



**HAL**  
open science

# Traiter les Incohérences dans les Préférences (numériques) à l'aide de la Théorie des Possibilités

Loïc Adam, Sébastien Destercke

► **To cite this version:**

Loïc Adam, Sébastien Destercke. Traiter les Incohérences dans les Préférences (numériques) à l'aide de la Théorie des Possibilités. 32èmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2023), Nov 2023, Bourges, France. hal-04336844

**HAL Id: hal-04336844**

**<https://hal.science/hal-04336844v1>**

Submitted on 11 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Traiter les Incohérences dans les Préférences (numériques) à l'aide de la Théorie des Possibilités

Loïc Adam<sup>1</sup>

Sébastien Destercke<sup>1</sup>

<sup>1</sup> UMR CNRS 7253 Heudiasyc, Sorbonne Université, Université de Technologie de Compiègne  
CS 60319 - 60203 Compiègne cedex, France, {loic.adam, sebastien.destercke}@hds.utc.fr

## Résumé :

Recueillir les préférences d'une utilisatrice afin de faire des recommandations correctes est une tâche difficile dès lors que cette utilisatrice est incertaine de ses choix. En utilisant la théorie des possibilités comme moyen de modéliser et de détecter cette incertitude, nous proposons dans cet article des méthodes basées sur la fusion d'informations dans le but d'inférer malgré les incohérences observées dues aux erreurs de l'utilisatrice. Bien que notre approche soit générale, nous illustrons ses avantages potentiels sur des expériences synthétiques avec des moyennes pondérées comme modèle de préférence.

## Mots-clés :

Préférences, Incohérence, Fusion d'information, Théorie des possibilités.

## Abstract:

Gathering the preferences of a user in order to make correct recommendations becomes a difficult task when said user is uncertain of her choices. Using possibility theory as a means of modelling and detecting this uncertainty, we propose in this paper methods based on information fusion to make inferences despite observed inconsistencies due to user errors. While our approach is general, we illustrate its potential benefits on synthetic experiments using weighted averages as preference models.

## Keywords:

Preferences, Inconsistency, Information Fusion, Possibility.

## 1 Introduction

Cet article se concentre sur le traitement de l'incertitude et de l'incohérence dans les préférences observées d'une utilisatrice en aide à la décision multicritère. Traditionnellement, l'incertitude et l'incohérence dans les préférences d'une seule utilisatrice sont traitées par des approches ensemblistes, en s'appuyant sur des techniques telles que le regret min-max (par exemple [3]); ou par des calculs d'erreur moyenne (par exemple [5]). Cependant, les approches ensemblistes reposent sur l'hypothèse forte que l'utilisatrice et le choix du modèle sont toujours corrects, tandis que les méthodes probabilistes manquent de garanties fortes, justifiant de nouvelles approches.

Nous explorons une troisième approche basée sur la théorie des possibilités [9] pour traiter des informations préférentielles incertaines. Cette approche reste cohérente avec une approche basée sur les ensembles tout en fournissant une quantification non binaire de l'incohérence. Elle fournit également divers outils pour traiter l'incohérence, en étendant les opérations ensemblistes et logiques telles que la conjonction et la disjonction [8]. Bien que l'utilisation des possibilités pour les préférences ne soit pas nouvelle [17], notre contribution l'enrichit en utilisant la fusion d'informations pour traiter l'incohérence et par des expériences synthétiques.

La Section 2 décrit notre cadre possibiliste. La Section 3 fournit des stratégies pour traiter l'inconsistance de l'utilisatrice. La Section 4 présente quelques expériences démontrant l'intérêt potentiel de notre approche.

## 2 Modélisation Possibilistique

### 2.1 Préférences et Modèles de Préférence

Dans cet article, nous considérons des alternatives multicritères. L'espace des alternatives est un produit cartésien  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^M \mathcal{X}_i$  où  $\mathcal{X}_i$  est le domaine des valeurs que le  $i$ ème critère peut prendre. Ce domaine peut être discret ou continu. Nous supposons également que les préférences des utilisatrices peuvent être décrites par un modèle  $\omega \in \Omega$ , l'ensemble des modèles  $\Omega$  étant choisi par l'analyste. Chaque modèle  $\Omega$  induit alors un préordre partiel<sup>1</sup> sur l'ensemble des alternatives. Nous nous référons à [16] pour une liste de modèles possibles.

