



**HAL**  
open science

## Régression géodésique dans $SE(3)$ : application à l'estimation de la position d'un mobile

Johan Aubray, Florence Nicol, Stéphane Puechmorel

### ► To cite this version:

Johan Aubray, Florence Nicol, Stéphane Puechmorel. Régression géodésique dans  $SE(3)$  : application à l'estimation de la position d'un mobile. 54es Journées de Statistique, Société Française de Statistique (Sfds), Jul 2023, Bruxelles (Belgique), Belgique. hal-04351972

**HAL Id: hal-04351972**

**<https://hal.science/hal-04351972v1>**

Submitted on 18 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

# RÉGRESSION DANS DES GROUPES DE LIE : APPLICATION À L'ESTIMATION DE LA POSITION D'UN MOBILE

Johan Aubray<sup>1</sup>, Florence Nicol<sup>2</sup> & Stéphane Puechmorel<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> *Université de Toulouse, Laboratoire ENAC, France, prenom.nom@enac.fr*

**Résumé.** Dans cette communication, nous nous intéressons au problème d'estimation de la position d'un mobile tel qu'un drone à partir de positions mesurées bruitées en utilisant le paradigme des groupes de Lie. Pour modéliser le mouvement d'un solide rigide, le groupe de Lie approprié est le groupe Spécial Euclidien  $SE(n)$ , avec  $n = 2$  ou  $3$  selon le problème posé. Notre travail se situe dans un cadre paramétrique tel que développé par Hinkle et al. (2014), qui ont établi des équations pour la régression géodésique, voire polynomiale sur des variétés Riemanniennes. Notre but est d'implémenter cette technique sur le groupe de Lie  $SE(3)$ . Etant donné un ensemble de points de  $SE(3)$  représentant des mesures de la trajectoire d'un mobile, on souhaite trouver la géodésique qui s'ajuste le mieux à ces points au sens des moindres carrés Riemanniens. Ensuite, nous proposons des applications sur des données simulées pour illustrer ce travail. Enfin, nous discutons des limites de cette méthode et des perspectives futures à donner.

**Mots-clés.** Statistique sur des variétés, régression géodésique, variétés riemanniennes, groupes de Lie,  $SE(3)$ , gestion du trafic aérien

**Abstract.** In this work, we address the problem of estimating the position of a mobile such as a drone from noisy position measurements using the framework of Lie groups. To model the motion of a rigid body, the relevant Lie group happens to be the Special Euclidean group  $SE(n)$ , with  $n = 2$  or  $3$ . Our work takes place in the parametric framework developed by Hinkle et al. (2014), who derived equations for geodesic regression and polynomial regression on Riemannian manifolds. Based on this approach, our goal is to implement this technique to the Lie group  $SE(3)$  context. Given a set of noisy points in  $SE(3)$  representing measurements on the trajectory of a mobile, one wants to find the geodesic that best fits those points in a Riemannian least squares sense. Finally, applications to simulated data are proposed to illustrate this work. The limitations of such a method and future perspectives are discussed.

**Keywords.** Statistics on manifolds, geodesic regression, Riemannian manifolds, Lie groups,  $SE(3)$ , air traffic management

## 1 Introduction

Dans le contexte de la gestion du trafic aérien (ATM), l'estimation de la position d'un aéronef peut se faire de deux façons. Un premier objectif est de présenter aux contrôleurs aériens la

meilleure estimation possible de la position des aéronefs sur leur écran de contrôle. Dans ce cas, seule la trajectoire passée est connue. Il s’agit d’un problème de poursuite radar, qui est habituellement traité à l’aide du filtrage de Kalman et de ses extensions, voir Julier et Uhlmann (1997). Un autre problème consiste à estimer la position d’un mobile à l’aide de mesures passées et futures. Cette procédure de lissage peut être traitée par des techniques de régression statistique.

