mobilisé lorsqu'il doit :

- Articuler les différents moments de l'étude entre eux (notamment intégrer les épisodes évaluatifs aux autres moments de l'étude), en fonction des informations récoltées lors des différents épisodes évaluatifs,
- Porter des jugements évaluatifs sur l'état des connaissances mathématiques des élèves,
- Gérer les épisodes évaluatifs de manière à favoriser les apprentissages de leurs élèves, c'est-à-dire en prenant en compte des paramètres liés à l'avancée du savoir, à la négociation didactique et à la motivation des élèves.

Ce jugement professionnel et didactique en évaluation est lié à différents paramètres du professeur. Parmi les paramètres principaux se trouvent (i) les connaissances disciplinaires, (ii) les connaissances didactiques et professionnelles des professeurs et (iii) des facteurs individuels.

(i) Concernant les connaissances disciplinaires, de nombreux travaux ont montré les liens forts qui pouvaient exister entre les connaissances mathématiques et didactiques des professeurs et leur pratique d'enseignement (Clivaz, 2011 ; Coulange, 2001 ; Ball, Hill & Bass, 2005 ; Bloch, 2009 ; etc.) Concernant spécifiquement l'activité d'évaluation, Vantourout (2004) a mis en lumière le rôle essentiel que jouent les connaissances disciplinaires des professeurs lors de la réalisation d'une évaluation à visée formative en mathématiques ainsi que dans l'activité d'évaluation de productions d'élèves en mathématiques (Vantourout & Maury, 2006). De leur côté, Butlen, Pézar et Masselot (2012) ont souligné que pour exercer une vigilance didactique, la maîtrise des contenus à enseigner est indispensable.



(ii) Concernant les connaissances didactiques et professionnelles, la vigilance didactique appliquée à l'activité d'évaluation implique que les professeurs doivent également disposer de compétences spécifiques leur permettant de :

- Concevoir des épisodes évaluatifs valides (voir plus haut),
- Analyser les réponses des élèves et les intégrer au processus didactique,
- Effectuer un retour constructif aux élèves, du point de vue de leurs apprentissages (Bloch, 2006, 2009).

(iii) Concernant les facteurs individuels, nous retenons ceux généralement reconnus et étudiés par des chercheurs qui se sont plus particulièrement intéressés aux mathématiques (Thompson, 1992 ; Niss, 1993 ; Schoenfeld, 2007 ; Beswick, 2006 ; Philipp, 2007) :

- Les croyances et représentations sur l'évaluation<sup>14</sup> qui sont socialement, professionnellement et personnellement construites. Schoenfeld (2007) considère que les professeurs agissent en fonction de leurs ressources (connaissances, matériel, etc.), leurs buts conscients ou inconscients et leurs orientations (croyances, valeurs, dispositions, etc.)
- Les conceptions sur l'apprentissage (Skott, 2015). La place accordée aux élèves dans l'évaluation de leurs apprentissages est un élément clé pour appréhender les conceptions des professeurs sur l'apprentissage<sup>15</sup>.
- Les expériences vécues par les professeurs en matière d'évaluation, qu'elles soient professionnelles ou personnelles en tant qu'ancien élève ou étudiant. Elles sont également, consciemment ou inconsciemment, marquantes pour fonder leur jugement professionnel en évaluation (Raymond, 1997).

---

<sup>14</sup> *Beliefs* dans la littérature anglophone.

<sup>15</sup> En France, le faible pourcentage de professeurs pratiquant l'autoévaluation ou l'évaluation entre pairs témoigne d'une vision de l'enseignement où l'élève a peu de place et est peu impliqué dans l'évaluation de ses apprentissages. Comme Coulange (2013), il nous semble que l'étude de la topogénèse (Chevallard, 1999 ; Sensevy & Mercier, 2007) dans les épisodes évaluatifs est particulièrement intéressante pour comprendre ce qui se joue entre l'enseignant et ses élèves du point de vue des apprentissages de ces derniers *via* leur évaluation.

### La notation

En accord avec Schubauer-Leoni (1991) qui considère que « les hésitations du maître dans la construction de la note mettent en lumière des éléments du fonctionnement didactique de l'évaluation dans une classe. » (p. 93), nous considérons que la notation ne peut être absente d'un cadre didactique de l'évaluation.

Les usage(s) et les critères de réussite (Bonniol, 1981) adoptés, la désignation de la « bonne » ou « mauvaise » réponse (Chevallard, 1985) et son rôle dans la négociation didactique ainsi que le message adressé aux élèves (Chevallard & Feldmann, 1986) varient d'un professeur à un autre<sup>16</sup>, c'est pourquoi nous avons retenu la notation comme un des indicateurs de la « logique évaluative » d'un enseignant.

Parce que « *la note assignée n'est pas mesure, mais message. Ce message intervient dans une négociation, ou une transaction, qui signe un rapport de forces entre l'enseignant, les enseignés, à propos du savoir enseigné.* » (Chevallard et Feldmann, 1986 p. 71), la notation doit être étudiée en lien avec (i) le contrat didactique en évaluation et (ii) les jugements évaluatifs portés sur les productions (au sens large) des élèves et (iii) la façon dont les élèves vont être amenés à répondre en vue de la meilleure attribution de notation possible.

(i) La façon dont un professeur va rendre compte à ses élèves de la notation attribuée à certaines de leurs productions<sup>17</sup> est à relier avec le contrat didactique en évaluation. En effet, selon la forme et l'importance qu'il va donner à cette restitution, les dimensions de pouvoir et de négociation vont être plus ou moins activées et produire des effets sur le processus didactique en cours, différenciés suivant chaque élève. Trouilloud et Sarrazin (2002) ont montré combien les attentes de l'enseignant envers les élèves influencent l'évaluation de leurs apprentissages. En considérant que ces attentes relèvent d'un contrat didactique en évaluation, on peut donc également considérer qu'elles ont une incidence sur la notation qui va en découler. Notation et contrat didactique en évaluation sont intrinsèquement liés et s'ajustent mutuellement lors de chaque épisode évaluatif. Comment la notation participe-t-elle à l'élaboration/évolution du contrat didactique en évaluation établi au niveau du processus didactique global et au niveau de chaque épisode évaluatif? Réciproquement comment une

---

<sup>16</sup> Pierre Merle parle d'arrangements évaluatifs (1996, 2007).

<sup>17</sup> Tous les épisodes évaluatifs n'ont pas vocation à donner lieu à une notation formelle.

évolution du contrat didactique en évaluation peut-elle amener des changements en matière de notation ? Ces questions nous semblent avoir toute leur place dans une approche didactique de l'évaluation et mériteraient d'être étudiées spécifiquement.

(ii) Les jugements évaluatifs portés par un professeur sur les productions d'un élève se situent généralement en amont de toute notation qui permet d'en rendre compte publiquement. Chevallard (1989) perçoit également la notation comme l'énonciation d'un jugement qu'il considère comme une « passion institutionnelle ». Elle est en quelque sorte une traduction institutionnelle et publique de ce jugement, même si elle n'est pas sans risque (Pluvinaud, 1979) et qu'elle n'en est qu'une facette (Bressoux & Pansu, 2003). Vantourout, Goasdoué, Maury & Nabout (2012) ont montré, à partir de situations aménagées, que des divergences de notations ne recouvraient pas forcément des divergences de jugements évaluatifs, ce qui tend à montrer que la question de l'attribution d'une notation, en lien avec le jugement professionnel et didactique en évaluation est un phénomène complexe. Chevallard (1988) défend l'idée que l'attribution « d'échecs » doit être didactiquement prise en charge et étudiée pour ne pas en rester à l'état de constat funeste.

Il convient également de noter que les jugements portés sur les réponses des élèves peuvent, au-delà des connaissances disciplinaires et didactiques du professeur, être perturbés par la prise en compte de composantes socio-culturelles telles que le sexe de l'élève (Bressoux, 2000 ; Marro, 1995 ; Sayac & Grapin, 2016a ; Terrier, 2014) ou l'appartenance socio-professionnelle des parents (Messick, 1989 ; Schubauer Leoni, 1991 ; Delcambre, 1994, etc.).

(iii) Comme le dit Sensevy (2008), « l'Élève doit *témoigner d'un Savoir* », mais la façon dont il va en témoigner mérite d'être étudiée car elle n'est pas sans incidence sur le verdict qui sera porté par l'enseignant et sur le processus didactique en jeu. Coppé (1998) a montré combien ce que rend public ou garde privé l'élève dépend des attentes supposées du professeur. Ce qui est certain, c'est que dans la majorité des cas, l'élève cherchera avant tout à avoir « une bonne note », la meilleure possible, ce que nous avons appelé la « course au 20 », en hommage à Brousseau<sup>18</sup>. Chevallard (1986) et Schubauer-Leoni (1991) ont mis en évidence que les élèves tentent de décrypter et de comprendre les attentes de leur professeur pour

---

<sup>18</sup> La « course à 20 » est une situation emblématique proposée par Guy Brousseau pour initier les élèves au raisonnement mathématique et pour leur donner une idée du fonctionnement des hypothèses, des preuves et des théorèmes.

essayer d'y répondre au plus près. Cet objectif est souvent premier à leurs yeux, derrière celui de témoigner de leurs savoirs et ils développent des stratégies pour l'atteindre. Dans l'étude des stratégies de réponses des élèves que nous avons étudiées (Sayac & Grapin, 2015), nous avons pu constater combien les stratégies des élèves pouvaient être conditionnées<sup>19</sup> par ces attentes supposées et cette "course au 20", ce qui ne les rendaient pas forcément révélatrices des connaissances effectives des élèves (Sayac & Grapin, 2015).

## UNE ILLUSTRATION DE L'USAGE DE NOTRE CADRE

Dans le cadre d'une recherche que nous menons actuellement<sup>20</sup> et qui vise à étudier en quoi les pratiques évaluatives à l'école peuvent être vectrices d'inégalités scolaires, nous avons été amenée à étudier, à partir du cadre didactique de l'évaluation que nous avons développé, la pratique évaluative d'une professeure des écoles (appelée Caroline par la suite) enseignant en CM2 dans une école de la région parisienne. A titre exploratoire, nous avons cherché à caractériser la pratique évaluative de l'enseignante à partir de l'étude d'une séquence (8 séances) portant sur les fractions en début d'année scolaire.

Nous rendons compte brièvement et de manière restreinte<sup>21</sup> de cette étude en cours afin de montrer la pertinence du cadre développé et l'intérêt de prendre en considération les différents éléments qui le constituent.

### Méthodologie

Toutes les séances relatives à la séquence « Fractions » élaborée par Caroline ont été filmées et ont fait l'objet d'un découpage en

---

<sup>19</sup> Pour répondre à certaines questions, un nombre non négligeable d'élèves (souvent les plus fragiles) ont cherché à se souvenir de ce qui avait été dit ou fait en classe plutôt que de s'engager dans une procédure personnelle de résolution.

<sup>20</sup> « *Les pratiques d'évaluation dans les disciplines scientifiques à la fin des degrés primaires en France et en Suisse* » dans le cadre du réseau RE.S.E.I.D.A (Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages), débutée en juin 2018, avec des chercheurs français et suisses.

<sup>21</sup> Cette recherche s'inscrit dans une approche codisciplinaire (Blanchard-Laville, 2000) qui permet de restituer la complexité des pratiques enseignantes. L'étude des pratiques évaluatives des professeurs se fait à travers le regard croisé de chercheurs rattachés à des champs scientifiques complémentaires (didactiques disciplinaires, science du langage, approche clinique d'orientation psychanalytique, sciences de l'éducation).

épisodes, en fonction des différents jeux épistémiques cibles associés<sup>22</sup> (Marlot, 2008). Chaque épisode a été décrit et étudié pour considérer dans quelle mesure il pouvait être qualifié d'épisode évaluatif. La présence de jugements évaluatifs a été retenue pour déterminer le caractère évaluatif des épisodes étudiés.

Pour chaque épisode évaluatif identifié, nous avons étudié les jugements évaluatifs présents et la régulation associée. Pour affiner notre analyse, nous avons distingué deux sortes de jugements évaluatifs : les jugements évaluatifs « furtifs » et les jugements évaluatifs « appuyés »<sup>23</sup>. Nous avons qualifié les jugements évaluatifs de « furtifs » lorsque qu'ils provenaient de brèves observations (par exemple lorsque la professeure passait rapidement dans les rangs pour regarder ce qu'avaient fait les élèves ou lorsqu'elle leur demandait de présenter sur l'ardoise leurs résultats ou de lever la main pour indiquer qui avait réussi). Nous les avons qualifiés d'« appuyés » lorsqu'ils résultaient d'une observation plus fine (temps d'arrêt sur le travail d'un élève pendant la séance, correction des productions des élèves). Nous avons rajouté « avec trace » ou « sans trace » pour indiquer dans quelle mesure la professeure avait gardé des traces de ses jugements évaluatifs, par exemple en annotant certains exercices dans le cahier du jour ou en corrigeant le test sommatif (noté TS par la suite). La régulation a été décrite suivant les trois types de régulations associées à l'évaluation formative retenus par Allal (1979, 1988) : interactive, rétroactive et proactive.

A partir de ces éléments et des données que nous avons récoltées pour cette étude (vidéos, cahiers et TS des élèves, entretiens ante et post, activités et exercices proposés aux élèves durant les séances), nous avons caractérisé la pratique évaluative de Caroline en fonction des épisodes évaluatifs proposés et de sa logique évaluative.

## Résultats : la pratique évaluative de Caroline

### *Au niveau des épisodes évaluatifs*

<sup>22</sup> Corinne Marlot utilise la notion de « jeu épistémique cible » pour désigner les jeux d'apprentissage visant la maîtrise et la construction d'un savoir cible. Nous avons retenu cette notion pour identifier les épisodes évaluatifs.

<sup>23</sup> Le caractère furtif ou appliqué d'un jugement évaluatif ne présage pas de sa qualité. Un jugement furtif peut être efficace quand, par exemple, les productions attendues des élèves peuvent s'évaluer d'un simple regard. *A contrario*, un jugement appuyé peut être improductif si, par exemple, l'enseignant ne peut comprendre la production d'un élève ou s'il lui propose une régulation inadaptée.

**Moments** : Nous avons identifié 23 épisodes évaluatifs au cours de la séquence étudiée. Ils sont présents, à chaque séance, tout au long de la séquence comportant 8 séances (TS inclus).

**Tâches** : Les tâches proposées dans ces différents épisodes évaluatifs sont toutes issues du manuel CapMaths CM2 sauf celles d'une fiche externe au manuel réalisée par Caroline à partir d'exercices trouvés sur Internet et du TS. Elles sont de complexité variée et généralement pertinentes du point de vue des jeux épistémiques ciblés, mais Caroline en réduit souvent la portée épistémique<sup>24</sup>. Lors de la séance 2, la fiche proposée pour « entraîner les élèves aux fractions » comporte vingt fractions à mettre en correspondance avec des surfaces. Aucune de ces fractions n'est supérieure à 1 et les surfaces sont exclusivement des diagrammes circulaires découpés en fonction du dénominateur de la fraction. Certaines tâches proposées dans les exercices composant le TS et « transformées » par Caroline pour être équivalentes à celles travaillées lors de la séance prépa-bilan (séance 7) sont, en réalité, de complexité plus élevée (notamment au niveau des facteurs 2 et 3) et les procédures que peuvent utiliser les élèves restreintes<sup>25</sup>.

**Gestion** : La pratique évaluative de Caroline se caractérise par une prépondérance d'épisodes évaluatifs avec jugements furtifs, sans trace (22 sur 23), proposés au cours de la séquence. En dehors du TS, des jugements évaluatifs appuyés sont réservés à quelques élèves, toujours les mêmes. Ces élèves sont identifiés par Caroline comme étant en difficulté (pour deux d'entre elles), ou potentiellement en difficulté (pour une élève). De rares épisodes donnent lieu à des traces écrites de jugements sur le cahier du jour ou sur le TS (4 sur 23).

La régulation proposée est majoritairement interactive et s'appuie sur les erreurs ou difficultés repérées chez les trois élèves jouant un rôle central dans l'avancée du temps didactique. Elle

---

<sup>24</sup> Par exemple, lors d'un épisode évaluatif de la séance 2, les fractions  $\frac{2}{8}$  et  $\frac{1}{4}$  devaient être mises en correspondance avec des surfaces à hachurer. Caroline n'a pas évoqué l'égalité de ces fractions.

<sup>25</sup> Par exemple, dans l'exercice 3 du test « révision » issu du manuel Capmaths (voir annexe), la bande-unité servant d'étalon pour les 3 tâches proposées mesure 9 cm et les bandes A, B et C auxquelles il faut attribuer une fraction représentant respectivement  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{3}$  et  $\frac{1}{3}$  de cette bande-unité. Dans le TS (voir annexe), la bande-unité proposée par Caroline mesure 11,5 cm et les bandes A et B respectivement 5,75 cm, 15,5 cm ce qui correspond approximativement aux fractions  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{4}{3}$ . Concernant la bande C aucune fraction simple ne correspond aux 9,75 cm de la bande C proposée.

n'est proactive que sur un épisode évaluatif de la séance 6 où une différenciation est proposée aux élèves selon leurs difficultés supposées concernant la transformation des écritures fractionnaires. Une régulation rétroactive est potentiellement proposée aux élèves, à partir des épisodes évaluatifs avec traces, mais nous n'y avons pas eu accès.

**Contrats didactiques en évaluation** : Le contrat didactique attaché aux épisodes évaluatifs furtifs avec ou sans trace autorise les élèves à montrer leurs erreurs et à exposer leurs procédures (même si Caroline ne les exploite pas forcément), mais pas à poser des questions. Ils s'y sont (sentis) autorisés seulement lors de la séance dédiée à la préparation du TS (séance 7). Le contrat didactique attaché au TS s'apparente à celui proposé dans le dispositif évaluatif de l'EPCC<sup>26</sup> (Antibi, 2014), mais il n'est pas respecté par Caroline dans la mesure où les tâches proposées dans le TS sont plus complexes que celles proposées lors de la séance de préparation du TS (voir plus haut).

*Au niveau de la logique évaluative*

**Conception des documents évaluatifs** : Caroline s'appuie sur le manuel CapMaths pour la majorité des documents évaluatifs supports des épisodes évaluatifs proposés. La conception de ces documents est donc déléguée à un manuel, mais les deux documents choisis ou élaborés par Caroline en dehors de ce manuel témoignent, comme nous l'avons montré précédemment, de difficultés que cette enseignante rencontre à analyser d'un point de vue didactique les tâches mathématiques qu'elle propose à ses élèves.

**Jugement professionnel et didactique en évaluation** : Les séances proposées par Caroline sont exclusivement constituées d'épisodes évaluatifs qui s'enchaînent les uns à la suite des autres, sans réelle institutionnalisation, si ce n'est des moments qui pourraient s'y apparenter, mais qui restent très contextualisés. L'avancée du temps didactique est rythmée par les explications données à toute la classe à partir d'erreurs repérées chez quelques élèves (toujours les mêmes). Les jugements furtifs que Caroline porte sur les connaissances de ses élèves produisent des régulations qui sont dépendantes de ses connaissances didactiques qu'elle reconnaît elle-même être peu développées<sup>27</sup>. Ces régulations ne

---

<sup>26</sup> Évaluation Par Contrat de Confiance

<sup>27</sup> Caroline revendique elle-même avoir des difficultés en mathématiques et rencontrer des problèmes pour enseigner cette discipline. Elle a donc

sont pas toujours adaptées aux difficultés ou obstacles rencontrés par les élèves car Caroline convoque indifféremment trois sens donnés aux fractions ( $a/b = a$  partagé en  $b$  parts ou  $a \times 1/b$  ou le quotient de  $a$  par  $b$ ) sans que le sens retenu soit forcément le plus approprié à la situation traitée. Durant les séances (sauf pour le TS), les jugements appuyés que nous avons repérés ne concernent qu'une minorité d'élèves identifiés par Caroline comme étant en grande difficulté (trois, plus spécifiquement), ce qui signifie que les autres élèves, qui constituent la majorité de la classe, ne bénéficient pas de jugements évaluatifs permettant à Caroline ou aux élèves eux-mêmes de connaître précisément leurs acquis ou leurs difficultés et qui pourraient produire une régulation adaptée à leurs besoins.

Concernant les croyances et représentations de Caroline sur les apprentissages, elle considère que les apprentissages se font par étapes, du simple au complexe, ce qui implique qu'un élève doit d'abord témoigner de ses connaissances relatives à des savoirs qu'elle considère comme simples avant d'avoir accès à des connaissances plus complexes. Cette croyance se traduit, par exemple, par un refus d'explication opposé à une élève sous prétexte que l'élève devait d'abord savoir situer une fraction sur une droite graduée avant d'apprendre à la décomposer. Caroline estime qu'être mathématicien, c'est « prendre du plaisir à faire des mathématiques » et « résoudre des problèmes rapidement, sans rencontrer de difficulté » (idéologie du don). Ce qui l'amène à poser des questions du type « qui a réussi en 2 secondes ? » pour repérer les élèves qui seraient plus « mathématiciens » que d'autres.

Concernant les caractéristiques propres à Caroline que nous avons repérées à partir d'entretiens (Sayac & Ploye, 2018) et qui impactent son jugement professionnel et didactique en évaluation, nous retenons, pour cet article, un ensemble de représentations sociales qui empruntent à une vulgate sociologique que l'enseignante a incorporée. Il y aurait deux types de populations dans la ville où Caroline enseigne : des élèves qui bénéficient d'un environnement familial stimulant et propice aux apprentissages scolaires (enfants de « bobos », dixit Caroline) et d'autres pour qui l'environnement familial est moins favorable, voire gênant (enfants d'origine malienne, dixit Caroline). Pour ces derniers, une attention particulière doit leur être portée, ce que Caroline fait en centrant très majoritairement son enseignement sur les difficultés

---

fait le choix de suivre la progression du manuel Capmaths qui est reconnu « par la communauté » et à laquelle elle adhère.



que ces élèves rencontrent durant les séances. Pour les autres, Caroline leur délègue souvent la responsabilité des jugements évaluatifs relatifs à leurs productions, à travers des interpellations du type « pour ceux qui ont compris, vous pouvez... » qui ponctuent régulièrement les séances. Elle accorde ainsi à ces élèves une réelle autonomie vis-à-vis de la régulation de leurs propres apprentissages, sans (apparemment) s'assurer que tous puissent l'assumer.

**Notation** : La notation adoptée par Caroline est différente selon les travaux considérés. Pour les exercices consignés dans le cahier du jour des élèves, Caroline utilise un code couleur (traits au stabilo jaune, orange, vert marqués dans la marge), des tampons (« avec aide », « très bon travail, continue ainsi », « attention au soin ») et des commentaires personnalisés (« d'où provient ce nombre ? », « tu n'as pas encore compris », « écris sur les lignes », etc.) Pour le TS, Caroline reprend les niveaux du LSU<sup>28</sup> (A : atteint ; PA : partiellement atteint et NA : non atteint), mais elle a choisi de surligner en jaune les PA et NA plus « fragiles » pour les différencier de ceux relevant davantage « d'étourderies » (souvent attribuées à des productions d'élèves issus d'un environnement familial stimulant). La double analyse (didactique et clinique) que nous avons réalisée des copies corrigées des élèves au TS a révélé des ambiguïtés et des incohérences dans la notation de Caroline que nous avons interprétées à l'aune de notre problématique d'inégalités scolaires liées à l'évaluation en classe (Sayac & Ployé, soumis). Notons que peu de travaux réalisés lors des multiples épisodes évaluatifs proposés durant la séquence donnent lieu à une notation ou à une trace écrite permettant de témoigner de l'évolution des acquis des élèves.

La pratique évaluative que nous venons de décrire est celle d'une enseignante ordinaire ayant le souci de faire réussir tous ses élèves. On entrevoit néanmoins comment certaines caractéristiques de cette pratique (prépondérance de jugements évaluatifs furtifs et sans trace, régulation exclusivement à partir des difficultés repérées chez certains élèves et pas forcément adaptée, délégation de jugements évaluatifs aux autres élèves, etc.) pourrait avoir un impact différencié sur les apprentissages des élèves, selon des paramètres (didactiques, sociologiques, langagiers, psychologiques) que nous sommes en train d'étudier à travers la

---

<sup>28</sup> Livret Scolaire Unique : <https://www.education.gouv.fr/cid106168/le-livret-scolaire-unique-du-cp-a-la-troisieme.html&xtmc=livretscolaireunique&xtnp=1&xtr=1>

démarche codisciplinaire que nous avons adoptée pour notre recherche.

## CONCLUSION

Le cadre didactique de l'évaluation proposé part du principe que l'évaluation est partie prenante des processus de transmission et d'acquisition de savoirs en mathématiques. Il vise à décrire et expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre l'enseignement, les apprentissages et l'évaluation de ces apprentissages (en référence à la définition de la Didactique de Douady, 1984). Pour définir ce cadre, nous nous sommes appuyée sur différents travaux s'inscrivant dans cette perspective, en essayant de combiner les concepts et résultats les plus pertinents pour penser et analyser l'évaluation en lien avec les apprentissages des élèves en mathématiques.

Dans ce cadre, les concepts d'*épisode évaluatif*, de *contrat didactique en évaluation* et de *jugement professionnel et didactique en évaluation* qui s'inscrivent dans la *logique évaluative* d'un professeur sont principalement développés. Ils permettent d'inscrire pleinement l'évaluation dans une nouvelle approche scientifique, plus didactique et volontairement ancrée dans la réalité des pratiques en classe comme nous l'avons montré dans l'étude de la pratique évaluative de Caroline.

L'approche défendue dans ce cadre n'est pas sans poser de problèmes car elle impose un changement de paradigme<sup>29</sup> dans le regard que l'on peut porter sur l'évaluation. En effet, le paradigme dans lequel le cadre présenté dans cet article s'inscrit ne correspond à aucun de ceux que De Ketele a identifiés dans la synthèse qu'il a réalisée en 1993, puis complétée en 2016. Ce nouveau paradigme se caractérise par une place importante accordée aux savoirs évalués en sus de paramètres liés à la complexité des pratiques d'évaluation des professeurs. Il s'est imposé à nous au cours de nos recherches sur les pratiques d'évaluation en mathématiques à l'école primaire (Sayac, 2016b, 2017b, 2018), car nous avons réalisé combien les tâches évaluatives élaborées par les professeurs et la façon dont elles étaient proposées aux élèves dépendent de facteurs conjoncturels (niveau d'enseignement, éducation prioritaire, etc.) et personnels (croyances, connaissances, expériences, etc.) et ont des effets sur les apprentissages mathématiques des élèves. Ces recherches nous ont convaincue

---

<sup>29</sup> De Ketele (1993) rappelle que Selon Kuhn (cité par Doyle, 1986), « un paradigme est un cadre implicite qui définit des problèmes, des méthodes et des solutions légitimes pour une communauté scientifique ».

que certains choix des professeurs (par exemple, le faible niveau de complexité des tâches évaluatives ou une régulation limitée comme celle pratiquée par Caroline) pouvaient expliquer les résultats peu glorieux des élèves français aux évaluations nationales (CEDRE) et internationales (TIMSS, PISA) qui soulignent toutes, par ailleurs, combien, en France, la corrélation entre inégalités scolaires et inégalités sociales est forte.

Par ailleurs, parce que le cadre que nous avons développé s'ancre sur les pratiques d'évaluation en mathématiques dans la réalité des classes, il nous a semblé opportun de le mobiliser pour des formations à l'évaluation en mathématiques. C'est ce que nous avons fait pour la formation à « la culture de base en évaluation » que nous avons récemment dispensée dans le Plan National de Formation attaché à la mission Villani-Torossian (2018). Le découpage en axes a structuré la formation en deux temps, l'un centré sur les épisodes évaluatifs, l'autre sur la logique évaluative des professeurs. Les concepts développés dans notre cadre ont été transposés pour la formation et ont permis d'aborder des questions de moments d'évaluation, de tâches évaluatives (complexité, validité et recouvrement), de la gestion d'un épisode évaluatif et du contrat didactique qui lui est rattaché, de conception des évaluations (ressources & méthodes), de jugement professionnel et didactique en évaluation et de la notation (au sens large). Le fait de pouvoir aborder toutes ces questions a fait émerger, pour les référents mathématiques de circonscription à qui cette formation était destinée, la complexité des pratiques d'évaluation en mathématiques et les enjeux d'apprentissage qu'elles soulèvent. En a découlé la nécessité de se situer dans la ZPDP « Zone Proximale de Développement des Pratiques » des enseignants (Robert & Vivier, 2013) pour envisager de les faire évoluer.

