



**HAL**  
open science

# Élicitation possibiliste de préférences avec un regret Minimax

Loïc Adam, Sébastien Destercke

► **To cite this version:**

Loïc Adam, Sébastien Destercke. Élicitation possibiliste de préférences avec un regret Minimax. 30èmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2021), Oct 2021, Paris, France. hal-04336825

**HAL Id: hal-04336825**

**<https://hal.science/hal-04336825v1>**

Submitted on 11 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Élicitation possibiliste de préférences avec un regret Minimax

Loïc Adam<sup>1</sup>

Sébastien Destercke<sup>1</sup>

<sup>1</sup> UMR CNRS 7253 Heudiasyc, Sorbonne Université, Université de Technologie de Compiègne  
CS 60319 - 60203 Compiègne cedex, France, {loic.adam, sebastien.destercke}@hds.utc.fr

## Résumé :

Identifier les préférences d'un utilisateur à partir d'une élicitation est une part centrale de l'aide à la décision multicritère (MCDA) ou de l'apprentissage de préférences. L'élicitation incrémentale de préférences à partir d'une approche robuste est une méthode classique. L'approche robuste propose des garanties fortes sous réserve de vérification d'hypothèses fortes, mais ne peut pas intégrer des informations incertaines. Dans cet article, nous proposons et testons une méthode basée sur la théorie des possibilités, qui garde les garanties de l'approche robuste, sans ses hypothèses fortes. Nous montrons notamment que notre approche permet de détecter les erreurs et les modèles erronés.

## Mots-clés :

théorie des possibilités, élicitation de préférences, décision multicritère.

## Abstract:

Identifying the preferences of a user through elicitation is a central part of multi-criteria decision aid (MCDA) or preference learning tasks. Incremental elicitation through a robust approach is a classic method. The robust approach has strong guarantees through very strong hypotheses, but cannot integrate uncertain information. In this paper, we propose and test a method based on possibility theory, which keeps the guarantees of the robust approach without needing its strong hypotheses. Among other things, we show that it can detect user errors as well as model misspecification.

## Keywords:

possibility theory, preferences elicitation, multiple-criteria decision.

## 1 Introduction

Une tâche essentielle pour identifier les préférences d'une agente est l'élicitation de préférences. Parmi les différents types d'interaction, l'élicitation incrémentale [1] est particulièrement intéressante, car chaque nouvelle question prend en compte les informations préférentielles déjà obtenues. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'approche robuste basée sur l'optimisation d'un regret Minimax [4, 3], qui propose de fortes garanties de performance, sous réserve que deux hypothèses sont satisfaites : (1) l'agente est un oracle (aucune erreur n'est commise) et (2) l'espace de recherche

correspond à la bonne famille de modèles de préférences.

Notre objectif est d'utiliser une approche possibiliste pour gérer l'incertitude lors de l'élicitation. Nous montrerons par la suite que cette approche à deux avantages majeurs :

- Elle étend formellement l'approche robuste, l'approche possibiliste étant une généralisation de l'approche robuste. Nous avons alors les mêmes garanties fortes de performance, sans des hypothèses aussi fortes.
- Elle propose d'encoder et de mesurer naturellement l'inconsistance provenant d'affirmations inconsistantes [7]. Nous pouvons alors détecter les réponses incohérentes de l'agente, ou un mauvais choix de modèle.

Pour choisir les informations préférentielles à soumettre à l'agente, nous adaptons la Stratégie de la Solution Courante (CSS), qui est couramment utilisée dans l'approche robuste.

Nous introduisons les éléments nécessaires pour présenter notre méthode dans la Section 2. Nous présentons alors notre extension possibiliste de l'approche robuste et ses avantages dans la Section 3. Enfin, la Section 4 montre quelques simulations numériques qui confirment l'intérêt de notre approche.

## 2 Préparation

Dans cette section, nous rappelons l'essentiel des approches robustes standards, ainsi que les bases de la théorie des possibilités.

## 2.1 Notations

Nous considérons des problèmes où nous supposons que les alternatives sont évaluées par des fonctions de valeur. Les préférences sont supposées être un ordre complet. De plus, nous considérons le problème du choix, et pas celui du rangement.