1. Une relation transitive et antisymétrique sur  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ .

Dans ce travail, nous nous concentrons sur les modèles numériques, où  $\omega : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction à valeurs réelles<sup>2</sup> qui associe toute alternative  $x \in \mathbb{X}$  à une valeur correspondante  $\omega(x)$ . Pour plus de facilité, nous désignons également par  $x \succeq_\omega y$  la relation  $\omega(x) \geq \omega(y)$ . Toutefois, plusieurs idées exposées dans ce papier s'appliquent également au cas où  $\omega$  n'est pas un modèle numérique.

**Exemple 1** Une utilisatrice souhaite acheter du fromage, et nous supposons qu'elle évalue un fromage selon deux critères : la saveur et le prix. Si les préférences de l'utilisatrice sont décrites par une somme pondérée avec les paramètres (0.6, 0.4), nous obtenons les scores présentés dans le Tableau 1. La mozzarella est son alternative préférée (meilleur score).

Nom	Goût	1/Prix	Score
Cheddar	0	10	4
Emmental	4	6	4.8
Edam	5	5	5
Mozzarella	7	3	5.4
Brie	8	1	5.2

TABLEAU 1 – Ensemble des alternatives  $\mathbb{X}$  et leurs scores, avec  $\omega = (0.6, 0.4)$

## 2.2 Rappels en Théorie des Possibilités

Une distribution de possibilités  $\pi$  sur un espace  $\Omega$  est une application  $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  où  $\pi(\omega)$  mesure le degré de plausibilité de  $\omega$ . Une distribution  $\pi$  est *consistante* si  $\max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$ , c.-à-d. si au moins un élément est entièrement plausible. À partir de  $\pi$ , on peut définir deux mesures pour tout sous-ensemble  $A \subseteq \Omega$ , appelées mesures de possibilité et de nécessité :

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega), \quad N(A) = 1 - \sup_{\omega \notin A} \pi(\omega). \quad (1)$$

$\Pi$  et  $N$  sont duales, car  $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ . Par conséquent, il suffit de travailler avec l'une

2. Pour simplifier, nous utiliserons la même notation pour la fonction et ses paramètres  $\omega$ .

d'entre elles pour chaque événement  $A$ . La théorie des possibilités étend formellement les ensembles, puisque l'information donnée par un sous-ensemble  $E$  est modélisée par la distribution  $\pi(\omega) = 1$  si  $\omega \in E$ , zéro sinon. Lorsque  $\pi$  est cohérent, la mesure  $N(A)$  induit l'ensemble probabiliste  $\mathcal{P} = \{P | N(A) \leq P(A), \forall A \subseteq \Omega\}$ .

Une autre notion importante en théorie des possibilités est la coupe alpha. Étant donné une distribution de possibilités  $\pi$ , sa coupe alpha  $\pi_\alpha$  est le sous-ensemble

$$\pi_\alpha = \{\omega \in \Omega : \pi(\omega) \geq \alpha\}, \quad (2)$$

qui inclut tous les éléments de  $\Omega$  ayant un degré de possibilité supérieur à  $\alpha$ .

Étant donné une fonction à valeurs réelles  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et en supposant que la distribution  $\pi$  prenne un nombre fini de valeurs distinctes  $1 = \alpha_1 > \dots > \alpha_n > \alpha_{n+1} = 0$  (ce qui sera le cas dans ce papier), les espérances inférieure et supérieure  $\underline{\mathbb{E}}_\pi(f)$ ,  $\overline{\mathbb{E}}_\pi(f)$  de  $f$  induites par une distribution  $\pi$  peuvent être calculées comme suit :

$$\underline{\mathbb{E}}_\pi(f) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \min_{\omega \in \pi_{\alpha_i}} f(\omega), \quad (3)$$

$$\overline{\mathbb{E}}_\pi(f) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \max_{\omega \in \pi_{\alpha_i}} f(\omega). \quad (4)$$

Nous considérons également des distributions de possibilités non normalisées  $\pi$  telles que  $\max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) < 1$ . Dans ce cas, l'incohérence peut se mesurer comme

$$\text{Inc}(\pi) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega). \quad (5)$$