Pour conclure, nous souhaitons souligner que, parce que dans notre cadre la dimension personnelle tient une part importante dans les pratiques évaluatives des professeurs (voir Caroline), notamment à travers la logique évaluative, il est nécessaire de développer des méthodologies de recherche qui permettent de prendre pleinement en compte cette dimension, soit en croisant les approches scientifiques, soit en mixant les regards (scientifiques et professionnels). C'est ce que nous faisons actuellement dans le cadre de la recherche évoquée dans la dernière partie de l'article, mais également dans le cadre du LéA<sup>30</sup> EvalNumC2 dans lequel

---

<sup>30</sup> Les LéA (Lieux d'Éducation Associés à l'IFÉ) sont des projets de recherche/formation coordonnés par l'IFÉ (Institut Français de

des chercheurs (en Didactiques des mathématiques et en Sciences de l'éducation) et des praticiens (professeurs des écoles en CP et en CE1 et une conseillère pédagogique) travaillent ensemble autour de l'évaluation des apprentissages en numération au cycle 2. Parce que l'évaluation relève de ce que nous appelons « l'intime professionnel » des professeurs (Sayac, 2016b, 2017b, 2018) et que ces derniers craignent souvent de dévoiler des pratiques qui pourraient elles-mêmes être évaluées par le chercheur, il est souvent difficile d'avoir accès à leurs évaluations formelles et informelles. Collaborer autour de projets communs sur l'évaluation permet tout à la fois de gagner la confiance des partenaires et ainsi lever leurs réticences, mais aussi d'avoir accès, à travers les échanges et les travaux que les modalités du projet permettent, à des données utiles pour le chercheur. De telles recherches avec une dimension collaborative affirmée sont actuellement en développement dans la communauté scientifique des didacticiens des mathématiques (Bednarz, Horoks & Pilet, Roditi, Sayac). Elles contribueront très certainement, en s'appuyant sur le cadre didactique de l'évaluation proposé, à enrichir le champ scientifique de l'évaluation et de ses pratiques ainsi que les pratiques évaluatives des enseignants en mathématiques.

#### BIBLIOGRAPHIE

- ALLAL, L. (1979). Stratégies d'évaluation formative : conceptions psychopédagogiques et modalités d'application in L. Allal, J. Cardinet and P. Perrenoud (Dir.), *L'évaluation formative dans un enseignement différencié* (pp. 153-183). Bern : Peter Lang.
- ALLAL, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise : processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. In M. Huberman (Dir.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires ? Les propositions de la pédagogie de maîtrise* (pp. 86-126). Neuchâtel, Suisse : Delachaux et Niestlé.
- ALLAL, L. & LAVEAULT, D. (2009). *Assessment for Learning* : Évaluation-soutien d'Apprentissage. *Mesure et évaluation en éducation*, 32(2), 99-106.
- ALLAL, L., & MOTTIER-LOPEZ, L. M. (2005). L'évaluation formative de l'apprentissage : revue de publications en langue française. *L'évaluation formative, Pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires*, (pp. 265-299). Paris : OCDE

- ALLAL, L., & MOTTIER LOPEZ, L. (2008). Mieux comprendre le jugement professionnel en évaluation. Apports et implications de l'étude genevoise. In : Lafortune, L. & Allal, L. (Ed.). *Jugement professionnel en évaluation : pratiques enseignantes au Québec et à Genève*. Presses de l'Université du Québec. 223-239.
- ALLAL, L., & MOTTIER LOPEZ, L. (2009). Au cœur du jugement professionnel : en évaluation : des démarches de triangulation. *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 22, 25-40.
- ANDRADE, H., & CIZEK, G. J. (Eds) (2009). *Handbook of formative assessment*. New York : Taylor & Francis US.
- ANTIBI, A. (2014). *Pour des élèves heureux en travaillant. Les bienfaits de l'évaluation par contrat de confiance*, Paris, Nathan.
- BALL, D. L., HILL, H. C., & BASS, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-22.
- BESWICK, K. (2006). Changes in preservice teachers' attitudes and beliefs: The net impact of two mathematics education units and intervening experiences. *School Science and Mathematics*, 106(1), 36-47.
- BLACK, P., & WILLIAM, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: principles, policy & practice*, 5(1), 7-74.
- BLANCHARD-LAVILLE, C. (2000). De la codisciplinarité en sciences de l'éducation. *Revue française de pédagogie*, 132, 55-66.
- BLOCH, I. (2005). Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leurs classes ? Comment travailler cette pertinence en formation, dans des situations didactiques ? In C. Castela & C. Houdement, (Dir.) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, (pp.77-114), Paris : ARDM et IREM Paris 7.
- BLOCH, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x 81*, 25-52.
- BLOOM, B. S., HASTINGS, J. T. & MADAUS, G. F. (1971). *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. New York: McGraw-Hill Book. Co.
- BONNIOL, J. J. (1981). *Déterminants et mécanismes des comportements d'évaluation d'épreuves scolaires* (Doctoral dissertation). Université de Bordeaux 2.
- BONNIOL, J. J. (1986). Recherches et Formations : Pour une problématique de l'évaluation formative. In J.M. De Ketele (Ed.), *L'évaluation : approche descriptive ou prescriptive ?* (pp. 119-133) Bruxelles : De Boeck,
- BRESSOUX, P. (2000). *Modélisation et évaluation des environnements et des pratiques d'enseignement*. Habilitation à diriger les recherches. Université Pierre Mendès France. Grenoble.
- BRESSOUX, P., & PANSU, P. (2003). *Quand les enseignants jugent leurs élèves*. Paris : Presses universitaires de France.
- BROOKHART, S. M. (2003). Developing measurement theory for classroom assessment purposes and uses. *Educational measurement: Issues and practice*, 22(4), 5-12.
- BROUSSEAU, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques : I. Structure et fonctionnement du système didactique., In Noïfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes de la VIII<sup>e</sup> Ecole d'été de*

- didactique des mathématiques St-Sauves d'Auvergne*. (pp.3-46) Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.
- BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M., & MASSELOT, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP : Quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CARDINET, J. (1983). *Des instruments d'évaluation pour chaque fonction*. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques. Neuchâtel.
- CHARLES-PEZARD M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30 (2), 197-261.
- CHESNAIS, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : Les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de doctorat, Paris 7.
- CHEVALLARD, Y., & FELDMANN, S. (1986). *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD, Y. (1986). Vers une analyse didactique des faits d'évaluation. In J-M. De Ketele (Ed.), *L'évaluation : approche descriptive ou prescriptive* (pp.31-59). Bruxelles : De Boeck.
- CHEVALLARD, Y. (1988). *Notes sur la question de l'échec scolaire*. IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD, Y. (1990). Évaluation, véridiction, objectivation. In J. Colomb et J. Marsenach (Eds) *L'évaluateur en révolution*, (pp.13-36). Paris, INRP.
- CHEVALLARD, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, In R. Noirfalise, Actes de l'université d'été de La Rochelle, 4-11 juillet 1998, (pp. 91-120) IREM de Clermont-Ferrand.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.
- CHEVALLARD, Y., & MERCIER, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Cahier n° 8. Marseille, France : IREM d'Aix-Marseille.
- CHOPIN, M. P. (2006). Temps d'enseignement et temps didactique Approche didactique de la question du temps dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école élémentaire. *Carrefours de l'Education*, 21, 53-71.
- CLIVAZ S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat, Université de Genève.
- COPPE, S. (2018). Évaluation et didactique des mathématiques : vers de nouvelles questions, de nouveaux travaux. *Revue Mesure et Évaluation en Éducation*. 41(1), 7-39.
- COPPE, S. (1998). Composantes privées et publiques du Travail de l'élève en situation de devoir surveillé de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 35(2), 129-151.
- CRAHAY, M. (1999). Les enseignants, leurs croyances, leurs pratiques d'évaluation et l'échec scolaire. Voyage dans un espace multidimensionnel. Hommage à Daniel Bain, *Service de la recherche en éducation*, 6, 15-35.

- COULANGE, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en troisième une étude économique et écologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(3), 305-353.
- DE KETELE, J. M. (1993). L'évaluation conjugée en paradigmes. *Revue française de pédagogie*, 103(1), 59-80.
- DE KETELE, J. M. (2016). L'évaluation et ses nouvelles tendances, sources de dilemmes. *Éducation Permanente*, 208, 19-32.
- DE KETELE, J. M., & ROEGIERS, X. (1993). *L'évaluation : Approche et démarches*. Louvain-la-Neuve, Diffusion Universitaire CIACO.
- DELCAMBRE, I. (1994). La note : mesure ou message ? *Recherches* 21, 17-24.
- DOUADY, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII.
- GRAPIN, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.
- GRUGEON B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.
- GRUGEON-ALLYS, B. & GRAPIN, N. (2017). *Validité des évaluations : une approche épistémologique-didactique*. Communication présentée au colloque Evaluation en mathématiques, Université Paris-Est Créteil.
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2010). Ressources en ligne et travail collectif enseignant : accompagner les évolutions de pratique. In L. Mottier Lopez, C. Martinet, & V.Lussi (Eds) *Congrès Actualité de la Recherche en Education* (pp. 1-10). Université de Genève.
- HARLEN, W. (2005). Teachers' summative practices and assessment for learning – tensions and synergies. *The Curriculum Journal*, 16(2), 207-223.
- HASPEKIAN, M., KIWAN, M. & RODITI, E. (2016). *Feedback des enseignants, évaluation formative et régulation des apprentissages : conséquences pour une approche didactique des interactions professeurs-élèves en classe de mathématiques*. (Rapport de recherche transmis à l'ANR pour le projet NeoPraEval). Paris, France.
- HOROKS, J. (2006). *Les triangles semblables en classe de 2<sup>nde</sup> : Des enseignements aux apprentissages Étude de cas*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.
- KANE, M. (2006). Content-related validity evidence in test development. In S. M. Downing & T. M. Haladyna (Eds.), *Handbook of test development* (pp. 131-153). Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- KLENOWSKI, V. (2009). Assessment for learning revisited: An Asia-Pacific perspective. *Assesment in Education: Principles, Policy & Practice*, 16(3), 263-268.
- LAFORTUNE, L., & ALLAL, L. K. (2008). *Jugement Professionnel en Evaluation : Pratiques Enseignantes Au Québec Et à Genève* (Vol. 21). Québec : Presses de l'Université du Québec.

- LAVEAULT, D., & GREGOIRE, J. (2014). *Introduction aux théories des tests en psychologie et en sciences de l'éducation*. Bruxelles : De Boeck.
- MCGATHA, M., & BUSH, W. (2013). Classroom assessment in mathematics. In J. McMillan (Ed.), *SAGE handbook of research on classroom assessment*, (pp. 448-461). Thousand Oaks, SAGE Publications, Inc.: CA.
- MARGOLINAS C., & WOZNIAC, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 233-249), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.
- MARLOT, C. (2008). *Caractérisation des transactions didactiques : deux études de cas en Découverte du Monde Vivant au cycle II de l'école élémentaire*. Thèse de doctorat - Université Européenne de Bretagne Rennes II.
- MARRO, C. (1995). Réussite scolaire en mathématiques et physique, en passage en 1<sup>ère</sup> S : Quelles relations du point de vue des élèves et des enseignants ? Étude différentielle suivant le sexe des élèves. *Revue française de pédagogie*, 110(1), 27-35.
- MERLE, P. (2007). *Les notes. Secrets de fabrication*. Paris : Presses Universitaires de France.
- MERLE, P. (1996). *L'évaluation des élèves : enquête sur le jugement professoral*. Paris : Presses Universitaires de France.
- MESSICK, S. (1989). Meaning and values in test validation: The science and ethics of assessment. *Educational researcher*, 18(2), 5-11.
- MOTTIER LOPEZ, L., & ALLAL, L. (2008). Le jugement professionnel en évaluation : un acte cognitif et une pratique sociale située. *Revue suisse de sciences de l'éducation*, 30(3), 465-482.
- MOTTIER LOPEZ, L. (2015). L'évaluation formative des apprentissages des élèves : Entre innovations, échecs et possibles renouveaux par des recherches participatives. *Questions vives*, 23, 1-20.
- MOSS, P. A. (2003). Reconceptualizing validity for classroom assessment. *Educational Measurement: Issues and Practice*, 22(4), 13-25.
- NISS, M. (1993). Assessment of mathematical applications and modelling in mathematics teaching. *Innovation in mathematics education by modelling and applications*, 41-51.
- NISS, M. (Ed.) (1993). *Investigations in to assessment in mathematics education, ICMI-7 Study*, Dordrecht: Springer Netherlands.
- NORTVEDT, G. A., SANTOS, L., & PINTO, J. (2016). Assessment for learning in Norway and Portugal: the case of primary school mathematics teaching. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 23(3), 377-395.
- NUNZIATI, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers Pédagogiques*, 280, 48-64.
- PERRENOUD, P. (1991). Pour une approche pragmatique de l'évaluation formative. *Mesure et évaluation en éducation*, 13(4)49-81.



- PERRIN-GLORIAN, M. J., & HERSANT, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(2), 217-276.
- PHILIPP, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester, Jr. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age.
- PLUVINAGE, F. (1979). Loto-questionnaires (pour l'évaluation et l'auto-contrôle en mathématiques). *Educational Studies in Mathematics*, 10(4), 443- 485.
- RAYMOND, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 550-576.
- REMOND, M. (2006). Éclairages des évaluations internationales PIRLS et PISA sur les élèves français. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, 157, 71- 84.
- ROBERT, A., & VIVIER, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs—quelle transposition ? *Education & didactique*, 7(2), 115-144.
- ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.
- RODITI, E. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*, Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université René Descartes-Paris V.
- SADLER, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional science*, 18(2), 119-144.
- SARRAZY, B. (1995). Note de synthèse [Le contrat didactique]. *Revue française de pédagogie*, 112(1), 85-118.
- SAYAC, N., & GRAPIN, N. (2014). Évaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degré de certitude, *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 19, 169-198.
- SAYAC, N., & GRAPIN, N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif, *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(1), 101-126.
- SAYAC, N., & GRAPIN, N. (2016). Stratégies et degré de certitude des filles et des garçons en mathématiques : quelles différences pour quels résultats ? *Repères IREM 104*, 43-58.
- SAYAC, N., & PLOYE, A. (2018). *Évaluation et inégalités scolaires : étude exploratoire en mathématiques et en sciences, en France et en Suisse*. EMF 2018 (Cergy-Pontoise).
- SAYAC, N., & PLOYE, A. (en révision). Approches didactique et clinique pour l'étude des pratiques évaluatives d'une professeure des écoles en mathématiques, *Carrefours de l'Éducation*.
- SAYAC, N. (2016). *Les pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles en France : quelques résultats à partir d'une recherche collaborative*. Communication au colloque international

« Évaluation en mathématiques : dispositifs, validités et pratiques », Créteil.

SAYAC, N. (2017a). *Approche didactique pour l'évaluation et ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation*. Note de synthèse pour le diplôme d'Habilitation à diriger des recherches, soutenue à l'université Paris Diderot, le 29 novembre. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01723752>

SAYAC, N. (2017b). Étude des pratiques évaluatives en mathématiques des professeurs des écoles en France : une approche didactique à partir de l'analyse des tâches données en évaluation, *Revue Mesure et Évaluation en Éducation*, 40(2), 1-31.

SAYAC, N. (2018). Summative assessment in mathematics at French primary school: A study based on a didactic approach. *Classroom Assessment in Mathematics: Perspectives from around the Globe*, In M. Burton, A. Cusi, D. R. Thompson & D. Wright (Eds.), (pp.159-178). New York: Springer.

SCALLON, G. (2004). *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences*. Bruxelles : De Boeck Université.

SCHUBAUER-LEONI, M. L. (1986). Le contrat didactique : un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématique. *European Journal of Psychology of Education*, 1(2), 139-153.

SCHUBAUER-LEONI, M. L. (1991). L'évaluation didactique : une affaire contractuelle. In J. Weiss (Ed.), *L'évaluation : problème de communication*, (pp. 79-95). Cousset, Delval & IRDP.

SENSEVY, G. (2008). Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique. *Recherche & formation*, 57, 39-50.

SCHOENFELD, A. H. (2007). *Assessing mathematical proficiency* (Vol. 53). Cambridge university press.

SCRIVEN, M. (1967). The methodology of evaluation. In R. W. Tyler, R. M. Gagné & M. Scriven (Eds.), *Perspectives of curriculum evaluation* (Vol. 1, pp. 39-83). Chicago, IL: Rand McNally.

SHEPARD, L. A. (2000). The role of assessment in a learning culture. *Educational researcher*, 29(7), 4-14.

SKOTT, J. (2015). Towards a Participatory Approach to "Beliefs" in Mathematics Education. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education*, (pp.3–23). Springer, Cham.

SUURTAMM, C., KOCH, M., & ARDEN, A. (2010). Teachers' assessment practices in mathematics: Classrooms in the context of reform. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 17(4), 399-417.

TERRIER, C. (2014). Un coup de pouce pour les filles ? Les biais de genre dans les notes des enseignants et leur effet sur le progrès des élèves. *Les notes de l'Institut des Politiques Publiques*, 14.

THOMPSON, D. R. (1992). *An evaluation of a new course in precalculus and discrete mathematics*, Doctoral dissertation, University of Chicago, Department of Education.

THOMPSON, D. R., & KAUR, B. (2011). Using a Multi-Dimensional Approach to Understanding to Assess Students' Mathematical Knowledge.

In *Assessment In The Mathematics Classroom: Yearbook 2011, Association of Mathematics Educators* (pp. 17-31).

TORRANCE, H. (1993). Formative assessment: some theoretical problems and empirical questions. *Cambridge journal of education*, 23(3), 333-343.

TROUILLOUD, D., & SARRAZIN, P. (2002). L'effet Pygmalion existe-t-il en éducation physique et sportive ? Influence des attentes des enseignants sur la motivation et la performance des élèves. *Science et Motricité : revue scientifique de l'ACAPS/ACAPS*, 46(2), 69-94.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education* (Vol. 19). Utrecht University.

VANTOUROUT, M. (2004). *Etude de l'activité et des compétences de professeurs des écoles et de professeurs de mathématiques dans des situations "simulées" d'évaluation à visée formative en mathématiques*, Thèse de Doctorat, Université Paris 5.

VANTOUROUT, M., & MAURY, S. (2006). Quelques résultats relatifs aux connaissances disciplinaires de professeurs stagiaires dans des situations simulées d'évaluation de productions d'élèves en mathématiques. *Revue des sciences de l'éducation*, 32(3), 759-782.

VANTOUROUT, M., GOASDOUE, R., MAURY, S., & NABBOUT, M. (2012). À la frontière entre l'écologique et l'expérimental : des situations aménagées pour étudier l'activité évaluative en mathématiques. In M. Altet, M. Bru, C. Blanchard-Laville (Eds), *Observer les pratiques enseignantes* (pp.191-204). Paris: l'Harmattan.

VILLANI, C. & TOROSSIAN, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Rapport consulté sur <https://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html>

WILIAM, D. (1998). Enculturating learners into communities of practice: raising achievement through classroom assessment. European Conference for Educational for Educational Research, University of Ljubljana, Slovenia.

WILIAM, D. (2000). Integrating summative and formative functions of assessment. Keynote address. In *First Annual Conference of the European Association for Educational Assessment*. Prague, Czech Republic.

#### **Manuel scolaire :**

CHARNAY, R., ANSELMO, B., COMBIER, G., DUSSUC, M-P. & MADIER, D. (2017). *Cap Maths CM2*. Paris : Hatier.

ANNEXE

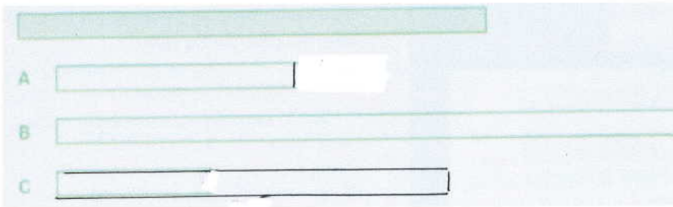
Exercice proposé dans CapMaths dans le bilan de l'unité 2 (p.33)

3 Quelle fraction de la longueur de la bande verte représente la longueur de chacune des bandes A, B et C ?



Exercice « équivalent » proposé par Caroline dans le TS

3- Quelle fraction de la longueur de la bande grise représente la longueur de chacune des bandes A, B et C ?



A =	B =	c =
-----	-----	-----

Séances	Découpage temps	Episodes + JEc	ÉÉretenus	Jugements	Régulation
S1 Revoir les fractions	MVI_0014 0→9'20 MVI_0015 0→2'55	Activité « je cherche » (CAPMaths, p.26)  Jec→correspondance fraction-longueur	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
	MVI_0015 2'55→ 9'00	Mise en commun (3 méthodes) + institutionnalisation	Non	X	interactive
	MVI_0019 0 à 12'42	Exercices de révision <b>JEc→ passage écriture fractionnaire à représentation sur un diagramme circulaire</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
S2 Revoir les fractions	MVI_0019 12'42→27' 22	Nouvelle consigne « plus complexe » <b>JEc→ passage écriture fractionnaire à représentation sur un diagramme circulaire</b>	Oui	Furtifs sauf pour 3 élèves, sans trace	interactive
	MVI_0019 27'22→fin puis MVI_0020 0→ 3'47.	3 exercices dans une Fiche 123 <b>JEc→ passage écriture fractionnaire à représentation sur un diagramme circulaire</b>	Oui	Furtifs, avec trace (cahier du jour)	interactive
	MVI_0021 0→ 4,42	Dictée de fractions → JEc= <b>Correspondance écriture orale- écriture fractionnaire</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive

Séances	Découpage temps	Episodes + JEc	ÉÉretenus	Jugements	Régulation
S3	MVI_0021 4,42 → 34'26 + MVI_0022 0 → 0'14	Activité B, p.26 → JEc : <b>Mettre en correspondance des surfaces avec des fractions à partir d'une unité rectangulaire.</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
	MVI_0022 0'14 → 6'03	Ex 1 et 2 p. 26 → JEc : <b>écriture en fractions et en lettres (2 sens)</b>	Oui	Furtifs, avec trace pour l'ex1 (cahier du jour)	Interactive + potentielle ment rétroactive
	MVI_0022 8'53 → 11	Ardoise : Combien de cinquièmes, tiers et demi pour faire une unité ? → JEc : $a/b=1$ si $a=b$	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
	11 → 14'39	Ex3 p.26 → JEc : <b>Correspondance surface-fraction (<math>1/2</math> ; <math>1/4</math>). Unité= un cercle.</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
	MVI_0023 0 → fin + MVI_0024 0 → fin	Activité « je cherche » p.28 → JEc : <b>décomposer une fraction en partie entière et fraction &lt; 1.</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
S4	MVI_0025 à partir de 17'40 et MVI 0026	Suite de l'activité « je cherche » p.28 → JEc : <b>placer une fraction sur une droite graduée</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
S5	MVI_0029 0 → 22'00	Sur l'ardoise dessiner $1/3$ ; $1/5$ ; $3/2$ ; $7/4$ ; $25/5$ ; $50/7$ → JEc : <b>décomposer une fraction en partie entière et fraction &lt; 1.</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive

Séances	Découpage temps	Episodes + JEc	ÉÉretenus	Jugements	Régulation
S6	MVI_0029 22→fin + MVI_0030 0→7'10	Je m'entraîne p.28 <b>JEc</b> → <b>Donner la fraction sous deux écritures (a/b=ax1/b et partie entière</b>	Oui	Furtifs (sauf pour 3 élèves), sans trace	proactive
	MVI_0030 7'10→fin	Ex 10 p.29 et 11 p.29 (seulement pour certains) <b>JEc</b> → <b>Décomposition des fractions</b>	Oui	Furtifs (sauf pour 3 élèves), avec trace (cahier du jour)	proactive
	MVI_0031 0' → 3'58	Prépa-bilan p.33 Ex 1 <b>JEc</b> → <b>calculs multiplicatifs &amp; additifs</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
S7 prépa- TS	MVI_0031 3'58 →15'15	Prépa-bilan p.33 Ex 2 <b>JEc</b> → <b>résolution de problème complexe</b>	Oui	Furtifs sauf pour 3 élèves, sans trace	interactive
	MVI_0031 15'15 → fin (30'54)	Prépa-bilan p.33 Ex 3 <b>JEc</b> → <b>Correspondance surfaces-fractions (à trouver)</b>	Oui	Furtifs, avec trace (cahier du jour)	interactive
	MVI_0032 0 → 11'03	Prépa-bilan p.33 Ex 4 <b>JEc</b> → <b>Correspondance segment (à tracer)-fraction</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
	MVI_0032 11'03 → 19'14	Prépa-bilan p.33 Ex 5 <b>JEc</b> → <b>Correspondance droite graduée-fractions (à placer)</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
	MVI_0032 19'14 →24'36	Prépa-bilan p.33 Ex 6 <b>JEc</b> → <b>reconnaitre des égalités de fractions</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive
	MVI_0032 24'36 → 32'55	Prépa-bilan p.33 Ex 7 <b>JEc</b> → <b>écritures fractionnaires a/b = nb/b + a-nb/b</b>	Oui	Furtifs, sans trace	interactive

	<b>MVI_0032</b> 32'55 → fin (34'34) + <b>MVI_0033</b> 0' → fin (6'29)	Prépa-bilan p.33 Ex 8 <b>JEc → T.O de la multiplication</b>	Oui	Furtifs, appuyés pour certains	Interactive & proactive
<b>S8 TS</b>	Test	Test supposé identique à celui du pré-test, mais avec des difficultés supplémentaires dans la réalité des tâches proposées.	Oui	Appuyés, avec trace	potentielle ment rétroactive





## ESTUDIO DE LAS ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN EN UN ENTORNO DE SOFTWARE DINÁMICO

Rosa Elvira Páez Murillo\*, François Pluvinage\*\*

### ÉTUDES D'ASYMPTOTES DE FONCTIONS DANS UN ENVIRONNEMENT DE LOGICIEL DYNAMIQUE

**Résumé** – La présente étude porte sur une expérience d'enseignement du concept d'asymptote à des étudiants de première année universitaire. Le point de départ correspond à la conception d'un enseignement dont le principal objectif est extrait des programmes de mathématiques. En conformité avec ceux-ci, une séquence d'activités didactiques fondées sur la théorie des Espaces de Travail Mathématiques (ETM) a été réalisée ; sa conception a intégré l'utilisation d'un logiciel de mathématiques dynamiques (GeoGebra). Parmi les activités, les représentations des fonctions rationnelles dans un macro-espace et leur analyse ont joué un rôle essentiel pour l'approche de la notion d'asymptote. L'expérience a été réalisée selon la méthodologie ACODESA en trois séances de trois heures quotidiennes. Notre analyse est de caractère qualitatif, prenant ses appuis théoriques sur les ETM. Parmi les résultats, il apparaît que les séquences d'enseignement proposées peuvent constituer une approche valide pour un tel processus d'apprentissage.

**Mots-Clés** : Asymptote, ETM, ACODESA.

### STUDYING ASYMPTOTES OF FUNCTIONS IN AN ENVIRONMENT OF DYNAMIC TECHNOLOGY

**Abstract** – The present study presents an experimental teaching of the concept of asymptote, proposed to college freshmen. The starting point was a teaching design, whose main objective was taken from curricula. Accordingly, a design of didactical activities was carried out, based on the theory of Mathematical Work Spaces (MWS); the design involved the use of dynamic mathematical software (GeoGebra). Within the activities, representations of rational functions in a macro-space, and their analysis, played a leading role for approaching the notion of

---

\* Universidad Autónoma de la Ciudad de México, rosa.paez@uacm.edu.mx

\*\* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, fpluvinage@cinvestav.mx

asymptote. The experiment was developed under the ACODESA methodology in three sessions of three hours per day. Our analysis is a qualitative one, taking its theoretical references from MWS. Among the observed results, the experiment suggests that the designed sequences can constitute a valid approach for such a learning process.

**Keywords:** Asymptote, MWS, ACODESA.

## RESUMEN

El presente estudio corresponde al desarrollo de un experimento de enseñanza del concepto de asíntota, con estudiantes de primer semestre de universidad que ingresan a ingenierías. El punto de partida corresponde al diseño de una enseñanza, cuyo objetivo principal de aprendizaje fue tomado de los programas curriculares. De acuerdo con ello, se realizó un diseño de actividades didácticas, basado en la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). En ese diseño se integró el uso de software de matemáticas dinámicas (GeoGebra). Dentro de las actividades, las representaciones de las funciones racionales en un macro-espacio y su análisis jugaron un papel protagónico para el acercamiento a la noción de asíntota. El experimento se desarrolló en tres sesiones de tres horas diarias bajo la metodología ACODESA. Nuestro análisis es de corte cualitativo, teniendo como puntos de referencia la teoría de los ETM. Entre los resultados obtenidos, es evidente que las secuencias diseñadas constituyen un acercamiento válido para tal proceso.

