

2. ¿Somos «seres espaciales»? Razonamiento y espacialidad

Valeria Giardino

Institut Jean-Nicod, ENS, CNRS, París

1. INTRODUCCIÓN: ESPACIO PARA RAZONAR (Y NO SOLO PARA ESO)

El objetivo principal de este capítulo es proporcionar pistas para responder a una pregunta que, por así decirlo, resume en una sola frase diversas cuestiones que me han llamado la atención durante mi investigación. A saber: ¿podemos considerar que los seres humanos son seres «espaciales» desde un punto de vista cognitivo? Y si queremos defender esta idea, ¿qué entendemos precisamente? ¿A qué nos referimos exactamente con el término «espacial»?

Para responder a estas preguntas, en este capítulo presentaré principalmente ejemplos que pertenecen al razonamiento matemático. Las matemáticas son una disciplina bastante específica, eso es cierto; pero quiero señalar que se las puede considerar como una actividad cognitiva de forma paradigmática, porque plantean investigaciones más generales sobre la capacidad humana de «representar». Esta capacidad va evidentemente más allá y es quizás más básica que el poder que atribuimos al lenguaje, si entendemos «lenguaje» en el sentido estricto del idioma particular que utilizamos. Para aclarar el contexto de mi pregunta inicial, empezaré con un ejemplo de construcción en geometría, en particular en topología, que uso a menudo porque resulta muy efectivo como ilustración.¹

En topología existen diagramas particulares comúnmente utilizados por los matemáticos para representar superficies. Estos diagramas tienen la forma de un cuadro con flechas a sus lados. En la Figura 1 hay un ejemplo de uno de estos cuadros. Las flechas expresan qué lados del cuadro tienen que

¹ Este ejemplo está discutido en De Toffoli y Giardino (2015).

identificarse (matemáticamente) o —dicho de una manera más intuitiva— «pegarse» entre ellos: imaginamos agarrar el cuadro por las flechas y doblarlo, y finalmente pegar los dos lados en la dirección indicada por las flechas (en este caso la misma). La superficie que obtenemos haciendo esta manipulación es un cilindro.

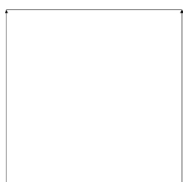


Figura 1. El diagrama topológico correspondiente a un cilindro.

Estos diagramas son interesantes porque están determinados para una dualidad. Por un lado, representan ya una superficie topológica específica, en este caso un cilindro: podemos imaginar un ser —por ejemplo una hormiga— que se mueve sobre esta superficie y sale de uno de los lados marcado por una flecha para reentrar en la misma superficie por el otro lado con flecha, en el punto correspondiente al pegado. Por otro lado, los mismos diagramas proveen las instrucciones para construir la superficie: las flechas indican cómo tiene que pegarse, los lados que tenemos que identificar.

A partir de este principio, otros cuadros pueden representar superficies más complejas. Por ejemplo, en la Figura 2 hay un cuadro con dos parejas de flechas. La apariencia distinta de las dos parejas sirve para indicar qué flecha tiene que pegarse con cuál; el orden de pegado no es importante. Si pegamos una primera vez, obtenemos el cilindro que ya conocemos; si pegamos otra vez entre ellos los dos círculos a la base del cilindro —estamos en topología, entonces podemos imaginar que estiramos nuestros objetos cuanto queremos, como si fueran de goma—, obtenemos un objeto topológico muy interesante en cuanto caracterizado por un agujero, es decir, lo que los geómetras llaman un «toro» (Figura 3).



Figura 2.

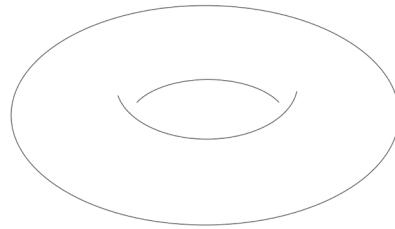


Figura 3.

Se entiende que estas construcciones corresponden a operaciones matemáticas que podrían ser formalizadas. Pero sea cual sea la formalización, no dirá nada y será poco útil si no considera la visualización que sobreentendemos y que hemos presentado.

Este ejemplo sencillo y muy intuitivo —la topología se caracteriza por ser intuitiva— es una buena ilustración del tema que me interesa, porque hace surgir varias preguntas. Empezamos con una pregunta muy superficial, que se refiere a lo que estos cuadros y su utilización nos dicen sobre nuestra manera de hacer, es decir, de practicar una disciplina matemática como la topología. Evidentemente, la topología es una rama particular de la geometría, que se interesa por las propiedades del espacio que permanecen inalterables cuando se aplican deformaciones continuas en las que no se realizan cortes ni rasgaduras (como en el caso del *pegado* que realizamos sobre los cuadros). Está claro que no resulta tan sorprendente que para estudiar las propiedades del espacio topológico se utilicen objetos que son espaciales. Pero, cuidado: al mismo tiempo, algo sigue siendo sorprendente y afecta no solo a la topología, sino a otras regiones de las matemáticas: el hecho de que estos diagramas en papel nos permitan acceder a los objetos abstractos que nos interesan al final —cilindros, toros— que tienen propiedades diferentes y más específicas que las propiedades de los objetos ordinarios con los que interactuamos todos los días. Estamos haciendo topología y, por consiguiente, la métrica no cuenta, ni siquiera la forma particular de las figuras, porque podemos deformarlas continuamente sin que los objetos representados cambien. Pero, para hacer esto, lo cierto es que se utilizan objetos concretos como estos cuadros, y tenemos que aprender, por así decirlo, su *comportamiento*.