## 2.3 Préférences et Possibilités

Nous considérons des informations élémentaires  $(E, \alpha)$ , où  $E \subseteq \Omega$  est un sous-ensemble de modèles possibles et  $\alpha$  est le degré de certitude que l'assertion  $E$  soit vraie, avec  $N(E) \geq \alpha$ . Nous avons alors la distribution de possibilités la moins informative  $\pi_{(E, \alpha)}$  respectant  $N(E) \geq \alpha$  :

$$\pi_{(E, \alpha)}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in E, \\ 1 - \alpha & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

En particulier,  $\alpha = 1$  correspond à l'information  $\omega \in E$ , tandis que  $\alpha = 0$  équivaut à de l'ignorance. L'équation (6) peut être interprétée comme une information en logique possibiliste [10], et la plupart des outils et raisonnements utilisés dans cet article pourraient être interprétés à travers cette logique<sup>3</sup>.  $E$  est typiquement un sous-ensemble de modèles possibles résultant d'une réponse de l'utilisatrice.

**Exemple 2** *Étant donné l'Exemple 1 et le Tableau 1, supposons que l'utilisatrice déclare Brie  $\succeq_\omega$  Emmental avec un degré de certitude  $\alpha_1 = 0.8$ , nous obtenons la frontière de décision suivante :*

$$\omega(\text{Brie}) \geq \omega(\text{Emmental}) \Rightarrow 4\omega^1 \geq 5\omega^2, \quad (7)$$

correspondant à l'information fournie sur la Figure 1.

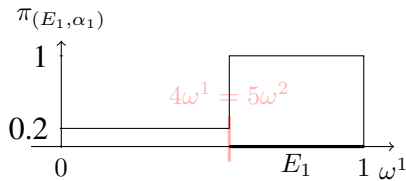


FIGURE 1 – Information préférentielle  $\pi_{(E_1, \alpha_1)}(\omega)$  de l'Exemple 2

Dans cet article, nous considérons qu'une information élémentaire  $E_i$  est le résultat d'une comparaison d'une paire d'alternatives  $(x, y) \in \mathbb{X}^2$ , où l'utilisatrice peut déclarer  $x \succeq y$  ou  $y \succeq x$ .  $E_i$  correspondra alors aux modèles satisfaisant la réponse donnée.

En pratique, nous recueillons plusieurs informations  $(E_i, \alpha_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , au cours du processus d'élicitation, chaque information correspondant à une distribution  $\pi_{(E_i, \alpha_i)}$ . Notons que ces  $E_i$  définissent une partition finie  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_P\}$  de  $\Omega$  où  $\Omega_j$  est du type  $\bigcap_{\phi_i \in \{E_i, E_i^c\}} \phi_i$ . Les distributions  $\pi_{(E_i, \alpha_i)}$  peuvent alors être combinées ou

3. Il ne faut pas confondre avec la logique possibiliste utilisée pour représenter les préférences [4], où les  $\alpha_i$  représentent les intensités des préférences.

fusionnées en une seule distribution en étendant les opérateurs d'ensemble classiques tels que la conjonction (ET logique) et la disjonction (OU logique). L'utilisation de ces opérateurs permet également une interprétation plus facile des opérations effectuées [7, 15, 8]. En particulier, si nous n'avons aucune raison de penser que les éléments d'information  $\pi_{(E_i, \alpha_i)}$  ne sont pas fiables, la manière la plus sensée de les combiner est la conjonction, ce qui, dans la théorie des possibilités, se fait généralement par l'utilisation d'un opérateur T-norme [14]. Notre objectif n'étant pas de discuter ici des avantages et des inconvénients des différentes T-normes, nous nous concentrerons sur la T-norme produit, qui donne lieu à la distribution  $\pi_\cap$  telle que  $\pi_\cap(\omega) = \prod_{i=1}^n \pi_{(E_i, \alpha_i)}(\omega)$ .

## 2.4 Apparition d'Erreurs

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, les approches d'élicitation ensemblistes ont des garanties fortes, sous réserve que les informations fournies par l'utilisatrice sont correctes. Or, ces hypothèses sont souvent irréalistes, d'où la nécessité de prendre en compte les erreurs avec une modélisation de l'incertitude. Comme nous l'avons déjà montré dans un précédent travail [1], l'utilisation de la théorie des possibilités est une solution intéressante à ce problème, comme le montre l'Exemple 3. Ainsi, l'utilisation d'une approche possibiliste nous permet d'enrichir les approches ensemblistes tout en restant cohérent avec elles (cas  $\alpha = 1$ ). Cela contraste avec les approches probabilistes, où l'augmentation de la plausibilité de certains modèles entraîne nécessairement la diminution de la plausibilité d'autres modèles.

