



**HAL**  
open science

## “ Quelqu’un a-t-il signalé ce lapsus ? ” Sur quelques remarques de Cartan lisant Brunschvicg

Emmylou Haffner

### ► To cite this version:

Emmylou Haffner. “ Quelqu’un a-t-il signalé ce lapsus ? ” Sur quelques remarques de Cartan lisant Brunschvicg. Pierre Edouard Bour; Manuel Rebuschi; Laurent Rollet. *Sciences, Circulations, Révolutions Festschrift pour Philippe Nabonnand*, 50, College Publications, pp.415-430, 2023, Tributes, 978-1-84890-425-5. hal-04352657

**HAL Id: hal-04352657**

**<https://hal.science/hal-04352657>**

Submitted on 16 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# « Quelqu'un a-t-il signalé ce lapsus ? » Sur quelques remarques de Cartan lisant Brunschvicg

EMMYLOU HAFFNER

---

## 1 Introduction

Le fonds d'archives d'Élie Cartan, conservé à l'Académie des Sciences<sup>1</sup>, contient (entre autres) soixante cahiers dans lesquels Cartan a pris de nombreuses notes (de cours, de recherche, de lecture...) tout au long de sa carrière<sup>2</sup>. Ces cahiers de notes sont un matériau d'une richesse incroyable. Ils permettent d'observer Cartan au travail, de lire les réflexions menées derrière et à côté de ses publications, d'entrer dans son atelier de travail. L'un des nombreux points intéressants est la possibilité d'observer certains aspects de son travail qui n'ont jamais passé l'étape de la publication (et parfois n'étaient pas destinés à la passer), parmi lesquelles ses notes de lecture. Cartan était un lecteur actif : il prenait des notes, souvent détaillées, allant parfois jusqu'à refaire les calculs à sa manière. Et dans ces notes de lecture, il y a celles qui peuvent paraître surprenantes, comme Cartan lecteur de philosophie. Deux cas sont particulièrement frappants dans le fonds : le cahier 1-15b qui contient en grande majorité des notes sur « la pédagogie et la philosophie », avec de longues notes sur la philosophie et la pédagogie de Herbart rédigées entre 1899 et 1902<sup>3</sup>. Le second, qui sera l'objet de cet article, concerne *Les Étapes de la philosophie mathématique* de Léon Brunschvicg : dans le cahier 1-52, en décembre 1945, Cartan a identifié ce qu'il appelle un « lapsus » dans la

---

1. Fonds 38J. L'inventaire est lisible à l'adresse suivante : [https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/fonds\\_pdf/Fonds\\_Cartan.pdf](https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/fonds_pdf/Fonds_Cartan.pdf). Nous reproduisons des extraits de ces archives avec l'autorisation de l'Académie des Sciences

2. Un certain nombre d'années sont malheureusement manquantes dans le fonds. Les cahiers sont consultables sur le site <http://eliecartanpapers.ahp-numerique.fr/>. Je me permets de renvoyer à (Haffner 2017) pour une cartographie des cahiers de Cartan.

3. Certaines pages sur la pédagogie à l'école primaire semblent ne pas être de la main de Cartan, mais celles sur Herbart le sont très certainement.

définition des parallèles donnée par Brunschvicg – une définition des parallèles par translation. Il montre que cette définition ne fonctionne pas en géométrie non euclidienne, et développe quelques considérations autour de ces idées. Si ces quelques pages peuvent sembler anecdotiques, elles montrent toutefois comment Cartan lecteur réintérait ses lectures dans son propre cadre de pensée. Elles rencontrent aussi, incidemment, plusieurs des intérêts de Philippe Nabonnand : non seulement Cartan et la géométrie, mais aussi l'histoire de l'enseignement, et même Poincaré.

Je commencerai par donner la critique que Cartan fait de la définition des parallèles de Brunschvicg. Je proposerai ensuite de considérer si cette critique, bien que valide, est effectivement pertinente dans le contexte philosophique dans lequel la définition est donnée par Brunschvicg. Cette définition étant, en fait, empruntée à Carlo Bourlet, je la considérerai également dans le contexte pédagogique dans lequel elle apparaît initialement. Je reviendrai ensuite aux notes de Cartan, qui prend visiblement au sérieux la question des parallèles et des déplacements dans la géométrie hyperbolique. En fin d'article, je propose une transcription semi-diplomatique de ces notes, en reproduisant également les dessins.

## 2 L'objection de Cartan

Les pages de notes de Cartan sont datées du 1<sup>er</sup> décembre 1945. Cartan revient sur la définition des parallèles que propose Brunschvicg dans (Brunschvicg 1912, p. 506) :

*(Les Étapes de la philosophie mathématique, p. 506, 1912)*

« Deux droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles si ce sont les deux positions successives d'une même droite dans un déplacement de translation rectiligne. »

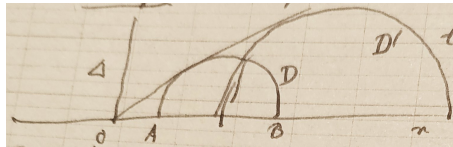
(Cartan 1–52, p. 193)

L'objection de Cartan tient en ces quelques mots :

L'auteur oublie de se demander si ces deux droites ne se rencontrent pas car il s'agit d'un déplacement de translation le long d'une droite donnée  $\Delta$ . Or en géométrie non euclidienne, si la droite  $D$  est non sécante par rapport à  $\Delta$ ,  $D$  et  $D'$  se rencontrent.