**Palabras-claves:** Asíntota, ETM, ACODESA.

## 1. Introducción

Los resultados de la investigación que presentamos en este artículo se sitúan en el marco del Proyecto de Enseñanza del Cálculo que desarrollamos en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) en colaboración con el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Para este caso particular, nuestro objeto matemático de estudio es el concepto de *asíntota*, cuyo aprendizaje tiene lugar en el nivel medio superior de la enseñanza mexicana (edad: 16-18 años), como parte del estudio de funciones racionales. En este nivel, los objetivos de aprendizaje que se especifican en el programa de estudios de la dirección general del bachillerato corresponden a determinar la existencia de asíntotas verticales, aplicar criterios para determinar la existencia de asíntotas horizontales y oblicuas, así como utilizar estas rectas para dibujar la gráfica de una función racional. No se propone introducir la definición de asíntota en términos del concepto de límite. La forma como los libros de texto de bachillerato proponen determinar la existencia o no existencia de asíntotas horizontales y oblicuas, es a través de la comparación de los grados del polinomio que conforman tanto el numerador como el denominador de la función racional. Para la ecuación de la asíntota oblicua se realiza la división entre los polinomios que conforman la función racional o se aplica una fórmula.

El estudio de asíntotas, en el nivel superior, está aunado al estudio de límites infinitos. Así se encuentra en el programa de cálculo diferencial de la licenciatura de ingenierías en la UACM, al igual que en los textos clásicos de cálculo que se recomiendan en este programa de estudio. Al no haber una especificación de qué tipo de asíntotas estudiar, se puede dar una variante, como hemos detectado en los libros de textos recomendados. Por ejemplo, encontramos que todos presentan las asíntotas verticales y horizontales, pero no así la asíntota oblicua. Pero, independientemente de que se estudie la asíntota oblicua o no, su acercamiento es formal, es decir, a través del concepto de límite.

Resultados de investigaciones (Cornu, 1994; Tall & Schwarzenberger, 1978; Sierpinska, 1985; Hitt & Páez, 2004; Páez, 2004, y Vandebrouck, 2011, entre otras) nos indican que el estudio del concepto de *límite* es complejo para los estudiantes. Esta podría ser una de las razones por las cuales la presentación tradicional y formal de asíntotas a través del uso del concepto de límite, en los cursos de cálculo diferencial de las licenciaturas de ingeniería de la UACM, presenta para los estudiantes un pobre

éxito. Es por ello que nuestra propuesta alternativa para la enseñanza de *asíntotas* evita en un primer acercamiento al concepto de límite. Esta se basa en la *noción de distancia* y para ello integra el uso de un software de matemáticas dinámicas como GeoGebra. Una precisión sobre la noción de distancia se impone: en muchos casos, el espacio geométrico involucrado en el tema estudiado no es euclidiano, aunque el plano del dibujo sí lo es. Esto ocurre siempre que los ejes de coordenadas representan magnitudes diferentes, como distancias y tiempos (ejemplo del péndulo, citado en el apartado 3.1). En tales casos, solo tienen sentido la distancia “horizontal”, distancia entre puntos de misma ordenada y la distancia “vertical”, distancia entre puntos de misma abscisa. Sin embargo, cuando una recta de ecuación  $ax + by + c = 0$  es asíntota de una gráfica definida por  $y = f(x)$ , esta propiedad es válida, cualesquiera que sean las direcciones y escalas de los ejes de coordenadas.

El experimento educativo fue concebido y desarrollado tomando como base la metodología de enseñanza conocida como ACODESA (Hitt, 2011), que integra el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la autorreflexión. Esto en sus cuatro fases: el trabajo individual de los estudiantes, el trabajo en equipo, el debate en el aula y la autorreflexión.

Para el análisis de la información, nos basamos en el modelo de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak & Richard, 2014 y Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016). Esta teoría nos permite identificar elementos de la evolución en el aprendizaje de cada estudiante, dentro de las tres génesis que se consideran entre su plano cognitivo inicial y un plano epistemológico. Es decir, nos referimos a la génesis semiótica, la instrumental y la discursiva.

En la experimentación participó de manera voluntaria un grupo de 23 estudiantes del programa de integración (algo similar a un semestre cero) de la licenciatura en ingenierías de la UACM del Plantel Casa Libertad. Por lo que estos estudiantes aún no habían tomado el curso de cálculo diferencial. La experimentación se llevó a cabo en el mes de diciembre de 2016, una vez que los estudiantes finalizaron su semestre del programa mencionado, y su duración fue de tres sesiones de trabajo de tres horas diarias.

En el siguiente apartado presentamos una discusión que toma en cuenta una visión algorítmica y epistemológica del concepto matemático de asíntota, acompañado por dos definiciones proporcionadas en un texto no matemático, cuya presentación se

basa en la noción de distancia, evitando así el concepto de límite, pero no el de obstáculo epistemológico relativo a si la gráfica de la función y la recta se intersecan o no. La razón por la cual hacemos referencia a ciertas páginas de Internet es porque son tomadas en sitios oficiales seguros (por ejemplo, la definición de la Real Academia Española (RAE) es la misma en el libro impreso y en línea) y a su vez están al alcance de los celulares de los estudiantes. Asimismo, presentamos los antecedentes que fundamentan nuestra investigación. En el tercer apartado explicamos el método base del diseño didáctico de nuestra propuesta de enseñanza. En el cuarto y quinto apartado presentamos la experimentación y los resultados obtenidos. Por último, presentamos algunas reflexiones a manera de conclusiones.

## 2. Lugar del tema y antecedentes

### 2.1 *Las ramas infinitas en el discurso escolar y en textos de referencia*

En programas curriculares de nivel medio-superior o superior de países de Latino-América, España y otros, como Francia y Estados-Unidos, el lugar del tema “Comportamiento al infinito de funciones reales de una variable real” queda limitado. Es un tópico en un bloque de un curso (de 12 horas) de cálculo diferencial. La consideración de las ramas infinitas de gráficas enriquece este tópico con las singularidades de funciones, los polos de una función racional, por ejemplo.

Una progresión típica de enseñanza se puede encontrar en línea en varios sitios; por ejemplo, en el marco de cursos a distancia; la sociedad española *Thales* los propone en la dirección Internet <http://thales.cica.es/>. El tema que nos interesa se encuentra en la dirección Internet <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0295-01/punto8/punto8.html>. La trayectoria presentada en este documento es representativa de las diversas propuestas que pudimos consultar; en la gran mayoría impera un enfoque formal, es decir, haciendo uso del concepto de límite; de allí que el objeto matemático estudiado se vuelve más complejo. Por ejemplo, en el caso de hipérbolas con asíntotas paralelas a los ejes del plano cartesiano, se introducen los símbolos usuales del infinito y de límites, y se definen y determinan las asíntotas. Luego se consideran asíntotas oblicuas, estudiadas mediante el siguiente algoritmo en tres etapas:

Etapa 1: Estudio de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,

Etapa 2: Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ , estudio de  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$ ,

Etapa 3: Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$ , resultado: la recta  $y = mx + n$  es asíntota de la función  $f$ .

Además, cuando hay una asíntota, se estudia la situación de la gráfica con respecto a esta.

Pero ¿de dónde viene la convergencia de trayectorias de enseñanza hacia la progresión que acabamos de señalar? Quizás se puedan explicar por dos fuertes atracciones con respecto al concepto de *asíntota*:

- una *atracción epistemológica*, debida a la relación inicial de asíntotas con hipérbolas;
- una *atracción algorítmica*.

Respecto de la *atracción epistemológica*, la mirada hacia la construcción histórica del conocimiento es recomendable de manera general. Y las asíntotas son rectas que se introdujeron a propósito de hipérbolas. Podemos afirmar que la hipérbola es a la noción de asíntota lo que el círculo es a la noción de tangente. En ambos casos, se trata de una noción global.

En general, una línea recta sin punto en común con una hipérbola, prolongada indefinidamente, se aleja de la hipérbola. Sólo hay dos excepciones, que precisamente son las dos asíntotas de la hipérbola, que no tienen ningún punto en común con la hipérbola y, prolongadas indefinidamente, se acercan de continuo a ella. Algo valioso es el hecho de que esta descripción no necesita el concepto de límite. Así, la definición de asíntota publicada por la RAE en su diccionario es perfecta para el caso de hipérbolas:

Asíntota. f. *Geom.* Línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca de continuo a una curva, sin llegar nunca a encontrarla.

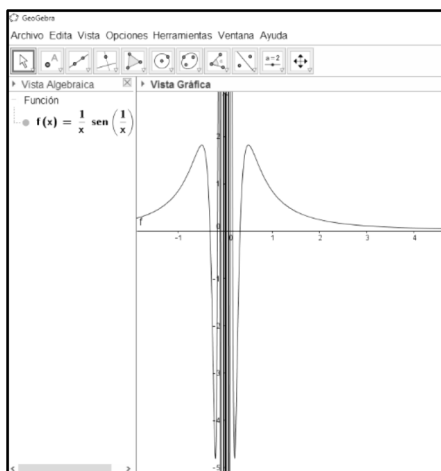
Sin embargo, la definición pretende aplicarse a una curva sin precisión, y esto no se ajusta al significado aceptado en la comunidad matemática o, más generalmente, científica. Este significado, apoyado sobre el concepto de límite, se encuentra por ejemplo en el diccionario *American Heritage Dictionary of the English Language*:

Asymptote. A line whose distance to a given curve tends to zero. An asymptote may or may not intersect its associated curve.

Esta definición es más satisfactoria que la definición de la RAE, solo que no es adecuada en ciertos casos, como la situación del eje  $Oy$  relativamente a la gráfica de la función

$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ : Todo punto del eje  $Oy$  está a una distancia

nula de la gráfica (véase Figura 1). En contraste, el punto  $(x, f(x))$  se acerca al eje  $Oy$  cuando  $x$  tiende hacia 0. ¿Es el eje  $Oy$  una asíntota de la gráfica de  $f$ ? Invitamos al lector a introducir, en la ventana de Entrada de GeoGebra, el comando Asíntota[ $f(x)$ ] y ver lo que se obtiene.



**Figura 1.** Gráfica trazada por GeoGebra de la función  $y = (1/x) \operatorname{sen}(1/x)$

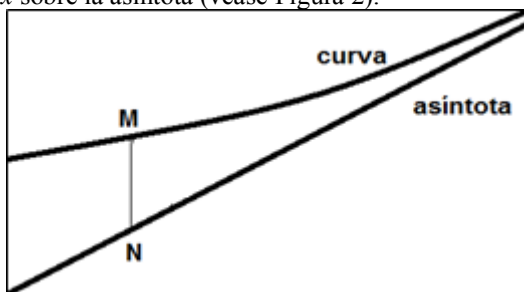
La *atracción algorítmica* es la que aparece en el proceso en tres etapas que presentamos, aplicado a funciones reales representadas en el plano cartesiano. Este proceso no se aplica a asíntotas horizontales, porque con todas ellas la razón  $\frac{f(x)}{x}$  tiende hacia 0

cuando  $x$  tiende hacia el infinito. Entonces, el efecto de la *atracción algorítmica* es impulsar a separar las asíntotas horizontales y las oblicuas, a pesar de que estos dos tipos corresponden al mismo fenómeno de acercamiento de la gráfica de una función a una recta cuando la variable  $x$  tiende hacia el



infinito. Se puede decir que, al contrario de la *atracción epistemológica* que impulsa una visión globalizante de la noción de asíntota, la *atracción algorítmica* impulsa una percepción separatista, en la que se distinguen asíntotas verticales, asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas.

La gráfica de una función no puede cortar una asíntota vertical, mientras sí puede cortar una asíntota horizontal u oblicua. Esta situación, sobre si una recta puede o no cortar a la curva, causa dificultades en los estudiantes, no solamente con el concepto matemático en cuestión, sino también para el caso de recta tangente (Páez & Vivier, 2013). La síntesis puede resultar de la noción de distancia, que había sido problemáticamente usada en las presentaciones vistas anteriormente: en el caso de una asíntota vertical  $x = a$ , la distancia del punto  $(x, f(x))$  a la recta  $x = a$  tiende hacia 0 cuando  $x$  tiende hacia  $a$ . En el caso de una asíntota horizontal u oblicua, se obtiene un resultado semejante de distancia del punto  $M(x, f(x))$  al punto  $N$  de misma abscisa  $x$  sobre la asíntota (véase Figura 2).



**Figura 2.**  $MN$ : distancia vertical, o desviación de curva a recta

## 2.2. Antecedentes

Llevamos a cabo una consulta sistematizada de la literatura que presenta estudios de matemática educativa sobre asíntotas y fenómenos relacionados con el infinito, puesto de manifiesto en gráficas de funciones reales, más específicamente las gráficas trazadas con el recurso de las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación). Nuestra intención *a priori* era limitar la consulta a estudios recientes, publicados en los últimos diez años, pero nos dimos cuenta de que algunas investigaciones anteriores siguen teniendo un carácter actual. Es el caso, por ejemplo, del artículo de Yerushalmy (1997), que pone énfasis sobre la

complejidad del concepto de infinitud que yace en el tema estudiado.

A continuación, presentamos las ideas principales identificadas en los estudios consultados. La primera es la diferencia ontológica entre un trazo humano, dibujado, por ejemplo, por un profesor en el pizarrón, y un trazo producido por una máquina. El trazo humano toma en cuenta concepciones y elementos cargados de sentido, mientras que no es el caso de gráficas producidas por las TIC. Por ejemplo, en el caso de una gráfica con una asíntota, una concepción es que la curva se acerca, pero NO se debe pegar a la recta. Eso ya es subyacente en la investigación de Yerushalmy (1997), y Öçal (2017) lo describe detalladamente. En trazos hechos al usar las TIC se pueden observar, en contraste, superposiciones de una curva y su asíntota en ciertas zonas de la gráfica.

Una mirada socioepistemológica (Cordero, 2005) pone énfasis en la práctica social llamada Modelación-Predicción, en la que los aspectos numéricos y la aproximación juegan un papel importante, también observado desde otra postura teórica por Le Thai Bao (2007) en su tesis de doctorado. Cordero (2005) concluye, citando una investigación de Domínguez (tesis de maestría inédita, Cinvestav 2003), que la *asintoticidad* es resignificada a través de comparar las formas de comportamiento entre dos funciones ( $\lim f - g = 0$  en el infinito) y comparar la “rapidez” de comportamiento entre dos funciones ( $\lim f/g = 1$  en el infinito). Un objetivo de enseñanza será la adquisición de métodos que permitan al usuario determinar con precisión el comportamiento de una función dada, más allá de lo que se percibe en su gráfica representada en una zona limitada del plano.

Otra idea es que la complejidad del comportamiento general de funciones al infinito, presente en particular en la situación de asíntotas, supone proporcionar a los estudiantes cierto andamiaje. Por ejemplo, Yerushalmy (1997, Abstract p. 1) acierta lo siguiente a propósito del aprendizaje con el recurso de las TIC:

Learning about asymptotes using software which serves as tool box for numerical evaluation and graphic representation amplifies epistemological complexities related to the infinity concept.

Así, para ser un recurso facilitador del aprendizaje del tema de las ramas infinitas, la herramienta computacional necesitaría la elaboración por el docente de una progresión adecuada. Yerushalmy sugiere iniciar el estudio con funciones racionales. Y, al considerar precisamente funciones racionales, algunos investigadores (Veloz & Farfán, 2014, Makiadi, Musee &

Ngilambi-Te-Akomanbi, 2017) enfocan la posibilidad de obtener asíntotas oblicuas para este tipo de funciones reemplazando la ruta tradicional con dos obtenciones sucesivas de límites por operaciones menos esotéricas: la división de polinomios o la descomposición de una fracción en elementos simples (manera que también aparece en los libros de textos).

En el artículo *A Sensible Approach to the Calculus*, David Tall (2011) presenta su visión global de la enseñanza del cálculo. A David Tall le importa que toda definición formal de un concepto sea acompañada por una comprensión perceptiva:

To ‘make sense’ of the concepts of the calculus, including the notion of continuity, limit, tangent, derivative, and so on, we need to consider how we, as individuals, think about these ideas. The first thing to do is for the reader to reflect for a moment and write down what she or he thinks these calculus concepts actually mean (Tall, 2011, p. 45).

Se observa en esta cita que los conceptos señalados por David Tall están relacionados con el comportamiento local de funciones (derivada, diferencial, tangente). De manera general, los estudios de matemática educativa sobre comportamientos locales de funciones son numerosos (no los citamos aquí, porque no se refieren a nuestro objeto de estudio), y unos cuantos corresponden a la recomendación de Tall. En contraste, no encontramos en la literatura de matemática educativa intentos de introducir de manera sensible el concepto de asíntota al estudiante, u otros vinculados con las ramas infinitas. Por eso diseñamos la experimentación que presentamos en este texto.

### 3. Metodología de la investigación

#### 3.1 Análisis del tema de las asíntotas en el marco de los Espacios de Trabajo Matemático

En el plano epistemológico del esquema de los ETM aparece un triángulo con tres vértices: *representamen*, *artefactos* y *referencial* (Kuzniak & Richard, 2014). Proponemos situar elementos relativos a nuestro tema en este triángulo.

En el vértice *representamen* se sitúa evidentemente un vocabulario específico—ramas infinitas, ramas parabólicas, asíntotas—que debe acompañar al vocabulario general: ecuaciones, funciones, gráficas, rectas, límite. En todo rigor, una rama infinita de la gráfica de una función definida por  $y = f(x)$  es un componente conexo de la intersección de la gráfica con el complementario en el plano de un conjunto  $[a, b] \times [c, d]$ , donde

los números reales  $a, b, c, d$  son tales que el conjunto  $[a, b] \times [c, d]$  contenga una parte de la gráfica con todos sus extremos locales. Por ejemplo, una parábola de ecuación  $y = (x - p)^2$  da lugar fuera del conjunto  $[p - 1, p + 1] \times [0, 1]$  a dos componentes conexos. Sin embargo, una presentación formal de la noción de rama infinita no es necesaria para los estudiantes, la idea intuitiva de “parte de gráfica que va hacia el infinito” es suficiente.

Ya hemos comentado aspectos relacionados con el *referencial* que se aplica a nuestro tema. El plano que se debe considerar en general es el plano cartesiano, pero no euclidiano. En efecto hay muchas gráficas que representan relaciones entre magnitudes diferentes. Por ejemplo, la situación de un péndulo simple conduce a expresar el periodo de su movimiento en función de su longitud, es decir un tiempo posiblemente expresado en segundos en función de una longitud que puede representar centímetros. Esto implica que sólo dos distancias  $d_1$  y  $d_2$  entre puntos tienen sentido:

- la distancia  $d_1$  entre dos puntos de misma ordenada  $M = (m, p)$  y  $N = (n, p)$ , definida como  $d_1(M, N) = |n - m|$ ;
- la distancia  $d_2$  entre dos puntos de misma abscisa  $A = (a, h)$  y  $B = (a, k)$ , definida como  $d_2(A, B) = |k - h|$ .

Cada una de estas dos distancias es la métrica usual de la recta numérica. Las representaciones comunes en el plano se presentan con sistemas de coordenadas perpendiculares, el eje de las abscisas considerado como horizontal y el eje de las ordenadas como vertical. Por eso, aunque la disposición de los ejes de coordenadas en el plano es arbitraria, nos autorizamos en este texto el abuso que consiste en calificar como horizontal la distancia  $d_1$  y vertical la distancia  $d_2$ . Más adelante, vemos que la distancia horizontal se aplica a una asíntota vertical de una gráfica, y que la distancia vertical se aplica a una asíntota horizontal u oblicua.

Los problemas relacionados con el polo *artefactos* del esquema de los ETM merecen una mirada atenta. Dentro de las construcciones que se hacen con el uso de las TIC está el trazo de una gráfica de función, obtenido al introducir una expresión conveniente en una ventana de entrada. El trazo de la gráfica  $C_f$  de una función real  $y = f(x)$  en la pantalla de una computadora produce un objeto cuyo entendimiento sólo supone el conocimiento del plano cartesiano y cuya comprensión más profunda se apoya sobre la toma en cuenta del carácter discreto de las operaciones hechas por la máquina. Un usuario familiarizado con el plano cartesiano no tendrá dificultad

conceptual para concebir que en la computadora se hace un recorrido a lo largo del eje  $Ox$ , y que en cada paso de este recorrido se sitúa el punto  $(a, f(a))$  obtenido. Este recorrido es discreto, es decir que los saltos se obtienen por la suma de una cantidad pequeña. Por supuesto, la parte visualizada del plano es acotada, lo que implica una vista solamente parcial de la gráfica  $C_f$ . Además, los cálculos se hacen con cierta precisión, lo que puede generar problemas en unos casos.

Es interesante, para los docentes y también para los estudiantes, considerar una situación simplificada de los tratamientos que se desarrollan en una máquina. La Figura 3 muestra el resultado obtenido al graficar una función por puntos sucesivos. Usamos la hoja de cálculo Excel para representar la

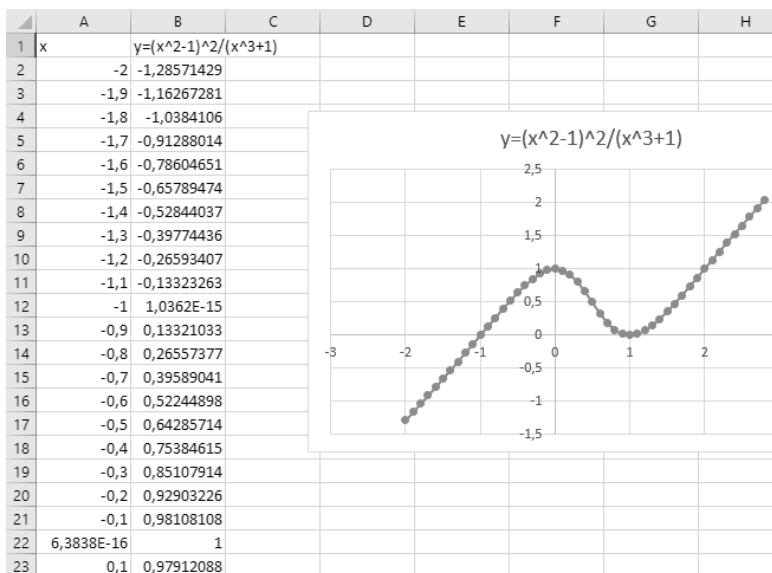
función real definida por  $y = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3 + 1}$ . Para obtener la nube de

puntos dibujada en la gráfica, partimos del valor inicial  $x = -2$  y escogimos un incremento relativamente grosero de la variable  $x$ : una décima, o sea 0.1 (véase la columna A en la Figura 3). Y a cada valor de  $x$  hicimos corresponder el valor de  $y$  (columna B en la Figura 3). Luego, en el menú Insertar de Excel, seleccionamos el comando *gráfico de dispersión* y obtuvimos la representación que se ve en la Figura 3. Nota: Por razones de limitación del tamaño de la Figura 3, sólo representamos la hoja hasta la fila 23, pero hicimos los cálculos hasta sobrepasar  $y = 2$ .

A pesar del grueso que atribuimos a nuestro incremento, ya se percibe bien la forma de la gráfica de la función representada. Es fácil imaginar la apariencia que se obtendrá con un incremento más pequeño: ¡Se percibiría una curva obtenida por un trazo continuo!

De la consideración de este caso resulta la conclusión de que un estudio llevado a cabo con las TIC puede ser muy diferente del estudio tradicional realizado en la época anterior a la extendida difusión de las computadoras. En particular, la obtención de la gráfica de una función, que era el punto de llegada de su estudio, se puede presentar hoy desde el inicio del estudio.

Abrimos ahora un paréntesis para realizar una mirada sobre un problema de precisión que nos interesará más adelante.



**Figura 3.** Una representación de  $y = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3 + 1}$  obtenida con la hoja de cálculo (Excel)

El lector puede observar en la Figura 3 dos fenómenos relacionados con la precisión: en la fila 12, el valor  $-1$  de  $x$  da lugar al valor  $1.0362 \times 10^{-15}$  de  $y$ , muy cercano a 0; y, en la fila 22,  $x$  toma el valor  $6.3838 \times 10^{-16}$ , muy cercano a 0. En ambos casos, el valor exacto debería ser 0. Esto es obvio en el segundo caso. Para concluir el primer caso, se tiene que resolver una indeterminación, puesto que la sustitución directa de  $x = -1$  produce una fracción de numerador y denominador ambos nulos (indeterminación de tipo  $0/0$ ).

Sin embargo, una simplificación por el factor  $(x + 1)$  nos proporciona  $y = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3 + 1} = \frac{(x - 1)(x^2 - 1)}{x^2 - x + 1}$ . Bajo esta última escritura se ve que  $-1$  es una *singularidad removible*, y que la fracción toma el valor 0 cuando  $x$  es igual a  $-1$ . Pero, en el cálculo realizado por Excel, se usó en la fila 12 un valor muy vecino de  $-1$  en vez del valor exacto  $-1$ . De hecho, si se selecciona un formato de 18 dígitos decimales en la celda A12, se obtiene  $-0.9999999999999999000$ . Esto nos aclara la razón por la que el sistema no encontró dificultad en calcular el valor

correspondiente de  $y$ . De manera semejante, la suma repetida del incremento 0.1 no generó en la celda A22 el valor 0, sino el valor muy cercano  $6.3838 \times 10^{-16}$ , el resultado mostrado en la celda B22 siendo  $y = 1$ , que corresponde a  $x = 0$ .

Cerramos el paréntesis y seguimos con la consideración de los posibles aportes de las TIC en el estudio de una función real  $y$ , en particular de sus ramas infinitas, en el caso de existir.

### **3.2 Representación de los espacios de Gálvez-Brousseau en pantallas**

Hoy en día, todos los jóvenes están familiarizados con universos virtuales proporcionados por un sinnúmero de juegos de acción, como son Empire o Sea Fight. En estos juegos, el espacio generalmente representado en la pantalla, que sea de Laptop, Tablet o Smartphone, es el meso-espacio en el sentido que definieron Grecia Gálvez y Guy Brousseau (véanse Gálvez, 1985 y Brousseau, 2001, p. 7). Ellos definen el meso-espacio relativo a un individuo como la parte de su entorno situada bajo el control de su vista. También consideran el micro-espacio como lo que está al alcance del individuo, o sea lo que él puede manipular sin tener que desplazarse, y el macro-espacio que abarca objetos más allá de su visión. Por ejemplo, un mapa obtenido por el sistema *Google Maps* es una representación del macro-espacio. En una publicación del Ministerio de Educación se encuentran precisiones sobre macro, meso y micro-espacio (Ministerio de Educación, 2001, p. 242).

Por semejanza con juegos sobre pantallas táctiles, podemos considerar que la vista gráfica en la configuración inicial de un sistema como GeoGebra, muestra al usuario una representación de su meso-espacio. Así pretendemos que el micro-espacio de una pantalla de computadora o de celular proporciona *a priori* al usuario una representación del meso-espacio. Ya sea para proporcionar una visión del micro-espacio o del macro-espacio, se requerirán cambios de escala, que GeoGebra proporciona con los comandos Aproximar y Alejar.

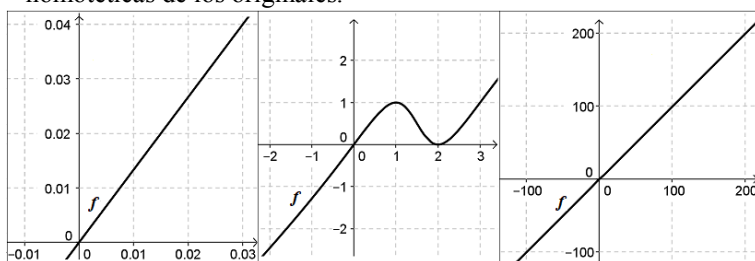
Los iconos usados para los comandos Aproximar y Alejar de GeoGebra se parecen a lupas, como las presentadas por Google Maps, encerrando un signo + (Aproximar) o un signo - (Alejar). Vale la pena enfocar un fenómeno que resulta del uso de los comandos Aproximar y Alejar:

Cada uno de los comandos Aproximar y Alejar transforma toda recta en una recta de misma dirección y deja globalmente

invariante toda recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

En otras palabras, se puede aceptar que el uso de los comandos Aproximar y Alejar no se percibe cuando se aplica a una recta cualquiera que pasa por el origen.

En contraste, la Figura 4 muestra tres representaciones de una misma función  $f$  representada con tres escalas diferentes: centésimas a la izquierda, unidades en el centro, centenas a la derecha. Los cambios de apariencia que ocurren resultan raros para un observador acostumbrado a ver imágenes en reducción homotéticas de los originales.