**Exemple 3** *Nous prenons l'Exemple 2 avec deux modifications mineures, mais importantes : nous ne considérons pas une information possibiliste, et l'utilisatrice fait l'affirmation erronée que Brie  $\preceq$  Emmental. Nous déterminons que  $E_1$  est désormais  $\{\omega \in \Omega : 4\omega^1 \leq 5\omega^2\}$ .*

Comme le montre la Figure 2, le vrai modèle est définitivement exclu de  $E_1$ . Quelles que soient

les réponses suivantes, nous ne pouvons pas atteindre  $\omega^*$ . Maintenant, si l'utilisatrice fournit un degré de certitude  $\alpha_1 = 0,7$ , nous obtenons la distribution illustrée sur la Figure 3, et  $\omega^*$  est toujours accessible avec d'autres questions.

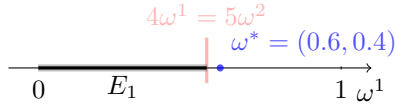


FIGURE 2 – Une mauvaise réponse influence négativement la recherche du modèle

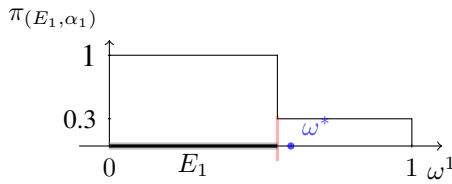


FIGURE 3 – Information préférentielle possibiliste

### 3 Gérer l'Incohérence

Avec l'approche possibiliste, les distributions de possibilités quantifient progressivement l'incohérence, plutôt que d'avoir une information "tout ou rien" comme le font les approches ensemblistes. Dans cette section (et dans la suite), nous supposons que les erreurs proviennent uniquement de l'utilisatrice et nous examinons les stratégies possibles pour traiter ces erreurs dans le cadre de la théorie des possibilités et des outils de fusion d'informations qui y sont associés. Concrètement, nous examinons le cas où  $\pi_\cap$  est sous-normalisé, c.-à-d.  $\text{Inc}(\pi_\cap) > 0$ .

#### 3.1 Inférer malgré l'Incohérence

L'existence d'incohérence ( $\text{Inc}(\pi_\cap) > 0$ ) implique que  $E_{\pi_\cap}^1 = \emptyset$ . Pour faire des déductions sur  $f(\omega)$  dans les équations (3)-(4) sans corriger les incohérences, nous devons alors définir des minima et des maxima sur l'ensemble vide. Bien qu'il existe une infinité de stratégies, les deux suivantes sont des solutions classiques :

1. Considérer que  $\min_{\omega \in \emptyset} f(\omega) = \max_{\omega \in \emptyset} f(\omega) = 0$  (ignorer les informations incohérentes). Cette solution ressemble dans une certaine mesure aux procédures d'inférence de la logique possibiliste en présence d'incohérence [10].
2.  $\min_{\omega \in \emptyset} f(\omega) = \min_{\omega \in \Omega} f(\omega)$  et  $\max_{\omega \in \emptyset} f(\omega) = \max_{\omega \in \Omega} f(\omega)$  (transformer le conflit en ignorance et à avoir une vision très conservatrice ou optimiste de la situation). C'est une normalisation spécifique des distributions de possibilités en prenant  $\pi' = \pi + \text{Inc}(\pi_\cap)$ .

Cette façon de résoudre les incohérences ne modifie pas les réponses et les informations données précédemment, ni la façon dont nous les combinons (conjonction). Cette approche évite en quelque sorte de rechercher les sources d'incohérence et les ignore ou les transforme en ignorance (un concept différent de l'inconsistance). Par conséquent, ces stratégies semblent légitimes lorsque l'incohérence est susceptible d'être limitée et qu'il n'est pas nécessaire d'analyser le conflit.