Il continue en donnant un premier exemple :

Exemple. Le demi-plan de Poincaré<sup>4</sup>,  $\Delta$  a pour équation  $x = 0$ , la translation le long de  $\Delta$  est  $x' = kx, y' = ky$ .



Les deux droites parallèles  $D$  et  $D'$  (au sens de Brunschvicg) se coupent si l'amplitude de la translation [est]  $\log k < \left(k < \frac{OB}{OA}\right)$ .

Quelqu'un a-t-il signalé ce lapsus ?

(Cartan 1-52, p. 193)

Dans ces quelques pages de notes, les diagrammes ponctuent chaque remarque de Cartan et sont même essentiels à son argument<sup>5</sup>. Ceux-ci sont pourtant assez rares dans les cahiers de brouillon de Cartan, malgré la grande présence de la géométrie.

Avant de poursuivre sur les notes de Cartan, considérons de plus près la définition qu'il critique, et le contexte dans laquelle elle apparaît. Car en replaçant cette définition dans son contexte d'origine, on peut questionner la pertinence du reproche de Cartan.

### 3 Quelques remarques sur la « définition des parallèles de Brunschvicg »

L'utilisation du mot « lapsus » par Cartan pour désigner le défaut identifié dans la définition des parallèles de Brunschvicg n'est sans doute pas innocente : Cartan ne semble pas mettre en doute les connaissances mathématiques de Brunschvicg. La recension très élogieuse qu'écrit Adolphe Bühl des *Étapes de la philosophie mathématiques* (1913) se termine d'ailleurs en soulignant que « M. Brunschvicg montre une connaissance très réelle des mathématiques » (Bühl 1913, p. 95).

#### 3.1 Le contexte de la définition des parallèles dans *Les Étapes de la philosophie mathématique*

L'objection de Cartan semble faire peu de cas de la place de la définition des parallèles dans le livre de Brunschvicg. Celle-ci apparaît dans le chapitre XXII

4. Le modèle du demi-plan de Poincaré est introduit dans (Poincaré 1882). Il est formé par les nombres complexes de partie imaginaire strictement positive  $\mathbb{H} = \{(x, y) | y > 0; x, y \in \mathbb{R}\}$  et donne un modèle pour la géométrie hyperbolique (en dimension 2). Les droites  $y$  sont tout « cercle qui a son centre sur  $x$  » (Poincaré 1882, p. 8). Des géodésiques sont parallèles si elles ne se rencontrent pas. Le demi-plan de Poincaré était certainement connu de tous les auteurs que nous citerons ci-dessous – d'autant qu'ils considèrent tous, de divers points de vues, Poincaré comme une référence première de leurs travaux.

5. Nous en reproduisons l'ensemble en fin d'article.

« Les racines de la vérité géométrique » du dernier livre de l'ouvrage, dans une première section intitulée « Création de l'espace euclidien ». Troisième chapitre du Livre VII « L'intelligence mathématique et la vérité », dans lequel Brunschvicg « expose ses propres idées » (Boutroux 1913, p. 122) après avoir analysé successivement plusieurs courants de philosophie des mathématiques, ce chapitre cherche à remonter aux origines de la géométrie, ici la géométrie euclidienne, la « géométrie métrique plane » (Brunschvicg 1912, p. 501)<sup>6</sup>. La finalité du chapitre sur la vérité géométrique est donc présentée par Brunschvicg comme étant :

de suivre, dès son point d'attache avec la réalité, le mouvement spontané de l'intelligence qui a créé l'être spatial, et de définir entre le monde abstrait de la logique et l'univers concret de la physique la place qui appartient à l'objet de la géométrie. (Brunschvicg 1912, p. 498)

La création de l'espace euclidien est ainsi liée à la perception « effective de l'espace » qui ne peut être autre « que celle des corps qui le remplissent (...) en particulier des sensations visuelles et tactiles » (Brunschvicg 1912, p. 498)<sup>7</sup>.

Aux « racines » de la géométrie, précédant à la formation d'une pensée géométrique abstraite, se trouve le dessin :

Parmi les pratiques manifestant cette pensée naissante de la géométrie (et nous entendons ici la géométrie métrique plane), la plus significative nous paraît être la pratique du dessin, dont nous savons d'ailleurs qu'elle remonte aux époques les plus reculées que la préhistoire peut éclairer. (Brunschvicg 1912, p. 501).

Et en particulier, « l'opération élémentaire qui doit fournir l'image la plus simple est le trait » (Brunschvicg 1912, p. 503). Ainsi, par exemple, la définition de la droite est présentée de la manière suivante :

Dans l'établissement des réalités initiales auxquelles se suspend le travail du savant, le principe de raison s'exerce toujours sous forme

---

6. Rappelons que Brunschvicg adopte la méthode historique qui deviendra le socle commun de l'épistémologie française, que pour lui c'est par l'histoire des mathématiques que la philosophie peut « dégager le rythme propre de l'intelligence dans la production et dans la composition des idées, dans l'unification du savoir scientifique » (Brunschvicg 1912, p. 537). C'est une histoire qui, comme chez son étudiant Jean Cavaillès, « détecte la nécessité interne par laquelle la succession apparaît comme un "complexe organique" d'enchaînements rationnels » (Benis Sinaceur 2013, p. 141)