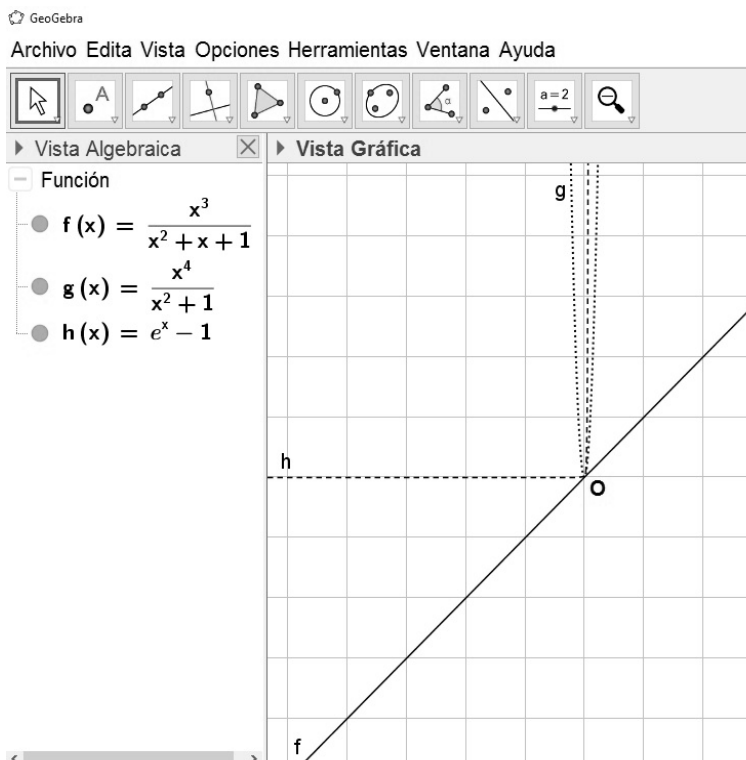
**Figura 4.** Tres representaciones de la misma función  $f$  de

$$\text{expresión algebraica } f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x^2-3x+3}$$

Así, al contrario de la conservación de rectas, los cambios de tamaño del espacio representado pueden generar *estiramientos aparentes*, que dan la apariencia de rectas a curvas representadas en la pantalla. Es lo que se ve en las gráficas de la izquierda y la derecha de la Figura 4. Más adelante mostramos usos didácticos posibles de este fenómeno, en el caso de ramas infinitas. El estudio de representaciones micro-espaciales, vinculadas con los conceptos de tangente y derivada, es el tema de otros textos, como el artículo de Vivier (2011).

Todas las funciones reales de variable real no dan lugar a representaciones macro-espaciales con apariencia de rectas. La Figura 5 muestra una representación macro-espacial de tres gráficas de funciones que tienen ramas infinitas. Por razón de legibilidad no se representan en la figura los ejes de coordenadas, sino una cuadrícula cuyos lados son iguales a 100.





**Figura 5.** Representación de tres funciones en una cuadrícula de malla 100

De las tres funciones representadas, dos corresponden a funciones racionales como es el caso de  $f(x)$  (en la figura se representa con el trazo continuo), y  $g(x)$  (representada con el trazo de puntos), y una función exponencial  $h(x)$  (representada con líneas entrecortadas). En esta representación macro-espacial, la función  $f(x)$  se ve como una recta. La función  $g(x)$  conserva el aspecto parabólico que ella tiene en la escala inicial (ejes graduados en unidades), sólo que se estrecha. La función  $h(x)$  tiene la apariencia de la letra L mayúscula invertida.

Las tres gráficas tienen ramas infinitas: es sencillo probar que  $f(x)$  tiene una asíntota de ecuación  $y = x - 1$ , que  $g(x)$  tiene dos ramas parabólicas, una cuando  $x$  tiende hacia  $-\infty$  y otra cuando  $x$  tiende hacia  $+\infty$ , y que  $h(x)$  tiene una asíntota horizontal de ecuación  $y = -1$  cuando  $x$  tiende hacia  $-\infty$  y una rama parabólica

cuando  $x$  tiende hacia  $+\infty$  (a pesar de un crecimiento exponencial, se le atribuye el mismo calificativo de la rama de  $g(x)$ ).

### 3.3 La exploración guiada y la metodología ACODESA

De las ideas resumidas por la expresión alemana “Exemplarischer Unterricht”, de la que se puede proponer la traducción: “Enseñanza basada en ejemplos significativos”, obtuvimos una propuesta pedagógica: la Exploración guiada (Carrión, Pluvinage, & Adjage, 2016). En esta propuesta, el público estudiantil recibe hojas de instrucción que describen el uso del software elegido, con el fin de producir y estudiar los resultados obtenidos. En este artículo, se consideran principalmente las vistas (algebraica y gráfica) de curvas obtenidas con GeoGebra al introducir funciones en la casilla de entrada. Conforme a la primera etapa de la metodología ACODESA, en la que cada actividad estudiantil da lugar a una producción escrita, se espera de los estudiantes que devuelvan respuestas escritas a las preguntas planteadas sobre la “exploración” que están emprendiendo.

Es fácil, en la rica y compleja situación matemática estudiada, que un estudiante aislado se vaya por rutas cognitivas erróneas. Esto es una razón para aplicar dos elementos más de la metodología ACODESA: el debate científico y el trabajo colaborativo. El debate científico, en el caso que nos interesa, se puede nutrir de las divergencias que algunas páginas de Internet ilustran sobre el concepto de asíntota, que ya comentamos en el apartado 2 de este texto. El trabajo colaborativo autoriza tres modalidades, que son el trabajo individual, el trabajo en pequeños grupos y la práctica de síntesis, organizadas con la participación de todos los estudiantes involucrados.

Para el diseño de actividades, nos apoyamos sobre el marco teórico de los ETM (Kuzniak & Richard, 2014 y Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016), que nos conduce a distinguir tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. En la génesis semiótica se adquieren el vocabulario y el significado de las representaciones. La génesis instrumental refiere a las construcciones, y la génesis discursiva establece la firmeza del “edificio” matemático gracias a los razonamientos de tipo lógico. Por supuesto, cada génesis tiene su singularidad, que permite considerarla específicamente, y también se vincula con las otras dos. De manera general, *separar* y luego *combinar* es un plan de trabajo aconsejable en la enseñanza, porque permite a los docentes tener una clara percepción de las dificultades de sus

alumnos y ayuda a una toma de decisiones relevantes respecto de los aprendizajes a impulsar.

Este mismo principio de sucesivamente separar y combinar se puede aplicar a la génesis semiótica, cuando se consideran los diferentes registros de representación en juego. Tres tipos de registros se usan en la situación que nos interesa: los registros de la expresión verbal, de la representación geométrica y de la escritura algebraica. Diferentes expresiones pueden corresponder a una misma gráfica. Es así que, en el plano cartesiano de ejes  $Ox$  y  $Oy$ , la misma hipérbola resulta de cada una de las ecuaciones  $y = 2/x$  (ecuación de Función) o  $xy = 2$  (ecuación de Curva Implícita), o de la definición geométrica  $\{M \in \sim x \sim, |MF' - MF| = 4\}$  donde  $F' = (-2, -2)$  y  $F = (2, 2)$ .

Sin embargo, al usar un sistema de geometría dinámica como GeoGebra, uno puede percibir posibles diferencias entre los objetos creados: la introducción en Entrada de la palabra “Asíntota” provoca la aparición de tres opciones, que son: Asíntota[<Cónica>], Asíntota[<Función>] y Asíntota[<Curva Implícita>]. Cuando menos, vale la pena en un curso de cálculo explorar diferencias entre la gráfica de una función y una curva implícita, en particular las posibles diferencias de resultados entre las opciones propuestas por GeoGebra para el comando “Asíntota” (pueden resultar rectas separadas o una lista).

### 3.4 Preguntas de investigación

Como pregunta general de la investigación fue propuesta la siguiente:

- ¿Cómo puede ayudar la integración de un entorno tecnológico en una propuesta didáctica del concepto de asíntota?

La pregunta general las declinamos en preguntas vinculadas con el modelo de los ETM, como las siguientes:

- ¿Qué tareas se relacionan más específicamente con cada una de las tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva?
- ¿En qué medida, las actividades de exploración guiada diseñadas para el experimento y la implementación de una metodología de enseñanza como ACODESA, permiten la aparición y el avance del estudiante en la génesis semiótica, instrumental y discursiva?

## 4. Experimentación

### 4.1. Antecedentes del público atendido

Como ya lo señalamos, el público de la experimentación presentada en este texto está constituido por principiantes en la universidad, con un supuesto conocimiento previo parcial sobre el tema. En efecto un acercamiento se hace con las funciones racionales en el nivel medio superior (SEP, 2018, Programas de estudio, Bloque III, Funciones racionales. Horas asignadas: 10, documento en línea). En la columna Habilidades del programa de la SEP aparece *Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas* (SEP, p. 18). Los programas curriculares de nivel medio superior en los CCH (Colegios de Ciencias y Humanidades) o CECYT (Colegios de Enseñanza Científica Y Técnica) no son idénticos sino análogos a los que señalamos.

Hace falta declarar que este tipo de formación organizada a nivel del bachillerato no es propio de México. Algo similar se aplica en Francia o en los Estados Unidos, entre muchos otros países. En estas condiciones, podría pasar con la enseñanza de las asíntotas y más generalmente las ramas infinitas de gráficas lo mismo que ocurre con los números reales: se presentan preliminares, como en el contexto numérico la raíz cuadrada de 2 que no es un número racional o en el contexto del plano cartesiano las asíntotas de la hipérbola equilátera. Luego de estos preliminares, se declara explícita o implícitamente que los estudiantes saben, sin que se les haya aplicado una enseñanza del tópico general, en un caso lo que es un número real, en nuestro caso lo que es una rama infinita. Con el público de nuestra experimentación, es obvio que sólo se puede adquirir un *barniz superficial* en el marco del bloque III de un total de 10 horas sobre las funciones racionales.

### 4.2 El cuestionamiento

Para el desarrollo del experimento de enseñanza, se diseñó un grupo de tres actividades didácticas, que integran el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, con dos intenciones específicas. La primera es explotar la herramienta “zoom de alejamiento”, idea que surge del estudio de la tangente con un doble “zoom de acercamiento” (Vivier, 2011), y que en términos de Brousseau (2001, p. 7) se refiere al uso de representaciones del meso y macro espacio. Esto fortalecería la *perspectiva global* (Vandebrouck, 2011; Maschietto, 2002) del objeto matemático estudiado que debe desarrollar el estudiante. La segunda,

corresponde a que el instrumento facilita la construcción geométrica para obtener la ecuación aproximada de una asíntota horizontal (u oblicua) y a su vez fortalecer el desarrollo de la *perspectiva local* en términos de la distancia entre los puntos de misma abscisa  $x$  de la gráfica de la función dada y de la recta.

La estructura didáctica de cada una de las actividades es lo que se conoce como “Exploración Guiada” (Carrión, Pluinage, & Adjage, 2016). Es decir, la actividad está compuesta por una serie de instrucciones relacionadas con el uso de software, acompañadas de preguntas, con el fin de producir y estudiar los resultados obtenidos. En el diseño de la actividad, consideramos principalmente las vistas (álgebraica y gráfica) de curvas obtenidas con GeoGebra al introducir funciones en la casilla de entrada. Las funciones propuestas en las actividades son racionales debido a que los objetivos de aprendizaje fueron tomados de acuerdo con lo estipulado en el programa curricular del nivel medio superior. En lo que sigue se presentan los objetos de las preguntas antes de sus enunciados.

**Actividad Uno – Trabajo Individual:** esta actividad consta de 9 preguntas (acompañadas de instrucciones) en donde se contempla el análisis de dos funciones racionales dadas a través de su representación algebraica.

**Objeto de la pregunta 111.** Identificación del lenguaje matemático que los estudiantes utilizan. ¿Qué registro de representación utilizan para la descripción y qué tipo de signos utilizan para ello?

**Pregunta 111.** En la ventana denotada como Entrada, introduce la expresión  $y = (x^2 - 1)^2 / (x^3 - 1)$ . Describe lo que aparece en la vista algebraica y en la vista gráfica

**Objeto de la pregunta 112:** ¿Cómo el uso del artefacto puede favorecer que el estudiante identifique el comportamiento asintótico de la función a través de las representaciones macro-espaciales?

**Pregunta 112.** Utiliza la herramienta Alejar varias veces, y observa en la vista gráfica el comportamiento de la curva. ¿Qué puedes decir de este comportamiento?

**Objeto de las preguntas 113 y 114.** Con las preguntas 3 y 4, pretendemos que el estudiante se acerque a la construcción de un método para obtener una aproximación a la ecuación de la asíntota oblicua (u horizontal), a través del trazo de una recta utilizando dos puntos de la curva en un “punto lejano” del origen. ¿Cómo el uso del artefacto puede favorecer o no la construcción

de un método para obtener una ecuación aproximada de la asíntota?


**Pregunta 113.** En la parte superior, en Opciones, se despliega la opción de Redondeo. Selecciona *5 cifras decimales*. Luego, en Entrada introduce la expresión  $(-500, f(-500))$ . Si es necesario, utiliza el zoom de alejamiento para que puedas visualizar el objeto definido por esta expresión en la ventana gráfica o utiliza la herramienta Desplaza Vista Gráfica para moverla.

A. ¿Qué significado tiene la expresión  $f(-500)$  y qué valor se obtiene?

B. ¿Qué objeto representa la expresión  $(-500, f(-500))$ ?

**Pregunta 114.** Traza un punto que pertenezca a la curva y cuya abscisa sea 500 (GeoGebra lo etiqueta como punto B). Traza la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ . Cambia el color de la recta a rojo. Luego con Ctrl + M regresa a la vista estándar (escala de los ejes de una unidad). Y en la ventana algebraica, con el clic derecho transforma la ecuación de la recta  $AB$  a la forma  $y = ax + b$ . ¿Qué ecuación tiene la recta  $AB$  en la Vista algebraica? Escribe las observaciones y reflexiones sobre la relación entre la representación algebraica y la gráfica de la recta  $AB$ .

**Objeto de las preguntas 115 y 116.** En las preguntas 5 y 6 introducimos la ecuación de la asíntota para que el estudiante establezca la relación entre esta y la ecuación aproximada obtenida a través del método.

**Pregunta 115.** En la ventana Entrada, introduzca la expresión de la recta que por el momento llamaremos “recta especial”:  $y = x$ . Luego abra el menú ABC de la barra superior y active el comando Relación entre dos objetos con el icono . Seleccione los dos objetos que en este caso corresponden a la recta  $AB$  y a la recta  $y = x$ .

¿Qué resultado se obtiene al aplicar este comando a las dos rectas? Escribe las observaciones y reflexiones sobre la relación existente entre las gráficas de las rectas  $y = x$  y la recta  $AB$ .

**Pregunta 116.** Respecto a la representación gráfica de la función  $f$ , ¿qué apreciación puedes proporcionar después de comparar la recta  $AB$  y la recta  $y = x$ ?

**Objeto de la pregunta 117.** ¿De qué manera los trazos realizados con ayuda del artefacto permiten la caracterización de la asíntota oblicua (u horizontal) como disminución de la distancia entre los puntos de misma abscisa  $x$  de la gráfica de la función dada y de la recta?

**Pregunta 117.** En la ventana algebraica, con el clic izquierdo, desactiva la recta  $AB$ . En la vista gráfica regresa a vista estándar. Con la herramienta Punto en Objeto, marca un punto sobre la curva de la función  $f$ . Este punto se etiqueta como  $C$ . Con la herramienta Perpendicular, traza una recta que pase por  $C$  y sea perpendicular al eje de las abscisas. Con la herramienta Intersección encuentre el punto de

intersección entre la recta perpendicular y la recta  $y = x$ . Este punto se etiqueta como  $D$ . Con la herramienta Distancia encuentra la distancia entre los puntos  $C$  y  $D$ .

¿Qué sucede con esta distancia en la medida que el punto  $C$  lo mueves a la izquierda?

¿Qué sucede con esta distancia en la medida que el punto  $C$  lo mueves a la derecha?

**Objeto de la pregunta 118.** ¿Surge de manera natural por parte del estudiante el término de asíntota? ¿Qué elementos podemos identificar para determinar si hay una caracterización de la asíntota en términos de la noción de distancia?

**Pregunta 118.** ¿Qué nombre le darías a la recta que llamamos especial en relación con la curva  $f$  y cómo la definirías utilizando tus palabras?

**Objeto de la pregunta 119.** Esta pregunta nos permite controlar los elementos que moviliza para el desarrollo de la misma. ¿Qué manera o de qué hace uso para identificar la existencia de una recta asociada al comportamiento de la función? ¿Qué relevancia tiene el método propuesto para la identificación de la asíntota?

**Pregunta 119.** Para la función  $g(x) = (6x^3 + 2x + 1)/(2x^2 + 1)$ , encuentra (si es posible), la recta especial que está asociada al comportamiento de esa función cuando los valores de las abscisas son muy grandes o cuando los valores de las abscisas son muy pequeños. Argumenta tu respuesta.

En términos generales la Actividad Uno – Trabajo Individual se concibió para que el trabajo matemático que realice el estudiante se promueva en el paradigma geométrico (Kuzniak et al., 2016) a través de la obtención de una representación algebraica aproximada de una asíntota no vertical. Por otro lado, el trabajo geométrico debería de permitir la noción de asíntota en términos de distancia.

**Actividad Uno – Trabajo Grupal:** esta actividad consta de 2 preguntas con varios incisos, en las que se contempla el análisis de una función racional. Conforme el método ACODESA, un grupo usa una máquina, pero cada miembro del grupo llena su hoja de respuestas.

**Objeto de la pregunta 1G1.** Con una nueva función, y el trabajo en equipo, queremos corroborar si el método propuesto para determinar la aproximación de la representación algebraica de la asíntota no vertical es utilizado. Asimismo, pretendemos explorar sobre qué símbolos y/o notación matemática usan los estudiantes para describir el comportamiento de la función.

**Pregunta 1G1.** Para la función  $f(x) = (1 - 2x^2 + x^5)/(1 - x^4)$

- A. ¿Existe alguna recta especial que esté asociada al comportamiento de esa función cuando los valores de las abscisas son muy grandes o cuando los valores de las abscisas son muy pequeños? Argumenta la respuesta.
- B. En caso afirmativo, ¿cuál es su ecuación? Describe el procedimiento que siguieron para encontrar la ecuación.
- C. Utiliza símbolos y/o notación matemática para describir el comportamiento de la función  $f$  cuando los valores de las abscisas son muy grandes.
- D. Utiliza símbolos y/o notación matemática para describir el comportamiento de la función  $f$  cuando los valores de las abscisas son muy pequeños.

**Objeto de la pregunta 1G2.** En esta pregunta hacemos uso de la definición de asíntota de un texto no matemático por las siguientes razones. Esta definición no está basada en el concepto de límite y por tanto es acorde con los objetivos de aprendizaje propuestos para el nivel medio superior. Y la segunda es promover una discusión en específico sobre si la asíntota puede llegar o no a encontrar a la curva, y de cómo esta definición podría afectar para aceptar o no la asíntota oblicua, ya que, para este caso, hay un punto de intersección entre la curva y la recta.

**Pregunta 1G2.** La definición de *asíntota* proporcionada por el diccionario de la Real Academia de España (RAE) es la siguiente:

1. f. *Geom.* Línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca de continuo a una curva, sin llegar nunca a encontrarla.

Para el caso de la función  $f(x) = (1 - 2x^2 + x^5)/(1 - x^4)$ ,

- A. ¿Es la recta  $y = -x$  *asíntota* de la gráfica de  $f$ ? Argumenta la respuesta.
- B. ¿Tiene la gráfica de  $f$  otra asíntota? En caso afirmativo, especifica la ecuación de la o las otras asíntotas. Argumenta la respuesta.

Esperamos de la actividad uno grupal que nos permita identificar la evolución del discurso en los estudiantes gracias a la introducción del artefacto. E igualmente que nos permita ir, a su vez, identificando obstáculos cognitivos relacionados con el concepto de asíntota.

**Actividad Dos – Trabajo Individual:** esta actividad consta de 3 preguntas, algunas de las cuales contienen incisos, y en ella se contempla el análisis de una función racional.

**Objeto de la pregunta 2I1.** ¿Qué evolución se identifica en el discurso matemático de los estudiantes? ¿Qué registro de representación utilizan los estudiantes para la descripción y qué evolución han tenido los signos utilizados?



**Pregunta 211.** En la ventana denotada como Entrada, introduzca la expresión  $y = (2x + 1)/(x - 3)$ . Describe lo que aparece en la vista algebraica y en la vista gráfica.

**Objeto de la pregunta 212.** ¿Qué efecto tienen las representaciones en el macro-espacio en la identificación de las asíntotas?

**Pregunta 212.** Utiliza la herramienta Alejar varias veces, y observa en la vista gráfica el comportamiento de la curva.

- ¿Qué puedes decir de este comportamiento?
- ¿Tiene la gráfica de  $f$  asíntotas? En caso positivo de tu respuesta, identificalas.
- Utiliza símbolos y/o notación matemática para describir el comportamiento de la función  $f$  de acuerdo con su o sus asíntotas.
- Con la escala de los ejes en centenas, oculta los ejes cartesianos (clic derecho “Ejes”). Describe lo que aparece en la vista gráfica.

**Objeto de la pregunta 213.** Nuevamente hacemos uso de una definición tomada de un texto no matemático, y las razones son las mismas que mencionamos en la pregunta dos de la actividad uno grupal. En este caso, consideramos que la definición del American Heritage fortalece la noción de asíntota en términos de distancia, y, por ello, pretendemos analizar su impacto en el uso que hace el estudiante de las herramientas del software para justificar la existencia de asíntotas.

**Pregunta 213.** Otra definición de *asíntota* proporcionada por el *American Heritage Dictionary of the English Language* es:

**Asymptote.** A line whose distance to a given curve tends to zero. An asymptote may or may not intersect its associated curve. (Traducción: **Asíntota:** Una recta cuya distancia a una curva dada tiende a cero. Una asíntota puede o no puede intersecar a la curva asociada).

- Si mencionaste en el inciso 2b la existencia de *asíntotas*, argumenta de qué manera cumplen con esta definición.
- Describe las herramientas y la construcción geométrica que harías utilizando Geogebra, para argumentar la existencia de *asíntotas* del inciso 2b, soportada en la definición mencionada.

Hasta aquí, el tratamiento, de acuerdo con la forma como se ha introducido la expresión algebraica en GeoGebra, corresponde al de una función. Esto significa que, en la utilización de las representaciones de la función en el macro-espacio, las asíntotas verticales desaparecen. ¿Qué efecto genera en el discurso de los estudiantes la desaparición de la asíntota vertical? ¿Cómo podría afectar a su noción de asíntota?

**Actividad Dos – Trabajo Grupal:** esta actividad consta de 3 preguntas. En ella se contempla el análisis de la misma función racional que en la actividad anterior. Sólo que la forma de introducirla en GeoGebra hará que el tratamiento sea como el de una cónica.

**Objeto de las preguntas 2G1 y 2G2:** ¿Qué diferencias identifican los estudiantes al ingresar la expresión como función o como cónica? ¿Qué efecto genera en su discurso que ninguna de las asíntotas desaparezca en su representación en el macro espacio?

**Pregunta 2G1.** En la ventana denotada como Entrada, introduzcan la expresión  $y * (x - 3) = (2x + 1)$ . Describe lo que aparece en la vista algebraica y en la vista gráfica.

**Pregunta 2G2.** Utilicen la herramienta Alejar varias veces, y observen en la vista gráfica el comportamiento de la curva.

- ¿Qué puedes decir de este comportamiento?
- ¿Tiene la gráfica de esta cónica, asíntotas? En caso positivo, identificalas.
- Con la escala de los ejes en centenas, oculta los ejes cartesianos (clic derecho “Ejes”). Describe lo que aparece en la vista gráfica.
- En el trabajo individual la expresión  $y * (x - 3) = (2x + 1)$  fue introducida como  $y = (2x + 1)/(x - 3)$ . Menciona si existe alguna diferencia en la vista gráfica al introducirlas de dos formas diferentes

**Objeto de la pregunta 2G3.** ¿Cómo definen una asíntota? ¿Qué elementos proporcionados en su definición nos permiten corroborar que el estudiante desarrolló una perspectiva local y global del objeto estudiado?

**Pregunta 2G3.** En el sitio <http://www.ematematicas.net>, aparece la siguiente definición de asíntota:

*Una de las formas de estudiar el comportamiento de una función cuando sus valores tienden a infinito o en aquellos puntos en los que la función no está definida (puntos aislados) es comparar la función con una recta, así diremos que una recta es una asíntota de una función cuando la gráfica de la función y la recta permanecen muy próximas.*

*Dependiendo de cómo sea la recta tenemos tres tipos de asíntotas: Verticales, Horizontales y Oblicuas.*

- Con tus palabras y/o utilizando notación matemática, define cada una de las asíntotas.
- Argumenta si una función puede tener los tres tipos de asíntotas al mismo tiempo.
- ¿Qué información con respecto a la curva proporcionan las asíntotas?

**Actividad Tres – Trabajo Grupal.** La actividad tres fue diseñada para trabajar solamente de manera grupal. Para su desarrollo se

previó la utilización de la herramienta "Deslizadores" que tiene GeoGebra. Se propone primero realizar un análisis de la función

$g(x) = 1/x^r$  con  $r \in \mathbf{Z}^+$  y luego

$h(x) = [x^m * (a + g(x))] / [x^n * (b + g(x))]$  con  $m \in \mathbf{Z}^+$  y  $n \in \mathbf{Z}^+$ .

Para efectos de este artículo, no presentamos ni el análisis a priori ni los resultados de esta actividad ya que el tiempo dado a los estudiantes para su desarrollo fue muy limitado debido a que se había previsto como cierre una institucionalización del conocimiento por parte de los investigadores.

## 5. Resultados

Presentamos en esta sección el análisis del trabajo matemático de un grupo de 23 estudiantes, inscritos en la licenciatura de ingenierías, que finalizan su semestre de integración, los cuales participaron de manera voluntaria en este experimento de enseñanza. Estos estudiantes aún no habían tomado el curso de cálculo diferencial que se imparte en el nivel superior y la mayoría de ellos tenían conocimientos del artefacto, que en este caso corresponde a GeoGebra. Para la identificación de las respuestas de los estudiantes los etiquetamos como E1, E2, E3, etc.

### 5.1 Perspectiva sintáctica de la dimensión semiótica

La forma como se diseñaron las actividades nos permite analizar los *signos* o *representamen* utilizados por los estudiantes. En la perspectiva sintáctica, identificamos una gran variedad de vocabulario inicial al que recurren los estudiantes para describir la función racional, como, por ejemplo, recta, línea, curva, parábola, gráfica cúbica, función polinómica, función cúbica, representación en forma exponencial, diagonales paralelas, cresta (para referirse a los puntos máximo y mínimo). Los *signos* o *representamen* usados por los estudiantes son muy básicos para una clase de matemáticas de primer semestre de universidad. Además, a pesar de su carácter primario, algunos estudiantes no muestran un dominio de ellos como, por ejemplo, la diferenciación entre recta y línea (línea recta o línea curva). Este es el caso del estudiante E1 que hace referencia a "dos rectas *curveadas*" y que luego modifica a "recta con pequeñas curvaturas". O el estudiante E2 que menciona "línea que tiene 2 curvas pequeñas".

**Respuesta de E2 a la pregunta 111:** vista gráfica

Es una línea que tiene 2 curvas pequeñas, donde sus puntos más altos y bajos tienen como pendiente 0.

El *representamen* asociado con el estudio de asíntotas o ramas infinitas, es decir, el uso de un vocabulario específico del objeto matemático estudiado, no forma parte de la semiosis inicial de los estudiantes. Hay una ausencia total de asociar una recta con el comportamiento de una función. Lo más cercano a un uso del lenguaje específico se pudo evidenciar en dos estudiantes, que hicieron uso de términos como crece, decrece e infinito, pero sin hacer referencia al comportamiento asintótico de la función. Además, en el lenguaje natural no hay un respeto al carácter bidimensional de la representación gráfica (estudiante E22).

**Respuesta de E22 a la pregunta 111:** en la gráfica observamos que viene del infinito ( $-\infty$ ) crece hasta el  $-1$  decrece a  $-1$  y vuelve a crecer hasta infinito.

**5.2 Bloqueos en la dimensión semiótica**

Conocedores de la problemática que se genera con las ideas intuitivas que poseen los estudiantes universitarios en relación con el concepto de límite y del infinito (Tall & Schwarzenberger, 1978; Cornu, 1994, Páez 2004, entre muchas más investigaciones que se han abordado al respecto) y que, por ende, alcanza a nuestro objeto matemático de estudio, consideramos el diseño de la actividad didáctica a través de la presentación de dos definiciones de asíntota (RAE y American Heritage). La idea era crear un conflicto cognitivo en los estudiantes y de esta forma generar una discusión que propiciara un cambio de pensamiento.