Repensemos el razonamiento que hicimos imaginando *ver* un cilindro o un toro en estos cuadros con flechas. Hay algunas condiciones para poder efectuar esta tarea cognitiva. Primero, tenemos que entender algunas instrucciones que comprenden términos específicos a las matemáticas —identificar lados— así como otros que provienen de contextos más co-

munes —agarrar, doblar, pegar, etc.—. Segundo, tenemos que realizar —mejor, imaginar que realizamos— algunas acciones sobre estas figuras concretas que nos hacen obtener un nuevo objeto abstracto al final, que corresponde a nuestra conclusión. Tercero, una formalización de estas operaciones matemáticas carecerá de sentido si no disponemos de estos cuadros y no conocemos las manipulaciones que nos permiten.² Cuarto, se podría decir que estas manipulaciones hacen *aparecer* nuevas figuras particulares que son interpretadas como representaciones de nuevos objetos abstractos.

¿Qué nos dice todo esto de nuestra relación con el espacio para razonar? Está claro que tenemos que utilizar nuestra cognición espacial para reconocer formas en estas figuras, y parece también que, con las instrucciones apropiadas, lo hicimos sin demasiadas dificultades. Sin embargo, ¿cuáles son las condiciones cognitivas detrás de este género de razonamiento? No se trata únicamente de cognición del espacio, porque hablamos también de interpretación, acciones y manipulaciones. ¿Cuáles son los elementos básicos, los *building blocks* de esta manera de razonar mediante diagramas? ¿Por qué es crucial para explicar nuestra capacidad de representar?

En la próxima sección presentaré tres marcos generales que intentan dar cuenta de la utilización de herramientas, cuadros que destacan los aspectos ligados al espacio y al mismo tiempo a una cierta «dinamicidad» de este tipo de razonamiento. Una vez comparados estos tres marcos, en la sección 3 de este texto discutiré el papel de los artefactos cognitivos en las aulas y en culturas que tienen un lenguaje limitado, y presentaré un ejemplo de artefacto cognitivo más complejo, en cierto sentido análogo y al mismo tiempo diferente de los cuadros con flechas. Terminaré el capítulo presentando, en la sección 4, una división entre niveles cognitivos diferentes con la intención de aclarar los términos de la pregunta que planteé en el título. Finalmente, resumiré mis conclusiones en la sección 5.

2. TRES MARCOS GENERALES: DIAGRAMACIÓN, ICONICIDAD OPERATIVA Y *SPRACTION*

El ejemplo que presenté en la sección previa constituye una tarea cognitiva muy sofisticada y es precisamente para dar cuenta de este tipo de tareas que propuse hace unos años un marco teórico que llamé «diagramación» (*diagramming* en inglés, Giardino 2014) y que voy a presentar rápidamente.

² Detalles sobre esto pueden encontrarse en De Toffoli y Giardino (2015).

Gracias a la habilidad de diagramación, los seres humanos serían capaces de reclutar diferentes sistemas cognitivos que se emplean ya en otras tareas más básicas, como la percepción del mundo o la acción sobre él —por ejemplo, el sistema visuoespacial, el sistema motor y, por supuesto, el sistema conceptual—, y de establecer entre ellos una conexión inédita exterior al cerebro —en el mundo— con el objetivo específico de encontrar una solución a un problema específicamente cognitivo. Este marco muy general explicaría el papel de objetos tales como los cuadros con flechas que está precisamente en ofrecerse como «disparadores» de esta conexión; en otras palabras, estos objetos han sido introducidos precisamente para hacerla posible. Por esta razón, los llamo «artefactos cognitivos», es decir, una invención «tecnológica» de nuestra cultura que nos permite conseguir ventajas cognoscitivas.

En la literatura sobre el razonamiento humano, se encuentran otras posiciones similares a la diagramación, que destacan del mismo modo la importancia de artefactos que nos hacen superar algunas de nuestras limitaciones cognitivas.³ Particularmente cruciales son los artefactos cognitivos que también sirven de representaciones, tales como los cuadros de mi ejemplo.

La filósofa alemana Sybille Krämer define estos objetos de manera muy efectiva, a saber, afirma que permiten una «iconicidad operativa» (*operative iconicity*). En su perspectiva, existe una clase de objetos que llama de tipo «diagramático», que no encajan bien en la dicotomía típica de las ciencias humanas entre palabra e imagen: una tabla, un gráfico o un mapa, por ejemplo, «dicen» cosas pero al mismo tiempo las «muestran», y eso está en la base de su iconicidad operativa. Es decir, estos objetos espaciales no constituyen solo un medio para representar algunos objetos de conocimiento, sino que también sirven de herramientas para crear y explorar estos mismos objetos. Cabe señalar que la iconicidad operativa encaja bien con el ejemplo de los cuadros con las flechas, porque, actuando sobre estos objetos, llegamos a nuevas representaciones: los cuadros representan una superficie y al mismo tiempo permiten construirla y explorarla, por ejemplo, imaginando una hormiga que se desplaza sobre ella.