**Alternatives** Nous notons par  $\mathbb{X}$  un ensemble fini d'alternatives disponibles. Les alternatives sont notées  $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . Nous supposons que les alternatives sont résumées par  $q$  valeurs réelles, les critères, tel que  $x \in \mathbb{R}^q$ . Le  $i$ ème critère d'une alternative  $x \in \mathbb{X}$  est noté  $x^i$ .

Soient deux alternatives  $x, y \in \mathbb{X}$ , nous notons :

- $x \succ_p y$  si et seulement si  $x$  est strictement préférée à  $y$ ,
- $x \succeq_p y$  si et seulement si  $x$  est préférée, ou également préférée à  $y$ .

**Exemple 1** (Choisir le meilleur croque-monsieur). Supposons qu'une agente veut choisir le meilleur croque-monsieur parmi une sélection (les alternatives). Chaque croque-monsieur est caractérisé par deux critères : le goût et le prix. Chaque critère prend sa valeur entre 0 (mauvais) et 10 (bon). 0 en prix indique que le croque-monsieur est cher, 10 bon marché. Le Tableau 1 liste les différents croque-monsieur : celui au canard est très bon, mais plus cher que les autres.

Tableau 1 – Notes des croque-monsieur

	Goût	Prix
Fromage	5	9
Canard	10	0
Poisson	8	4
Jambon	7	7

**Modèles d'agrégation** Nous supposons qu'une alternative  $x$  est évaluée par son utilité, mesurée par une fonction  $f_\omega(x)$  ayant pour paramètres  $\omega \in \Omega$ , que nous appellerons modèle. Deux alternatives  $x, y \in \mathbb{X}$  peuvent être comparées selon

la fonction d'évaluation de cette manière :

$$x \succeq_\omega y \iff f_\omega(x) \geq f_\omega(y). \quad (1)$$

Un premier modèle très utilisé est la somme pondérée (WS). Soit un vecteur de poids  $\omega = \{\omega^1, \dots, \omega^q\} \in \mathbb{R}^q$  :

$$f_\omega(x) = \sum_{i=1}^q \omega^i x^i, \quad (2)$$

avec  $\omega^i \geq 0$  et  $\sum_i \omega^i = 1$ .

La moyenne par poids ordonnés (OWA) est un autre modèle courant [12]. Ici les valeurs des critères sont ordonnées par ordre croissant. Soit un vecteur de poids  $\omega \in \mathbb{R}^q$  et les valeurs ordonnées  $x^{(1)} \leq \dots \leq x^{(q)}$ , nous avons :

$$g_\omega(x) = \sum_{i=1}^q \omega^i x^{(i)}, \quad (3)$$

avec  $\omega^i \geq 0$ ,  $\sum_i \omega^i = 1$ .

D'autres modèles plus complexes existent, comme les intégrales de Choquet. Tant que les modèles sont linéaires en  $\omega$ , l'équation (1) est équivalente à une contrainte linéaire et nous pouvons utiliser la programmation linéaire [1].

En général, on ne connaît pas le modèle  $\omega$ , et demander directement à l'agente n'est pas évident : une élicitation de préférences est nécessaire.

## 2.2 Élicitation robuste

**Motivation** Trouver un modèle unique  $\omega$  à partir d'une comparaison par paire est difficile. Cependant, il est possible d'inférer sans information complète. Avec les approches robustes, un sous-ensemble  $\Omega'$  de modèles possibles  $\omega$  est identifié à partir des informations vérifiées pour tous les modèles. Nous avons alors un pré-ordre partiel sur  $\mathbb{X}$  où :

$$x \succeq^{\Omega'} y \iff \forall \omega \in \Omega' f_\omega(x) \geq f_\omega(y). \quad (4)$$

Pour faire des recommandations, une stratégie d'élicitation qui réduit  $\Omega'$  aussi vite que possible

est nécessaire. Le stratégie devrait aussi donner de bonnes recommandations même quand  $\succeq^{\Omega'}$  n'a pas qu'un seul élément maximal, l'éllicitation pouvant s'arrêter avant.