#### 3.2 Résoudre l'Incohérence par la Fusion d'Information

Cette fois-ci, nous combinons différemment les éléments d'information, de sorte que l'incohérence disparaisse. Une telle approche ne modifie pas les informations préférentielles que nous recevons. Par exemple, une règle conjonctive aboutissant à  $\pi_\cap$  suppose que toutes les informations sont fiables ; or si  $\text{Inc}(\pi_\cap) > 0$ , cette hypothèse n'est pas vraie, justifiant de nouvelles règles de fusion.

Par rapport aux approches de la Sous-section 3.1, modifier la façon dont nous combinons les informations est généralement plus intensif en termes de calcul, mais présente l'avantage de fournir potentiellement des informations intéressantes à l'utilisatrice ou à l'analyste, par exemple en nous donnant une limite inférieure du nombre d'erreurs commises, ou en nous donnant un sous-

ensemble de réponses à examiner avec l'utilisatrice.

$\ell$ -**parmi- $k$** . En modélisation des préférences, il est raisonnable de supposer que la plupart des réponses de l'utilisatrice soient correctes, mais pas toutes (sinon elles seraient cohérentes). Il est donc naturel d'utiliser un opérateur de fusion considérant la plupart des informations initiales comme vraies (mais pas nécessairement toutes). Comme il est également difficile de savoir quelle réponse est erronée, il est naturel d'envisager des opérateurs qui traitent les sources de manière anonyme (c.-à-d. dont le résultat est invariant sous la permutation des indices). Si  $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$  sont les informations considérées, alors nous avons :

$$\pi_{\ell/k}(\omega) = \bigcup_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}, |\mathcal{L}|=\ell} \left( \bigcap_{\pi_i \in \mathcal{L}} \pi_i(\omega) \right), \quad (8)$$

où  $\cup$  et  $\cap$  sont remplacés par une T-norme et une T-conorme duale. Cet opérateur de fusion est un exemple d'opérateur des  $k$ -quota [8], appliqué à la théorie des possibilités. Idéalement, une réparation minimale devrait consister à trouver une valeur  $\ell$  la plus proche possible de  $k$ . Nous proposons ici une méthode efficace pour déterminer une telle valeur, en supposant que pour chaque élément  $\Omega_i$  de la partition  $\Omega_1, \dots, \Omega_P$  mentionnée dans la Section 2.3, nous avons un vecteur associé  $\vec{\pi}_i = (\pi_1(\Omega_i), \dots, \pi_k(\Omega_i))$ .

L'algorithme 1 fournit un moyen efficace de trouver  $\ell^*$  et est basé sur l'idée simple que  $\pi_{\ell/k}$  sera normalisé s'il existe un élément  $\Omega_i$  pour lequel au moins  $\ell$  degrés de possibilité ont une valeur de un. L'algorithme 1 consiste alors à trouver la plus grande valeur satisfaisant cette contrainte. Il est d'une complexité linéaire en fonction du nombre  $P$  d'éléments, et donc assez rapide une fois que  $P$  est fixé.

**Sous-Ensembles Cohérents Maximaux.** Une autre stratégie consiste à utiliser la notion des sous-ensembles cohérents maximaux (MCS) [7]. Dans notre contexte, et étant donné un en-

---

**Algorithme 1 :** Algorithme pour trouver  $\ell^*$

---

**Données :** Sources  $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$

**Résultat :**  $\ell^*$  maximal avec  $\pi_{\ell^*/k}$  cohérent

$\ell^* = k$ ;

**pour**  $i \in \{1, \dots, P\}$  **faire**

**si**  $|\{\pi_i(\Omega_j) : \pi_i(\Omega_j) = 1, i =$

$1, \dots, k\}| < \ell^*$  **alors**

$\ell^* = |\{\pi_i(\Omega_j) : \pi_i(\Omega_j) = 1, i =$

$1, \dots, k\}|$

**fin**

**fin**

---

semble  $\mathcal{S} = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$  d'informations, nous définissons un sous-ensemble  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}$  comme un MCS si le résultat  $\pi_{\mathcal{L}} = \bigcap_{\pi_i \in \mathcal{L}} \pi_i$  de leur combinaison est tel que  $\text{Inc}(\pi_{\mathcal{L}}) = 0$  et  $\text{Inc}(\pi_{\mathcal{K}}) > 0$  pour tout  $\mathcal{K} \supset \mathcal{L}$ .