³ En algunas perspectivas filosóficas, este aspecto convierte esos objetos en una parte propia de la mente, aunque externa a nuestro cerebro. Esta es por ejemplo la posición de la «mente extendida», la *extended mind*, que fue propuesta por primera vez en el famoso artículo de Clark y Chalmers (1998). En este capítulo, permaneceré neutral en relación a lo que son las fronteras de la mente.

No solo en filosofía y en semiótica, sino también en psicología cognitiva, encontramos posiciones que dan importancia al espacio y a la acción en sus papeles de soporte o más bien de verdadero diseño de nuestro pensamiento. Barbara Tversky, una psicóloga que trabajó mucho en el razonamiento espacial y mediante diagramas, publicó recientemente un libro titulado *La mente en movimiento* (*Mind in Motion*), que resume gran parte de su trabajo durante años. Allí, ella introduce la noción de «*spraction*», que dejaré en inglés porque una traducción a otro idioma me parece problemática. El término *spraction* resulta de una especie de unión de las palabras inglesas *espacio* (*space*), *acción* (*action*) y *abstracción* (*abstraction*). Según la perspectiva de Tversky, algunas de nuestras acciones en el espacio son efectuadas para diseñar el mundo a nuestro alrededor, es decir, para crear configuraciones (*patterns*) abstractas que atraen los ojos y proveen de información a nuestra mente, así como a la mente de los demás; a menudo, estas acciones son abstraídas en gestos que pueden influenciar al pensamiento y dichas configuraciones, a su vez, en diagramas que expresan el pensamiento. Esta «espiral» Tversky la llama *spraction* (Tversky 2019, 277), es decir, el proceso por el cual algunas acciones en el espacio pueden expresar y crear «abstracciones», por ejemplo, en gestos que expresan «actos de pensamiento» y cuyo *patrón* espacial articula abstracciones; o también en diagramas en papel que tienen como objetivo aún más explícito el de comunicar estas abstracciones.

Hay, sin embargo, diferencias entre la categoría del *diagramático* de Krämer y la *spraction* de Tversky. Para Krämer, la existencia de un objeto concreto y público, de un artefacto representacional, es necesaria para obtener una iconicidad operativa; de hecho, para ella no es suficiente indicar que existe una *spraction*, es decir, que tal conexión cognitiva entre diferentes sistemas puede realizarse: los gestos son para Krämer demasiado volátiles para servir de herramientas cognitivas. Esta crítica compete también a la diagramación, según la cual la diferencia entre gestos y herramientas físicas no está suficientemente caracterizada. Por eso, aunque aceptamos este marco general donde los seres humanos utilizan la cognición espacial de una manera espontánea para razonar, sería necesario distinguir entre los diferentes elementos de la cognición que se movilizan en las diferentes formas de razonamiento, sus *building blocks*. Lo que voy a tratar de ofrecer en este capítulo es, en efecto, una especie de mapa del uso de la espacialidad para razonar y de las formas de razonamiento correspondientes. Para obtener esta cartografía, me concentraré en los detalles del uso de los artefactos cognitivos. Solo una vez que hayamos distinguido entre diferentes niveles podremos entender a qué nos referimos cuando decimos —si queremos

decirlo, como me parece crucial— que nosotros somos «seres espaciales» cuando se trata de considerar algunos aspectos de nuestro razonamiento.

3. ARTEFACTOS COGNITIVOS: ¿QUÉ CAMBIA?

3.1. Del laboratorio a las aulas

Para evaluar el papel de los artefactos cognitivos en nuestra cognición en situaciones «ecológicas», es decir, de la vida de todos los días, consideraré un trabajo interdisciplinar reciente y muy interesante realizado por científicos cognitivos con la ayuda de economistas (Dillon *et al.* 2017).⁴

Estos investigadores realizaron un estudio de campo de dos años a gran escala en India entre 1.540 estudiantes de guardería (*kindergarten*) del último curso. El programa pedagógico tuvo una duración de cuatro meses y la idea era precisamente realizar un programa basado en los resultados obtenidos en el laboratorio por los científicos cognitivos sobre el desarrollo muy espontáneo, si no realmente «innato» —como comúnmente dicen los científicos cognitivos—, del razonamiento numérico y espacial de los niños. Las hipótesis principales tras esta intervención eran dos: la primera, que las capacidades matemáticas «universales» y muy espontáneas de los alumnos de los grupos experimentales mejorarían con los ejercicios del programa durante los años preescolares; la segunda, que estas actividades habrían mejorado también el aprendizaje de las matemáticas de los niños en los años escolares. Sin embargo, solo la primera hipótesis fue confirmada, porque no se observaron diferencias significativas entre este grupo y el grupo de control en los años escolares. Como lo explica Scheibling-Sève en su tesis doctoral, la preparación de los niños indios para el aprendizaje de las matemáticas formales parece necesitar más que simplemente la mejora de las competencias numéricas y espaciales (Scheibling-Sève 2019). Este estudio muestra que, aun si los resultados en el laboratorio pueden parecer prometedores para avanzar los métodos de aprendizaje, todavía es necesario contrastarlos en condiciones ecológicas.