**Élicitation basée sur du regret** Le regret Minimax est très connu pour les problèmes de décision sous incertitude et avec des informations ayant valeur dans des ensembles [10]. Ce regret donne des garanties fortes de qualité, tout en étant moins conservateur que le Minimax standard.

Nous introduisons les différents éléments pour faire de l'éllicitation basée sur du regret qui seront repris dans la Section 3. Le regret de choisir  $x$  au lieu de  $y$  selon un modèle  $\omega$  est :

$$R_{\omega}(x, y) = f_{\omega}(y) - f_{\omega}(x). \quad (5)$$

Soit un ensemble  $\Omega'$  de modèles, le regret maximal par paire est :

$$\text{PMR}(x, y, \Omega') = \max_{\omega \in \Omega'} R_{\omega}(x, y), \quad (6)$$

correspondant au regret maximal de prendre  $x$  au lieu de  $y$  pour n'importe quel  $\omega \in \Omega'$ . Le regret maximal de choisir  $x$  est :

$$\text{MR}(x, \Omega') = \max_{y \in \mathbb{X}} \text{PMR}(x, y, \Omega'), \quad (7)$$

correspondant au regret de prendre  $x$  dans le pire scénario. Enfin, le regret maximal minimal sur un ensemble  $\mathbb{X}$  d'alternatives selon un ensemble  $\Omega'$  de modèles possibles est :

$$\text{mMR}(\Omega') = \min_{x \in \mathbb{X}} \text{MR}(x, \Omega'), \quad (8)$$

avec  $x^* = \arg \text{mMR}(\Omega')$  l'alternative qui donne le regret minimal dans le pire scénario, correspondant à la recommandation actuelle si aucune autre information n'est collectée.

**Exemple 2** (Choix initial). Supposons que l'agente évalue chaque croque-monsieur avec un modèle WS. Nous calculons alors  $\max_{\omega \in \Omega} R_{\omega}(x_i, y_j) \quad \forall i, j \in \{\text{Fromage, Canard, Poisson, Jambon}\}$ . Les regrets maximaux sont obtenus en optimisant

Tableau 2 – PMR initial

$x/y$	$y_F$	$y_C$	$y_P$	$y_J$
$x_F$	0	5	3	2
$x_C$	9	0	4	7
$x_P$	5	2	0	3
$x_J$	2	3	1	0

$\max_{\omega \in \Omega} (\omega(y) - \omega(x))$ . Le PMR est donné dans le Tableau2.

Si l'agente prend le croque-monsieur au canard plutôt que celui au poisson, son regret maximal sera de  $\text{PMR}(x_C, y_P, \Omega) = 4$ . En effet, pour le modèle  $\omega = (0, 1)$ , nous avons  $f_{\omega}(x_C) = 0$  et  $f_{\omega}(x_P) = 4$ .

Le MR est donné dans le Tableau3. On déduit que  $\text{mMR} = 3$  et que le meilleur choix est  $x^* = x_J$  quand on a aucune information au départ.

Tableau 3 – MR initial

$x$	$x_F$	$x_C$	$x_P$	$x_J$
MR	5	9	5	3

**Séquence d'éllicitation** Nous considérons que les préférences sont collectées avec des comparaisons par paire : nous présentons une paire  $(x, y)$  à l'agente, et elle indique l'alternative qu'elle préfère. Nous notons :

$$\Omega_{x \succeq y} = \{\omega \in \Omega : f_{\omega}(x) \geq f_{\omega}(y)\}, \quad (9)$$

le sous-ensemble des modèles cohérents avec l'affirmation  $x \succeq y$ , et  $\Omega_{y \succeq x}$  pour  $y \succeq x$ .

Une séquence d'éllicitation correspond à présenter alternativement une paire à l'agente, puis mettre à jour l'information à partir de la réponse. Dans l'approche robuste, si  $\Omega^k$  est le sous-ensemble des modèles possibles à l'étape  $k$ , l'étape suivante est de présenter une paire  $(x, y)$  à l'agente, et calculer  $\Omega^{k+1} = \Omega^k \cap \Omega_{x \succeq y}$  si l'agente préfère  $x$ ,  $\Omega^{k+1} = \Omega^k \cap \Omega_{x \preceq y}$  sinon.