La primera definición que se les presentó fue la de la RAE y como lo habíamos planeado, el elemento más fuerte en el que se centró la atención de los estudiantes fue “sin llegar nunca a encontrarla”. La cuestión aquí es la interpretación que le proporcionaron los estudiantes ¿en dónde no deben encontrarse? La *interpretación uno* es que la curva y la recta no deben de encontrarse en valores de las abscisas muy grandes (positiva o negativamente). Este es el caso de 6 estudiantes que afirmaron que la recta  $y = -x$  sí es asíntota de la función  $f(x) = (1 - 2x^2 + x^5)/(1 - x^4)$  porque en ningún momento se llegan a tocar, solo se aproximan (interpretando que se refiere al comportamiento asintótico de la función con respecto a la recta), y ninguno de ellos hace referencia al punto de intersección en  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . La *interpretación dos* corresponde a que, en ningún

valor de la abscisa, la función y la recta se pueden encontrar. Este es el caso de 3 estudiantes que responden que la recta no es asíntota de la función porque la recta y la curva se cortan (se refieren al punto de intersección ya mencionado).

Las dos interpretaciones que le otorgaron los estudiantes a la definición dada por la RAE fueron el foco de discusión en la plenaria del primer día del experimento de enseñanza. Los estudiantes defendían el significado de esta definición que les permitía afirmar o no, si la recta correspondía a una asíntota. Esta discusión conllevó que 6 estudiantes cambiaran de posición. Por ejemplo, el estudiante E18 cuya interpretación inicial correspondía a la *dos* se pasó a la *uno*, al igual que el estudiante E19.

**Pregunta 1G2a, respuesta de E18:** de la *interpretación dos* pasó a la *interpretación uno*:

No, ya que en determinados puntos se intersecan me retracté y mi respuesta es

Sí, ya que no chocan o intersecan.

Otros 4 estudiantes cambiaron su opinión a favor de la *interpretación dos*, como se muestra en el ejemplo siguiente.

**Pregunta 1G2a, respuesta de E14:** de la *interpretación uno* pasó a la *interpretación dos*

Sí es asíntota porque la recta formada por esta ecuación nunca toca las curvas

No es asíntota porque toca un punto en la curva

La función que se estaba analizando también presentaba una asíntota vertical. Por lo que para los tres estudiantes que encontraron la ecuación de dicha asíntota, se posicionaron muy bien con la definición dada por la RAE, es decir, en sus argumentos predomina que la recta  $x = -1$  *no toca* la curva.

En el acercamiento que tuvieron estos estudiantes con las dos definiciones de asíntotas, no del todo correctas, podemos resaltar que el elemento que tiene mayor impacto corresponde a lo que tiene que ver con que si la asíntota “toca o no toca” la curva. Esta situación se puede explicar como un obstáculo de corte epistemológico que proviene de la base del concepto de asíntota que es el de límite. La condición que “la distancia entre la curva y la recta tiende a cero” pasa a un segundo plano.

### 5.3 La influencia del artefacto: material y simbólico

El uso de GeoGebra, en específico el uso de las macro-representaciones de las funciones, permitió que los estudiantes identificaran su comportamiento asintótico. En el primer día de la

experimentación, en la primera parte del trabajo individual, los estudiantes hacen mención de una recta, aludiendo específicamente a la forma de la función  $y = (x^2 - 1)^2 / (x^3 - 1)$ . Por ejemplo, “se vuelve una recta...”, o “se forma una línea recta”. Lo que no surge en esta primera parte del trabajo con el artefacto como objeto material es la presencia de una recta asociada al comportamiento de la función. Es decir, en el trabajo inicial del estudiante, no hubo una consideración de dos objetos matemáticos, la función y la asíntota. Sólo consideran la transformación de la función a recta (Ejemplo: respuesta de E14).

**Pregunta 1I2, respuesta de E14:** mientras más se aleja la gráfica se va formando una recta, con ecuación  $x = y$ .

En la actividad uno grupal, identificamos que 8 estudiantes establecen la diferenciación de la función  $f(x) = (1 - 2x^2 + x^5) / (1 - x^4)$  y de la recta (asíntota oblicua). La representación algebraica de la asíntota oblicua fue proporcionada por 15 estudiantes, 6 de los cuales utilizaron el artefacto simbólico mencionado. Considerando el efecto del artefacto simbólico al método para obtener una aproximación a la ecuación de la asíntota oblicua (u horizontal), a través del trazo de una recta utilizando dos puntos de la curva “lejanos” del origen, y a su vez considerando el efecto del uso de las macro-representaciones, podemos especificar que se propició un avance en el trabajo matemático de los estudiantes.

Un factor relevante del análisis del trabajo matemático que realizaron los estudiantes es que la representación algebraica de la asíntota no es un indicador de la diferenciación de los dos objetos matemáticos tratados aquí (función y asíntota). Este es el caso de E14 que especifica una transformación de la función producto del uso de la macro-representación.

**Pregunta 1G1, respuesta de E14: inciso a:** si existe, sería de la forma  $y = -x$ . **Inciso b:**  $y = -x$ . Al alejar la gráfica de la función anterior, las curvas forman una recta.

Retomando nuevamente el trabajo de los estudiantes con el artefacto como objeto material y del tratamiento que se le otorgue a la ecuación, ya sea como función o como cónica, pudimos evidenciar que hay mayor éxito en la identificación de asíntotas aunadas al comportamiento de la curva, cuando ésta se introduce como cónica que como función. Esto lo podríamos quizás adjudicar a que cuando hacemos uso de representaciones de la función en el macro-espacio, la asíntota vertical desaparece, cosa que no sucede cuando se le da un tratamiento de cónica.

#### 5.4 Dimensión discursiva: denominación de asíntota y características

Como un cierre del proceso de enseñanza-aprendizaje, se les solicitó a los estudiantes que proporcionaran una definición de cada una de las tres asíntotas estudiadas. Únicamente el estudiante E20 es el que proporciona las tres definiciones que nosotros catalogamos con éxito. En ellas podemos identificar la noción de distancia, pero también la particularidad que “no deben de tocarse”, lo cual le generará un conflicto cognitivo cuando exista un punto de intersección entre la curva y la asíntota.

##### **Pregunta 2G3a, respuestas de E20.**

*Asíntota oblicua:* línea recta que se aproxima a una curva sin tocarla, formando una diagonal con una pendiente definida diferente a 0

*Asíntota horizontal:* línea recta que se aproxima a una curva sin tocarla y teniendo una pendiente igual a 0

*Asíntota vertical:* línea recta que se aproxima a una curva sin tocarla, siendo paralela al eje  $y$  y pendiente indefinida.

Otro factor relevante del análisis de las definiciones proporcionadas por los estudiantes es que casi la mitad de ellos precisa la recta sin considerar la curva. Es decir, no hay una consideración de la existencia de esta recta ligada al comportamiento de una función. Un ejemplo de esto lo tenemos en las respuestas de E18.

##### **Pregunta 2G3a, respuestas de E18.**

*Asíntota oblicua:* recta que tiene pendiente entre 0 y 180.

*Asíntota horizontal:* paralela al eje  $x$  y la distancia es vertical.

*Asíntota vertical:* paralela al eje  $y$  y la distancia es horizontal.

Esto podría tener su explicación en la carencia del juego local/global (Maschietto, 2002) que debemos fundamentar en el aprendizaje del análisis matemático. Las actividades diseñadas y el uso de artefacto (material y simbólico) fortaleció evidentemente la perspectiva global de asíntota como un objeto geométrico que corresponde a una recta, pero no así la perspectiva local que se refiere a la distancia de separación entre la curva y la recta (Montoya et al., 2018).

#### 5.5 Calificaciones individuales

Complementando el análisis sobre la movilización de las dimensiones que se tiene en cuenta en el Espacio de Trabajo Matemático, pensamos que una presentación global de los resultados individuales nos permitirá apreciar mejor la dificultad del aprendizaje considerado, en particular, lo alcanzado en relación a lo esperado. Recordamos que nuestro experimento no

pretende tener un valor estadístico, sino que consiste en un estudio de caso, con la significación que le corresponde debido a las condiciones de su aplicación.

**Preguntas seleccionadas y presentación de la tabla de resultados**

En las dos actividades individuales y grupales propuestas, seleccionamos aquí las catorce preguntas que evidencian comprensión de asíntotas. El principio general de calificaciones de respuestas que adoptamos es lo usual en una evaluación, en la que se quiere introducir una observación cualitativa:

- 1 califica el éxito esperado.
- 2 califica una respuesta matemática correcta, diferente del éxito esperado, o correcta, pero no acompañada de una descripción completa.
- 3 corresponde a un error específico (posibles códigos 4 y 5 atribuidos a otros errores específicos, si hay).
- 9 califica todas las otras respuestas incorrectas.
- 0 se asocia a la ausencia de respuesta.

Para una mejor visualización de los resultados obtenidos, insertamos los resultados en una hoja de cálculo Excel, en la que ordenamos las filas y las columnas por números decrecientes de éxitos (códigos 1 y 2) y sombreamos en gris las celdas de valor 1 y en gris más claro las celdas de valor 2. En la Tabla 1, las filas representan a los estudiantes (E1, E2, E3...) y las columnas corresponden a las preguntas (1I2, 1I4,...). Las sumas marginales obtenidas se ven en fuente cursiva. La suma por filas de las celdas con valor 1 o 2, se puede considerar como la calificación de cada estudiante respecto del tema de asíntotas. Las calificaciones de los estudiantes se distribuyen entre 9 y 2 sobre un máximo posible de 14.

E →	1I2	1I4	2I2A	2G2B	1G1A	1G1B	2G3HORIZ	2I3I	2G3VERTI	1G2B	2I2B	1G2A	2I33	2G3OBLIC	N(102)
14	1	1	1	1	2	2	3	0	3	1	1	2	0	3	9
15	1	1	1	1	1	2	3	9	3	1	1	2	9	3	9
5	1	1	9	1	1	9	1	1	9	9	3	2	0	9	8
7	1	1	1	0	2	2	1	9	1	9	9	2	9	9	8
12	1	1	1	1	1	2	3	0	3	1	3	9	1	3	8
18	1	1	1	1	1	1	3	1	3	9	3	2	0	9	8
9	1	1	1	1	2	2	9	9	9	9	9	2	0	9	7
11	1	1	1	1	1	2	9	9	9	9	9	2	0	9	7



20	1	1	1	1			1	9	1		9		0	1	7
8	1	1	1	9	2	9	1	0	1	0	3	9	0	9	6
16	1	1	1	9	2	1	9	9	9	9	9	2	0	9	6
17	1	1	1	9	2	1	9	9	9	9	9	2	0	9	6
1	1	1	1	2	9	1	9	9	9	0	9	9	9	9	5
2	1	9	9	1	9	1	3	1	3	0	3	1	0	3	5
6	1	0	1	1	2	9	1	9	9	9	3	9	0	9	5
10	1	9	1	1	1	2	9	9	9	9	9	9	0	9	5
4	1	9	9	1	2	3	9	9	9	2	9	9	0	9	4
25	1	1	1	2			9	9	9		0		0	3	4
3	9	9	1	1			3	1	3		9		0	3	3
21	1	1	9	1			3	9	3		9		0	3	3
22	1	1	0	9			9	9	9		3		0	9	2
23	1	1		9			9		9					9	2
24	1	9	9	2			9	9	9		3		9	9	2

1	22	17	16	14	6	5	5	4	4	3	2	1	1	1
2	0	0	0	3	8	7		0		1	0	9	0	
3	0	0			0	1	7		7		8			8
9	1	5	5	5	2	3	11	15	12	9	11	6	4	14
0	0	1	1	1	0	0	0	3	0	3	1	0	17	0

**Tabla 1:** Resultados ordenados por niveles de éxito

De acuerdo a lo obtenido en la Tabla 1, agrupamos las preguntas de resultados similares en cuatro bloques, como se muestra a continuación.

**Primer grupo de preguntas.** Cuatro preguntas son las que dan lugar a un nivel de éxito elevado y son aquellas cuya respuesta resulta directamente del uso de GeoGebra indicado en la hoja de trabajo o de la repetición de un tratamiento ya encontrado. Dos de estas son las preguntas 112 y 114 que se refieren a la apariencia tomada por la gráfica de  $y = (x^2 - 1)^2 / (x^3 - 1)$ : aparece en un macro-espacio como una recta, cuya ecuación (aproximada) se obtiene al trazar la recta que une a dos de sus puntos. Caso similar sucede con la pregunta 212a.

En la actividad dos grupal, se considera la función que se obtiene al entrar la expresión  $y * (x - 3) = 2x + 1$ . Con GeoGebra, el objeto obtenido de esta manera se define como una cónica y no como una función. Una consecuencia es la representación en el macro-espacio de sus dos asíntotas (la vertical además de la horizontal). Este fenómeno fue correctamente descrito por una fuerte mayoría de los estudiantes.

**Segundo grupo de preguntas.** Las dos preguntas que forman este grupo cuyo éxito de tipo 1 o 2 es superior al 50% se refieren a la función de expresión algebraica  $f(x) = (1 - 2x^2 + x^5) / (1 - x^4)$ .

Su gráfica en el macro-espacio toma la apariencia de la recta de ecuación  $y = -x$ . Si este fenómeno fue descrito por más del 50% de los estudiantes, sólo la mitad de estas respuestas se acompañan de una explicación completa, en particular del trazo de la recta que une a dos puntos de la gráfica. Los demás se conforman con la visión, es decir, en términos del modelo de los ETM, entran en la génesis semiótica, pero no dan evidencia de génesis instrumental.

**Tercer grupo de preguntas.** Con el tercer grupo pasamos a las preguntas que generan poco éxito, alrededor del 20%. En este grupo está la pregunta de la actividad 1 grupal sobre la asíntota vertical de  $f(x) = (1 - 2x^2 + x^5)/(1 - x^4)$ : es preciso observar que esta asíntota no aparece en la representación de la función en el macro-espacio. Las otras tres preguntas del grupo están en la actividad dos, una en la individual y dos en la grupal. La pregunta en la actividad individual introduce la definición de asíntota que autoriza puntos de intersección con la gráfica de la función. Esta definición contradice la definición de la RAE anteriormente presentada (en la actividad uno grupal). Entonces, en términos del modelo de los ETM, una respuesta correcta se sitúa en una génesis discursiva. Las dos preguntas de la actividad dos grupal también se insertan en esta misma génesis discursiva, dado que tratan de casos generales (asíntota vertical y asíntota horizontal). Se observa que el caso general de asíntota oblicua se sitúa en el último grupo, el grupo de las preguntas menos exitosas, que se considera a continuación.

**Cuarto grupo de preguntas.** Las preguntas del cuarto grupo no dan lugar a más de dos éxitos de tipo 1. Una pregunta de la actividad grupal es muy especial, por sus numerosas respuestas (9) calificadas 2. Se trata de la pregunta de enunciado ¿Es la recta  $y = -x$  asíntota de la gráfica de  $f(x) = (1 - 2x^2 + x^5)/(1 - x^4)$ ? Esta pregunta aparece, en la hoja de trabajo, debajo de la definición del diccionario de la RAE que indica que una asíntota de una curva no la debe cortar (véase el § 2). Dado que la recta de ecuación  $y = -x$  corta la gráfica de  $f(x)$  en el punto de coordenadas  $(-0.5, 0.5)$ , se justifica, apoyándose sobre la definición de la RAE, de no otorgar el estatuto de asíntota a la recta. Por esto, la génesis discursiva se complementa por un debate presentado en la actividad dos. Las otras tres preguntas de este cuarto grupo se sitúan en la actividad dos, individual y grupal. Una pregunta es el número de asíntotas que la gráfica de  $y = (2x + 1)/(x - 3)$  tiene. El problema es que la vista en el macro-espacio no muestra la asíntota vertical. La ecuación de esta asíntota vertical es  $x = 3$ ,

objeto de la pregunta 2I3, que pertenece también a este grupo. La última pregunta del grupo se relaciona también con la génesis discursiva: se trata de la definición general de una asíntota oblicua, y comentamos su dificultad a la vez instrumental y discursiva en § 2, en particular en la Figura 2.

El análisis que hicimos en este apartado nos muestra un proceso de aprendizaje ya iniciado pero inacabado.

## **6. Conclusiones generales y perspectivas**

En lo que sigue, a la luz de la experimentación que llevamos a cabo y que presentamos en este texto, consideramos simultáneamente donde se sitúan los estudiantes con respecto a las tres génesis y qué tareas pueden ser fructíferas para los aprendizajes con los recursos de las TIC. Así mismo, una breve reflexión sobre el papel de las actividades de exploración guiada diseñadas para el experimento y la implementación de una metodología de enseñanza como ACODESA.

### **6.1. Génesis semiótica**

Hemos visto que el diccionario de las representaciones gráficas es abundante pero impreciso, por lo que refiere tanto a la designación de los objetos como a sus posiciones y a las disposiciones relativas de dos objetos. Una deficiencia que se observa frecuentemente en las respuestas individuales es que no son completas cuando necesitarían la toma en cuenta de varias condiciones. El ejemplo típico que citamos es la asíntota que se acerca continuamente a la curva sin precisión sobre 0 como valor límite. El usuario de un sistema computacional, para obtener resultados que le den satisfacción, deberá adquirir el sentido preciso de las palabras y los íconos presentados por el sistema.

No obstante, el primer grupo de preguntas en la Tabla 1 pone de manifiesto que ciertas preguntas ya dan lugar a una proporción importante de respuestas correctas. Hace falta comentar que las hojas de actividades presentan, de manera voluntaria, una fuerte mayoría de preguntas relacionadas con la génesis semiótica. Solo incluyen una pregunta de construcción, que dio lugar a un alto nivel de éxito y que comentamos más adelante, a propósito de génesis instrumental, y tres preguntas de justificaciones que se sitúan en la génesis discursiva. Las proporciones de respuestas correctas dadas a las preguntas relacionadas con la génesis semiótica se extienden de un máximo de 0,96 (éxito casi total) a 0,04 (fracaso casi general). Un abanico tan abierto implica que la variedad de adquisiciones que componen la génesis semiótica corresponde a diversos niveles de complejidad. La consecuencia

es que se necesitan distinciones de naturaleza cognitiva entre las diversas situaciones posibles, bajo presentaciones figurativas o presentaciones discursivas. En la Tabla 2 se muestra la diversidad de situaciones que presentan ramas infinitas. Una paradoja en el vocabulario es que la expresión “rama infinita” no se encuentra en el vocabulario de los estudiantes. Pero no es cierto que su uso exija una definición formal.

Un fenómeno que juega un papel con respecto al estudio de gráficas de funciones racionales en el macro-espacio es la desaparición de las asíntotas verticales. En nuestro experimento, esto originó que los estudiantes no lograran su identificación, por una tendencia natural en contentarse con las apariencias. A la luz de lo que observamos, parece recomendable en la enseñanza insistir sobre el carácter “lingüístico” de operaciones que hace GeoGebra. Un ejemplo es la existencia de sinónimos, como  $y = 1/x$  (función) y  $xy = 1$  (cónica). Al alejar se observa la diferencia entre los dos objetos: la asíntota vertical no desaparece si se aplica alejar a la cónica. Pero esto a su vez puede afectar al conocimiento matemático que los estudiantes tienen de estos dos objetos, aspecto que no habíamos considerado dentro de nuestro diseño.

<i>Situaciones visuales</i>	<i>Elementos de discursos (lengua usual o simbólica)</i>
<p>Una rama infinita de curva y una asíntota</p> <p>Una rama infinita de curva y una recta que no es asíntota</p>	<p>Distancia horizontal entre puntos de la misma ordenada de curva y recta vertical</p> <p>Distancia vertical entre puntos de la misma abscisa de curva y recta horizontal u oblicua</p> <p>Límite</p>
<p>Una rama infinita de curva que tiene una asíntota vertical no representada</p>	<p>Límite infinito en un valor finito de la variable</p>
<p>Una rama infinita de curva que tiene una asíntota horizontal no representada</p>	<p>Límite finito en el infinito</p>
<p>Una rama infinita de curva que tiene una asíntota oblicua no representada</p>	<p>Algoritmo clásico en tres etapas o uso del alejamiento para poder obtener la asíntota</p>

Una rama infinita de curva que no tiene asíntota	Diversidad de casos: rama parabólica, periodicidad, etc.
--	--

**Tabla 2.** Variedad de situaciones que incluyen ramas infinitas

### 6.2. *Génesis instrumental y génesis discursiva*

La construcción juega un papel modesto en el estudio de ramas infinitas. Por eso, sólo introdujimos, en la hoja de la Actividad Uno, una pregunta relativa al trazo de una recta que aproxima una asíntota. La pregunta dio lugar a una proporción de 0,74 de éxitos, lo que nos aseguró que no se encuentran dificultades relacionadas con la génesis instrumental en el estudio de ramas infinitas. Quizás la cosa podría ser diferente con un público poco familiarizado con la computación.

Con respecto a la génesis discursiva, las hojas de Actividad presentaron tres preguntas cuyas respuestas suponen justificar o apoyarse sobre una justificación. Estas fueron las menos exitosas, como se comenta en el análisis de la Tabla 1 (cuarto grupo de preguntas). Para mejorar la génesis discursiva, una posibilidad, que queda por experimentar, es ayudarse de la tecnología mediante un uso sistematizado del comando Límite.

### 6.3 *Unos comentarios metodológicos*

La exploración guiada fue bien impulsada en nuestra experimentación por las hojas de Actividad. Así, todas las preguntas planteadas, salvo una, dieron lugar a una escasez de ausencia de respuestas, sin perjuicio de la calidad de estas, que ha sido considerada en párrafos anteriores. Todo ello nos permite reflexionar que esta propuesta pedagógica favorece que se puedan activar las génesis necesarias en un espacio de trabajo matemático del estudiante, y en especial, la instrumental.

Por problemas de tiempo que comentamos, la aplicación del método ACODESA no pudo ser completa, pero su aplicación parcial tuvo efectos positivos. Tampoco se pudo entrar en un posible debate científico sobre el concepto de asíntota. Con apoyo del material que se utilizó en la experimentación, un debate interesante y enriquecedor sobre este concepto se podría organizar, después de la Actividad Tres.

### 6.4. *Una perspectiva: estudios de tendencias*

La determinación de tendencias es un tema importante en la actualidad, debido en particular al grave problema del calentamiento del clima terrestre. La situación de asíntotas que consideramos en este artículo es una pero no la única que está

presente en estudios de tendencia. Así, programas como Excel proponen varias opciones de funciones para la obtención de una línea de tendencia: lineal, polinómica, potencial, exponencial y logarítmica. Recientemente diseñamos un nuevo experimento, que reportaremos en otro documento. Frente a errores ocasionados por el comando Asíntota de GeoGebra, planteamos actividades apoyadas por el uso del software abierto Graph, diseñado para el trabajo con funciones en el plano cartesiano. Este sistema no proporciona un comando Asíntota, lo que obliga a usar el zoom de alejamiento repetido para evidenciar asíntotas, pero propone para una serie de puntos la consideración de líneas de tendencia, con las mismas opciones propuestas por Excel. Un trabajo de aula se puede organizar con el apoyo de un catálogo de tendencias para guiar a los estudiantes en la distinción de diversas evoluciones.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- BibM@th: *Dictionnaire de mathématique en ligne*. <http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.b/branchinf.html>.
- BROUSSEAU, G. (2001). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie, in *Actes du Séminaire de Rethymon Avril 2000* (pp. 67-83) Université de Crète, Recuperado de [https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/PDF/Les\\_proprietes\\_didactiques\\_de\\_la\\_geometrie\\_elementaire.pdf](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/PDF/Les_proprietes_didactiques_de_la_geometrie_elementaire.pdf)
- CARRION, V., PLUVINAGE, F., ADJIAGE, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM Mathematics Education*, 48, 809–826.
- CORDERO, F. (2005). Graficación-Modelación-Predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.18*
- CORDERO, F., CEN, C., SUÁREZ, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(2), 187-214.
- CORNU, B. (1994). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–167). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- GÁLVEZ, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*, Tesis, Cinvestav-IPN México.
- HITT, F. (2011). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(6), 723–735.
- HITT, F., PÁEZ, R. (2004). On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study. In D. McDougall, & J. Ross (Eds.), *Proceedings of the 26th North American Conference of the International Group for Psychology in Mathematics Education (PME-NA)*, Vol. 1, p. 103–110. Toronto, Ontario, Canada,

- KUZNIAK A., MONTOYA DELGADILLO E., VANDEBROUCK F., VIVIER L. (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. In Y. Matheron, G. Gueudet, et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 47–66). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- KUZNIAK, A., RICHARD, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de Vista y Perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Vol. 17 (4-1)*, 5-15.
- KUZNIAK A., TANGUAY D., ELIA I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721–737.
- LE THAI BAO T. T. (2007). *Limites et décimalisation des réels dans environnement calculatrice*. Thèse Grenoble, France.
- MAKIADI NZUMBA J. M., MUSESA LANDA A., NGILAMBI-TE-AKOMANBI (2017). Quelques réflexions sur l'enseignement de l'étude de fonctions rationnelles dans un premier cours de calcul. *BULLETIN AMQ, Vol. LVII n° 2*, 53-64
- MASCHIETTO, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices*. Thèse doctorale, Université Paris VII.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, Instituto Superior de Formación del Profesorado (2001), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Editado por Secretaría General Técnica, España.
- MONTOYA DELGADILLO, E., PÁEZ MURILLO, R., VANDEBROUCK, F., VIVIER, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education Vol.4-1*. 139-160.
- MONTOYA, E., PÁEZ, R., VIVIER, L. (2016). Conceptions spontanées et perspectives de la notion de tangente pour des étudiants de début d'université, In E. Nardi, C. Winslow, T. Hausberger Editeurs, *Actes de la Première Conférence INDRUM 2016, International Network for Didactic, Research in University Mathematics*, 31 mars - 02 avril 2016, Université de Montpellier, France, 103-112.
- ÖÇAL, MEHMET FATİH (2017). Asymptote Misconception on Graphing Functions: Does Graphing Software Resolve It? *Malaysian Online Journal of Educational Technology, Vol. 5 - Issue 1*
- PÁEZ, R., VIVIER, L. (2013). Teachers' conceptions of tangent line. *The journal of mathematical behavior*, 32, 209-229.
- PÁEZ, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*. Cinvestav-IPN, México: Tesis de Doctorado.
- ROTH, W. M., MCGINN, M. K. (1998). Inscriptions: Toward a Theory of Representing as Social Practice. *Review of Educational Research, vol. 68 n° 1*, 35-59.
- SEP (Secretaria de Educación Pública), Dirección General del Bachillerato, *Programas de estudio*. Recuperado de [http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/4to\\_SEMESTRE/Matematicas\\_IV\\_biblio2014.pdf](http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/4to_SEMESTRE/Matematicas_IV_biblio2014.pdf).

- SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5–67.
- SIMON, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, n.º 2, 114-145.
- TALL, D. (2011). A Sensible Approach to the Calculus. *El Cálculo y su Enseñanza*, Año 3. 43-70. Recuperado de [http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/data/docs/Tall-David-40-67.pdf](http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Tall-David-40-67.pdf)
- TALL, D., SCHWARZENBERGER, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.
- VANDEBROUCK, F., LEIDWANGER, S. (2016). Students' visualization of functions from secondary to tertiary level, In E. Nardi, C. Winslow et T. Hausberger (Eds.), *Actes de la Première Conférence INDRUM 2016, International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Université de Montpellier, France, 153-162.
- VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 149–185.
- VELOZ, B., FARFAN, R. (2014). Construcción de gráficas de funciones racionales. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1373-1380). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México, DF.
- VIVIER, L. (2011). La noción de tangente en la educación media superior. *El Cálculo y su Enseñanza*. Vol. II. México: Cinvestav-IPN. En línea en [http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/](http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/).
- YERUSHALMY, M. (1997). Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* Vol. 2 - Issue 1.





# GENÈSES INSTRUMENTALES ET CONCEPTIONS POUR Étudier le potentiel d'un duo d'artefacts numérique et matériel dans l'apprentissage

Anne Voltolini \*

## INSTRUMENTAL GENESES AND CONCEPTIONS IN ORDER TO STUDY THE LEARNING POTENTIAL OF A DUO OF ARTEFACTS BOTH DIGITAL AND MATERIAL

**Abstract** – In this study we introduce the idea of a duo of digital and material artefacts, as a means of characterising the coupling of a digital artefact with a material artefact in a manner that is fruitful for learning. In order to study the contributions and limits for learning with such a duo, we propose a theoretical development in the instrument-conception duality which brings together the notions of instrument from Rabardel and conception from Balacheff. Brousseau's characterisation of learning as adaptation to a milieu together with Rabardel's instrumental approach allow us to establish conditions for creating a duo. We then present the methodology of creating a duo of digital and material artefacts, starting from the problem of constructing a triangle with ruler and compass. Hence we show how the instrument-conception of duality allows us to bring out the effects of the duo in the learning of pupils, in terms of compass instruments and in terms of conceptions of triangle.