La cuestión aquí es preguntarse si el nodo teórico central no está precisamente en los artefactos cognitivos y en su papel, que los psicólogos cognitivos parecen desconocer. De hecho, no es suficiente concentrarse en la cognición numérica y geométrica espontánea, sino que sería necesario

⁴ Señalo que entre los economistas autores de este estudio está la ganadora del premio Nobel francesa Esther Dufló.

evaluar cómo los niños comprenden y se familiarizan con el uso de artefactos tales como los formalismos introducidos en los años escolares para tratar de números y de formas abstractas. Este pasaje entre la percepción del espacio a nuestro alrededor y la percepción de las propiedades de dichos objetos en cuanto representaciones espaciales que se pueden manipular para aprender algo nuevo sobre los objetos que representan, es crucial para la pedagogía de las matemáticas, y más en general para la consideración de nuestra cognición.

Es verdad que más recientemente, y a consecuencia de estos resultados decepcionantes, algunos de estos autores se han concentrado en nuevas preguntas que van precisamente en esta dirección. Por ejemplo, un nuevo experimento ha tenido como objetivo comprender si los cambios en las habilidades cartográficas de los niños, es decir, en su comprensión de la información contenida en un mapa, predicen la capacidad que tendrán de desarrollar intuiciones y razonamientos espontáneos que se alinean con la geometría euclidiana (Dillon y Spelke 2018). Mi sugerencia es entonces concentrarse en el papel de los artefactos cognitivos y en su capacidad de hacer posibles —o favorecer— formas más sofisticadas de razonamiento basadas en el espacio, así como otros elementos que se añaden y que se coordinan con ello.

En el próximo apartado volveremos a considerar este aspecto también en los estudios conocidos que se han efectuado en algunas poblaciones que tienen un lenguaje limitado para hablar de números y capacidades limitadas para reconocer formas geométricas prototípicas.

3.2. Poblaciones sin lenguaje, ¿o sin artefactos cognitivos?

Dos poblaciones amazónicas de cazadores-recolectores, los mundurukú y los pirahá, han sido ampliamente estudiadas por los investigadores interesados en la cognición matemática, por la razón de que sus idiomas tienen un vocabulario limitado. En resumen, en relación a la aritmética, estas poblaciones tienen idiomas que comprenden «uno», «dos» y «tres», y después términos que se vuelven más confusos; por ejemplo, más allá de tres encontramos en sus idiomas el equivalente de «más» o «muchos», pero nada que sea más preciso.⁵ Los investigadores querían comprender si, a pesar de que estos idio-

⁵ No puedo en este artículo entrar en los detalles del amplio corpus de la literatura en ciencia cognitiva sobre la cognición matemática, en particular sobre la aritmética. Me limitaré a citar algunos estudios importantes y muy discutidos.

mas no tienen términos apropiados, de alguna manera estas poblaciones son todavía capaces de representar en su mente cantidades más allá de tres. Efectivamente, los resultados muestran que los miembros de estas poblaciones pueden comparar y sumar —aun si no es de forma precisa, sino aproximada— números, o mejor, «numerosidades» (*numerosity*) presentadas en forma de grupos de puntos que van más allá de las cantidades para las cuales tienen términos lingüísticos. Esta es, de hecho, una capacidad que se encuentra también en adultos de cultura occidental que constituyen el grupo de control (Gordon 2004; Pica *et al.* 2004).

Resultados análogos, que nos interesan más en el contexto de este capítulo, se obtienen para la geometría, por ejemplo, en el reconocimiento de ciertas propiedades de formas bastante básicas (Dehaene *et al.* 2006). Según los experimentadores, esto demuestra que existe una capacidad «universal» que es el producto de la evolución y que es específica para el reconocimiento de numerosidades (Figura 4) y de ciertas formas geométricas (Figura 5).

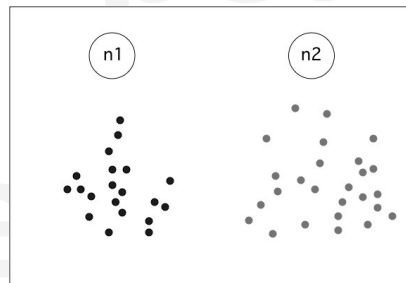


Figura 4. Un ejemplo de tarea no simbólica de comparación entre numerosidades: ¿cuál es el grupo más grande? (Fuente: Wikimedia commons)

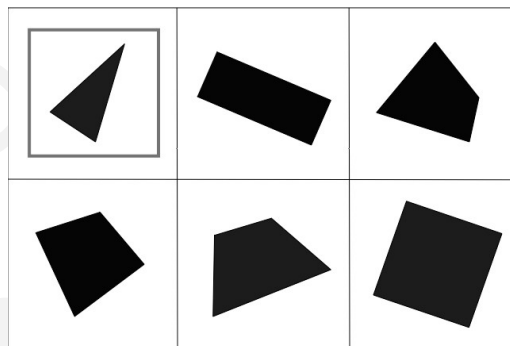


Figura 5. Un ejemplo de tarea geométrica donde el sujeto tiene que encontrar la forma «rara» o distinta. (Fuente: Wikimedia commons)

Aceptemos entonces que existe una capacidad propia de los seres humanos, y también de los niños preescolares y de algunos animales no humanos, de reconocer ciertas invariancias perceptivas en el entorno —no solo en la modalidad visual—. Esto parece indicar una capacidad que, por lo tanto, es independiente del lenguaje y la educación.⁶ Sin embargo, lo que también muestran los resultados es que estas poblaciones no son capaces de resolver tareas aritméticas «exactas» que involucren números mayores de 4 o 5; se reportan limitaciones análogas con algunas transformaciones geométricas. La hipótesis de los experimentadores es que el lenguaje se suma a los sistemas de conocimiento básico, de *core knowledge*, y que es gracias a su poder recursivo que se involucran nuevas capacidades.