Lorsque les données appartiennent à un espace Euclidien, les analyses de régression statistique sont généralement de deux types : les méthodes paramétriques telles que la régression linéaire ou polynomiale et les méthodes non paramétriques telles que les estimateurs à noyau, le lissage par spline et la régression polynomiale locale. Par ailleurs, en raison de la nature fonctionnelle des trajectoires des mobiles, celles-ci peuvent être considérées comme des objets fonctionnels appartenant à un espace de Hilbert donné. Dans ce cas, l’approche classique consiste à trouver une décomposition en base fonctionnelle sur un sous-espace de dimension finie. Cependant, cela ne fonctionne que s’il est possible de trouver une base capable de représenter toutes les trajectoires possibles, ce qui n’est pas le cas dans le contexte d’avions à évolution rapide.

Dans beaucoup d’applications, les données n’appartiennent pas à un espace Euclidien et ne peuvent donc être traités au moyen d’outils issus de la statistique classique. Le cadre de travail fourni par la géométrie Riemannienne est particulièrement adapté pour étudier de telles données, qui sont vues comme des points appartenant à une variété différentielle. Dans notre problématique, plutôt que de considérer les trajectoires elles-mêmes dans l’espace d’état, il est pertinent d’étudier l’évolution d’un mobile (position et orientation) dans un autre espace de représentation, en particulier celui des groupes de Lie. Ici, le groupe de Lie approprié est le groupe Spécial Euclidien  $SE(n)$ ,  $n = 2$  ou  $3$  selon l’application visée. En effet, une géodésique dans  $SE(3)$  peut être une ligne droite, un virage à rayon constant ou une hélice, ce qui modélise bien le mouvement d’objets volants à évolution rapide.

Au cours des dernières années, le filtre de Kalman a été étendu aux groupes de Lie (Bonnabel (2007), Bonnabel et collab. (2009), Bourmaud et collab. (2013), Pilte (2018)). Remarquons qu’un filtre de Kalman aurait des difficultés à suivre un mouvement hélicoïdal. Récemment, une méthode de régression non paramétrique sur les groupes de Lie a également été développée lorsque la variable à expliquer est à valeurs réelles et les variables explicatives vivent dans un groupe de Lie (Jeon et collab. (2022)). Ces méthodes sont peu adaptées à notre contexte applicatif, puisque nous cherchons à développer un modèle de régression pour des variables à valeurs dans un groupe de Lie.

Notre travail se situe dans le cadre de la méthode de régression géodésique développée dans Fletcher (2011). L’algorithme pour la régression des géodésiques et des polynômes  $y$  est explicitement écrit dans le groupe des rotations en trois dimensions  $SO(3)$ . Notre but est de suivre la même idée en modélisant les transformations rigides avec le groupe Spécial Euclidien  $SE(3)$ . Dans un premier temps, nous décrirons une formulation mathématique plus générale de l’approche présentée dans Hinkle et collab. (2012). Dans un deuxième temps, nous étendrons l’approche faite de  $SO(3)$  au contexte du groupe de Lie  $SE(3)$ . Enfin, plusieurs applications à des données simulées viennent illustrer la méthode. Les limites sont discutées et des perspectives d’amélioration de l’estimation sont proposées.

## 2 Le problème de la régression géodésique

### 2.1 Éléments de géométrie riemannienne

Notre travail se situe dans le domaine de la statistique géométrique, qui traite d'analyse statistique sur des objets géométriques vivant dans des variétés différentielles. Toutes les notions citées peuvent se retrouver dans Flaherty et do Carmo (2013), Gallier (2011) et Gallot et collab. (2004). En géométrie différentielle, la métrique Riemannienne définit localement un produit scalaire sur chaque espace tangent à la variété et permet de calculer des angles, des longueurs et des distances. Une géodésique minimisante correspond à la notion de plus court chemin entre deux points  $p$  et  $q$ , ce qui permet de définir une distance entre ces points, appelée distance géodésique.