**Key words:** didactic situation, duo of artefacts, instrumental genesis, conceptions, geometry, manipulatives, TEL

## GÉNESIS INSTRUMENTALES Y CONCEPCIONES PARA ESTUDIAR EL POTENCIAL DE APRENDIZAJE DE UN DUO DE ARTEFACTOS NUMÉRICO Y MATERIAL

**Resumen** – Este trabajo de investigación introduce la noción de dúo de artefactos, digital y material, como medio de caracterizar una articulación fructífera entre una herramienta digital y una material para el aprendizaje. Con el fin de estudiar el potencial de aprendizaje de este dúo, proponemos una elaboración teórica de la dualidad instrumento-concepción que se basa en las nociones de instrumento de Rabardel y de concepción de Balacheff. La caracterización del aprendizaje por adaptación a un medio dada por Brousseau y el enfoque instrumental de

---

\* Institut Français de l'Éducation ENS Lyon anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Rabardel nos permiten establecer las características de este dúo. Ejemplificamos el uso de este dúo de artefactos con el problema de la construcción del triángulo con regla y compás. A continuación, presentamos cómo la dualidad instrumento-concepción permite analizar los efectos del dúo en el aprendizaje de los alumnos, en el sentido de los instrumentos elaborados y de la evolución de las concepciones del triángulo.

**Palabras-claves:** situación didáctica, dúo de artefactos, génesis instrumental, concepciones, geometría, manipulación, EIAH (entorno informático para el aprendizaje humano)

## RÉSUMÉ

Dans cette recherche nous introduisons la notion de duo d'artefacts, numérique et matériel, comme moyen de caractériser une articulation fructueuse pour l'apprentissage entre un artefact numérique et un artefact matériel. Afin d'étudier les apports et les limites d'un tel duo pour l'apprentissage, nous proposons une élaboration théorique, la dualité instrument-conception mettant en cohérence les notions d'instrument de Rabardel et de conception de Balacheff. La caractérisation de l'apprentissage par adaptation à un milieu donnée par Brousseau, ainsi que l'approche instrumentale de Rabardel nous permettent d'établir des critères d'élaboration d'un duo d'artefacts. Nous présentons alors la méthodologie de composition d'un duo d'artefacts à partir du problème de la construction du triangle à la règle et au compas. Enfin, nous montrons comment la dualité instrument-conception nous permet de faire ressortir les effets du duo sur l'apprentissage des élèves, en termes d'instruments compas et en termes de conceptions du triangle.

**Mots-Clés :** situation didactique, duo d'artefacts, génèses instrumentales, conceptions, géométrie, manipulation, EIAH

## INTRODUCTION

De nombreuses études issues de la recherche en didactique présentent avec enthousiasme l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'aide des technologies numériques (Hoyles & Lagrange, 2010) et ce, dès l'école primaire (Sinclair & Baccaglioni-Franck, 2015 ; Moyer-Packenham, 2016). La majorité de ces études présentent les potentialités des technologies numériques en comparaison d'une activité de manipulation d'objets matériels ou d'une activité papier-crayon.

L'idée de départ de notre recherche est d'introduire les technologies numériques dans des pratiques ordinaires de classe, sans qu'elles viennent se substituer aux activités de manipulation dans l'espace sensible ou aux activités papier-crayon déjà pratiquées. Il s'agit de considérer les technologies numériques comme un élément de l'ensemble des activités pratiquées en classe.

Un des domaines mathématiques dans lesquels l'usage du numérique est prégnant dans l'enseignement français est celui de la géométrie (MEN, 2018). Les logiciels de géométrie dynamique sont mobilisés dans des situations d'apprentissage parallèlement à l'utilisation des instruments usuels de géométrie (la règle, l'équerre, le compas). La différence de résolution d'une même tâche dans l'environnement papier-crayon ou dans un environnement de géométrie dynamique est une potentialité qu'il nous semble intéressant d'explorer. C'est pourquoi, dans notre recherche, nous nous interrogeons sur la possibilité d'une utilisation conjointe d'un environnement de géométrie dynamique et de l'environnement papier-crayon. Quels peuvent être, dans une même situation, les apports et les limites d'une utilisation conjointe d'un environnement numérique et de l'environnement papier-crayon pour l'apprentissage de la géométrie ? Comment l'adaptation des connaissances d'un sujet, de l'environnement numérique à l'environnement papier-crayon ou réciproquement, de l'environnement papier-crayon à l'environnement numérique, peut-elle être induite et organisée pour favoriser l'acquisition de connaissances ?

Nous introduisons la notion de duo d'artefacts numérique et matériel comme moyen de caractériser une articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel qui soit fructueuse pour l'apprentissage, c'est-à-dire favorable à l'évolution des conceptions des élèves. Etant donnée une situation didactique mobilisant conjointement un environnement numérique et

l'environnement papier-crayon, notre étude examine les caractéristiques d'une complémentarité entre les environnements et analyse les contraintes, les nécessités, les opportunités favorables ou non aux apprentissages. Pour l'apprentissage de la géométrie et spécifiquement pour l'apprentissage des constructions de figures aux instruments, un environnement numérique peut-il constituer une valeur ajoutée à l'artefact matériel et aider l'élève à franchir les difficultés rencontrées : difficultés relatives à l'utilisation de l'artefact matériel et/ou difficultés relatives à la notion mathématique en jeu ? Il s'agit donc d'une part, d'étudier les conditions d'une articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel qui soit une plus-value pour les apprentissages ; d'autre part, il s'agit d'analyser comment une telle articulation peut influencer l'évolution des conceptions des élèves.

La première partie de ce texte est consacrée à l'exposé d'une revue de littérature dans laquelle nous précisons le potentiel de la géométrie dynamique pour l'apprentissage de la géométrie et dans laquelle nous présentons des exemples d'utilisation conjointe d'un outil numérique et d'un outil matériel.

Dans la deuxième partie, consacrée à l'exposé des cadres théoriques utilisés dans notre recherche, nous proposons une mise en relation de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995a) et du modèle des conceptions cK $\phi$  (Balacheff, 1995a). Nous convoquons les notions d'instrument et de conception pour étudier les processus d'apprentissage engagés dans la mobilisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel dans une situation. Nous proposons une élaboration théorique appelée dualité instrument-conception qui met en cohérence la notion d'instrument et la notion de conception. Il s'agit de relier instrumentation et évolution des conceptions du sujet afin de caractériser le développement de connaissances lié à l'émergence d'un instrument. Nous présentons ensuite les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie et le concept de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). Nous terminons cette partie par l'énoncé de nos questions de recherche.

La troisième partie de ce texte est consacrée à la notion de duo d'artefacts numérique et matériel comme méthodologie pour concevoir des situations mobilisant conjointement un artefact numérique et un artefact matériel. Nous présentons d'une part, les principales caractéristiques d'un duo d'artefacts numérique et matériel qui peuvent contribuer à l'élaboration d'une situation d'apprentissage. D'autre part, nous présentons la méthodologie

que nous avons mise en œuvre pour composer un duo d'artefacts particulier à partir du problème de la construction d'un triangle de longueurs des côtés données.

La quatrième partie présente le duo d'artefacts numérique et matériel particulier dédié à l'évolution des conceptions du triangle, à partir du problème de sa construction à la règle et au compas, en lien avec sa déconstruction dimensionnelle.

Enfin, la cinquième partie est consacrée à l'analyse de l'effet du duo d'artefacts sur les apprentissages au sens des instruments compas élaborés et des conceptions sur le triangle engagées.

## LES ENVIRONNEMENTS NUMÉRIQUES POUR L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE

### **1. Potentialités de la géométrie dynamique**

Le rapport de Sinclair et al. (2016) sur l'enseignement de la géométrie relève que le développement des logiciels de géométrie dynamique conduit à de nouveaux défis pour l'apprentissage de la géométrie. D'une part, ces logiciels permettent la résolution de certains problèmes qui ne seraient pas solubles pour les élèves sans leur usage. D'autre part, lorsqu'ils sont exploités avec pertinence, les environnements de géométrie dynamique proposent à l'utilisateur d'agir directement sur des représentations d'objets mathématiques et ainsi se différencient de la façon habituelle dans l'environnement papier-crayon d'agir sur eux (Laborde & Laborde, 2014). Observations, manipulations, conjectures, essais et élaborations de raisonnements pour expliquer les phénomènes peuvent être mis en œuvre par les élèves.

Les manipulations dynamiques de formes géométriques dans ces environnements aident l'élève à appréhender l'essence mathématique d'une forme : l'identification de ses propriétés caractéristiques ainsi que les relations géométriques entre les formes sont rendues visibles grâce aux représentations dynamiques choisies dans ce but. De tels environnements sont des outils de visualisation, de réification, et de manipulation directe de représentations d'objets mathématiques et de certaines de leurs propriétés (Artigue, 2008) et ainsi sont favorables à l'acquisition de connaissances géométriques.

Le déplacement d'objets à l'écran permet d'une part, l'exploration des figures et d'autre part, l'obtention de rétroactions, deux fonctions essentielles des environnements de

géométrie dynamique (Soury-Lavergne, 2006). Laborde et al. (2006) indiquent que la rétroaction fournie par la technologie offre une grande opportunité pour de nouvelles façons de comprendre les mathématiques. Les rétroactions permettent à l'utilisateur d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie. Par exemple, une rétroaction indiquant qu'une solution est insuffisante stimule la recherche d'une autre solution ; une rétroaction différente de celle attendue par l'élève, l'oblige à reconsidérer sa solution et l'aide à affiner sa pensée. La réaction presque instantanée de l'environnement numérique a le potentiel de transformer la pensée intuitive en une réflexion analytique et en apprentissage. L'accent est mis ici sur l'endroit où se trouve le contrôle dans la résolution d'un problème mathématique ; le contrôle est donc déplacé du niveau du professeur vers celui de l'élève. Le fait que ce soit l'environnement qui réagisse, indépendamment de l'enseignant, contribue à une meilleure appropriation du problème par les élèves et ainsi leur permet de prendre la responsabilité de leur propre apprentissage.

Un environnement de géométrie dynamique conduit à l'élaboration de nouveaux types de tâches qui ne peuvent exister dans l'environnement papier-crayon. En engageant l'élève à des actions sur des représentations dynamiques d'objets mathématiques et en renvoyant des rétroactions, un tel environnement est favorable à la création de milieux (Brousseau, 1998) et offre donc de nouvelles opportunités pour l'apprentissage de la géométrie.

## **2. Utilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel**

Certaines études relatent des utilisations simultanées d'un artefact matériel et d'un artefact numérique. Les travaux de Poisard et Gueudet (Poisard, 2017 ; Gueudet & Poisard, 2019) présentent une utilisation du boulier chinois matériel, logiciel, et dessiné sur une feuille, pour l'enseignement et l'apprentissage de la construction du nombre et du système décimal à l'école. Poisard montre comment des tâches peuvent être résolues par les élèves dans différents registres (matériel, logiciel, papier-crayon, mains, oral), ce qui est important pour la compréhension des élèves et également pour l'activité des professeurs. Gueudet et Poisard discutent de l'appropriation par une enseignante d'un « kit boulier » comprenant un boulier matériel et un boulier virtuel. Les auteures soulignent l'importance de la manipulation du

boulier matériel par les élèves. Parallèlement, le boulier logiciel favorise l'autonomie des élèves qui grâce à l'affichage digital du nombre peuvent vérifier par eux-mêmes le nombre inscrit sur le boulier. Le boulier virtuel est aussi utilisé par l'enseignante, rétro-projeté pour stimuler la discussion entre élèves. Dans ces travaux, l'outil numérique (le boulier logiciel) est une simulation d'un outil matériel existant (le boulier chinois). Maschietto et Soury-Lavergne ont créé deux situations mobilisant de façon coordonnée un artefact numérique et un artefact matériel, l'une pour apprendre la numération (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013) et l'autre en géométrie (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). Dans leurs travaux, elles étudient l'articulation et la complémentarité d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une situation didactique. Ces auteures analysent la cohérence d'utilisation de chaque artefact, numérique et matériel, ainsi que l'élaboration de l'artefact numérique étant donné l'artefact matériel. Leurs travaux se font dans la perspective d'une articulation, artefact numérique et artefact matériel, avec une recherche de continuités et de ruptures, entre les deux artefacts. Elles montrent que la continuité et les ruptures entre les deux artefacts, peuvent être favorables aux apprentissages. Soury-Lavergne définit alors un duo d'artefacts comme

« une situation didactique qui associe un artefact matériel à un artefact numérique et rend les deux nécessaires et complémentaires pour la situation d'apprentissage » (Soury-Lavergne, 2017 p. 55).

Dans le prolongement de ces travaux, c'est dans la perspective d'une utilisation conjointe, dans une même situation d'apprentissage, d'un environnement de géométrie dynamique et de l'environnement papier-crayon muni des instruments usuels de géométrie, que s'inscrit notre recherche. Il s'agit d'une part de caractériser ce qui fait duo et d'autre part, d'étudier les processus d'apprentissage engendrés grâce à la mobilisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel.

## UNE DUALITÉ INSTRUMENT-CONCEPTION POUR ANALYSER LES APPRENTISSAGES GÉOMÉTRIQUES

Dans cette partie, nous exposons les cadres théoriques invoqués dans notre étude, pour quelles raisons ils sont nécessaires et comment ils s'articulent. Le premier paragraphe présente le concept d'instrument (Rabardel, 1995a). Ce cadre théorique de l'approche instrumentale est d'une part exploité dans notre recherche, dans la composition d'un duo d'artefacts,



spécifiquement dans l'élaboration de l'artefact numérique associé à un artefact matériel donné. D'autre part, l'approche instrumentale nous permet d'étudier le bénéfice de chaque artefact du duo pour l'apprentissage. Les instruments construits lors de la mobilisation d'un duo d'artefacts entraînent un apprentissage en termes d'instruments et en termes de conceptions relatives à la notion mathématique en jeu dans la situation. Ces deux modalités de l'apprentissage ne sont pas disjointes. C'est pourquoi, pour comprendre les effets d'un duo d'artefacts sur l'apprentissage nous proposons, dans le deuxième paragraphe, une élaboration théorique appelée dualité instrument-conception s'appuyant sur la notion d'instrument de Rabardel (1995a) et sur la notion de conception de Balacheff (1995a). Le troisième paragraphe est consacré à la présentation des conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie et du concept de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). Nous terminons ce paragraphe par l'énoncé de nos questions de recherche en lien avec les concepts précédemment exposés.

### **1. Des artefacts aux instruments**

Rabardel (1995a) introduit la notion d'instrument pour le différencier de l'artefact et pour souligner l'importance de la relation existant entre le sujet et l'artefact. Rabardel distingue l'artefact qui est l'objet donné à un sujet et l'instrument qui est construit par le sujet. Un instrument est une entité mixte constituée de l'artefact mobilisé par l'individu et d'une composante psychologique, les schèmes personnels d'utilisation pour un type de tâche donné. L'instrument n'existe pas en lui-même. L'artefact devient un instrument quand le sujet se l'est approprié et l'a intégré dans son activité. Un instrument dépend du sujet qui l'élabore et de la tâche qu'il cherche à exécuter. Par exemple, le compas matériel utilisé à l'école est un artefact constitué de deux branches articulées : une branche avec une pointe et l'autre avec une mine. Plusieurs instruments compas peuvent être élaborés par un sujet : par exemple le compas pour tracer un cercle ou le compas pour reporter une longueur. L'élaboration d'un instrument est le fruit de l'activité du sujet au cours d'un processus appelé la genèse instrumentale. La genèse instrumentale est liée à la fois aux caractéristiques de l'artefact, ses potentialités et ses contraintes, et à la personnalité du sujet, ses connaissances et ses habitudes de travail dans le contexte de la tâche à réaliser. Une genèse instrumentale s'interprète par un double processus : l'instrumentalisation et l'instrumentation.

L'instrumentalisation est une personnalisation de l'artefact ; les différentes potentialités, caractéristiques intrinsèques de l'artefact sont progressivement découvertes par le sujet qui adapte l'artefact à ses habitudes et à la situation. L'instrumentation induit la construction de schèmes d'utilisation par le sujet. Un schème est défini comme

« l'ensemble structuré des caractères généralisables des activités d'utilisation des instruments. (...) Les schèmes d'utilisation peuvent être considérés comme des invariants représentatifs et opératifs correspondant à des classes de situations d'activité avec instrument » (Rabardel, 1995b p. 63).

Les schèmes influencent et conditionnent les actions et les stratégies de réalisation de la tâche demandée et entraînent l'acquisition de connaissances.

Dans notre recherche, nous exploitons la notion d'instrument dans la composition d'un duo, pour analyser les genèses instrumentales relatives à l'artefact matériel et concevoir un artefact numérique susceptible d'engendrer des genèses instrumentales qui renforcent celles de l'artefact matériel. Par contre pour analyser les effets du duo d'artefacts sur l'apprentissage nous avons besoin de pouvoir caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument à partir d'observables. C'est pourquoi nous convoquons aussi le modèle des conceptions de Balacheff.

## **2. Dualité instrument-conception**

Nous souhaitons suivre et évaluer les apprentissages des élèves au cours de la mobilisation d'un duo d'artefacts : d'une part, les effets du duo sur les genèses instrumentales relatives à l'artefact matériel et d'autre part, les effets du duo sur l'acquisition des concepts mathématiques en jeu dans la situation. Dans le cas de la construction du triangle à la règle et au compas, problème retenu dans cette étude, nous souhaitons analyser les instruments compas élaborés par les élèves et étudier l'évolution de leurs connaissances relatives au concept de triangle. Nous avons donc besoin d'indicateurs, jouant le rôle d'observables interprétables en termes de connaissances. Ainsi dans cette étude, la notion d'instrument de Rabardel (1995a) et la notion de conception de Balacheff (1995a) sont mises en cohérence. Dans ce paragraphe nous présentons le modèle cK $\phi$  (Balacheff, 2013) ainsi que la dualité instrument-conception que nous avons établie.

*Caractérisation d'une conception dans le modèle cKç*

Le modèle cKç (conception, connaissance, concept) distingue le concept abstrait, la connaissance d'un sujet ou d'une institution, et la conception qui est une instantiation de la connaissance d'un sujet par une situation. Balacheff élabore ce modèle de connaissance à la fois à partir de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et à partir de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). La théorie des situations didactiques repère la connaissance d'un sujet comme la conscience de sa capacité de contrôle sur une situation ou plus exactement sur un milieu. Les ressorts de l'apprentissage apparaissent comme l'interaction du sujet avec un milieu défini par Brousseau comme le système antagoniste de l'actant. Le milieu est tout ce qui agit sur l'élève et ce sur quoi l'élève agit. Balacheff regarde le système [sujet-milieu] comme un tout et il définit une conception comme

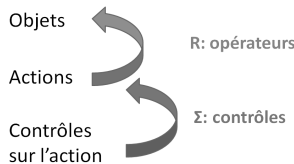
« l'état d'équilibre d'une boucle action-réaction du système [sujet-milieu] sous des contraintes proscriptives de viabilité » (Balacheff & Margolinas, 2005, p.6).

Dans la caractérisation d'une conception, Balacheff reprend la définition d'un concept faite par Vergnaud à laquelle il ajoute explicitement une structure de contrôle. Pour Vergnaud (1990) un concept est défini comme un triplet constitué de l'ensemble S des situations qui donnent du sens au concept, de l'ensemble I des invariants opératoires sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes, de l'ensemble L des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept. Ainsi Balacheff définit une conception C par un quadruplet (P, R, L,  $\Sigma$ ) dans lequel P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ; R est un ensemble d'opérateurs qui permettent le traitement des problèmes ; L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R ;  $\Sigma$  est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de C. Les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire sont situés dans les opérateurs et les contrôles.

Un opérateur permet au sujet de réaliser une action ; il transforme un problème en un nouveau problème. Un opérateur est un moyen d'action, les connaissances interviennent dans la réalisation d'une action. Un opérateur caractérise l'action A comme la conséquence d'un prédicat  $\pi$  [ $\pi \Rightarrow A$ ] ; il a une finalité (le prédicat  $\pi$ ) et une modalité d'action (l'action A). Les

opérateurs sont identifiés par des actions observables du sujet sur le milieu.

Un contrôle évalue la pertinence et la validité de l'action. Il rassemble « *des jugements, des décisions, des moyens de choix* » (Balacheff & Margolinas, 2005 p10). Un contrôle consiste à associer deux prédicats  $\pi_1$  et  $\pi_2$ ,  $\pi_1$  étant un constat et  $\pi_2$  étant la conséquence de  $\pi_1$  [ $\pi_1 \Rightarrow \pi_2$ ]. Un contrôle contient les éléments de décision sur le bien-fondé de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état de résolution d'un problème. C'est une action sur l'action (Vadcard, 2002) (Figure 1). Les contrôles sont le plus souvent implicites ; ils permettent des validations mais aussi des anticipations. Par exemple, l'argument : une figure a trois côtés ( $\pi_1$ ) est un triangle ( $\pi_2$ ), permet aussi bien la validation *a posteriori* du tracé d'un triangle que l'engagement dans la résolution du problème.



**Figure 1.** - Illustration de la distinction entre opérateur R et contrôle  $\Sigma$  proposée par (Vadcard, 2002)

L'apprentissage dans les termes de Balacheff, « *est un processus permettant le passage d'une conception à une autre* » (Balacheff, 1995b, p. 243). C'est en ce sens que nous utilisons le terme « apprentissage » dans la suite de ce texte.

#### *Caractérisation des connaissances liées à l'émergence d'un instrument : la dualité instrument-conception*

Dans une activité de construction géométrique, la pensée du sujet résulte de l'usage d'un artefact pour réaliser un type donné de tâche. L'instrument élaboré, à travers le développement de schèmes d'utilisation, participe donc à l'apprentissage. Les schèmes d'utilisation développés par le sujet en activité ont une fonction épistémique qui traduit un apprentissage (Rabardel, 1995a). Ainsi un instrument élaboré par un sujet inclut une connaissance du sujet. La mobilisation de cet instrument pour résoudre un problème est donc une instanciation de cette connaissance-instrument par une situation. C'est pourquoi il nous semble pertinent d'utiliser le modèle cK $\mathcal{K}$  comme moyen de caractériser l'évolution des conceptions du sujet liée à l'émergence d'un instrument.

Observer et analyser l'apprentissage lié à l'émergence d'un instrument nécessite de pouvoir identifier les connaissances implicites du sujet, engagées dans les schèmes d'utilisation. Nous faisons le choix de caractériser ces connaissances implicites en termes de conceptions. Cependant, une conception n'est pas qu'une sous partie, un zoom des connaissances implicites sur lesquelles repose l'opérationnalité des schèmes d'utilisation d'un instrument ; c'est une mise en relation, instrument et conception étant deux états d'équilibre du système [sujet-milieu]. D'un côté, les schèmes d'utilisation d'un instrument reposent sur des connaissances caractérisées en conceptions. De l'autre côté, les problèmes sur lesquels une conception est opératoire incitent à la mobilisation des instruments. Les opérateurs qui permettent la résolution des problèmes ainsi que les contrôles qui assurent la non contradiction de la conception, comportent des règles d'action et de contrôle sur les instruments. Par exemple, considérons dans l'environnement papier-crayon le tracé d'un segment joignant deux points. Pour la réalisation de ce tracé il s'agit de poser la règle (opérateur) de sorte qu'elle joigne les deux points (contrôle) et de déplacer le crayon (opérateur) le long de la règle en partant d'un des points jusqu'à l'autre (contrôle). Un argument émanant des connaissances du sujet : un segment est limité et a deux extrémités (contrôle), permet aussi bien la validation du tracé que l'engagement dans la réalisation du tracé. Cette description peut être associée à l'énoncé d'un schème d'utilisation de la règle pour tracer un segment entre deux points. Un instrument, dans sa partie schèmes d'utilisation, intègre donc des opérateurs qui mobilisent l'artefact ainsi que des contrôles : d'une part des contrôles permettant de juger de la validité et des modalités de son utilisation et d'autre part, des contrôles relatifs aux représentations des concepts en jeu, ici la notion de segment.

Dans l'analyse d'une situation, l'élaboration théorique de la dualité instrument-conception nous permet d'identifier les schèmes d'utilisation d'un instrument à partir d'opérateurs observables et de contrôles inférés. Les genèses instrumentales résultent alors de combinaisons d'opérateurs et de contrôles. D'autre part, cette dualité instrument-conception nous permet d'identifier l'apprentissage des concepts mathématiques en jeu dans la situation.

### 3. La déconstruction dimensionnelle des formes dans l'apprentissage de la géométrie

Dans les premières années de la scolarité française, une figure est une surface avec un bord. Par exemple, un triangle est une forme type, une surface dont la frontière est formée de trois côtés. Les trois côtés sont les bords inséparables de la surface qu'ils délimitent. C'est ce que Duval qualifie de « *priorité immédiate et stable des unités figurales 2D sur les unités figurales 1D* » (Duval, 2005 p. 23). Cette vision surface des formes est insuffisante pour faire de la géométrie. Mettre en œuvre la déconstruction dimensionnelle des formes est selon Duval un processus indispensable pour permettre un travail géométrique sur les figures. La déconstruction dimensionnelle consiste à

« décomposer toute forme, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ, en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions » (Duval, 2005 p. 16).

L'apprentissage de la géométrie a donc pour objectif d'amener les élèves à sortir du contour fermé de la figure et à appréhender les unités figurales 1D et les unités figurales 0D d'une figure. Les unités figurales 1D d'une figure sont les lignes pouvant être tracées avec des instruments. Les points sont alors des extrémités de lignes ou des intersections de lignes déjà tracées. On peut tracer des segments (demi-droites, droites) qui relient des points déjà présents. Les unités figurales 0D sont les points obtenus par des intersections de lignes tracées spécifiquement. Les points peuvent à leur tour définir des lignes : deux points déterminent une droite, une demi-droite, un segment ; un cercle est déterminé soit par deux points (le centre et un point du cercle) soit par un point et une longueur. « *Le rapport des élèves aux figures est l'un des points clé de leur entrée dans la géométrie* » (Duval & Godin, 2005 p. 7). Il s'agit donc d'amener les élèves à enrichir leurs regards sur la figure et de les accompagner à passer d'une vision surface d'une figure à une vision faisant apparaître des unités figurales 1D et 0D.

Dans les activités de construction de figures aux instruments, « *ce sont les instruments utilisés qui commandent, dirigent, ou contrôlent la décomposition visuelle des formes* » (Duval, 2005 p. 18). En effet, parmi les instruments permettant des tracés graphiques certains produisent des formes 2D, par exemple les gabarits ou les pochoirs. D'autres produisent des formes 1D comme la règle, le compas, certains gabarits. Les instruments

usuels de géométrie, incluant les logiciels de géométrie dynamique, sont essentiellement producteurs de tracés 1D. Ainsi la construction d'une figure s'appuie sur sa déconstruction en tracés 1D et 0D réalisables à l'aide d'un instrument. Chaque tracé est alors associé à la mobilisation d'une propriété géométrique liée à l'instrument utilisé. Apprendre la procédure de tracé d'une figure aux instruments est une étape mais comprendre pourquoi les instruments utilisés sont adéquats pour réaliser cette construction en est une autre qui est davantage porteuse de savoirs. C'est pourquoi, l'usage d'un instrument ne va pas de soi, il doit être élaboré à partir de ses caractéristiques (Perrin-Glorian, Mathe, & Leclercq, 2013) et l'enseignement de la géométrie doit contribuer à cette élaboration. Pour les auteurs précédents, le point central de cette démarche est le regard porté sur les figures et les instruments, qu'il est essentiel de faire travailler aux élèves. L'utilisation d'un instrument plutôt qu'un autre pour produire une figure peut induire une appréhension différente de la figure en unités figurales 2D, 1D ou 0D.

Pour Duval et Godin (2005), le passage des instruments permettant des manipulations d'objets matériels aux instruments de traçage constitue un saut cognitif important.

« En effet on passe d'un monde où l'espace s'organise en fonction des gestes du corps et de son orientation, à un monde où l'espace est déterminé en fonction de gestes uniquement techniques, c'est-à-dire déterminé par les possibilités productives d'un instrument » (ibid p. 12).