Choisir une bonne paire  $(x, y)$  est une étape cruciale. Nous utilisons une stratégie commune, l’heuristique CSS [5] où à partir d’un sous-ensemble  $\Omega'$ , l’agente compare la recommandation courante  $x^* = \arg \text{mMR}(\Omega')$  avec son pire adversaire  $y^* = \arg \max_{y \in \mathbb{X}} \text{PMR}(x^*, y, \Omega')$ . Cette stratégie donne en général de bons résultats et garantit que l’ensemble mis-à-jour est non vide. De plus, avec l’approche robuste, elle garantit une convergence vers la solution optimale.

**Exemple 3** (Pire opposant du jambon). Dans l’exemple 2, nous avons montré que  $x^* = x_J$ . Selon le Tableau 2 et l’heuristique CSS,  $y^* = \arg \max_{y \in \mathbb{X}} \text{PMR}(x_J, y, \Omega') = y_C$ .

### 2.3 Elicitation avec incertitudes

**Motivation** L’approche robuste marche bien, sous réserve de deux hypothèses fortes : l’agente est un oracle ne commettant jamais d’erreurs et la famille de modèles décrit parfaitement les préférences de l’agente. Ces deux hypothèses sont néanmoins non réalistes dans beaucoup de cas et leur non-respect peut donner de mauvaises recommandations. Notre motivation est d’utiliser la théorie des possibilités pour permettre de contourner cette limitation et d’éviter de mauvaises recommandations.

**Exemple 4** (Une petite erreur change tout). Supposons que les préférences de l’agente sont modélisées par un modèle WS avec  $\omega = (0.9, 0.1)$ . Si l’agente doit choisir entre  $x_C$  and  $x_P$ ,  $f_\omega(x_C) = 9$ ,  $f_\omega(x_P) = 7.6$  et donc le croque-monsieur au canard doit être choisi. Imaginons que l’agente n’est pas concentrée, pas certaine d’elle ou que le modèle soit mauvais, et qu’elle affirme  $x_P \succeq x_C$ . Nous avons alors  $\Omega'$  les modèles consistants avec ses affirmations :  $\Omega' = \Omega_{x_P \succeq x_C} = \{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^2 \omega^i \cdot (x_P^i - x_C^i) \geq 0\} = \{\omega \in \Omega : 2\omega^2 \geq \omega^1\}$ .

Comme le montre la Figure 1, où une seule valeur de critère  $\omega^1$  est visible (comme  $\omega^1 + \omega^2 = 1$ ), le vrai modèle est en dehors de  $\Omega'$ . Quel que soit la réponse de l’agente, il n’est plus possible d’atteindre  $\omega$ .

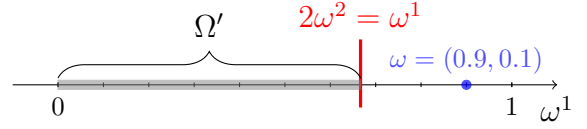


Figure 1 – Une mauvaise réponse emmène vers un mauvais modèle

**Bases de la théorie des possibilités** La théorie des possibilités [6] permet de modéliser l’incertitude en étendant formellement la théorie des ensembles, contrairement aux probabilités. C’est aussi probablement la théorie la plus simple pour gérer l’incertitude et donc moins complexe en calculs que la théorie des évidences par exemple, déjà proposée pour étendre l’approche robuste en élicitation incrémentale [8].

Les distributions de possibilité  $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  sont les outils principaux de la théorie, qui sont *consistants* si  $\exists \omega \in \Omega$  tel que  $\pi(\omega) = 1$ . Cette loi introduit deux mesures duales, la possibilité et la nécessité, sur des événements  $U \subseteq \Omega$  :

$$\Pi(U) = \sup_{\omega \in U} \pi(\omega), \quad (10)$$

$$N(U) = 1 - \Pi(U^c) = \inf_{\omega \in U^c} (1 - \pi(\omega)). \quad (11)$$

Nous utilisons deux notions importantes de la théorie. En premier, les  $\alpha$ -coupes de  $\pi$  :

$$E_\pi^\alpha = \{\omega \in \Omega : \pi(\omega) \geq \alpha\}, \quad (12)$$

qui sont les ensembles de valeurs ayant une possibilité supérieure à  $\alpha$ . En second, le degré d’inconsistance de  $\pi$  :

$$K = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega), \quad (13)$$

qui mesure si  $\pi$  est loin d’être consistant.