Par ailleurs, la notion de connexion est un procédé permettant de dériver un champ de vecteurs dans la direction d'un vecteur tangent. On la note  $\nabla_v X$ , où  $X$  est le champ de vecteurs dérivé dans la direction du vecteur  $v$ . Notons qu'il existe une unique connexion sans torsion et compatible avec la métrique appelée connexion de Levi-Civita notée  $\nabla^{LC}$ . Dans ce cas, une géodésique minimisante satisfait l'équation  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{LC} \dot{\gamma}(t) = 0$ , ce qui équivaut à résoudre un système d'équations différentielles.

On rappelle que si  $p$  est un point d'une variété  $M$  et  $v$  un vecteur appartenant à l'espace tangent à  $M$  au point  $p$ , cet espace étant noté  $T_p M$ , alors il existe une unique géodésique  $c: [0, 1] \rightarrow M$  telle que  $c(0) = p$  et  $c'(0) = v$ . L'application exponentielle Riemannienne  $\text{Exp}_p: T_p M \rightarrow M$  au point  $p$  est alors définie par  $\text{Exp}_p(v) = c(1)$ . C'est un difféomorphisme local, dont l'inverse est appelé logarithme Riemannien  $\text{Log}_p$ , avec  $\text{Log}_p: M \rightarrow T_p M$ .

Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cadre des groupes de Lie. Un groupe de Lie  $G$  est une variété lisse qui est également un groupe tel que les opérations de produit et d'inversion du groupe sont lisses. Cette structure de groupe permet de se ramener en l'identité  $e$  à partir de tout point  $g \in G$  par simple translation à gauche ou à droite. L'espace tangent en  $e$ , noté  $\mathfrak{g}$ , est appelé algèbre de Lie. Plus particulièrement, un groupe de Lie de matrices (ou groupe de Lie linéaire) tel que le groupe spécial Euclidien  $SE(n)$  est un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$ , où  $GL_n(\mathbb{C})$  est l'ensemble de toutes les matrices complexes inversibles de taille  $n$ , l'opération de groupe étant le produit matriciel. On peut munir cet espace vectoriel d'une application bilinéaire antisymétrique nommée crochet de Lie, qui, dans ce cas, n'est autre que le commutateur  $X, Y \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto [X, Y] = XY - YX$ . Enfin, on appelle représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  l'opérateur  $\text{ad}: X \in \mathfrak{g} \mapsto \text{ad}_X(Y) = [X, Y] \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

À titre d'illustration, le groupe spécial Euclidien  $SE(n)$  est l'ensemble des applications  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $f(x) = Rx + T$  où  $R \in SO(n)$  représente les mouvements de rotation et  $T \in \mathbb{R}^n$  représente les mouvements de translation. Son algèbre de Lie  $\mathfrak{se}(n)$  est alors l'espace vectoriel des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} K & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  où  $K$  est une matrice antisymétrique de taille  $n$  représentant la vitesse angulaire et  $V$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  représentant la vitesse de translation. Par exemple, un élément de  $SE(2)$  peut être représenté par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec  $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $T = [t_x, t_y]^T$ . Un élément de  $\mathfrak{se}(2)$  peut alors être représenté par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} K & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $K = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$  et  $V = [v_x, v_y]^T$ .

## 2.2 Courbes polynomiales

En géométrie riemannienne, les géodésiques minimisantes sont les équivalents des lignes droites, et sont donc l'objet naturel à considérer pour étendre la régression linéaire à une variété différentielle. Dans un groupe de Lie  $G$ , il existe une métrique canonique invariante à gauche  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_g$  dérivée du produit scalaire euclidien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Pour tout  $g \in G$ , et pour tout  $X_g, Y_g \in T_g G$ , on a :

$$\langle\langle X_g, Y_g \rangle\rangle_g = \langle T_g L_g^{-1} X_g, T_g L_g^{-1} Y_g \rangle, \quad (1)$$

où  $L_g : G \rightarrow G$  est l'opérateur de translation à gauche par  $g$ , et  $T_g L_g^{-1} : T_g G \rightarrow \mathfrak{g}$  est la différentielle de  $L_g^{-1}$  au point  $g$ , permettant de ramener un vecteur  $X_g \in T_g G$  dans l'algèbre de Lie. Notons que l'inverse de  $L_g$  est la translation à gauche par  $g^{-1}$ .