Intentemos profundizar aún más. En el artículo dedicado a las bases cognitivas de la geometría, los autores mencionan muy rápidamente algo que por el contrario me parece muy importante (Dehaene *et al.* 2006). De hecho, afirman que los mundurukú, aunque habitan pueblos pequeños y relativamente lejanos entre ellos, entre los cuales se desplazan fácilmente, y aunque manipulan herramientas varias (por ejemplo, construyen canastas, hacen collares y pulseras a mano, esculpen miniaturas simbólicas) y son conocidos por sus esquemas tradicionales elaborados de pintura facial y corporal, no suelen poseer mapas ni dibujar sus casas, o más en general su entorno. A lo largo de varias visitas, los investigadores observaron solo ocasionalmente actividades espontáneas tales como el dibujo de círculos en el suelo para representar pueblos. Sin embargo, estos dibujos eran toscos y no conservaban la información métrica sobre los ángulos y las distancias entre los referentes. Por tanto, estas poblaciones, que son capaces de orientarse y de navegar en su entorno, así como de distinguir entre cantidades incluso cuando estas cantidades van más allá de aquellas para las que han introducido términos lingüísticos, y de distinguir entre formas, aparentemente no han desarrollado un sistema de representación que sea independiente de sus propios esquemas corporales. Los experimentadores hablan de miniaturas simbólicas, pero asumo que no se trata de artefactos de naturaleza cognitiva.

Así que mi hipótesis es que, para hablar de bases cognitivas de las matemáticas, estaría mejor —o por lo menos sería muy importante— concentrarnos en la existencia de artefactos cognitivos introducidos en las diferentes culturas —y que también pueden ser diferentes en las diferentes culturas— para *representar* y en particular para hacer matemáticas. En pri-

⁶ Esta tesis, que es bastante compartida, también ha sido criticada. Sin embargo, no me detendré aquí en estas críticas (véase por ejemplo Núñez 2017).

mer lugar, tenemos formas de escritura matemática y posibles formalismos que son parte de la práctica común de hacer matemáticas y que —si han sido diseñadas de manera efectiva— están en continuidad con nuestras capacidades más fundamentales, pero también introducen elementos nuevos y específicos a estas prácticas.

Este punto me parece muy importante y no suficientemente tenido en cuenta en la literatura en psicología cognitiva. A este respecto, presentaré rápidamente una anécdota.

Hace cerca de tres años, entrevisté junto a algunos colegas que investigan sobre la navegación y sus condiciones cognitivas a uno de los miembros de los yagán, una población que habita la zona sur de la Tierra del Fuego. La lengua de esta población está estudiada por los lingüistas porque aparentemente es una lengua de la que no podemos encontrar ningún linaje. Nosotros lo entrevistamos porque queríamos hacerle algunas preguntas sobre las estrategias y las técnicas de los yagán en la navegación de su territorio, que es particularmente complejo porque está constituido de muchas islas pequeñas (Figura 6).



Figura 6. La Tierra del Fuego. (Fuente: Wikimedia commons)

En su relato apareció que los jóvenes yagán aprenden a orientarse entre las islas de su tierra haciéndose a la mar en sus canoas siguiendo a sus padres, que son los expertos. Los yagán navegan de cabotaje: no dibujan mapas de los territorios y no los usarían, porque las referencias que utilizan son más bien mojones o hitos que aprenden a reconocer en el espacio que

los rodea; por ejemplo, una isla de una cierta forma o una montaña de un cierto tamaño.⁷

En esta anécdota, encontramos de nuevo capacidades espaciales de navegación que son evidentes y muy complejas, sin que impliquen la introducción de artefactos cognitivos, lo que parece sugerir que estas dos habilidades son de hecho distintas. Notamos también que el aprendizaje del cual nos habló el yagán se basa en una representación que es «egocéntrica»: los jóvenes yagán siguen a los mayores, que les muestran los hitos que ellos pueden encontrar delante, detrás, a su izquierda, a su derecha, si los canales se recorren en una dirección determinada; en cambio, carecen de un punto de vista «exocéntrico» del territorio que habitan, es decir, que esté basado en coordenadas extrínsecas como nuestras norte-sur-oeste-este.

Volveré sobre esta distinción entre representación egocéntrica y exocéntrica en el mapa sobre espacialidad y razonamiento que voy a presentar en la sección 4.

3.3. Cuando los artefactos evolucionan: un caso particular de escritura

En la sección previa hablé del papel de los artefactos cognitivos en el razonamiento. En el ejemplo de la clase de guardería india, vimos que no es suficiente considerar solo las capacidades de conocimiento de base para comprender cómo se desarrollan otras competencias matemáticas más formales. En el ejemplo de las poblaciones con lenguajes limitados, encontramos capacidades cognitivas interesantes y sofisticadas tal como la navegación de un espacio muy complejo, pero sin que eso implique competencias matemáticas más avanzadas. Ahora voy a dar un gran salto y presentar otro caso enteramente diferente de uso del espacio para razonar, que en cierto modo está en el otro extremo entre no tener artefactos cognitivos (como en los dos casos previos) y haber introducido artefactos cognitivos muy sofisticados.⁸ Menciono este caso aquí porque veremos cómo un texto —que es formal y lineal— podría desempeñar también claramente el papel de artefacto cognitivo. En consecuencia, veremos que la «iconicidad operati-

⁷ Compárese lo dicho en el capítulo anterior sobre *landmark models*, modelos de hitos.