La théorie des possibilités étend la théorie des ensembles, au sens qu’un ensemble standard  $\Omega'$  est modélisé par une distribution  $\pi_{\Omega'}(\omega) = \mathbb{I}_{\Omega'}(\omega)$  où  $\mathbb{I}_A$  est l’indicatrice de l’événement  $A$ . La notion d’inclusion est étendue, avec deux distributions  $\pi \subseteq \pi'$  si et seulement si  $\pi \leq \pi'$ . C’est équivalent de dire que les  $\alpha$ -coupes sont incluses l’une dans l’autre :

$$\pi \subseteq \pi' \iff E_\pi^\alpha \subseteq E_{\pi'}^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (14)$$

**Information possibiliste de préférence** Pour modéliser l'incertitude, nous associons une affirmation  $x \succeq y$  avec un niveau  $\alpha \in [0, 1]$  de confiance (dans le sens de (11)) envers l'affirmation, que nous notons  $x \succeq_{\alpha} y$ . Nous l'associons avec la loi la plus large (au sens de l'inclusion) telle que  $N(\Omega_{x \succeq y}) = \alpha$ . Cette loi, notée  $\pi_{x \succeq_{\alpha} y}$ , est telle que :

$$\pi_{x \succeq_{\alpha} y}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \Omega_{x \succeq y}, \\ 1 - \alpha & \text{si } \omega \in \Omega_{x \prec y}. \end{cases} \quad (15)$$

Le niveau  $\alpha$  peut être donné par l'agente (possiblement à partir d'une échelle linguistique finie pour obtenir un nombre), ou par l'analyste pour autoriser l'incertitude sans demander à l'agente une charge cognitive supplémentaire. En pratique, ce niveau peut être utilisé comme un artefact, avec une valeur fixe, juste pour autoriser les contradictions et détecter l'inconsistance.

**Exemple 5** (Une erreur ne change plus tout). Nous reprenons l'Exemple 4, mais l'agente n'est pas certaine de son affirmation comme quoi elle préfère le poisson au canard. Nous supposons qu'elle indique un niveau de confiance  $\alpha = 0.7$ . Nous avons alors  $\Pi(\Omega') = 1$  et  $\Pi(\Omega \setminus \Omega') = 0.3$  : il y a une petite chance que le modèle optimal soit dans  $\Omega \setminus \Omega'$ , rendant possible de trouver  $\omega$ . La Figure 2 montre la loi  $\pi_{x_P \succeq_{0.7} x_C}$ .

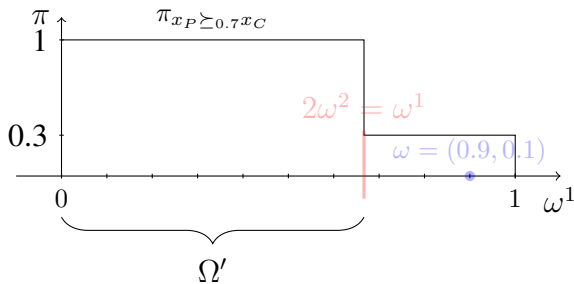


Figure 2 – Information possibiliste

Notons que pour les deux valeurs extrêmes de  $\alpha$  pour  $x \succeq_{\alpha} y$ ,  $\alpha = 1$  correspond à l'approche robuste (d'où l'extension formelle) et  $\alpha = 0$  au cas où aucune information n'est fournie.

**Exemple 6** (Illustration de l'inconsistance). Nous prolongeons l'Exemple 5 et nous considérons que lors d'une nouvelle question, l'agente indique avec une grande conviction que  $x_J \preceq_{0.9} x_C$ . Nous obtenons  $\Omega_{x_J \preceq x_C} = \{\omega : \omega^1 \geq 0.7\}$ . En utilisant les règles de fusion conjonctives de la théorie des possibilités, nous obtenons une loi présentée dans la Figure 3. Nous voyons que l'inconsistance  $K = 0.7$  est assez forte, mais que le bon modèle  $\omega = (0.9, 0.1)$  est parmi les plus plausibles.