Une géodésique minimisante entre deux points  $g_0, g_1$  par rapport à  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_g$  est un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ , minimisant la fonctionnelle :

$$L(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle\rangle_g dt, \quad (2)$$

avec  $\gamma(0) = g_0, \gamma(1) = g_1$ . La distance géodésique entre  $g_0$  et  $g_1$  est alors donnée par  $L(\gamma)$ . Du fait de l'invariance à gauche de la métrique, le problème se ramène à minimiser la fonctionnelle réduite dans  $\mathfrak{g}$  :

$$L(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t) \rangle dt, \quad (3)$$

où  $\xi$  est un chemin dans  $\mathfrak{g}$ . La solution satisfait l'équation dite d'Euler-Arnold, voir Marsden et Ratiu (1999) :

$$\dot{\xi}(t) = \text{ad}_{\xi(t)}^t \xi(t). \quad (4)$$

La géodésique minimisante est alors reconstruite à l'aide de la translation à gauche par  $\gamma(t)$  :

$$\dot{\gamma}(t) = T_e L_{\gamma(t)} \xi(t), \quad (5)$$

qui se simplifie dans un groupe de Lie de matrices en :

$$\gamma(t) = \exp \left( \int_0^t \xi(u) du \right). \quad (6)$$

Si  $G$  est muni de la connexion de Levi-Civita  $\nabla^{LC}$ , alors une géodésique minimisante  $\gamma$  doit satisfaire :

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{LC} \dot{\gamma}(t) = 0. \quad (7)$$

L'équivalent Riemannien d'un polynôme de degré  $p$  est une courbe  $\gamma$  telle que :

$$\left( \nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{LC} \right)^p \dot{\gamma}(t) = 0. \quad (8)$$

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathfrak{g}$ , la connexion de Levi-Civita dans  $T_g G$  s'exprime dans une base de champs de vecteurs invariants à gauche  $(T_e L_g e_1, \dots, T_e L_g e_n)$ . En appliquant la formule de Koszul aux vecteurs  $(e_1, \dots, e_n)$ , on obtient les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (c_{ij}^k + c_{ki}^j - c_{jk}^i), \quad (9)$$

où  $c_{ij}^k = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle$  sont appelées les constantes de structure.

On peut alors calculer une courbe polynomiale  $\xi$  de degré  $p$  dans  $\mathfrak{g}$  en résolvant le système d'équations différentielles suivant :

$$v_1(t) = \nabla_{\xi(t)}^{LC} v_0(t), v_2(t) = \nabla_{\xi(t)}^{LC} v_1(t), \dots, \nabla_{\xi(t)}^{LC} v_{p-1}(t) = 0, \quad (10)$$

avec la convention  $v_0 = \xi$ .

## 2.3 Régression dans un groupe de Lie

La notion de régression linéaire paramétrique peut se généraliser sur les variétés Riemanniennes, elle est appelée régression géodésique intrinsèque, et a été développée indépendamment dans Fletcher (2011) et Niethammer et collab. (2011). Soit  $y_1, \dots, y_N$  un ensemble de points représentant la trajectoire du mobile sur une variété Riemannienne. L'idée est d'estimer une courbe géodésique  $\gamma(t)$ , sur la variété, qui s'ajuste le mieux à ces points de manière "linéaire" à des instants connus  $t_1, \dots, t_N$ . L'estimation est trouvée en minimisant un critère des moindres carrés basé sur une distance géodésique entre le modèle  $\gamma(t)$  et les données.