Une façon classique de rétablir la cohérence par la fusion d'informations, basée sur la logique [18], consiste simplement à considérer tous les MCSs et à prendre les disjonctions des MCSs. Néanmoins, une fusion basée sur les MCSs donnera généralement des résultats assez imprécis en présence de valeurs aberrantes ou d'erreurs. Dans notre contexte, il semble plus naturel de ne considérer qu'un seul MCS, dont on espère qu'il contiendra toutes les réponses correctes de l'utilisatrice.

Lister tous les MCSs peut être très coûteux : contrairement à l'Algorithme 1, nous devons considérer tous les sous-ensembles d'informations possibles : au pire  $2^K$  sous-ensembles. Si le nombre d'informations reste raisonnable, il est possible néanmoins de lister tous les MCSs. En supposant que la plupart des informations soient correctes, considérer les MCSs de taille  $\ell^*$  semblerait raisonnable. Cependant, bien que cette heuristique puisse être intéressante lorsqu'elle est associée au degré de confiance moyen, elle ne donne généralement pas le MCS le plus intéressant (Sous-section 4.4).

## 4 Expériences

### 4.1 Règles de Décision

De nombreuses règles de décision existent lors qu'on utilise la théorie des possibilités [12]. Étant donné un sous ensemble  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$  d'alternatives disponibles, l'objectif des règles de décision que nous considérons est de faire une recommandation  $x^* \in \mathbb{A}$ . Étant donné une alternative  $x$  et un modèle  $\omega$ , la fonction  $\omega(x)$  fournit une évaluation de la qualité de  $x$ . Nous considérons trois règles de décision :

- Maximin, adoptant un point de vue pessimiste et fournissant des recommandations prudentes :  

$$x_{Mm}^* = \arg \max_{x \in \mathbb{A}} \underline{\mathbb{E}}_{\pi}(\omega(x)),$$
- Maximax, adoptant un point de vue optimiste :  $x_{MM}^* = \arg \max_{x \in \mathbb{A}} \overline{\mathbb{E}}_{\pi}(\omega(x)),$
- Regret Minimax, moins conservateur que Maximin, fournissant toujours des recommandations plutôt prudentes. Couramment utilisé dans les problèmes de recommandation (par exemple [3]) :  

$$x_{mMR}^* = \arg \min_{x \in \mathbb{A}} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \max_{y \in \mathbb{A}} [\max_{\omega \in \pi_{\alpha_i}} (\omega(y) - \omega(x))].$$

### 4.2 Protocole Expérimental

Nous simulons 50 alternatives multicritères. Chaque alternative possède quatre critères avec  $\mathcal{X}_i = [0, 1]$ . Pour chaque alternative  $x$ ,  $x_i \sim U(0, 1)$  et  $\sum_{i=1}^4 x_i \approx 2$  (elles ne sont donc pas dominées au sens de Pareto). Le modèle  $\omega^*$  de l'utilisatrice (un ensemble de poids dont la somme est égale à un) est généré aléatoirement selon une distribution de Dirichlet avec l'hyperparamètre  $(1, 1, 1, 1)$ , ce qui garantit un échantillonnage uniforme des modèles.

Pour simuler un processus d'élicitation, nous choisissons 15 paires d'alternatives. Dans les expériences ci-dessous, les degrés de certitude  $\alpha_i$  fournis avec chaque réponse sont générés aléatoirement selon une loi bêta  $\mathcal{B}(7, 2)$ , correspondant à un scénario optimiste où l'utilisatrice est sûre de ses choix. Pour modéliser

l'incertitude de l'utilisatrice, compte tenu d'un degré de certitude  $\alpha_i$ , nous considérons qu'elle répond correctement avec une probabilité  $\alpha_i$ , et aléatoirement (donc parfois correctement) avec une probabilité  $1 - \alpha_i$ . Globalement, l'utilisatrice a une probabilité finale de  $\alpha_i + \frac{(1-\alpha_i)}{2}$  de répondre correctement. Les simulations sont répétées 300 fois pour avoir un échantillon de taille raisonnable, et nous ne considérons que les expériences avec des erreurs.

### 4.3 Nombre d'erreurs détectées

Nous voulons d'abord voir si l'Algorithme 1 est capable de détecter le nombre de réponses incorrectes. Nous n'avons aucune information sur la véracité d'une réponse.