7. Rappelons qu'à la fin du XIX<sup>e</sup> et au début du XX<sup>e</sup> siècle se sont développées de nombreuses réflexions sur les liens entre l'espace sensible (un espace continu, infini, homogène, isotrope, euclidien et à trois dimensions) et la conception de l'espace géométrique, que Brunschvicg semble ici tenir pour acquises – c'est notamment le cas de Poincaré (1902), que Brunschvicg cite parmi ses sources (Brunschvicg 1912, p. vii). Il parle d'espace géométrique, lorsqu'il aborde le « problème non euclidien », lequel nous « contraint d'admettre la relativité réciproque de la raison et de l'expérience » (Brunschvicg 1912, p. 515).

négative ; à l'expérience est réservé le rôle positif. Que, dès le début de la spéculation géométrique, l'expérience soit intervenue d'une façon décisive, c'est ce qu'atteste la définition de la droite conservée dans le *Parménide* de Platon : « On appelle droite, la ligne dont le milieu est placé sur le trajet entre les deux extrémités. » Cette définition n'est pas l'invention ingénieuse d'un théoricien ; elle se réfère à la pratique. (Brunschvicg 1912, p. 504)

L'étape suivante dans la constitution de l'espace, écrit Brunshvicg, est l'introduction du mouvement, et en particulier des rotations et des translations. Pour les parallèles, Brunshvicg propose de « conférer un caractère positif à la notion de parallèles, en substituant à l'image des lignes parallèles l'acte générateur du parallélisme lui-même » (Brunshvicg 1912, p. 506). Pour définir les parallèles, Brunshvicg cite alors longuement Carlo Bourlet (1907) – ce que Cartan ne semble pas avoir remarqué :

Soit  $P$  un plan fixe, appelé *plan de glissement* et  $D$  une droite fixe de ce plan que nous nommerons *glissière fixe*. Soit, d'autre part  $p$ , un plan mobile et  $d$  une droite de ce plan mobile, que nous appellerons *glissière mobile*. Si l'on place le plan  $p$  sur le plan  $P$  de façon que  $d$  coïncide avec  $D$ , on pourra faire glisser le plan mobile  $p$  sur le plan fixe  $P$ , de telle sorte que la *glissière mobile*  $d$  glisse sur la *glissière fixe*  $D$ . Tout point lié invariablement au plan mobile  $p$  sera entraîné avec lui et sera animé d'un mouvement que nous nommerons *mouvement de translation rectiligne*. Nous avons donc bien défini de la sorte le déplacement de translation sans faire appel à la notion de parallélisme et en ne supposant au plan et à la droite que des propriétés qui sont admises dans n'importe quelle géométrie élémentaire. **Nous dirons alors que deux droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles si ce sont les deux positions successives d'une même droite dans un déplacement de translation rectiligne.** Rien n'est plus facile que de représenter cela aux enfants sous une forme plus concrète. Le plan  $P$  c'est la planche à dessin, la droite  $D$  c'est le bord de la règle maintenue à plat sur la planche, le plan  $p$  est le plan d'une équerre, la droite  $d$  est le bord de cette équerre qui glisse le long de la règle. (Brunshvicg 1912, p. 506, italiques dans l'original, en gras la phase citée par Cartan)

Je reviendrai, dans le paragraphe suivant, sur cette citation en tant que citation de Bourlet.

Dans un tel contexte, il semble relativement probable que le « lapsus » de Brunshvicg n'en soit pas un<sup>8</sup>. Il semble s'agir, plutôt, d'un choix visant à déplier ce que l'auteur considère comme les *origines*, les premières étapes de la

8. Notons, d'ailleurs, qu'il aborde les géométries non euclidiennes dans le chapitre XIV « Transformation des bases scientifiques » (Brunshvicg 1912, p. 310–325) et revient sur ces

géométrie, et en particulier le lien entre l'élaboration intellectuelle abstraite et l'expérience. L'utilisation du texte de Bourlet semble rapprocher, ici, le développement conceptuel du processus d'appréhension et compréhension de la notion de parallèle par les jeunes élèves<sup>9</sup>. Brunschvicg place une définition 'intuitive' des parallèles aux racines de la géométrie, qui prendra, ensuite, une forme logique avec la définition euclidienne. Il étudie ensuite les évolutions, à travers l'histoire, de la géométrie, et cherche à « préciser quelle est la nature de cette vérité [géométrique], quel est le sens de la connexion qui se manifeste dans la géométrie classique entre l'expérience et la raison » (Brunschvicg 1912, p. 510), en l'analysant, notamment dans les géométries non euclidiennes. Pour autant, il ne considère pas l'adéquation aux géométries non euclidiennes de cette définition qu'il pose aux racines de la vérité géométrique. Sans doute l'étape « d'élaboration intellectuelle » donnant la définition euclidienne « logique » des parallèles disqualifie-t-elle cette question.