Plus formellement, le modèle de régression géodésique s'exprime de la manière suivante dans Fletcher (2011) :

$$Y = \text{Exp}_{\gamma(t)}(\varepsilon),$$

où  $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$  est la géodésique donnée par les conditions initiales  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ , et  $\varepsilon$  désigne une variable aléatoire Gaussienne à valeurs dans l'espace tangent à  $\gamma(t)$ . Dans Hinkle et collab. (2012), ce modèle de régression géodésique est généralisé à un modèle polynomial.

L'estimation Riemannienne de la géodésique est obtenue en trouvant les vecteurs de décision  $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$  qui minimisent le critère des moindres carrés :

$$E(\gamma) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d(\gamma(t_j), y_j)^2, \quad (11)$$

où  $d$  est une distance géodésique entre le modèle  $\gamma(t_j)$  et les données  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Ce problème de minimisation est résolu sous la contrainte que la courbe  $\gamma$  est une géodésique vérifiant (7). Par extension, le problème de régression polynomiale utilisera une contrainte polynomiale d'ordre  $p$  :  $(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{LC})^p \dot{\gamma}(t) = 0$ .

Au lieu d'introduire des multiplicateurs de Lagrange, comme dans l'article original, une approche plus directe peut être adoptée.

**Lemme 2.1.** *Soit  $M$  une variété lisse et  $f:M \rightarrow \mathbb{R}$  une application lisse. Pour que  $f$  soit localement optimale en  $p \in M$ , il faut que  $df_p = 0$ .*

Si  $\gamma: ]-\epsilon, +\epsilon[ \rightarrow M$  est une courbe lisse à valeurs dans  $M$  telle que  $\gamma(0) = p$ , alors  $df_p(\dot{\gamma}(0))$  est la variation du premier ordre de  $f$  dans la direction du vecteur tangent  $\dot{\gamma}(0) \in T_pM$ . Si  $\phi$  est un difféomorphisme local sur un voisinage ouvert  $U$  de  $q \in M$  vers un voisinage ouvert de  $\phi(q) = p$ , alors, la définition du pullback donne, pour tout  $X \in T_qM$  :

$$\phi^* df(X) = df(T_q\phi X). \quad (12)$$

Le lemme suivant est un résultat qui peut être prouvé en utilisant les coordonnées normales.

**Lemme 2.2.** *Soit  $p, q \in M$  tel que  $\text{Log}_p q = V \in T_pM$  soit bien défini et  $g$  une métrique sur  $M$ . La différentielle en  $p$  de l'application  $m \mapsto d^2(m, q)$  est la 1-forme  $\alpha_q: X \in T_pM \mapsto 2g(X, V)$ .*

**Proposition 2.1** (Formule variationnelle). *Soit  $\Phi$  le flot d'un champ de vecteurs  $X$ , c'est-à-dire que  $\Phi(t, x)$  est la valeur de la courbe intégrale de  $X$  à l'instant  $t$ , avec  $\Phi(0, x) = x$ . Alors, la dérivée  $\partial_x \Phi$  de  $\Phi$  par rapport à la condition initiale  $x$  obéit à l'équation différentielle :*

$$\frac{d}{dt} \partial_x \Phi(t, x) = DX(\Phi(t, x)) \cdot \partial_x \Phi(t, x), \quad (13)$$

où  $DX:TM \rightarrow TTM$  est la dérivée de la section  $X:M \rightarrow TM$  et la condition initiale  $\partial_x \Phi(0, x) = \text{Id}$ .