L'introduction des environnements de géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie permet l'élaboration de tâches qui peuvent être résolues grâce à des manipulations de représentations dynamiques d'objets mathématiques. Dans notre recherche, nous nous interrogeons sur la possibilité que de telles manipulations de représentations d'objets mathématiques à l'interface d'un ordinateur soient une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage de manipulations d'objets matériels à des tracés géométriques à l'aide d'instruments. En particulier, relativement au problème de la construction du triangle à la règle et au compas, nous étudions les questions de recherche suivantes. L'utilisation conjointe d'un environnement de géométrie dynamique et de l'environnement papier-crayon peut-elle être favorable à l'émergence d'un nouvel instrument compas dans cette construction ? L'utilisation conjointe d'un environnement de géométrie dynamique et de l'environnement

papier-crayon peut-elle être favorable à l'appréhension des unités figurales 1D et 0D du triangle ?

## DUO D'ARTEFACTS NUMÉRIQUE ET MATÉRIEL : UNE MÉTHODOLOGIE D'ÉLABORATION DE SITUATIONS

Nous introduisons la notion de duo d'artefacts numérique et matériel comme une méthodologie pour concevoir des situations mobilisant conjointement un environnement numérique et l'environnement papier-crayon.

Dans cette partie, nous présentons d'abord les caractéristiques générales que nous avons établies à propos du concept de duo d'artefacts numérique et matériel. Dans le deuxième paragraphe, nous décrivons la méthodologie suivie pour la composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel à partir du problème de la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas. Enfin, le troisième paragraphe expose la méthodologie, de recueil, traitement et analyse des données, que nous avons mise en œuvre pour étudier les effets du duo sur les apprentissages des élèves.

### **1. Fondements d'un duo d'artefacts numérique et matériel**

Dans un premier temps, il est utile de justifier les choix de vocabulaire, matériel plutôt que tangible et numérique plutôt que virtuel. Nous préférons l'adjectif matériel à l'adjectif tangible, au sens où les objets et/ou les outils considérés sont réels, faits de matière. Ces objets et/ou outils matériels, peuvent être manipulés, touchés, ils sont donc aussi tangibles. Mais, des objets numériques peuvent aussi être tangibles. En particulier lors de l'usage de technologies tactiles, les doigts sont directement en contact avec l'écran, les interactions se font par le toucher. Laborde et Laborde (2014) parlent aussi de représentations dynamiques et tangibles à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique. Nous rejetons le mot virtuel car il se rapporte à ce qui n'est qu'en puissance, qu'en état de simple possibilité par opposition à ce qui est en acte. Or justement, grâce aux représentations dynamiques d'objets mathématiques, facilement manipulables, les environnements numériques permettent de rématérialiser les objets mathématiques abstraits, qui sont invisibles et virtuels. C'est pourquoi nous préférons l'adjectif numérique.

Mobiliser conjointement un artefact numérique et un artefact matériel pour en faire un duo d'artefacts, nécessite de s'interroger sur la complémentarité entre les deux artefacts ainsi que sur les



conditions de leur articulation afin que celle-ci soit favorable à l'apprentissage.

#### *Une situation didactique pour faire exister le duo*

Soutenue par la caractérisation de l'apprentissage par adaptation à un milieu, donnée par Brousseau, nous considérons que la mobilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel pour un apprentissage donné, ne peut être réalisée qu'au sein d'une situation didactique (Brousseau, 1998). Nous définissons donc un duo d'artefacts comme l'articulation fructueuse pour l'apprentissage d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une situation didactique (Voltolini, 2017). Composer un duo d'artefacts c'est donc organiser un milieu comprenant les deux artefacts et susceptible de rétroactions favorables à l'apprentissage visé. L'articulation des artefacts augmente les occasions de rencontre sujet-milieu ; différents milieux se confrontent. Grâce au duo, le système [sujet-milieu] est enrichi et multiplie les occasions d'émergence et de transformation des conceptions des élèves au cours de la situation.

Pour nous, le cœur d'un duo d'artefacts, numérique et matériel, repose sur la plus-value que peut apporter l'artefact numérique pour l'apprentissage en relation avec l'usage de l'artefact matériel. Composer un duo c'est donc créer un artefact numérique articulé à un artefact matériel donné, de manière à ce que cette articulation induise une valeur ajoutée, relativement aux instruments élaborés et relativement à l'évolution des conceptions des élèves sur le concept mathématique en jeu dans la situation. Les choix des objets à manipuler, des actions possibles sur ces objets et des rétroactions de l'environnement sont des éléments essentiels du milieu pour que l'artefact numérique contribue à l'apprentissage. En outre, l'objectif est aussi de tirer profit des potentialités de chaque artefact ; il nous semble donc primordial que les stratégies suscitées par un artefact complètent celles suscitées par l'autre. Ainsi, dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et de la situation qui lui permet d'exister, il s'agit de faire en sorte que l'artefact numérique offre une gamme de stratégies et d'interactions, contrôlées par l'utilisateur, qui enrichissent celles possibles avec l'artefact matériel.

#### *Des genèses instrumentales associées*

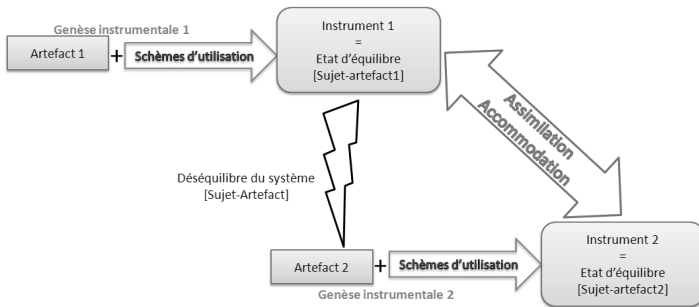
Dans une situation mobilisant un duo d'artefacts, numérique et matériel, chaque artefact entraîne le développement de schèmes et

par conséquent les deux genèses instrumentales s'entremêlent. Articuler les artefacts c'est donc les mettre en relation tant en continuité qu'avec certaines discontinuités judicieusement choisies afin que le duo augmente le potentiel d'apprentissage de chaque instrument. En effet,

« les schèmes d'utilisation ne s'appliquent pas directement, ils doivent être instanciés en fonction du contexte spécifique de chaque situation. Ils s'actualisent alors sous forme de procédures adéquates aux singularités de la situation. » (Rabardel, 1995a, p 94).

Dans des situations nouvelles, le schème peut-être assimilateur et s'appliquer par analogie. Lorsque l'assimilation de la situation au schème ne permet pas de réussir, le schème est progressivement accommodé jusqu'à aboutir à un nouveau schème. L'accommodation est le mécanisme par lequel les schèmes sont modifiés pour les ajuster aux données nouvelles. C'est pourquoi nous pensons que le potentiel d'apprentissage d'un duo d'artefacts réside dans les processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation qu'il peut engendrer.

Dans la composition d'un duo, l'articulation des artefacts doit être réalisée dans une certaine continuité afin d'autoriser, dans un premier temps, des tentatives d'assimilation des schèmes d'utilisation, de manière à ce que les éléments qui font l'objet de l'apprentissage soient reliés à ce que le sujet connaît déjà. En outre, il faut qu'un déséquilibre du système [sujet-artefact] apparaisse afin que des processus d'accommodation des schèmes soient mis en œuvre pour retrouver un nouvel équilibre du système [sujet-artefact] et donc, induire un apprentissage au sens du passage d'un instrument à un autre (Figure 2). Ces déséquilibres sont provoqués par une discontinuité entre les deux artefacts ; l'artefact numérique inclut des éléments supplémentaires relativement à l'artefact matériel.



**Figure 2.** - Un duo d'artefacts engendre des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre

Les instruments fondés par le sujet lors de la mobilisation d'un duo d'artefacts ne sont pas simplement deux instruments juxtaposés ; l'instrument 2 incorpore des éléments de l'instrument 1 et inversement. Un cycle entre les genèses instrumentales relatives à l'instrument 1 et celles relatives à l'instrument 2 est alors provoqué par le duo.

## 2. Méthodologie de composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel à partir du problème de la construction du triangle à la règle et au compas

Dans le cas présenté ici, la composition du duo s'appuie sur une ingénierie didactique (Artigue, 1988). Les phases d'élaboration et d'expérimentation du duo d'artefacts ont été réalisées lors d'un travail collaboratif entre chercheurs et enseignants dans un LÉA<sup>1</sup>. Trois enseignantes et deux chercheuses étaient membres de ce LÉA. Associer des enseignants à la composition du duo nous semblait bénéfique dans la mesure où nous voulions analyser les effets du duo d'artefacts sur les apprentissages des élèves. Réaliser des expérimentations en conditions réelles de classe était donc primordial pour nous. Les phases d'analyse préalable, d'analyse *a priori* et d'analyse *a posteriori* ont été réalisées uniquement par une des chercheuses (Voltolini, 2017).

Dans ce paragraphe, nous présentons une analyse du problème de la construction d'un triangle à la règle et au compas en termes d'évolutions des conceptions du triangle. Nous exposons ensuite

<sup>1</sup> Un LÉA, Lieu d'éducation Associé est défini dans le programme scientifique de l'IFÉ (Institut Français de l'Éducation) comme un lieu à enjeux d'éducation associant chercheurs et enseignants.

nos enjeux dans la composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel relatif à cette construction du triangle.

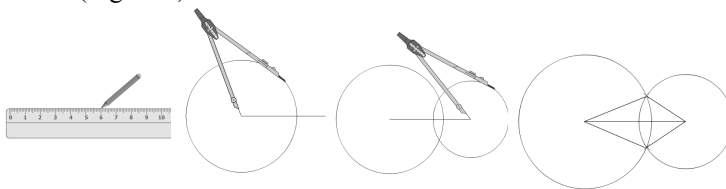
### *La construction du triangle à la règle et au compas*

Les élèves français rencontrent le concept de triangle à plusieurs reprises dans leur scolarité. D'abord à l'école maternelle, les enfants de trois ans à six ans découvrent le triangle en tant qu'objet physique à manipuler ou surface dessinée, comme moyen de positionner trois personnes dans l'espace ou encore comme instrument de percussion réalisé par la flexion d'une seule longueur de métal (MEN, 2015). Dans la suite de la scolarité, les élèves réalisent d'abord des tracés de triangles sans contrainte sur les longueurs puis des tracés de triangles rectangles connaissant les longueurs des côtés de l'angle droit. La construction du triangle à la règle et au compas connaissant les longueurs de ses côtés n'est enseignée qu'à la fin de l'école primaire aux élèves de dix ou onze ans (MEN, 2018).

Le choix de ce problème résulte d'un constat au sein du LéA. La construction géométrique du triangle à la règle et au compas n'est souvent enseignée que comme une procédure de tracé : tracer à la règle graduée un segment d'une des trois longueurs du triangle, puis tracer avec le compas deux cercles (arcs de cercle) centrés sur les extrémités de ce segment avec pour rayon chacune des deux autres longueurs, enfin tracer le triangle en joignant chaque extrémité du premier segment à une intersection des cercles (arcs de cercle) (Figure 3). Or cette construction engage le concept de triangle ainsi que celui de cercle et convoque la compréhension de l'adéquation de l'usage du compas dans cette construction.

Construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, c'est montrer que le triangle existe et produire un tracé de ce triangle, ou montrer que le triangle n'existe pas, c'est-à-dire que les trois longueurs données ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. Lorsque le triangle existe, l'enjeu est de produire un dessin respectant les contraintes sur les longueurs des côtés. Ce sont ces contraintes qui prescrivent l'utilisation du compas dans cette construction. Sans contrainte sur les longueurs des côtés, la règle suffit pour tracer un triangle. Construire un triangle nécessite de décomposer le triangle en tracés constructibles, en particulier il s'agit de construire le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle comme intersection de deux cercles (arcs de cercle) à tracer. Les intersections des deux cercles sont alors les sommets de deux

triangles symétriques construits de part et d'autre du segment initial (Figure 3)



**Figure 3.** - Etapes de la construction du triangle à la règle et au compas

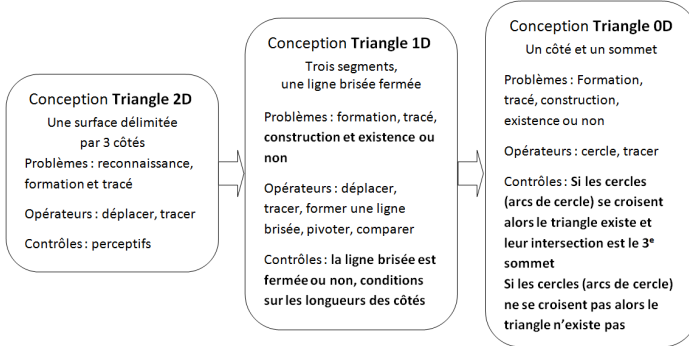
Nous identifions deux difficultés relatives à cette construction. D'une part, le compas n'est pas l'instrument qui produit la forme, le contour du triangle. Le compas produit des tracés auxiliaires, des cercles (arcs de cercle) n'appartenant pas au triangle et il doit être vu comme un instrument permettant de réaliser des égalités de longueurs. D'autre part, cette construction repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D obtenu comme intersection de deux lignes, difficilement appréhendé par les élèves de l'école primaire. Ceci nous conduit à caractériser des conceptions du triangle, et à définir une problématique d'évolution.

#### *Une problématique d'évolution des conceptions du triangle*

Notre idée est de définir, *a priori*, une problématique d'évolution des conceptions du triangle mettant en œuvre sa déconstruction dimensionnelle et amenant l'appréhension d'unités figurales 1D et d'unités figurales 0D du triangle. Il s'agit donc d'étudier la possibilité de faire exister une conception triangle-1D qui mobilise des opérateurs et des contrôles qui concernent des objets de dimension 1 et d'envisager un parcours d'évolution des conceptions du triangle ; chaque conception permet la résolution de nouveaux problèmes (Figure 4).

Dans notre étude, le seul système de représentation considéré dans la description des conceptions est le système graphique du dessin géométrique. Ce système de représentation intervient aussi bien dans l'environnement numérique que dans l'environnement papier-crayon. Les manipulations de représentations dynamiques d'objets mathématiques à l'interface d'un ordinateur pourraient aussi être comparées à des manipulations d'objets matériels dans l'espace sensible et appeler un autre système de représentations caractérisé par les gestes. Etudier le ou les systèmes de

représentation qui peuvent être associés à ces manipulations mériterait une étude approfondie que nous ne faisons pas ici.



**Figure 4.** - Parcours de conceptions du triangle

### *Une conception triangle-2D*

La conception triangle-2D permet de résoudre des problèmes de reconnaissance de triangles et de formation de triangles à l'aide de segments numériques manipulables. Elle permet aussi de résoudre des problèmes de tracés de triangles sans contrainte sur les longueurs. Cette conception triangle-2D engage des opérateurs « déplacer » pour résoudre des problèmes de formation de triangle ou des opérateurs « tracer » pour résoudre les problèmes de tracés de triangles sans contrainte sur les longueurs. Les contrôles relatifs à cette conception sont perceptifs : un triangle est une figure qui a trois côtés rectilignes. Ces côtés étant les bords inséparables de la surface qu'ils délimitent. Cette conception triangle-2D ne permet pas de résoudre le problème de la construction d'un triangle à la règle et au compas.

### *Une conception triangle-1D*

La conception triangle-1D permet de résoudre des problèmes de formation, de tracé, de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle. Les opérateurs engagés dans cette conception triangle-1D sont les opérateurs « déplacer » et « tracer » de la conception triangle-2D complétés par les opérateurs suivants : « former une ligne brisée » qui consiste à réaliser une ligne brisée de trois segments ; « pivoter » qui consiste à faire pivoter un segment afin de fermer la ligne brisée ; « comparer » qui consiste à comparer les longueurs. De nouveaux contrôles, sur l'existence ou non du triangle sont introduits. Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le

triangle existe ; si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas. Cela peut se formaliser : si la somme des deux petites longueurs est supérieure à la plus grande alors le triangle existe ; si la somme des deux petites longueurs est inférieure à la plus grande alors le triangle n'existe pas. Ces contrôles sur l'existence ou non du triangle sont inexistantes dans la conception triangle-2D. Le passage de la conception triangle-2D à la conception triangle1D constitue donc un apprentissage.

### *Conception triangle-0D*

Cette conception introduit l'identification du point 0D comme intersection de lignes, et permet de résoudre les mêmes problèmes que la conception triangle-1D. Le passage de la conception triangle-1D à la conception triangle-0D amène le cercle comme instrument pour identifier une distance. Cette conception introduit l'opérateur « cercle » qui consiste à tracer un cercle (arc de cercle). Des contrôles sur les cercles caractérisés comme ensemble de points équidistants d'un autre et sur leurs intersections qui déterminent ou non le troisième sommet du triangle sont engagés dans cette conception triangle-0D.

### *Enjeux pour l'élaboration d'une situation mobilisant un duo d'artefacts numérique et matériel*

Trois idées directrices soutiennent l'élaboration d'une situation : occasionner une déconstruction dimensionnelle du triangle, sans nécessairement aller jusqu'à l'appréhension des unités figurales 0D ; amener la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle ; caractériser le cercle objet mathématique comme instrument pour identifier une distance.

### *Occasionner une déconstruction dimensionnelle du triangle*

Notre premier enjeu est d'adopter une démarche qui tienne compte du développement cognitif des élèves. Mettre un accent particulier sur la déconstruction dimensionnelle du triangle sans nécessairement aller jusqu'aux unités figurales 0D, difficilement appréhendables par les élèves de l'école primaire est au cœur de cette démarche. Dans un premier temps, il nous paraît essentiel de réorganiser la perception du triangle à travers la mise en évidence d'unités figurales 1D. La situation doit permettre, à partir de l'appréhension globale du triangle, de mettre en œuvre une démarche analytique faisant apparaître des relations entre les côtés du triangle.

*Amener la pertinence géométrique d'utilisation du compas*

Au-delà de la procédure de tracé du triangle à l'aide du compas, il s'agit de faire prendre conscience à l'élève de la nécessité d'un nouvel instrument, autre que la règle graduée, pour réaliser cette construction. La situation doit donc provoquer une nouvelle genèse instrumentale du compas. Notre deuxième enjeu est donc d'amener le compas dans la construction du triangle en favorisant le lien entre le compas, les schèmes d'utilisation et les concepts mathématiques sous-jacents. Nous souhaitons que le duo d'artefacts et la situation qui le mobilise permettent de renforcer l'identification de la présence d'une longueur donnée entre les branches du compas et déclenche l'élaboration d'un instrument compas permettant de réaliser des égalités de longueurs.

*Caractériser le cercle, instrument pour identifier une distance*

Faire évoluer les connaissances des élèves sur le cercle est notre troisième enjeu. La situation doit donc aussi permettre d'amener le cercle, objet mathématique, comme instrument pour identifier une distance dans la construction du triangle.

*Utiliser la géométrie dynamique en complément et en interaction avec l'utilisation du compas matériel*

Notre objectif est de développer conjointement un artefact numérique articulé au compas matériel et une situation qui mobilise le duo d'artefacts. La technologie qui, dans cette recherche, permet de développer des environnements informatisés est le logiciel Cabri Elem. Ce logiciel est développé par la société Cabrilog et utilisé dans ce travail dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation. Cette technologie nous permet de créer des environnements de manipulation d'objets numériques déjà présents à l'écran ainsi que des environnements permettant à l'utilisateur d'effectuer des constructions en utilisant des outils de géométrie dynamique. Un environnement informatisé créé avec le logiciel Cabri Elem est organisé sous forme d'un cahier de plusieurs pages dans lequel l'utilisateur navigue librement.

**3. Méthodologie de recueil, de traitement et d'analyse des données**

La composition du duo s'est étalée sur trois années consécutives, au cours d'un processus itératif entre phases d'élaboration et phases d'expérimentation en classe. Les expérimentations se sont déroulées les trois années, dans la même école, dans les classes de



CM2 (dernière année de l'école primaire française) de deux des enseignantes du LéA. Ces expérimentations ont été effectuées en conditions réelles de classe c'est-à-dire que les consignes données aux élèves comme les synthèses entre les activités sur ordinateurs et les activités papier-crayon ont été conduites par les enseignantes qui avaient participé à l'élaboration de la situation. La chercheuse n'était là qu'en observatrice. Plus de 130 élèves ont testé le duo d'artefacts, numérique et matériel, au fil de son évolution sur les trois ans (38 élèves en 2014 ; 50 en 2015 et 44 en 2016). Ces expérimentations visaient à mettre à l'épreuve le duo d'artefacts et à le faire évoluer au fil du temps. La prise en compte des observations et des résultats des expérimentations, les comportements des élèves ainsi que les remarques des enseignantes ont alimenté le processus de composition du duo sur les trois ans.

Chaque année, l'expérimentation de la situation dans chaque classe s'est déroulée sur quatre séances non consécutives de manière à ce que la situation s'intègre à la progression d'enseignement des mathématiques des enseignantes. Dans chaque environnement, numérique et papier-crayon, les élèves réalisaient individuellement les tâches demandées.

Des captures vidéo du travail de chaque élève sur ordinateur ont été réalisées les trois années. Les deux premières années, seuls trois élèves par classe ont été filmés lors des activités papier-crayon. Toutes les productions papier ont été ramassées. Ces productions finales ne rendaient pas compte du déroulement des actions des élèves, des étapes intermédiaires mises en œuvre. Elles étaient donc insuffisantes pour extraire des informations pertinentes relativement à l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle et relativement aux instruments compas élaborés. La troisième année, trois élèves sur quatre ont été filmés lors des activités papiers-crayon.

Aucune transcription des captures vidéo n'a été faite. D'une part, les élèves travaillaient individuellement, en silence. D'autre part, pour notre analyse nous souhaitions d'abord observer les actions, les comportements des élèves, dans la réalisation des différentes tâches dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon. Quelques remarques d'élèves, qui pensaient à voix haute ou qui répondaient à une question de l'enseignante ont néanmoins été relevées pour leur pertinence relativement à notre analyse. L'activité discursive des élèves, considérée dans l'analyse, relève des réponses écrites aux questions posées dans différentes tâches.

C'est à partir des 34 productions d'élèves de la troisième année d'expérimentation, pour lesquels des captures vidéo dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon étaient disponibles, que nous avons mené notre analyse des effets du duo d'artefacts sur les apprentissages des élèves. Il s'agissait d'identifier les instruments élaborés ainsi que les conceptions du triangle engagées par les élèves. Nous avons limité l'étude des genèses instrumentales au processus d'instrumentation. En effet, l'instrumentalisation est un processus orienté vers l'artefact et la personnalisation de ce dernier alors que l'instrumentation est un processus dirigé vers le sujet et ses connaissances. L'étude du processus d'instrumentation et l'identification des schèmes nous donne donc assez d'éléments pour analyser les connaissances des élèves liées à l'émergence d'un instrument.

Notre analyse s'appuie sur l'élaboration théorique de la dualité instrument-conception proposée précédemment. Elle consiste, pour chacune des 34 productions, à étudier les opérateurs et les contrôles réellement engagés par les élèves pour caractériser, à partir de combinaisons d'opérateurs et de contrôles, les instruments élaborés et l'évolution des conceptions du triangle au cours de la situation. Grâce aux vidéos, les actions des élèves sont facilement identifiables et l'observation des opérateurs est donc relativement aisée. L'identification des contrôles est plus subtile car les contrôles ne produisent pas d'observables directs. Les contrôles sont le plus souvent identifiés par inférence. Dans notre analyse, ils sont déduits de l'engagement d'une action ou de son résultat ou de l'activité discursive des élèves.

#### UNE SITUATION QUI ALTERNE CAHIERS INFORMATISÉS ET TRACÉS PAPIER-CRAYON

La situation élaborée comprend quatre phases qui alternent activités dans un environnement de géométrie dynamique et activités papier-crayon. Notre enjeu est de provoquer l'évolution des conceptions du triangle-2D vers le triangle-1D et 0D, ainsi qu'une nouvelle genèse instrumentale du compas grâce à des actions sur les segments côtés du triangle, unités figurales 1D. Ainsi nous proposons des tâches qui dissocient les côtés du triangle de la surface qu'ils délimitent et qui permettent d'identifier des relations entre les côtés.

Le premier cahier informatisé amène les élèves à manipuler des segments numériques donnés, de longueurs fixes, pour former des

triangles ou constater que les trois segments donnés ne peuvent être les trois côtés d'un triangle. Dans la première activité papier-crayon il s'agit pour les élèves de mobiliser le compas matériel pour tracer des triangles dont les côtés sont donnés sous formes de segments tracés sur la feuille. Le second cahier informatisé a pour objectif d'amener les cercles sous-jacents à la construction du triangle. Par un jeu sur les outils de géométrie dynamique disponibles, le cercle devient l'instrument permettant de résoudre des problèmes d'existence ou non de triangles. La situation se termine par une deuxième activité papier-crayon mobilisant le compas matériel dans la construction de triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures.

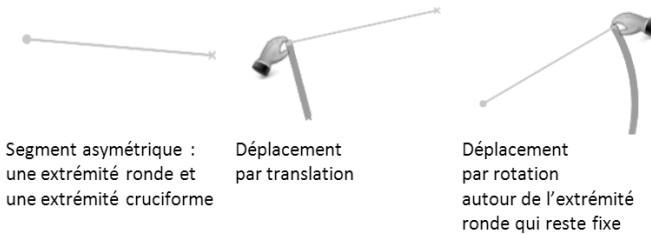
Quatre types de problèmes sont à résoudre au fil des quatre phases de la situation : des problèmes de formation de triangles, des problèmes de tracés de triangles, des problèmes de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle. S'intéresser à la construction d'un triangle de longueurs des côtés données amène à se poser la question de l'existence ou non du triangle. Afin de prendre en compte cette question dans la situation, les longueurs des segments proposées peuvent vérifier ou non l'inégalité triangulaire.

### **1. Des segments numériques d'apparence asymétrique**

Dans notre recherche, nous nous interrogeons sur la possibilité que des manipulations de représentations d'objets mathématiques à l'interface d'un ordinateur soient une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage de manipulations d'objets matériels à des tracés géométriques à l'aide d'instruments. Ainsi, même si le compas de géométrie dynamique est proposé par l'environnement numérique nous choisissons de développer un environnement de géométrie dynamique qui inclut une approche expérimentale basée sur des manipulations directes de représentations dynamiques de segments.

L'environnement numérique utilisé permet de contraindre deux déplacements différents pour un segment. C'est pourquoi les segments proposés dans le premier cahier informatisé sont asymétriques dans leur représentation à l'écran. Ainsi peut-on déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde, ou faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme (Figure 5). La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment. Ce double

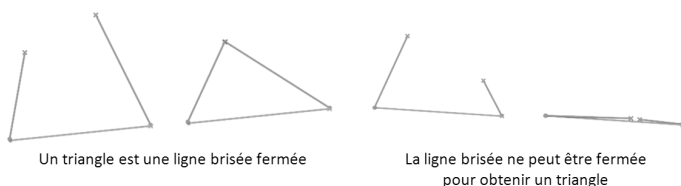
déplacement des segments participe à la dynamique de la situation et à la mise en place de stratégies porteuses de savoirs et de sens.



**Figure 5.** – Des segments asymétriques à l'écran pour un double déplacement : par translation ou par rotation

Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas amène la dissociation des deux déplacements, par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe, et induit la mise en valeur de la rotation indispensable pour former un triangle. Ceci n'est pas le cas avec des manipulations d'objets matériels comme des pailles ou des baguettes lors desquelles les deux déplacements sont réalisés conjointement. Cette dissociation des deux déplacements provoque donc la genèse instrumentale d'un « instrument déplacement par rotation pour faire pivoter un segment numérique autour d'une extrémité qui reste fixe ».

De plus cette dissociation des deux mouvements des segments induit une stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement numérique. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas discrédite la stratégie par ajustement qui consiste à positionner successivement trois segments et à les ajuster progressivement pour former le triangle. Les ajustements judicieux sont les ajustements par rotation qui conduisent à une stratégie efficace pour former un triangle : former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes ; faire pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée (Figure 6). Cette stratégie, que nous nommons la stratégie ligne brisée, amène à penser la ligne brisée que l'on ne peut fermer pour obtenir un triangle et donc l'inexistence du triangle (Figure 6).



**Figure 6.** – La stratégie ligne brisée pour former un triangle ou constater que le triangle n'existe pas

L'environnement numérique développé permet donc de créer un milieu dont les segments d'apparence asymétrique sont des éléments essentiels qui provoquent l'élaboration d'un « instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe » lequel permet la mise en œuvre d'une stratégie ligne brisée pour former un triangle ou constater que le triangle n'existe pas.