D'un point de vue épistémologique, un reproche immédiat qui pourrait être fait à Brunschvicg est celui d'avoir pris comme base une définition qu'il faudra abandonner lorsque l'on souhaitera une définition générale (pour toutes les géométries) du concept de parallèle, puisqu'elle n'est pas valide pour les géométries non euclidiennes. Une telle définition temporaire, même si elle peut être intuitivement plus facile à comprendre, peut être considérée comme ne permettant ni de saisir le sens général du concept, ni même d'en comprendre les propriétés permanentes. Le texte de Cartan est trop elliptique pour affirmer que c'est ce qu'il avait en tête, et je n'ai pas connaissance de prises de positions de sa part sur des questions similaires. Cependant, une telle critique ne serait pas inattendue.

### 3.2 D'où vient vraiment cette définition ?

Revenons sur la citation de Carlo Bourlet utilisée par Brunschvicg pour définir les parallèles<sup>10</sup>. Le texte dont est extraite la citation qu'utilise Brunschvicg est un bulletin de la Société Française de Philosophie de 1907 dédié à l'enseignement de la géométrie. Bourlet souhaite y montrer que

contrairement à ce que l'on croit souvent, une Géométrie basée sur la définition des parallèles par la translation et sur la notion de *groupe de déplacement* suivant les idées de Sophus Lie, peut être aussi rigoureuse que la Géométrie classique actuellement en usage, qu'elle

---

questions dans la section B « La vérité de la géométrie euclidienne » (Brunschvicg 1912, p. 310–324) du chapitre XXII que nous venons d'évoquer.

9. Je reviendrai au prochain paragraphe sur le texte de Bourlet et le rapport aux idées de Poincaré, que le lecteur aura peut-être devinées être assez proches (du moins sur la question de la géométrie comme étude des groupes de déplacements, et sur le rôle de l'intuition dans la pédagogie).

10. Je mentionne, en passant, que Cartan avait suivi certains cours de Bourlet, à l'École normale supérieure, comme nous en informe le catalogue des archives de l'Académie des Sciences.

n'est ni plus ni moins expérimentale que cette dernière, qu'elle est plus *naturelle*, et qu'elle aura en outre l'avantage de préparer les élèves à l'étude de la Géométrie supérieure moderne. (Bourlet 1907, p. 225)

Les réflexions de Bourlet se situent dans la droite ligne de la réforme de 1902<sup>11</sup>, dont il a été un promoteur, et qui, pour les mathématiques, insistait sur une approche expérimentale, concrète. Pour la géométrie, en particulier, il s'agissait de mettre en place les notions de base en se fondant sur le mouvement et, pour Bourlet, sur la géométrie conçue comme l'étude des groupes de déplacements. Ainsi, en premier cycle la géométrie devait faire « un appel constant à la notion de mouvement » et notamment définir le parallélisme en lien avec « la notion expérimentale de translation ». Au second cycle, la forme « logique » de la géométrie était introduite, suivant le modèle des *Éléments* d'Euclide. Bourlet expose, dans ce texte, comment il considère « possible de concilier les idées nouvelles avec la logique et l'unité dans l'enseignement élémentaire de la géométrie » (Bourlet 1907, p. 227)<sup>12</sup>.

L'idée de baser la définition des parallèles sur la translation n'est pas nouvelle, puisqu'elle se trouvait déjà chez Méray<sup>13</sup>. Bourlet, par ailleurs, invoque à plusieurs reprises Poincaré, et son affirmation récurrente que « la géométrie est l'étude des propriétés du groupe des déplacements ». Il va même jusqu'à se placer sous le patronage de Poincaré<sup>14</sup> :

Et si mes affirmations et le court exposé qui va suivre ne suffisaient pas à vous convaincre, je me retrancherais derrière l'autorité de mon éminent maître M. Henri Poincaré qui m'a écrit à propos de cette méthode : « Je ne doute pas qu'on n'en reconnaisse les avantages quand on l'aura loyalement appliquée. » (Bourlet 1907, p. 225)

11. Sur cette réforme, on pourra consulter (Belhoste 1990, Bkouche 1991, Belhoste *et al.* 1996, Gispert *et al.* 2007, Gispert 2008, Barbazo 2017), ainsi que (Nabonnand 2007).

12. Bourlet publie, l'année suivante, un manuel de géométrie dans lequel il applique cette approche (Bourlet 1906-1908).

13. « Dans son essence générale, le parallélisme de deux droites, ou d'une droite et d'un plan, ou de deux plans, est une position relative des plus remarquables, consistant en ce que, dans chaque cas, l'une des figures considérées peut être appliquée sur l'autre par quelque translation choisie convenablement ; on dit alors que les deux figures sont parallèles » (Méray 1874, p. 20–21).

Il est probable que la critique de Cartan n'aurait pas beaucoup affecté Méray, puisque celui-ci considérait la géométrie non euclidienne comme une « une fantaisie de l'imagination mathématique » (Méray 1905, p. xi) cité dans (Dugac 1970, p. 348).