⁸ Sin embargo, no hablaría aquí de una oposición entre un uso más básico y un uso más sofisticado del espacio, porque las capacidades cognitivas de poblaciones como los yagán me parecen ya bastante sofisticadas, aun si no estándar en comparación de las competencias que nosotros consideramos importantes en nuestra cultura occidental.

va» no se encuentra únicamente en representaciones de dos dimensiones; basta que se trate de una huella en el papel, de una forma de escritura.

Me refiero a un artículo escrito por el matemático Cédric Villani en honor de Jack Goody, antropólogo recientemente fallecido que se ha ocupado mucho de escritura (Villani 2012). En este artículo, Villani describe, entre otras cosas, el uso que los matemáticos hacen del software *TeX*. Como dice Villani, de todos los científicos, los matemáticos —en sentido amplio— son los más obsesionados con la ortografía. De hecho, este *software* ha cumplido los sueños de una gran parte de ellos que realmente quieren tener un control completo sobre el formato final de sus trabajos. Hay todavía otro aspecto del uso de *TeX* que Villani describe y que es interesante para la consideración de los artefactos cognitivos en este capítulo: a saber, que, con la práctica, a fuerza de usar *TeX*, los matemáticos incluso logran, y lo cito, arrancar *en vivo* las abstrusas fórmulas escritas en *TeX*.

Villani muestra un ejemplo de un correo electrónico entre matemáticos, donde los códigos *TeX* reemplazan las figuras, imposibles de insertar en un correo. Lo que destaca Villani de este ejemplo es que al leer las fórmulas *TeX*, un matemático va a tener «en su cabeza» no solo las fórmulas, sino también su transcripción en notación formal, y finalmente la representación mental del objeto matemático que les corresponde. El código *TeX* aquí tiene una función que es en cierto modo *meta*, porque es ciertamente una notación, una forma de escritura, pero en vez de representar un objeto abstracto como lo hace el formalismo matemático correspondiente, reemplaza a una figura, y en consecuencia la representa en cierto sentido de una manera más icónica, más directa. En otras palabras, si somos expertos, seremos capaces de interpretar el código como una representación equivalente a una figura. En este sentido, no hay diferencias teóricas entre los cuadros con flechas y el código *TeX*: los dos son artefactos cognitivos que indican un objeto abstracto y su construcción. Sin embargo, si nos concentramos en la noción de iconicidad operativa, vemos todavía que la dinamicidad de las dos representaciones no es equivalente, aun si desde el punto de vista expresivo se pueden referir al mismo objeto. Para comprender mejor este aspecto, consideraré en este contexto la noción de *affordance* que presentaré rápidamente.

El término *affordance* fue introducido por el psicólogo cognitivo James Gibson en su libro del 1979 dedicado a un enfoque «ecológico» de la visión. Allí, el psicólogo proponía una manera nueva de hacer psicología de la visión, y por eso inventa este término: para definir lo que el entorno «ofrece» al animal que lo explora, algo que en consecuencia se refiere al entorno y al mismo tiempo al animal, y que implica la complementariedad

entre los dos. Para Gibson, la física se ocupa de las propiedades del espacio, pero la psicología debería ocuparse de las *affordances*, que constituyen algo relacional entre espacio y agente; por ejemplo, una superficie puede ser considerada como horizontal, plana, extendida y rígida, pero lo que nos importa en cuanto animales es que ella puede ofrecer —*affords*— un soporte. Esta noción se integra bien con la idea de que para razonar movilizamos a menudo recursos que están ya utilizados en la percepción de nuestro entorno y también en la acción sobre él, y puede también dar un significado nuevo a la iconicidad operativa.

En mi opinión, sería efectivamente interesante utilizar el mismo término en el contexto de los artefactos cognitivos. En el caso de Villani, los códigos *T_EX* y las figuras que corresponderían a ellos son equivalentes en calidad de representaciones, pero son diferentes en relación con las *affordances* que presentan respectivamente: las figuras nos permiten imaginar o efectuar manipulaciones y, en consecuencia, operaciones matemáticas de un carácter diferente de lo que podemos imaginar en relación al código. De hecho, podemos pensar en términos de *affordances* en general para los diagramas y notaciones, y la escritura matemática en general: estos artefactos cognitivos nos invitan a cambiarlos, manipularlos de ciertas maneras. Por supuesto, el tipo de manipulaciones que se pueden realizar en una figura geométrica serían diferentes a las que se pueden realizar sobre un código *T_EX* —aunque, en cuanto artefacto cognitivo, también una fórmula *T_EX* puede abrirse a un espacio, quizás más limitado, de manipulaciones posibles—. Este elemento es importante porque muestra que también en matemáticas hay cuestiones de diseño que deben ser consideradas en vista de los objetivos y las intenciones en la introducción de ciertos objetos para razonar. Y este es el sentido más interesante de cómo podemos utilizar nuestra cognición espacial en un contexto de razonamiento.