	Nombre erreurs					
Détectées	1	2	3	4	5	6
4					2	
3			8	8	3	
2		23	24	9	1	1
1	84	38	24	5	1	
0	54	12	2	1		

TABLEAU 2 – Nombre d'erreurs détectées en fonction du nombre réel d'erreurs

Le Tableau 2 montre la différence entre le nombre réel de réponses incorrectes et le nombre  $\ell$  renvoyé par l'algorithme 1. La différence s'explique facilement : une mauvaise réponse ne contredit pas nécessairement toutes les bonnes réponses, et ne crée pas automatiquement des incohérences (par exemple la première réponse est fausse). Plus le nombre d'erreurs est élevé, plus il est difficile d'évaluer correctement le nombre d'erreurs : plus il y a d'erreurs, plus elles sont susceptibles d'être cohérentes entre elles.

### 4.4 Approches pour Gérer l'Incohérence et Règles de Décision

Un modèle numérique nous permet de mesurer facilement la performance de chaque ap-

proche. Nous calculons pour chaque répétition<sup>4</sup> la moyenne du regret réel  $R_{\omega_i}(x^*, x_i^{\text{opt}}) = \omega(x_i^{\text{opt}}) - \omega(x^*)$  entre l'alternative  $x^*$  recommandée par la méthode et  $x_i^{\text{opt}}$  la meilleure alternative selon le vrai modèle  $\omega_i$  d'une expérience. Nous notons cette moyenne par  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{\omega_i}(x^*, x_i^{\text{opt}})$ . Nous déterminons aussi un intervalle de confiance IC =  $[\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S^*}{\sqrt{n}}]$  sur  $\bar{x}$ ,  $S^*$  étant l'écart type corrigé des regrets réels, avec  $\alpha = 0.05$  et  $n = 231$ .

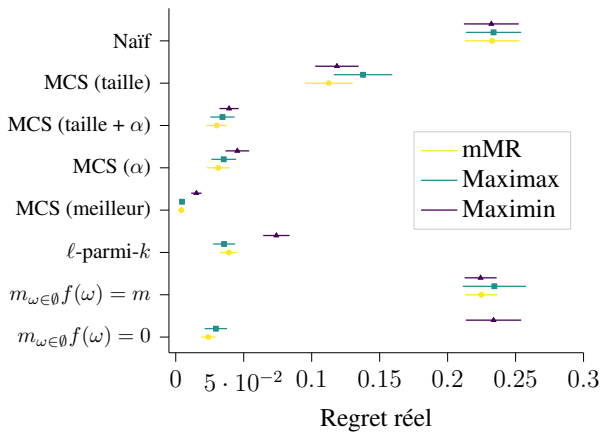


FIGURE 4 – Intervalles de confiance sur le regret

Nous voulons savoir s'il existe une différence, en termes de qualité de recommandation, entre le simple traitement de l'incohérence par la redéfinition de  $\min_{\omega \in \emptyset} f(\omega)$  et  $\max_{\omega \in \emptyset} f(\omega)$ , et l'utilisation de stratégies de fusion plus élaborées. La Figure 4 résume les résultats obtenus en comparant les redéfinitions de la Section 3.1 aux approches de fusion de la Section 3.2. Nous avons également ajouté une méthode naïve de restauration de la cohérence, relâchant les contraintes linéaires obtenues à partir de chaque réponse jusqu'à retour de la cohérence. Nous avons utilisé différentes heuristiques pour choisir un MCS (une sans les degrés de confiance, deux avec), ainsi que sélectionné le MCS qui minimise vraiment le regret réel.

Nous pouvons voir sur ce graphique que ne pas tenir compte des degrés d'incerti-

4. Nous ne gardons que les répétitions dans lesquelles de l'incohérence a été détectée, soit 231 répétitions.

tude (les premières lignes) tend à donner de moins bons résultats, de même que transformer l'incohérence en ignorance (avant-dernière ligne), bien qu'il s'agisse d'une stratégie courante. Ignorer l'incohérence ( $\min_{\omega \in \emptyset} f(\omega) = \max_{\omega \in \emptyset} f(\omega) = 0$ ) donne de bien meilleurs résultats, mais qui ne sont pas robustes à toutes les règles de décision. En revanche, l'utilisation de règles de fusion pour traiter les incohérences permet d'obtenir des résultats satisfaisants et stables pour toutes les règles de décision. Outre cette stabilité, ces règles de fusion fournissent également des informations supplémentaires à l'utilisatrice, telles qu'une estimation du nombre d'erreurs ou des ensembles de réponses intéressants (MCS) à examiner.