14. Notons par ailleurs que parmi les discutants à cette séance de la *Société Française de Philosophie* se trouve Émile Borel, qui est, dans l'ensemble d'accord avec Bourlet. Borel avait aussi été un acteur important de la réforme, voyez par exemple sa conférence de 1904 au Musée pédagogique (Borel 1904). Dans (Borel & Deltheil 1931), il proposera de remplacer la définition euclidienne des parallèles par

deux droites sont parallèles lorsqu'on peut les faire coïncider par une translation. (Borel & Deltheil 1931, p. 16)



Un argument similaire se trouve d'ailleurs dans certains écrits de Poincaré, notamment dans « Les définitions générales en mathématiques », texte tiré d'une conférence prononcée en 1904 au Musée pédagogique dans le cadre de la mise en place de la réforme de 1902 :

Devons-nous conserver la définition classique des parallèles et dire qu'on appelle ainsi deux droites qui, situées dans le même plan, ne se rencontrent pas quelque loin qu'on les prolonge ? Non, parce que cette définition est négative, parce qu'elle est invérifiable par l'expérience et ne saurait en conséquence être regardée comme une donnée immédiate de l'intuition. Non, surtout, parce qu'elle est totalement étrangère à la notion de groupe, à la considération du mouvement des corps solides qui est, comme je l'ai dit, la véritable source de la géométrie. Ne vaudrait-il pas mieux définir d'abord la translation rectiligne d'une figure invariable, comme un mouvement où tous les points de cette figure ont des trajectoires rectilignes ; montrer qu'une semblable translation est possible en faisant glisser une équerre sur une règle ? De cette constatation expérimentale, érigée en axiome, il serait aisé de faire sortir la notion de parallèle et le postulatum d'Euclide lui-même. (Poincaré 1904, p. 274)<sup>15</sup>

Poincaré rattache cette approche à l'utilisation de l'intuition mathématique, lien fondamental des mathématiques au réel, qualité mathématique essentielle et indispensable même pour le pédagogue.

Les géométries non euclidiennes ne sont jamais évoquées par les auteurs, dans ce contexte. Est-ce étonnant, d'ailleurs, lorsqu'il s'agit d'enseigner en premier cycle du secondaire (et qu'une bonne définition est, dit Poincaré, une définition « comprise par les élèves ») ? Reste qu'il est difficile de savoir si le « lapsus » identifié par Cartan dans la définition était intentionnellement ignoré car hors de propos, ou aurait pu contre toute attente avoir échappé même à Poincaré.

#### 4 Quelques réflexions supplémentaires de Cartan sur le mouvement et les parallèles (dans la géométrie non euclidienne)

Revenons au texte de Cartan. Après avoir pointé le « lapsus » de la définition de Bourlet-Brunschvicg, il s'attache à prouver le théorème suivant :

Deux droites quelconques peuvent toujours être transportées l'une sur l'autre par une translation le long d'une droite correctement choisie. (Cartan 1-52, p. 193)

Il montre tout d'abord que « cela revient à dire que étant donnés 2 couples de nombres réels  $(a, b)$   $(a', b')$ , il existe toujours une homographie de points

15. On pourra également consulter (Gispert 2013).

doubles réels transformant  $a$  en  $a'$  et  $b$  en  $b'$  »<sup>16</sup>. Il souligne l'existence d'une « autre famille de solutions pour lesquelles  $a \rightarrow b'$ ,  $b \rightarrow a'$  ».

Si on prend l'image projective de la géométrie non euclidienne, la translation le long de la glissière amène  $a$  en  $a'$ ,  $b$  en  $b'$  ou bien  $a$  en  $b'$  et  $b$  en  $a'$ . (Cartan 1-52, p. 193)

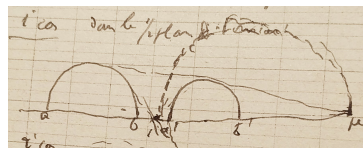
Il considère ensuite deux exemples<sup>17</sup>, qui l'amènent à la conclusion :

Conclusion. Deux droites orientées sont parallèles par rapport à une infinité de glissières qui : ou bien passent par un point fixe ou bien sont perpendiculaires à une droite fixe. (Cartan 1-52, p. 195)

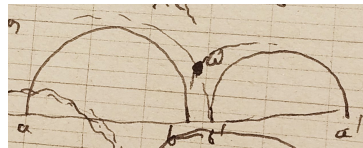
Cartan prend donc au sérieux la possibilité de caractériser les parallèles par le déplacement, mais plutôt qu'une définition, il en fait un théorème.

Deux pages plus loin, Cartan revient sur ces questions pour mieux caractériser les glissières. En partant des droites orientées  $\vec{ab}$  et  $\vec{a'b'}$  (la seconde se déduisant « par glissement le long d'une glissière  $x\mu$  » de la première), il observe qu'il y a trois cas :

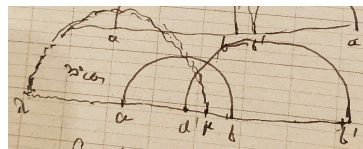
- Si l'ordre des points est  $aba'b'$ , les glissières sont les perpendiculaires à la droite  $\lambda\mu$  :



- Si l'ordre est  $abb'a'$ , les glissières sont toutes les droites passant par  $\omega$ .



- Si les deux droites se coupent, les glissières sont encore les perpendiculaires à une droite fixe  $\lambda\mu$ .