Por supuesto, la aplicación de la noción de *affordance* a los artefactos cognitivos no es inmediata, porque tenemos que considerar al menos dos niveles de *affordances*, es decir: 1. las *affordances* muy *espontáneas* que dependen de nuestro sistema cognitivo, como por ejemplo la atención que prestamos a las simetrías; y 2. las *affordances* que provienen de la práctica y son reconocidas solo por expertos (*affordances representacionales*). Solo las segundas son específicas de los artefactos cognitivos.

Para volver a lo que decimos sobre los estudios de psicología cognitiva, vemos aquí que cuando introducimos artefactos específicos para razonar, hay diferentes maneras de recuperar nuestras competencias previas, como el reconocimiento de invariancias perceptivas. Un aspecto es la naturaleza de *iconos* de estos artefactos, que requiere percepción y acción, como su-

cede en otros casos de reconocimiento e interpretación de imágenes; otra cosa son el contexto matemático y las manipulaciones y operaciones correspondientes, que tenemos que aprender, pero que el artefacto sigue *mostrando*.

Emerge en este contexto un tema que no está suficientemente desarrollado en filosofía de las matemáticas, a saber, el del *diseño* en matemáticas: si la herramienta está *bien diseñada*, el tipo 1 y 2 de *affordances* deberían coincidir —en la medida de lo posible—. Este tema también es muy importante para la pedagogía de las matemáticas, donde el desafío es exactamente comprender cómo enseñar las buenas *affordances* y evitar que se activen las malas: los alumnos pueden de hecho dejarse engañar por las *affordances* del primer tipo, que —si el diseño del artefacto no es perfecto— no en todos los casos tienen significado matemático.

4. LOS DOS (Y MÁS) NIVELES DE USO DE LA ESPACIALIDAD PARA RAZONAR

En resumen, he presentado el marco general de diagramación y otros marcos que destacan la importancia de los artefactos cognitivos, y discutido algunos casos donde la presencia de artefactos cognitivos más o menos sofisticados cambia nuestra manera de utilizar la cognición espacial, así como de considerar el espacio de estos objetos en nuestra interacción con ellos para razonar. Basándome en los apartados previos, voy a proponer un mapa final donde presentaré de alguna manera todas las formas varias en que podemos pensar en nosotros mismos como seres espaciales, es decir, donde usamos herramientas espaciales para razonar.

Por lo tanto, consideremos el nivel (0) como el nivel que se limita al reconocimiento de invariancias en nuestro entorno —visualmente o en otras modalidades— gracias a nuestra evolución y, en consecuencia, a nuestros sistemas perceptivos. El nivel (1) sucesivo, y el primero propiamente cognitivo, porque reutilizamos nuestra cognición espacial para cumplir una tarea cognitiva, es aquel en que usamos el espacio, digamos, *en línea*, incluso si la información se almacena en la memoria.⁹ Este nivel se refiere a la

⁹ Otra cuestión que no he tratado en este artículo, y que por otro lado es un tema muy debatido en neurociencia, es cómo esta información se almacena en el cerebro y si la manera en que se almacena puede influir sobre nuestra memoria y nuestro razonamiento sobre asuntos más abstractos. Se debate la posibilidad de que los mismos circuitos neuronales que caracterizan la navegación en el espacio físico, que se acuerdan con rasgos como la

capacidad de *navegar* el espacio del entorno, no importa la dificultad si se tiene suficiente experiencia, como vimos en el caso de la anécdota sobre los yagán (o el caso del compás estelar visto en el primer capítulo). Este nivel se mantiene egocéntrico y no se introducen artefactos cognitivos para representar las invariancias perceptivas que se perciben en el entorno y sobre las cuales efectuar acciones.

El nivel (2), por otro lado, se refiere a la diagramación o a la *spraction* de Tversky. Este nivel exocéntrico está caracterizado por representaciones externas y públicas. Una cuestión crucial ulterior será la de preguntarse si estos dos elementos —la capacidad de tener representaciones mentales exocéntricas y de introducir representaciones públicas— están vinculados desde un punto de vista cognitivo. Este nivel se divide en dos subniveles: el nivel (2.1) que está caracterizado por los gestos, que son transitorios y privados,¹⁰ pero que se usan tanto para comunicar como para razonar, como sugiere Tversky; y el nivel (2.2), donde encontramos formas nuevas y más sofisticadas de diagramación determinadas por la introducción de la escritura, que cambia el panorama representacional. Estas formas pueden ser croquis (2.2.1), es decir, externalizaciones de la información más estables que los gestos, que se pueden compartir y manipular pero que siguen siendo idiosincrásicas; o diagramas (2.2.2), que son, por el contrario, representaciones duraderas y públicas, es decir, auténticos objetos culturales. Croquis y diagramas son caracterizados por una iconicidad operativa: los croquis se caracterizan por una forma de libertad que permite fácilmente una exploración y experimentación sobre lo que representan; los diagramas, como vimos, dan reglas e instrucciones sobre cómo manejarlos, pero siguen permitiendo un cierto margen de libertad y de experimentación.