Si l'on revient au problème initial, à savoir trouver un minimum local du critère (11), et si l'on suppose que  $\gamma$  est la courbe intégrale d'un champ de vecteurs  $X$  avec la condition initiale  $\gamma(0) = p$ , l'application du lemme 2.2 donne l'expression suivante pour la différentielle à  $T_pM$  de  $E(\gamma)$  par rapport aux conditions initiales :

$$Y \in T_pM \mapsto \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N g(\partial_p \gamma(t_i, p) \cdot Y, \text{Log}_{\gamma(t_i, p)} y_i) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N g(Y, \partial_p \gamma(t_i, p)^\dagger \text{Log}_{\gamma(t_i, p)} y_i), \quad (14)$$

où  $\partial_p \gamma(t_i, p)^\dagger$  est l'adjoint de  $\partial_p \gamma(t_i, p)$  par rapport à la métrique  $g$ . Le gradient (riemannien) en  $T_pM$  est donc donné par :

$$\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \partial_p \gamma(t_i, p)^\dagger \text{Log}_{\gamma(t_i, p)} y_i, \quad (15)$$

où  $\partial_p \gamma(t_i, p)^\dagger$  obéit pratiquement à la même équation que  $\partial_p \gamma(t_i, p)$ , à l'exception d'un signe moins et d'une transposée dans le terme de droite. Dans le cas des courbes polynômiales, l'expression du gradient Riemannien (15) se simplifie pour donner le système différentiel proposé dans Hinkle et collab. (2012).

Trouver la géodésique minimisante revient alors à annuler le gradient Riemannien exprimé en (15).

### 3 Application sur des données simulées

Les données simulées sont générées comme décrit dans l’algorithme.

Une géodésique étant entièrement déterminée par son origine et son vecteur vitesse à l’origine, nous utilisons une méthode de tir pour déterminer ces deux paramètres. Partant d’une première hypothèse naïve consistant en  $\gamma(0)^{(0)} = I$  et  $\dot{\gamma}(0)^{(0)} = 0$ , nous estimons  $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$  en utilisant un algorithme itératif inspiré de Hinkle et collab. (2012).

---

**Algorithme 1** Génération des données simulées

---

On choisit un vecteur  $\xi = \omega_x, \omega_y, \omega_z, v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}^6 \cong \mathfrak{se}(3)$   
**for**  $i = 1 : \text{LongueurTraj}$  **do**  
    On génère  $g_i = \exp(t_i \xi + n_i) \in SE(3)$ , avec  $n_i \sim \mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^6}, \Sigma)$   
     $(x_1, x_2, x_3)_{i+1}^T = g_i \times (x_1, x_2, x_3)_i^T$  ▷ Action du groupe  $SE(3)$  sur  $\mathbb{R}^3$   
**end for**

---

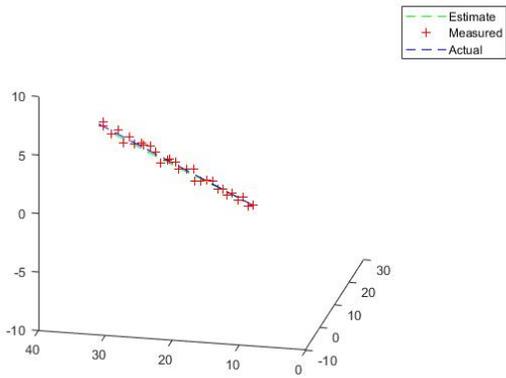
Nous nous concentrons sur des exemples tirés de données simulées, correspondant à des manœuvres réalistes pour notre application d’objets volants à évolution rapide, telles qu’une ligne droite et une hélice régulière. En effet, notamment dans le cas d’une hélice, les avions civils n’effectuent pas de telles manœuvres, mais d’autres types d’objets volants mobiles peuvent le faire, tels des drones.