16. La preuve que donne Cartan est reproduite dans la transcription ci-après.

17. Voyez la transcription ci-dessous.

Après quelques considérations supplémentaires reposant essentiellement sur des dessins, il conclut :

les glissières passent par un point fixe si les 2 segments  $ab'$  et  $ba'$  empiètent l'un sur l'autre. Dans le cas contraire, les glissières sont les perpendiculaires à une droite fixe. (Cartan 1-52, p. 197)

## 5 Transcription semi-diplomatique des notes de Cartan<sup>18</sup>

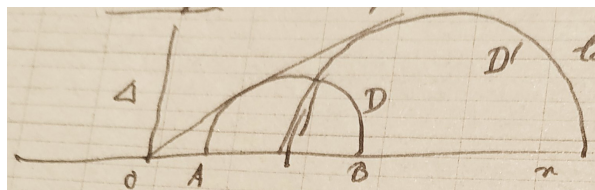
[Page 193]

1-12-45 La définition des parallèles de Brunschvicg

(*Les Étapes de la philosophie mathématique*, 1912, p. 506)

« Deux droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles si ce sont les deux positions successives d'une même droite dans un déplacement de translation rectiligne. »

L'auteur oublie de se demander si ces deux droites ne se rencontrent pas car il s'agit d'un déplacement de translation le long d'une droite donnée  $\Delta$ . Or en géométrie non euclidienne, si la droite  $D$  est non sécante par rapport à  $\Delta$ ,  $D$  et  $D'$  se rencontrent.



Exemple. Le demi-plan de Poincaré.  $\Delta$  a pour équation  $x = 0$ , la translation le long de  $\Delta$  est  $x' = kx$ ,  $y' = ky$ . Les deux droites parallèles  $D$  et  $D'$  (au sens de Brunschvicg) se coupent

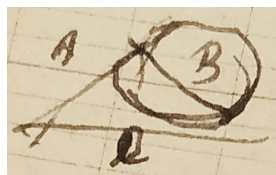
si l'amplitude de la translation [est]  $\log k < (k < \frac{OB}{OA})$ .

Quelqu'un a-t-il signalé ce lapsus ?

Théorème. Deux droites quelconques peuvent toujours être transportées l'une sur l'autre par une translation le long d'une droite correctement choisie. Cela revient à dire que étant donnés 2 couples de nombres réels  $(a, b)$   $(a', b')$ , il existe toujours une homographie de points doubles réels transformant  $a$  en  $a'$  et  $b$  en  $b'$ .

En effet, soient  $Axx' + B(x + x') + C = D(xx')$  l'équation de l'homographie on a

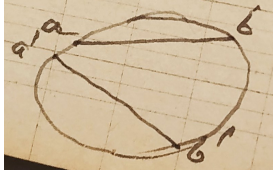
$$(b - b')[Aaa' + B(a + a') + C] - (a - a')(Abb' + B(b + b') + C)$$



Si l'on regarde  $A, B, C$  comme les coordonnées d'un point, ce point est assujéti à [illisible] une droite. Or cette droite [mot raturé illisible] les points extérieurs (conique  $B^2 - AC = 0$ ). Or pour un point extérieur, on a  $B^2 - AC > 0$ . CQFD.

18. Nous avons complété les abréviations de Cartan et modifié légèrement la mise en page des calculs pour des raisons d'impression.

Remarque. Il y a une autre famille de solutions pour lesquelles  $a \rightarrow b'$ ,  $b \rightarrow a'$ .

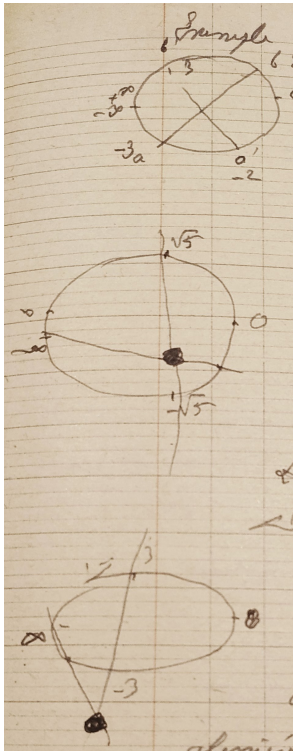


Si on prend l'image projective de la géométrie non euclidienne, la translation le long de la glissière amène  $a$  en  $a'$ ,  $b$  en  $b'$  ou bien  $a$  en  $b'$  et  $b$  en  $a'$ .

[Page 194]

Exemple  $a = -3, b = 1, a' = -2, b' = 3$ .

1<sup>re</sup> famille



$$\begin{aligned} -2[6A - 5B + C] + 3A + 4B + C \\ -9A + 14B + C = 0 \end{aligned}$$

$$B^2 - A(-9A + 14B) > 0$$

$$B^2 - 14AB + 9A^2 > 0$$

$$(B - 7A)^2 > 40A^2$$

$$\begin{aligned} B/A &> 7 + \sqrt{40} \\ \text{ou } &< 7 - \sqrt{40} \end{aligned}$$

2<sup>e</sup> famille

$$2[6A - 5B + C] + 3A + 4B + C = 0$$

$$15A - 6B + 3C = 0$$

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

$$B^2 + A(5A - 2B) > 0$$

$$B^2 - 5AB + 5A^2 > 0$$

$$(B - A)^2 + 4A^2$$

$$Ax^2 + 2Bx + 2B - 5A = 0$$

$$A(x^2 - 5)2B(x + 1) = 0$$

Dans la 2<sup>e</sup> famille, toutes les glissières passent par un point fixe exté[rieur]<sup>19</sup>.