Los diferentes niveles están resumidos en la lista que aparece a continuación. A partir del nivel (1) vemos en qué sentido podemos ser considerados seres espaciales, porque nos basamos —de una manera más o menos guiada por los artefactos cognitivos— en el espacio para razonar:

0. Reconocimiento de invariancias perceptivas en el entorno
1. Navegación del espacio
2. Diagramación (y *spraction*)

distancia y la dirección, constituirían la base de la navegación de espacios semánticos abstractos, incluso si tratan de categorías de objetos y se identifican a través de símbolos. Véase, por ejemplo, Viganò y Piazza (2020).

¹⁰ Con la excepción de ciertos sistemas de signos que se basan en gestos, como los lenguajes de señas, que no pertenecen a este nivel.

- 2.1. Uso de los gestos
- 2.2. Introducción de la escritura
 - 2.2.1. Croquis
 - 2.2.2. Diagramas

Sigue siendo una pregunta abierta dónde encajar las notaciones, que pueden considerarse a veces como diagramas. Creo que todavía será necesario, al menos de momento, considerar caso por caso, porque dependería de la función que cada notación tiene en el razonamiento y sobre todo de su práctica compartida de utilización y de manipulación.

5. CONCLUSIONES

He intentado en este capítulo ofrecer un marco más rico —o así lo espero— en el que se pueda comprender mejor en qué sentido la espacialidad es importante para nuestra manera de representar y de razonar, y en definitiva de estructurar nuestros pensamientos, porque nos permite explorar objetos abstractos y en algunos casos influye sobre nuestra creatividad, en constante continuidad con competencias más espontáneas que competen a la percepción y a la acción en nuestro entorno.

En este sentido, características del entorno como las *affordances* adquieren una nueva cara cuando consideramos nuevos objetos que siguen siendo concretos y espaciales, pero que están usados para representar, como algunos artefactos cognitivos. El aspecto crucial es comprender de qué manera estas capacidades evolucionan en un contexto inédito en culturas que introducen —por razones varias— este tipo de instrumentos.

Muchas cuestiones siguen estando sin respuesta; sin embargo, es importante distinguir entre dos niveles diferentes de utilización del espacio para razonar: el primero implica la capacidad de reconocer invariancias perceptivas en el entorno y de reutilizarlas para orientarse, y el segundo implica la introducción de artefactos cognitivos. El nivel 2 tiene a su vez diferentes subniveles, porque una cosa es considerar instrumentos de comunicación y de razonamiento volátiles como los gestos, y otra distinta, encontrar croquis o diagramas. El objetivo de este capítulo ha sido individuar niveles distintos y discutir para cada uno de ellos cuáles son las capacidades más espontáneas que son reclutadas cada vez. Estas cuestiones trascienden los límites disciplinares, y será necesario más trabajo para obtener un marco aún más completo.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a los participantes del taller *La génesis de la geometría* el 7 y 8 de marzo de 2022 en la Universidad de Sevilla y en particular a María de Paz y José Ferreirós por su trabajo editorial y por su paciencia con mi español. Este trabajo ha sido posible gracias al financiamiento ANR-17-EURE-0017 FrontCog.

REFERENCIAS

- CLARK, A. y CHALMERS, D. J. 1998. «The Extended Mind». *Analysis*, 58(1), 10-23.
- DEHAENE, S., IZARD, V., PICA, P. y SPELKE, E. 2006. «Core Knowledge of Geometry in an Amazonian Indigene Group». *Science*, 311 (5 759), 381-384.
- DE TOFFOLI, S. y GIARDINO, V. 2015. «An Inquiry into the Practice of Proving in Low-Dimensional Topology». *Boston Studies in the Philosophy and History of Science*, 308, 315-336.
- DILLON, M. R. y SPELKE, E. S. 2018. «From Map Reading to Geometric Intuitions». *Developmental Psychology*, 54(7), 1304-1316.
- DILLON, M. R., KANNAN, H., DEAN, J. T., SPELKE, E. S. y DUFLO, E. 2017. «Cognitive science in the field: A preschool intervention durably enhances intuitive but not formal mathematics». *Science*, 357(6346), 47-55.
- GIARDINO, V. 2014. «Diagramming: Connecting Cognitive Systems to Improve Reasoning». En A. Benedek y K. Nyíri. 2014. *Visual Learning, vol. 4: Emotion, Expression, Explanation*. Frankfurt/M, Peter Lang Verlag, 23-34.
- GORDON, P. 2004. «Numerical Cognition Without Words: Evidence From Amazonia». *Science*, 306(5695), 496-499.
- NÚÑEZ, R. E. 2017. «Is There Really an Evolved Capacity for Number?». *Trends in Cognitive Science*, 21(6), 409-424.
- PICA, P., LEMER, C., IZARD, V. y DEHAENE, S. 2004. «Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group». *Science*, 306(5695), 499-503.
- SHEIBLING-SÈVE, C. 2019. *Développer l'esprit critique par la catégorisation multiple*. Tesis doctoral.
- TVERSKY, B. 2019. *Mind in motion: how action shapes thought*. New York, Basic Books.
- VIGANÒ, S. y PIAZZA, M. 2020. «Distance and direction codes underlie navigation of a novel semantic space in the human brain». *Journal of Neuroscience*, 40 (13), 2727-2736.
- VILLANI, C. 2012. «L'écriture des mathématiciens». En É. Guichard (ed.). 2012. *Écritures: sur les traces de Jack Goody*. Enssib.