Pour chacune de ces manœuvres, nous avons ajouté du bruit avec différents écart-types ( $\sigma=0,03$  et  $0,3$ ) et utilisé différents pas de descente de gradient. Les résultats sont présentés dans les Figures 1 et 2. Les résultats semblent satisfaisants pour ces manœuvres de base, même en présence d’un bruit important. Les courbes d’apprentissage ne sont pas affichées, mais ont un comportement régulier, car elles convergent vers une limite minimale en dessous de laquelle l’algorithme ne descend pas. Cette limite est bien sûr influencée par l’écart-type du bruit : plus le bruit est important, plus la limite d’erreur minimale est élevée. Cependant, le taux d’apprentissage ne dépend pas de l’écart-type du bruit.

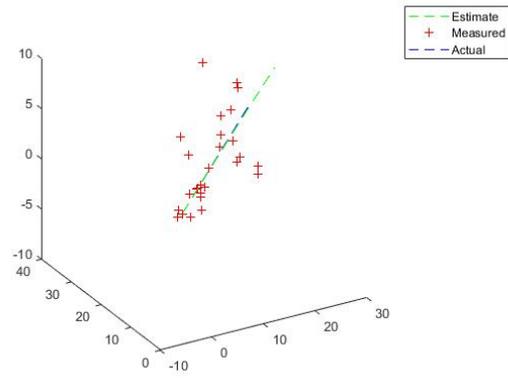
Considérons à présent une manœuvre plus complexe, par exemple, une ligne droite suivie d’un virage à rayon constant. Le résultat est présenté en Figure 3. Il est clair que le modèle ne parvient pas à s’adapter correctement à la trajectoire, bien que la fonction de coût minimisée soit la somme des carrés des distances entre les estimations et les mesures. On pouvait s’y attendre, car la trajectoire étudiée, même dans un scénario parfait où elle n’est pas affectée par un bruit additif, n’est pas une géodésique dans  $SE(3)$ , alors que le modèle impose que l’estimée soit une courbe géodésique. Il s’agit clairement d’une limite de notre modèle, qui prend en compte tous les points mesurés et tente de les incorporer dans une seule estimation paramétrique du point de départ initial et du vecteur vitesse initial.

### 4 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons appliqué un modèle de régression géodésique sur  $SE(3)$  basé sur un critère des moindres carrés utilisant une distance riemannienne. Nous avons utilisé

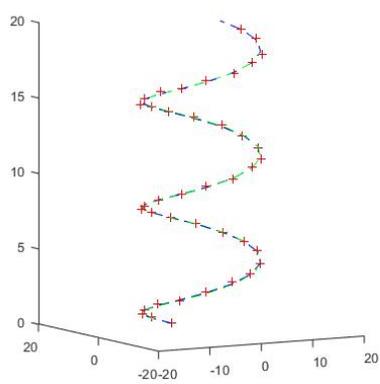


(a) Bruit faible ( $\sigma = 0.03$ )

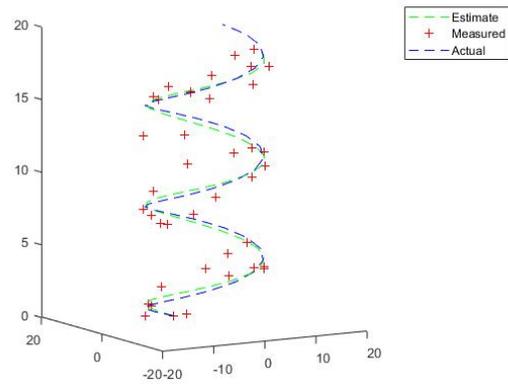


(b) Bruit fort ( $\sigma = 0.3$ )

Figure 1: Cas d'une ligne droite



(a) Bruit faible ( $\sigma = 0.02$ )



(b) Bruit fort ( $\sigma = 0.3$ )