## 2. Un duo déplacement par rotation et compas matériel

Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas ne rend pas visibles les segments côtés du triangle. La technologie numérique permet de les rendre visibles dans le premier cahier informatisé. Dans l'environnement papier-crayon, il s'agit pour les élèves de poursuivre l'exploration du triangle à partir de ses trois côtés. C'est pour cette raison que sont intégrés dans le milieu constitué par la première activité papier-crayon les objets sur lesquels la stratégie ligne brisée fonctionne dans le cahier informatisé : la ligne brisée et les segments côtés. Les segments proposés sont soit disposés en ligne brisée soit parallèles les uns aux autres. Plusieurs configurations de trois segments sont proposées (Figure 7). Dans un souci de continuité avec les manipulations des segments dynamiques dans le cahier informatisé, la consigne est encore formulée en termes de segments et non en termes de longueurs. Dans chaque cas, la consigne est la même : « Peut-on obtenir un triangle avec les segments proposés ? Si oui, le tracer ». En prolongement du premier cahier informatisé, dans cette première activité papier-crayon, des triplets de longueurs vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres ne la vérifient pas. Pour réaliser ces tâches, une boîte à outils de géométrie contenant, un crayon, une règle graduée, une équerre et un compas, est disponible.

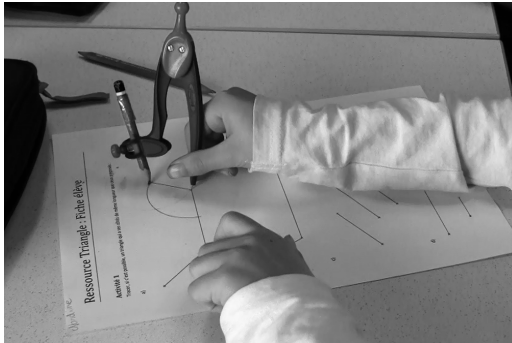
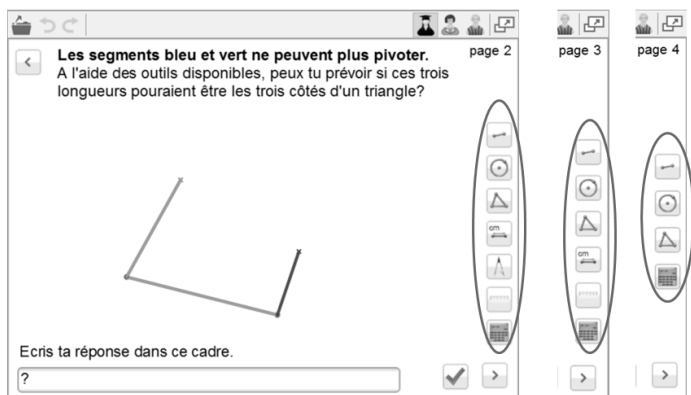


Figure 7. – Illustration de la première activité papier-crayon

### 3. Du compas matériel au cercle de la géométrie dynamique

Le retour dans l'environnement numérique constitué par le second cahier informatisé a pour objectif d'amener le cercle comme instrument pour identifier une distance dans la construction du triangle. La technologie numérique nous permet de mettre à la disposition de l'utilisateur certains outils de géométrie dynamique bien choisis. Nous utilisons cette opportunité pour contraindre l'utilisation de l'outil cercle dans les stratégies (Figure 8). Dans un premier temps, le compas de la géométrie dynamique, l'outil cercle ou l'outil longueur, permettent de résoudre les problèmes. Au fil des pages le compas de la géométrie dynamique et l'outil longueur disparaissent de la boîte à outils. Le cercle devient alors le seul outil pour résoudre les problèmes proposés. L'outil cercle est d'abord utilisé pour vérifier si une ligne brisée peut être le contour d'un triangle ou non. D'outil pour vérifier il devient ensuite outil pour produire ; il s'agit d'utiliser l'outil cercle pour déterminer le troisième sommet d'un triangle de longueurs des côtés données par leur mesure.



**Figure 8.** – Par un jeu sur les outils disponibles, le cercle devient le seul outil permettant la résolution des problèmes

La situation se termine par un retour dans l'environnement papier-crayon. La deuxième activité papier-crayon consiste à tracer si cela est possible, des triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures. Cette activité marque la fin de la situation et permet de faire un bilan des apprentissages menés à bien grâce à la mobilisation des artefacts numériques articulés à l'utilisation du compas matériel.

## ANALYSE ET DISCUSSION

Dans cette partie nous proposons une analyse des effets de la situation sur les apprentissages reposant sur 34 productions d'élèves pour lesquels nous avons des captures vidéo des quatre phases de la situation.

### 1. Des parcours d'instruments et de conceptions du triangle

Dans ce paragraphe nous montrons comment l'élaboration théorique de la dualité instrument-conception est un outil d'analyse systématique qui nous a permis de réaliser des parcours individuels d'instruments et de conceptions du triangle au fil des quatre phases de la situation pour chacun des 34 élèves. En effet, la dualité instrument-conception nous a permis de déterminer des observables, décrits à l'aide d'opérateurs et de contrôles, pour proposer une explication des actions des élèves en termes d'instruments et de conceptions.

L'analyse consiste à repérer les opérateurs et les contrôles effectivement engagés par les élèves dans la résolution de chaque problème dans chaque phase de la situation. L'examen des

opérateurs et des contrôles nous a alors permis de caractériser, pour chacun des 34 élèves, les stratégies mises en œuvre ainsi que les instruments élaborés et les conceptions du triangle engagées. Le tableau 1 illustre l'examen des opérateurs et des contrôles engagés par une élève dans le premier cahier informatisé.

Opérateurs et contrôles engagés par une élève dans le premier cahier informatisé					
Page	Opérateur ( $r$ )	Contrôle ( $\Sigma$ )	Stratégie	Instrument	Conception
1	r-translation r-rotation	$\Sigma$ -translation $\Sigma$ -rotation	Ajustement	I-déplacement-translation	triangle-2D
2	r-translation r-pivoter	$\Sigma$ -translation $\Sigma$ -extrémités $\Sigma$ -rotation $\Sigma$ -triangle	Ajustement	I-déplacement-translation I-déplacement-rotation pour pivoter un segment	triangle-2D
3	r-translation r-ligne brisée  r-pivoter	$\Sigma$ -translation $\Sigma$ -extrémités $\Sigma$ -ligne brisée $\Sigma$ -rotation $\Sigma$ -triangle	Ligne brisée	I-déplacement-translation I-déplacement-rotation pour pivoter un segment	triangle-1D ligne brisée
4	r-translation	« Non on peut pas savoir, ça ne tourne pas »			
5	r-translation r-ligne brisée  r-pivoter	$\Sigma$ -translation $\Sigma$ -extrémités $\Sigma$ -ligne brisée $\Sigma$ -rotation $\Sigma$ -triangle	Ligne brisée	I-déplacement-translation I-déplacement-rotation pour pivoter un segment	triangle-1D ligne brisée

**Tableau 1.-** Un exemple d'analyse pour une élève des instruments et des conceptions en jeu dans le premier cahier informatisé

On constate qu'au début l'élève déplace les segments numériques par translation (r-translation) et aimerait pouvoir les faire pivoter à partir du déplacement par rotation de chaque extrémité (r-rotation). Puis page 2, le double déplacement des segments par translation (r-translation) et par rotation en attrapant l'extrémité cruciforme (r-pivoter) est compris par l'élève. A partir de la page 3, cette élève passe par la formation d'une ligne brisée (r-ligne brisée + r-pivoter) pour former les triangles ou constater que les trois segments ne permettent pas de former un triangle. Ces observations nous ont permis de déduire, pour cette élève, l'élaboration d'un instrument déplacement par rotation pour faire pivoter un segment numérique ainsi qu'une conception triangle-1D vu comme une ligne brisée fermée.

L'examen des opérateurs et contrôles engagés dans chacune des quatre phases de la situation nous a conduit à produire, pour chacun des 34 élèves, quatre tableaux du même type que le tableau 1. Nous avons ainsi pu réaliser des parcours individuels d'instruments et de conceptions du triangle pour chacun des 34 élèves (Voltolini, 2017) (Figure 9). Cette analyse nous a permis de montrer que 31 élèves sur 34 ont réussi la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas. En outre nous avons pu identifier chez ces élèves l'élaboration



d'un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment associé à l'élaboration d'une conception triangle-1D vu comme une ligne brisée fermée.

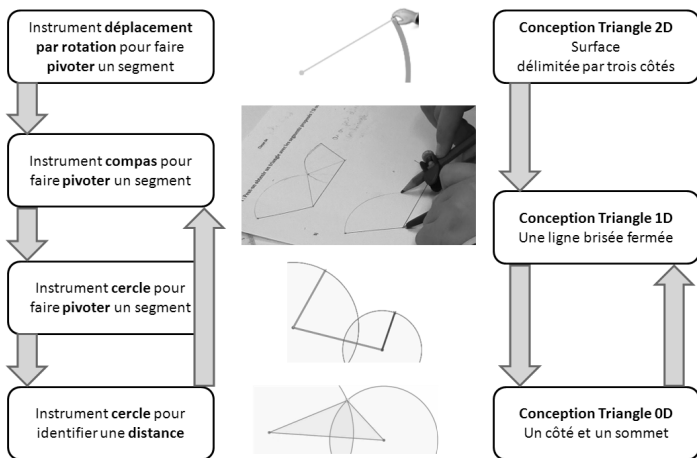
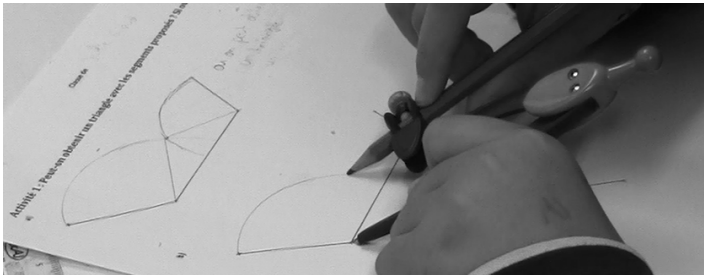


Figure 9. – Un exemple de parcours d'instruments et de conceptions du triangle d'une élève

## 2. Un nouvel instrument compas et une nouvelle conception du triangle

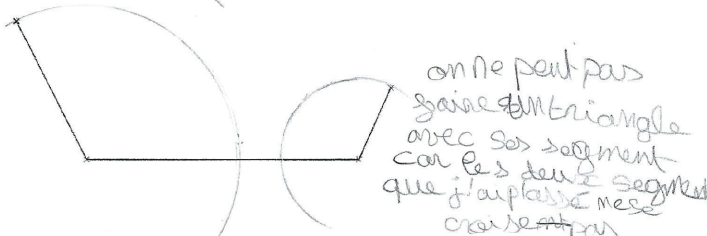
Dès la première page du premier cahier informatisé les élèves ont engagé des actions sur les segments numériques afin de les déplacer. Dans un premier temps, tous les élèves auraient voulu faire pivoter les deux extrémités de chaque segment. A plusieurs reprises, l'extrémité ronde du segment (qui ne permet pas de faire pivoter le segment autour de l'autre extrémité) est attrapée et le pointeur est déplacé dans un mouvement circulaire. Dans un second temps, le double déplacement des segments est appréhendé : l'élève comprend la nécessité d'un déplacement en deux temps puisque seule une action sur l'extrémité cruciforme permet de faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. La stratégie ligne brisée pour former un triangle, qui consiste à former une ligne brisée de trois segments, dont les extrémités sont cruciformes afin de pouvoir faire pivoter les segments extrêmes, est alors mise en œuvre par les élèves (Figure 6). Cette stratégie a été transposée dans l'environnement papier-crayon par 31 élèves sur 34. La stratégie ligne brisée, stratégie gagnante de l'environnement numérique, est encore une stratégie efficace pour construire un triangle dans l'envi-

ronnement papier-crayon. Tracer une ligne brisée constituée des trois segments puis faire pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas permet aux élèves de construire un triangle à la règle et au compas (Figure 10). Les captures vidéo nous ont permis de relever le discours de Luna : « *La ligne brisée ça nous aide parce qu'avant, on savait pas qu'il fallait utiliser le compas pour tracer un triangle* ».



**Figure 10.** - Un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment dans la construction du triangle

Cette stratégie, d'une part provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas pour faire pivoter un segment entre ses branches et d'autre part, permet aux élèves de conclure lorsque les longueurs proposées ne vérifient pas l'inégalité triangulaire (Figure 11). Cette stratégie est associée à une conception triangle-1D en tant que ligne brisée fermée qui inclut de nouveaux contrôles sur l'existence ou non du triangle.



**Figure 11.** – Un élève conclut à l'inexistence du triangle par la phrase : « *on ne peut pas faire un triangle avec ces segments car les deux segments que j'ai placé ne se croisent pas* »

### 3. Du compas au cercle pour identifier une distance

Dans le second cahier informatisé seuls 13 élèves sur 34 ont mobilisé l'outil cercle de manière appropriée pour déterminer si une ligne brisée peut être le contour d'un triangle et seulement 6 élèves ont réussi à utiliser le cercle à bon escient pour déterminer

le troisième sommet d'un triangle de longueurs des cotés données par leurs mesures. Dix autres élèves ont mobilisé l'outil cercle mais n'ont pas réussi à l'utiliser pour résoudre le problème. L'examen des opérateurs et des contrôles sur le même principe que le tableau 1 ne nous a pas permis de conclure relativement à des conceptions du cercle.

Dans la seconde activité papier-crayon, où il s'agit de construire, s'ils existent, des triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures, 26 élèves réalisent les constructions de triangles en passant par le tracé de la ligne brisée. Cinq élèves les réalisent sans le tracé de la ligne brisée. Ces 5 élèves déterminent le troisième sommet du triangle comme l'intersection de deux cercles (arcs de cercle).

#### 4. Discussion

*La ligne brisée pour provoquer un nouvel instrument compas et une conception triangle-1D*

Les expérimentations, en conditions réelles de classe, nous ont permis de mettre en évidence l'apport de l'artefact numérique du duo en situation. Ce duo est un exemple dans lequel des manipulations de représentations dynamiques de segments à l'interface d'un ordinateur constituent une aide, pour comprendre la construction du triangle à la règle et au compas.

La ligne brisée est l'élément de continuité du duo ; c'est elle qui va permettre de passer du déplacement d'un segment par rotation, dans l'environnement numérique, au compas matériel (Voltolini, 2014). Un nouvel instrument compas est élaboré par les élèves : le compas pour faire pivoter un segment (Figure 10) ; faire pivoter le compas revient à faire pivoter un segment (invisible) entre ses branches. Dans l'environnement numérique c'est le même segment qui se déplace et est visible tout au long du déplacement. Dans l'environnement papier-crayon le compas produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté. Le segment résultat du pivotement, de même longueur que le segment initial, doit donc être tracé.

Les deux artefacts du duo, le déplacement par rotation et le compas matériel, présentent des discontinuités au sens où l'un n'est pas une imitation de l'autre. Cependant, la mobilisation du compas matériel est corrélée au déplacement par rotation autour d'une extrémité d'un segment numérique. D'une part, le segment numérique asymétrique dans sa représentation à l'écran rappelle le compas matériel : une pointe sèche qui reste fixe et une mine

qui tourne. D'autre part, l'instrumentation du déplacement par rotation pour faire pivoter un segment numérique produit des schèmes d'utilisation qui peuvent s'étendre par assimilation et accommodation à des schèmes d'utilisation du compas matériel (Voltolini, 2018).

Notre choix de décrire les schèmes par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles nous donne les moyens de comparer un schème d'utilisation du pivotement d'un segment numérique et un schème d'utilisation du pivotement d'un segment à l'aide du compas matériel (Tableau 2). Des assimilations et des accommodations entre les schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre peuvent être mises en évidence, ce qui nous permet d'affirmer que l'articulation du déplacement par rotation d'un segment numérique avec le compas matériel définit bien un duo d'artefacts. Pour faire pivoter un segment, dans l'environnement numérique ou dans l'environnement papier-crayon, il faut distinguer les extrémités du segment ou les branches du compas puis il faut faire pivoter le segment ou le compas. L'utilisation du compas matériel nécessite des accommodations : il est essentiel de maintenir l'écartement du compas matériel fixe car la permanence des longueurs n'est pas automatique lors de l'utilisation du compas ; le compas produit une trace visible, trace de l'extrémité du segment qui pivote mais le segment initial ne pivotant pas il faut tracer le segment résultat du pivotement.

Schème pivoter un segment numérique	Schème pivoter un segment à l'aide du compas et d'une règle
Distinguer les deux extrémités du segment (contrôle) Attraper l'extrémité cruciforme (opérateur)	Distinguer les deux branches du compas (contrôle) Piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe, écarter les branches et poser la mine sur l'extrémité à pivoter (opérateur)
Déplacer par rotation le point extrémité (opérateur)	Pivoter le compas (opérateur) Contrôler que l'écartement reste fixe (contrôle) Produire une trace visible (opérateur)
Contrôler le déplacement par rotation du segment (contrôle)	Tracer le segment (opérateur) résultat du pivotement (contrôle)

**Tableau 2.-** Description des schèmes d'utilisation pour pivoter un segment numérique et pivoter un segment à l'aide du compas matériel

En outre, la stratégie ligne brisée qui consiste à passer par le tracé de la ligne brisée dans la construction du triangle à la règle et au

compas constitue une étape vers des éléments de dimension 1 dans la déconstruction dimensionnelle du triangle qui n'oblige pas, dans un premier temps, à appréhender des unités figurales 0D. En effet la stratégie ligne brisée conduit à faire coïncider des points, vus comme extrémités de segments, mais n'oblige pas à prendre conscience de la nécessité d'identifier un point pour déterminer les segments manquants, ni à comprendre que le point recherché est obtenu par l'intersection de deux lignes. Néanmoins, cette stratégie ligne brisée est porteuse d'apprentissages. Elle est associée à une conception triangle-1D, vu comme une ligne brisée fermée. Cette conception apporte une structure de contrôle nouvelle sur l'existence ou non du triangle par rapport à la conception triangle-2D ; elle permet de résoudre le problème de construction du triangle au compas (Figure 10) ainsi que le problème d'existence ou non du triangle (Figure 11). Notre analyse a mis en évidence qu'au moins 26 élèves sur 34 ont engagé cette conception triangle-1D vu comme une ligne brisée fermée. Les 5 élèves qui dans la seconde activité papier-crayon réalisent les constructions de triangles sans passer par le tracé de la ligne brisée ont engagé une conception triangle-0D au sens où ils ont identifié le point d'intersection des deux cercles (arc de cercle) au troisième sommet du triangle.

Le faible taux de progression du 1D au 0D pourrait vouloir dire que la ligne brisée introduit une difficulté. Au contraire, nous pensons que la ligne brisée reste sous jacente aux tracés et qu'elle induit l'identification du troisième sommet, unité figurale 0D, comme intersection de lignes. Les enseignantes du LéA, qui ont continué à faire faire des constructions de triangles à leurs élèves au-delà de nos expérimentations, nous ont fait part du fait qu'au fil des tracés, les élèves se rendaient compte de l'inutilité du tracé intermédiaire de la ligne brisée. Le troisième sommet du triangle était alors identifié comme point d'intersection des deux cercles (arcs de cercle).

#### *Du compas matériel au cercle pour identifier une distance : un saut de connaissances*

Lors de l'élaboration du second cahier informatisé, l'étude des schèmes d'utilisation du compas matériel, du compas de la géométrie dynamique et de l'outil cercle de la géométrie dynamique, nous laissait penser que des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation entre le compas matériel et l'outil cercle pourraient s'opérer (Voltolini, 2017 p.111). Or la mobilisation de l'outil cercle n'est pas aisée pour les

élèves. Les expérimentations nous ont révélé une différence notoire dans l'utilisation du compas et l'utilisation de l'outil cercle. La mobilisation du compas pour pivoter un segment (Figure 10) permet un contrôle visuel qui rappelle celui du segment numérique. La mobilisation de l'outil cercle ne permet plus aucun contrôle visuel ; elle relève de contrôles théoriques sur l'objet mathématique cercle. Dans la mobilisation de l'outil cercle il faut identifier où « poser » le centre du cercle et quel est son rayon. Ainsi la mobilisation pertinente de l'outil cercle nécessite une déconstruction dimensionnelle du cercle distinguant le rayon, unité figurale 1D, et le centre, unité figurale 0D, ainsi que leur relation. Or les tâches proposées dans le second cahier informatisé ne problématisent pas le cercle comme objet mathématique. Afin que le cercle devienne un instrument pour identifier une distance dans la construction du triangle à la règle et au compas, ou dans d'autres problèmes, un autre travail à propos du cercle nous paraît nécessaire.

#### *Un duo pensé a priori n'existe qu'en situation*

Cette recherche nous a permis de mettre en évidence qu'il était possible d'articuler les environnements numérique et papier-crayon dans une même situation et que cette articulation pouvait être fructueuse pour l'apprentissage. Dans notre cas l'articulation entre le déplacement par rotation et le compas matériel définit bien un duo d'artefacts. Mais il ressort aussi de notre étude qu'une articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel pensée *a priori* ne constitue pas nécessairement un duo. La mise à l'épreuve de l'expérimentation nous a conduit à dire que l'articulation entre le compas matériel et l'outil cercle de la géométrie dynamique ne définissait pas d'emblée un duo.

Aucun principe générique, aucun protocole fixe ne permet de composer à coup sûr un duo d'artefacts. Cependant, il nous semble que pour être efficace, la composition d'un duo ne peut être réalisée qu'au cours d'un processus itératif qui articule des phases d'élaboration et des phases d'expérimentation en classe. L'élaboration de telles situations est donc très intéressante mais relativement lourde.

Dans notre étude nous n'avons étudié que le cas des duos d'artefacts numérique et matériel. Mais le concept de duo d'artefacts pourrait s'étendre à des duos d'artefacts matériels ou des duos d'artefacts numériques. Des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation relatifs à deux

artefacts numériques ou deux artefacts matériels peuvent aussi s'opérer.

## CONCLUSION

L'objet de cette recherche était d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des activités papier-crayon pour l'apprentissage de la géométrie. Plus spécifiquement nous nous interrogeons sur la possibilité que des manipulations de représentations dynamiques d'objets mathématiques soient une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage de manipulations d'objets matériels à des tracés géométriques aux instruments. Pour répondre à cette interrogation nous avons introduit la notion de duo d'artefacts comme méthodologie pour élaborer des situations mobilisant conjointement un artefact numérique et un artefact matériel. Nous avons défini un duo d'artefacts comme l'articulation fructueuse pour l'apprentissage d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une situation didactique, provoquant des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un artefact à l'autre.

Afin d'étudier les processus d'apprentissage engagés par la mobilisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel, nous avons proposé une mise en cohérence de la notion d'instrument de Rabardel et de la notion de conceptions de Balacheff. L'élaboration théorique de la dualité instrument-conception permet de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument à partir d'indicateurs jouant le rôle d'observables interprétables en termes de connaissances.

Nous avons alors utilisé la dualité instrument-conception comme outil d'analyse pour identifier les effets d'un duo sur l'apprentissage des élèves. A partir du problème de la construction du triangle à la règle et au compas, nous avons composé un duo d'artefacts numérique et matériel, au cours d'un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs, alternant les phases d'élaboration et les phases d'expérimentation en conditions réelles de classe. Nous avons alors mis en évidence la pertinence de cette dualité instrument-conception pour identifier chez les élèves l'élaboration d'un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment associé à l'élaboration d'une conception triangle-1D vu comme une ligne brisée fermée. Le duo d'artefacts nous a ainsi permis de montrer que des manipulations de segments à l'interface d'un ordinateur pouvaient être une aide

pour amener la pertinence géométrique d'utilisation du compas dans la construction du triangle.

En outre nous avons aussi mis en évidence que l'articulation du compas matériel et du cercle de la géométrie dynamique dans la situation ne composait pas un duo d'artefacts. Ceci nous conduit à affirmer qu'un duo d'artefacts pensé *a priori* n'existe qu'en situation. Le processus itératif qui articule des phases d'élaboration et des phases d'expérimentation en classe nous paraît donc primordial à la composition d'un duo d'artefacts.

Cette recherche ouvre de nouvelles perspectives. Il serait intéressant de prolonger la réflexion sur la dualité instrument-conception en la mettant à l'épreuve d'autres duos d'artefacts. Des duos d'artefacts provoquant des conceptions 1D d'autres figures géométriques ainsi que des duos d'artefacts pour observer l'évolution des conceptions des élèves sur les objets élémentaires de la géométrie en relation avec les instruments qui permettent de les construire pourraient être envisagés.

#### BIBLIOGRAPHIE

- ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- ARTIGUE, M. (2008). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques, contenus et pratiques. *Actes du séminaire DGESCO Février 2007*.
- BALACHEFF, N. (1995a). Conception, connaissance et concept. In D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaire 1994-1995*, (pp. 219–244). Grenoble : IMAG.
- BALACHEFF, N. (1995b). Conception, propriété du système sujet/milieu. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VIIème École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 215–229). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.
- BALACHEFF, N. (2013). cK $\epsilon$ , a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2–15). Chicago, IL : University of Illinois at Chicago. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853856>
- BALACHEFF, N., & MARGOLINAS, C. (2005). cK $\epsilon$  : modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Actes de la XIIème École d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 1–32). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.



- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–55.
- DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7–27.
- GUEUDET, G., & POISARD, C. (2019). Design and use of curriculum resources for teachers and teacher educators: Example of the Chinese abacus at primary school. *International Journal of Educational Research*, 93, 68–78.
- HOYLES, C., & LAGRANGE, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics education and technology-Rethinking the terrain*. New York, NY: Springer.
- LABORDE, C., KYNIGOS, C., HOLLEBRANDS, K., STRAßER, R., GUTIERREZ, A., & BOERO, P. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.
- LABORDE, C., & LABORDE, J.-M. (2014). Dynamic and Tangible Representations in Mathematics Education. In S. Rezat, M. Hattermann & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education*. (pp. 187–202). New York, NY: Springer.
- MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM*, 45(7), 959–971.
- MEN. (2015). *Programmes d'enseignement de l'école maternelle*, BOEN spécial n°2 du 26 mars 2015.
- MEN. (2018). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4)*, BO n°30 du 26 juillet 2018.
- MOYER-PACKENHAM, P. S. (Ed.). (2016). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*. Cham, Switzerland : Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1>
- PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C., & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, 90, 5–41.
- POISARD, C. (2017). Introducing an old calculating instrument in a new technologies environment: a praxeological analysis of students' tasks using different registers. *ReSMITCE Review of Science, Mathematics and ICT Education* 11-2, 47-67. *ArXiv:1712.03827 [Math]*.
- RABARDEL, P. (1995a). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.
- RABARDEL, P. (1995b). Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. Outils pour le calcul et le traçage de courbes. *Le Mathématicien, le Physicien et le Psychologue CNDP-Die, mars*, 61–65.
- SINCLAIR, N., & BACCAGLINI-FRANCK, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In L. English & D. Kirshner (Eds.),

*Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition*, (pp. 662–686). New York : Taylor Francis/Routledge.

SINCLAIR, N., BARTOLINI BUSSI, M. G., DE VILLIERS, M., JONES, K., KORTENKAMP, U., LEUNG, A., & OWENS, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>

SOURY-LAVERGNE, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Ed.), *Espace Mathématique Francophone EMF 2006*. Sherbrooke, Quebec : Université de Sherbrooke.

SOURY-LAVERGNE, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques* HDR, ENS de Lyon, Lyon, France.

SOURY-LAVERGNE, S., & MASCHIETTO, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, 47(3), 435–449.

VADCARD, L. (2002). Conception de l'angle chez les élèves de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(1), 77–120.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133–170.

VOLTOLINI, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, 94, 25–46.

VOLTOLINI, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3*. Thèse de doctorat, ENS de Lyon, Lyon, France.

VOLTOLINI, A. (2018). Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*, (pp. 83–99). Cham, Switzerland : Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_5)



**RECHERCHES EN DIDACTIQUE  
DES MATHÉMATIQUES**

*VOL. 39*

ABONNEMENT/SUBSCRIPTION

(3 numéros par an)

**Tout abonnement commence avec le premier numéro de l'année en cours (Vol. 39, N°114/115/116).**

Particuliers / Individual Subscribers ..... 78 Euros  
Institutions / Institutional Subscribers ..... 108 Euros  
Air Mail ..... 15 Euros

NOM-PRENOM, ORGANISME, ADRESSE / *NAME-SURNAME, ORGANISATION, ADDRESS*

.....  
.....  
.....  
.....

**Ce bon est à retourner accompagné du règlement à :**

EDITIONS LA PENSÉE SAUVAGE  
12, place Notre-Dame, BP 141, F 38002 Grenoble Cedex – France.

**Règlement** : – par chèque, virement ou mandat à l'ordre des  
Editions La Pensée sauvage, CCP Grenoble 101500J  
– par carte :

Master Card       Visa       Eurocard

Carte N° ..... Date d'expiration .....

Signature