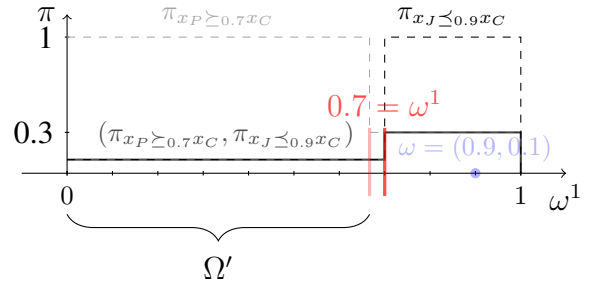


Figure 3 – Inconsistance après fusion

### 3 Extension possibiliste

#### 3.1 Extension des notions de regret

Le cadre est identique : à l'étape  $k$ , une paire  $(x, y)$  est proposée à l'agente qui donne en retour une réponse possibiliste de la forme  $x \succeq_{\alpha} y$  résultante en une loi  $\pi_{x \succeq_{\alpha} y}$ . La loi est combinée avec  $\pi^k$ , la fonction de possibilité sur  $\Omega$  obtenue à l'étape  $k$  de l'élicitation avec  $\pi^0 = \mathbb{I}_{\Omega}$  étant équivalente à l'ensemble  $\Omega$  de tous les modèles possibles. Nous notons  $P_1, \dots, P_{L_k}$  les partitions de  $\Omega$  où  $\pi^k$  est constante,  $L_k$  étant le nombre de partitions à l'étape  $k$ . Pour la Figure 3,  $P_1 = [0, 2/3]$ ,  $P_2 = [2/3, 0.7]$  et  $P_3 = [0.7, 1]$ .

**Extension du PMR** Nous proposons l'EPMR, où le PMR est moyenné sur différentes coupes- $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \text{EPMR}(x, y, \pi^k) &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \text{PMR}(x, y, E_{\pi^k}^{\alpha_i}), \end{aligned} \quad (16)$$

où  $1 = \alpha_1 > \dots > \alpha_n > \alpha_{n+1} = 0$  sont les valeurs distinctes de  $\pi^k$  et  $E_{\pi^k}^{\alpha_i}$  une  $\alpha$ -coupe de  $\pi^k$ .

Si  $\pi^k = \mathbb{I}_{\Omega^k}$ , nous retrouvons le PMR standard (6). Ce type de moyennage est classique dans les approches possibilistes (par exemple [9]).

Si  $E_{\pi^k}^{\alpha_1} = \emptyset$  (sous-normalisation, notamment en cas d'inconsistance), nous devons définir  $\text{PMR}(x, y, \emptyset)$ . Il existe différentes stratégies [8]. Nous considérons ici que  $\text{PMR}(x, y, \emptyset) = 0$  pour assurer la convergence.

**Extension du MR** Nous proposons l'EMR, où le MR est moyenné sur chaque ensemble focal :

$$\begin{aligned} \text{EMR}(x, \pi^k) \\ = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \max_{y \in \mathbb{X}} \text{PMR}(x, y, E_{\pi^k}^{\alpha_i}), \end{aligned} \quad (17)$$

correspondant à la moyenne sur les coupes du regret maximal par paire. Si  $\pi^k = \mathbb{I}_{\Omega^k}$ , nous retrouvons le MR standard (7).

**Extension du mMR** Nous proposons d'étendre le mMR avec le mEMR :

$$\text{mEMR}(\pi^k) = \min_{x \in \mathbb{X}} \text{EMR}(x, \pi^k), \quad (18)$$

comme  $\text{EMR}(x, \pi^k)$  se réduit à l'équation (7) quand  $\pi^k = \mathbb{I}_{\Omega^k}$ , alors le mEMR se réduit à l'équation (8) dans le même cas.