Figure 2: Cas d'une hélice

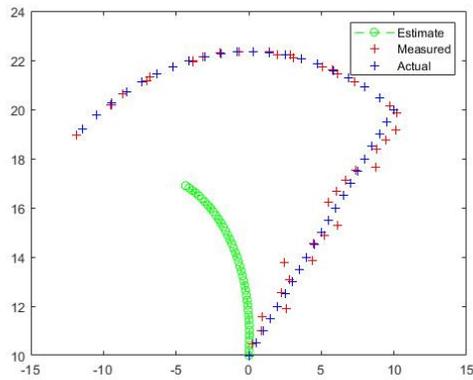


Figure 3: Une manoeuvre multiple

l'algorithme de résolution sur plusieurs scénarios en présence de bruit. Alors que le modèle semble fonctionner correctement pour des manœuvres simples en présence de bruit, il ne parvient pas à prendre en compte les changements de manœuvre au cours du temps. Il faudra donc l'améliorer, notamment en trouvant un moyen de passer d'une géodésique à une autre en modifiant ses paramètres en fonction du temps. Il serait également utile de trouver un critère riemannien analogue à ceux déjà utilisés dans un espace euclidien pour évaluer la qualité du modèle.

## References

- Bonnabel, S. 2007, «Left-invariant extended kalman filter and attitude estimation», dans *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 1027–1032, doi:10.1109/CDC.2007.4434662.
- Bonnabel, S., P. Martin et E. Salaün. 2009, «Invariant extended kalman filter: theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem», dans *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, p. 1297–1304, doi:10.1109/CDC.2009.5400372.
- Bourmaud, G., R. Mégret, A. Giremus et Y. Berthoumieu. 2013, «Discrete extended kalman filter on lie groups», dans *21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2013)*, p. 1–5.
- Flaherty, F. et M. do Carmo. 2013, *Riemannian Geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, ISBN 9780817634902.
- Fletcher, T. 2011, «Geodesic Regression on Riemannian Manifolds», dans *Proceedings of the Third International Workshop on Mathematical Foundations of Computational Anatomy - Geometrical and Statistical Methods for Modelling Biological Shape Variability*, édité par Pennec, Xavier, Joshi, Sarang, Nielsen et Mads, Toronto, Canada, p. 75–86. URL <https://hal.inria.fr/inria-00623920>.
- Gallier, J. 2011, *Basics of Manifolds and Classical Lie Groups: The Exponential Map, Lie Groups, and Lie Algebras*, Springer New York, New York, NY, ISBN 978-1-4419-9961-0, p. 459–528, doi:10.1007/978-1-4419-9961-0.
- Gallot, S., D. Hulin et J. Lafontaine. 2004, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-540-20493-0.
- Hinkle, J., P. Muralidharan, P. T. Fletcher et S. Joshi. 2012, «Polynomial regression on riemannian manifolds», dans *Computer Vision - ECCV 2012*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-642-33712-3, p. 1–14.
- Jeon, J. M., B. U. Park et I. V. Keilegom. 2022, «Nonparametric regression on Lie groups with measurement errors», *The Annals of Statistics*, vol. 50, doi:10.1214/22-AOS2218, p. 2973 – 3008. URL <https://doi.org/10.1214/22-AOS2218>.

- Julier, S. J. et J. K. Uhlmann. 1997, «New extension of the kalman filter to nonlinear systems», dans *Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*, vol. 3068, édité par I. Kadar, International Society for Optics and Photonics, SPIE, p. 182 – 193, doi: 10.1117/12.280797. URL <https://doi.org/10.1117/12.280797>.
- Marsden, J. et T. Ratiu. 1999, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Texts in Applied Mathematics, Springer New York, ISBN 9780387217925.
- Niethammer, M., Y. Huang et F.-X. Vialard. 2011, «Geodesic regression on image time series», dans *MICCAI, International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, vol. 14, ISBN 978-3-642-23628-0, p. 655–62, doi: 10.1007/978-3-642-23629-7.
- Pilte, M. 2018, *Dynamic management of tracking ressources for hypermanoeuvring targets*, Theses, Université Paris sciences et lettres. URL <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-02274370>.