Ces résultats encourageants devraient être validés par d'autres expériences synthétiques ou réelles, les résultats actuels étant seulement basés sur des paires aléatoires d'alternatives.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons abordé l'intégration des incertitudes dans les informations préférentielles avec la théorie des possibilités. Nos expériences confirment les avantages potentiels de nos approches et certaines limites.

Plusieurs aspects peuvent être facilement étendus dans d'autres cadres. Cela inclut les problèmes combinatoires multiobjectifs [2], des modèles numériques plus complexes comme les intégrales de Choquet [3, 13], ou encore des tâches telles que le classement d'alternatives ou leur tri dans des catégories ordonnées (par exemple [6, Ch. 7]).

Enfin, notre cadre présente des similitudes avec la logique possibiliste. Il serait donc très intéressant de voir comment le traitement de l'incohérence dans ces logiques [11] peut aider notre cadre actuel.

### Remerciements :

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet Pre-Serve, financé par la subvention ANR-18-CE23-0008 de l'Agence nationale de la recherche (ANR).



## Références

- [1] L. Adam and S. Destercke. Possibilistic preference elicitation by minimax regret. In *Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 718–727. PMLR, 2021.
- [2] N. Benabbou and P. Perny. Interactive resolution of multiobjective combinatorial optimization problems by incremental elicitation of criteria weights. *EURO journal on decision processes*, 6(3) :283–319, 2018.
- [3] N. Benabbou, P. Perny, and P. Viappiani. Incremental elicitation of choquet capacities for multicriteria choice, ranking and sorting problems. *Artificial Intelligence*, 246 :152–180, 2017.
- [4] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Towards a possibilistic logic handling of preferences. In *Aiding Decisions with Multiple Criteria*, pages 315–337. Springer, 2002.
- [5] N. Bourdache, P. Perny, and O. Spanjaard. Incremental elicitation of rank-dependent aggregation functions based on bayesian linear regression. In *IJCAI-19-Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 2023–2029. International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, 2019.
- [6] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, A. Tsoukias, and P. Vincke. *Evaluation and decision models with multiple criteria : Stepping stones for the analyst*, volume 86. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] S. Destercke, D. Dubois, and E. Chojnacki. Possibilistic information fusion using maximal coherent subsets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(1) :79–92, 2008.
- [8] D. Dubois, W. Liu, J. Ma, and H. Prade. The basic principles of uncertain information fusion. an organised review of merging rules in different representation frameworks. *Information Fusion*, 32 :12–39, 2016.
- [9] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory : qualitative and quantitative aspects. In *Quantified representation of uncertainty and imprecision*, pages 169–226. Springer, 1998.
- [10] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy sets and Systems*, 144(1) :3–23, 2004.
- [11] D. Dubois and H. Prade. Inconsistency management from the standpoint of possibilistic logic. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 23(Suppl. 1) :15–30, 2015.
- [12] N. Huntley, R. Hable, and M. C. Troffaes. Decision making. *Introduction to imprecise probabilities*, pages 190–206, 2014.
- [13] H. Martin and P. Perny. Incremental preference elicitation with bipolar choquet integrals. In *International Conference on Algorithmic Decision Theory*, pages 101–116. Springer, 2021.
- [14] R. Mesiar. Triangular norms—an overview. *Computational intelligence in theory and practice*, pages 35–54, 2001.
- [15] F. Pichon, S. Destercke, and T. Burger. A consistency-specificity trade-off to select source behavior in information fusion. *IEEE transactions on cybernetics*, 45(4) :598–609, 2014.
- [16] G. Pigozzi, A. Tsoukias, and P. Viappiani. Preferences in artificial intelligence. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 77(3) :361–401, 2016.
- [17] H. Prade, A. Rico, M. Serrurier, and E. Ruffaste. Eliciting sugeno integrals : Methodology and a case study. In *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, pages 712–723. Springer, 2009.
- [18] N. Rescher and R. Manor. On inference from inconsistent premisses. *Theory and decision*, 1(2) :179–217, 1970.