19. Il semble que Cartan ait fait (lui aussi) un lapsus ici et qu'il s'agisse de la première famille.

Dans la 2<sup>e</sup> famille, les glissières passent par un point fixe intérieur.

$$Ax^2 + 2Bx + 14B - 9A$$

$$A(x^2 - 9) + 2B(x + 7)$$

Dans chacune des familles de glissières possibles, les glissières passent par un point fixe, soit intérieur à la conique, soit extérieur à la conique<sup>20</sup>.

$$A[(abb' - b') - a'b'(a - b)] - B(ab' - ba') + C(b - a + a' + b') = 0$$

$$A[[ab(a' - b') - a'b'(a - b)]x^2 + a - b - a' + b'] - B[(ab' - ba')x + a - b - a' - b']$$

$$\begin{array}{r} [ab(a' - b') - a'b'(a - b)]x^2 \\ ab - ba' \end{array} \quad \begin{array}{r} + a - b - a' + b' \\ - a + b + a' - b' \end{array}$$

$$\alpha(a - b + a' + b') + \gamma[ab(a' + b') - a'b'(a - b)] = 0$$

$$\beta = a - b + a' - b' \quad - (a - b + a' - b')\alpha + (ab' - ba')\beta$$

$$\alpha = ab - bc' \quad \beta = \frac{(a - b + a' - b')\alpha}{(ab' - ba')}$$

$$\gamma = \quad \gamma = -\frac{(a - b + a' - b')}{ab(a' - b') - a'b'(a - b)}\alpha$$

Dans le cas où le point  $\alpha$  par lequel passent les glissières est à l'extérieur de la conique, toutes les droites passent par un point.

Dans l'autre cas, les glissières sont perpendiculaires à une droite fixe.

[Page 195]

Conclusion. Deux droites orientées sont parallèles par rapport à une infinité de glissières qui :

ou bien passent par un point fixe

ou bien sont perpendiculaires à une droite fixe.

On prend pour ~~image projective~~ absolu la conique  $Y^2 - XZ = 0$ .

$X = t^2$ ,  $Y = t$ ,  $Z = 1$ . Si la 1<sup>e</sup> droite coupe l'absolu en  $t = a$ ,  $t = b$ , la 2<sup>e</sup> en  $t = a'$ ,  $t = b'$ , le point par lequel passent les glissières est

$$X = ab(b' - a') - a'b'(b - a)$$

$$Y = ab' - ba'$$

$$Z = a - b - a' + b''$$

si les 2 droites sont orientées  $a \rightarrow b$ ,  $a' \rightarrow b'$ .

20. Sur les trois dernières lignes, les  $\alpha, \beta, \gamma$  sur la gauche sont griffonnés par Cartan et l'égalité pour  $\gamma$  n'est pas terminée.

Avec l'image anallagmatique de Poincaré, les droites glissées sont orth[ogona]les à une droite fixe ou passent par un point fixe.

[Page 197]

Retour aux parallèles de Brunschvicg.

Soit la droite  $\vec{ab}$  et la droite  $\vec{a'b'}$  qui se déduit de  $\vec{ab}$  par glissement le long d'une glissière  $x\mu$ .

On a

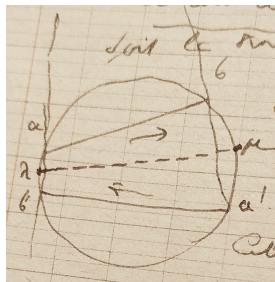
$$(xyab) = (yxa'b').$$

Cette involution [illisible] le couple  $(ab')$  car

$$(ab'ab) = (aba'b')$$

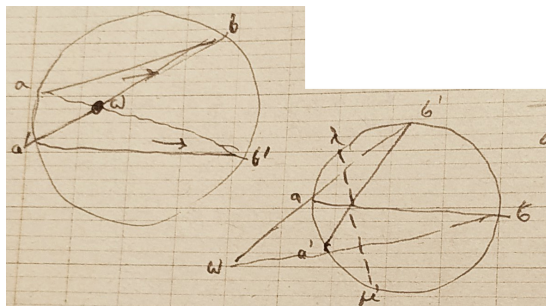
En effet, le 1<sup>er</sup> membre  $\frac{a-a}{a-b} : \frac{b'-a}{b'-b} = 0$  le 2<sup>e</sup> est  $\frac{a-a'}{a-b'} : \frac{b'-a'}{b'-b'} = 0$

De même on a le couple  $(a'b)$ .



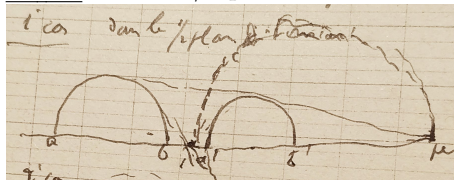
Les points doubles de l'involution sont dans le cas de la figure les p[oin]ts de contact des tangentes menées de  $\omega$  à la conique.

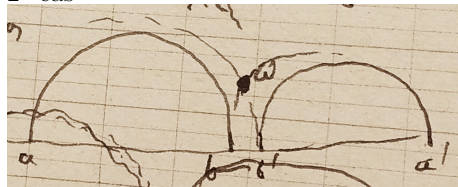
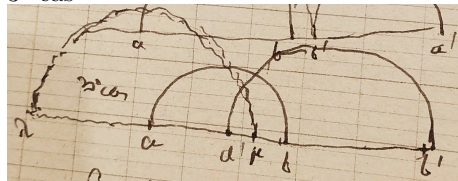
Par suite, les glissières sont les perpendiculaires à la droite  $\lambda\mu$ . Ce cas est celui où l'ordre des 4 p[oin]ts est  $aba'b'$ . Si l'ordre était  $abb'a'$ , les glissières seraient toutes les droites passant par  $\omega$ . Enfin si les deux droites se coupent, les glissières seraient encore les  $\perp$  à une droite fixe  $\lambda\mu$ . Dans tous les cas,  $ab'$  et  $a'b$  sont deux



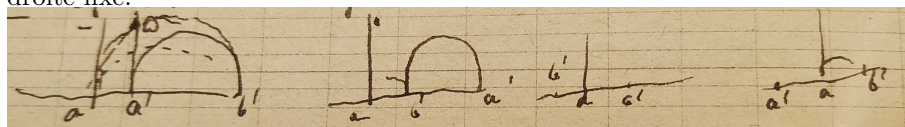
glissières possibles (comme cas limite).

1<sup>er</sup> cas dans le 1/2 plan de Poincaré



2<sup>e</sup> cas3<sup>e</sup> cas

Par suite, les glissières passent par un point fixe si les 2 segments  $ab'$  et  $ba'$  empiètent l'un sur l'autre. Dans le cas contraire, les glissières sont les  $\perp$  à une droite fixe.



## Bibliographie

- Barbazo, É. (2017). Une réforme peut-elle être considérée comme réussie? L'exemple de la réforme de 1902. *Bulletin de l'APMEP*, 522, 35–43.
- Belhoste, B. (1990). L'enseignement secondaire français et les sciences au début du xx<sup>e</sup> siècle. La réforme de 1902 des plans d'étude et des programmes. *Revue d'histoire des sciences*, 43, 371–400.
- Belhoste, B., Gispert, H. & Hulin, N. (éd.) (1996). *Les Sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris : INRP et Vuibert.
- Benis Sinaceur, H. (2013). *Jean Cavailles*. Paris : Les Belles Lettres.
- Bkouche, R. (1991). Variations autour de la réforme de 1902-1905. *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 34, 180–213.
- Borel, E. (1904). Les exercices pratiques dans l'enseignement secondaire, conférence faite le 3 mars 1904 au Musée pédagogique. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 15(9), 431–440.
- Borel, É. & Deltheil, R. (1931). *La Géométrie et les imaginaires*. Paris : Albin Michel.

- Bourlet, C. (1906-1908). *Cours abrégé de Géométrie*. Paris : Hachette.
- Bourlet, C. (1907). L'enseignement de la géométrie. Discussion : E. Borel, A. Lalande, F. Marotte, P.-F. Pécaut, F. Ogereau, G. Sorel. In A. Colin (éd.) *Bulletin de la Société française de philosophie*, vol. 7, 6, 225–261.
- Boutroux, P. (1913). Les étapes de la philosophie mathématique (recension). *Revue de métaphysique et de morale*, 21(1), 107–131.
- Brunschvicg, L. (1912). *Les Étapes de la philosophie mathématique*. Paris, Alcan.
- Bühl, A. (1913). Léon Brunschvicg — Les étapes de la philosophie mathématique (Recension). *L'Enseignement mathématique*, 15(1), 94–95.
- Dugac, P. (1970). Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite. *Revue d'histoire des sciences*, 23(4), 333–350.
- Gispert, H. (2008). L'enseignement des mathématiques au XX<sup>e</sup> siècle dans le contexte français. *CultureMath*, dernière visite 30/11/2019. URL <http://cm2.ens.fr/content/lenseignement-des-mathematiques-au-xxe-siecle-dans-le-contexte-francais-2817>.
- Gispert, H. (2013). Une conférence pour une réforme. *Images des Mathématiques*, CNRS, dernière visite 30/11/2019. URL <https://images.math.cnrs.fr/Une-conference-pour-une-reforme.html>.
- Gispert, H., Hulin, N. & Robic, M.-C. (éd.) (2007). *Science et Enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes des lycées au début du XX<sup>e</sup> siècle*. Paris ; Lyon : Vuibert ; INRP.
- Haffner, E. (2017). Esquisse d'une cartographie des cahiers d'Élie Cartan. *Revue d'histoire des mathématiques*, 23, 125–182.
- Méray, C. (1874). *Nouveaux Éléments de Géométrie*. Paris : Savy. Nouvelle édition Jobard, Dijon 1903.
- Méray, C. (1905). *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*. Deuxième partie : Étude monographique des principales fonctions d'une seule variable. Paris : Gauthier-Villars.
- Nabonnand, P. (2007). Les réformes de l'enseignement des mathématiques au début du XX<sup>e</sup> siècle. Une dynamique à l'échelle internationale. In H. Gispert, N. Hulin & C. Robic (éd.) *Sciences et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XX<sup>e</sup> siècle*, Paris : INRP ; Vuibert, 293–314.
- Poincaré, H. (1882). Théorie des groupes fuchsien. *Acta Mathematica*, 1, 1–62.



Poincaré, H. (1902). *La Science et l'Hypothèse*. Paris : Flammarion.

Poincaré, H. (1904). Les définitions générales en mathématiques. Conférence faite en janvier 1904 au Musée pédagogique. *L'Enseignement mathématique*, 6, 257–283.

Emmylou Haffner  
Institut des textes et manuscrits modernes  
CNRS/ ÉNS  
`emmylou.haffner@ens.psl.eu`