### 3.2 Extension du CSS

**PCSS** Nous proposons la Stratégie Possibiliste de la Solution Courante (PCSS) pour sélectionner des questions, étendant l'algorithme CSS. Ici, la meilleure alternative selon un regret Minimax  $x^* = \arg \text{mEMR}(\pi^k)$  est confrontée à son pire adversaire  $y^* = \arg \max_{y \in \mathbb{X}} \text{EPMR}(x^*, y, \pi^k)$ . L'agente indique sa préférence avec un niveau de confiance  $\alpha$ . Selon la réponse,  $\pi^k$  est combinée avec  $\pi_{x \succeq_{\alpha} y}$  si  $x \succeq_{\alpha} y$  ou avec  $\pi_{x \preceq_{\alpha} y}$  si  $x \preceq_{\alpha} y$ .

L'EPMR, l'EMR et le mEMR se réduisent vers leur version robuste quand  $\alpha = 1$  pour toutes les réponses : le PCSS étend bien le CSS standard.

Notre objectif est de garder les propriétés fortes de l'approche robuste combinée à la stratégie

CSS quand les hypothèses sont vérifiées, tout en autorisant des erreurs. Notre approche possibiliste, tout comme pour l'approche robuste, converge prouvablement vers la solution optimale si aucune erreur n'est commise :

**Proposition 1.** Soient  $\pi^{k-1}$  et  $\pi^k$  deux lois de possibilité successives provenant du PCSS. En supposant qu'elles sont normalisées, alors :

1.  $\text{EPMR}(x, y, \pi^k) \leq \text{EPMR}(x, y, \pi^{k-1})$ ,
2.  $\text{EMR}(x, \pi^k) \leq \text{EMR}(x, \pi^{k-1})$ ,
3.  $\text{mEMR}(\pi^k) \leq \text{mEMR}(\pi^{k-1})$ .

La Section 4 illustre qu'il est possible de détecter l'inconsistance et les erreurs tout en gardant les propriétés de convergence de l'approche robuste.

Notre méthode conserve les garanties fortes de l'approche robuste combinée à la stratégie CSS, et elle est plus précautionneuse en cas de réponses incertaines : les regrets correspondants seront plus élevés. Ce comportement est mis en avant avec les expériences de la Section 4.

**Complexité de calcul** Notre approche possibiliste est plus coûteuse en calculs que l'approche robuste, comme nous devons gérer plusieurs partitions  $P_1, \dots, P_L$  de polytopes. Néanmoins, plusieurs facteurs limitent ce coût :

- Calculer le PMR pour une coupe- $\alpha$  ou un sous-ensemble  $\Omega$  est possible en utilisant  $\text{PMR}(x, y, \Omega) = \max_{P_i \in \Omega} \text{PMR}(x, y, P_i)$  : il est possible d'utiliser les  $P_i$  aux étapes précédentes.
- Pour n'importe quelle question, la contrainte (1) ne va couper en deux qu'un nombre limité d'éléments  $P_i$ . Pour être exact, le nombre de nouveaux éléments créés a pour borne supérieure un nombre polynomial [11, P 39]. Il est possible de voir sur la Figure 3 que chaque nouvelle contrainte ne peut couper qu'un seul élément de l'intervalle.
- Les coupes- $\alpha$  sont imbriquées ( $E_{\pi}^{\alpha} \subseteq E_{\pi}^{\beta}$  si  $\alpha > \beta$ ). Par conséquent, le calcul fait pour une coupe- $\alpha$  peut être utilisé partiellement pour les autres coupes.

Par rapport à l’approche basée sur les fonctions de croyance proposée par [8], notre approche est plus économe en calculs. En effet, les ensembles focaux dans la théorie de l’évidence ne sont pas nécessairement imbriqués. De plus, les règles de fusion d’information dans cette théorie créent beaucoup plus d’ensembles focaux que les règles utilisées en théorie des possibilités.

## 4 Expériences

Nous proposons deux expériences sur des données synthétiques pour étudier le comportement de notre approche possibiliste et démontrer ses avantages par rapport à l’approche robuste. Pour chaque expérience, nous avons conduit 200 simulations. Pour chaque simulation, nous avons généré aléatoirement 30 alternatives  $x_i$  avec 4 critères selon une loi uniforme telle que  $x_i \in [0, 1]^4$ .

**Gestion de l’inconsistance dans les réponses** La première expérience montre que notre approche permet de gérer l’inconsistance liée aux réponses de l’agente. Quand l’inconsistance est détectée ( $K > 0$ ), l’élucation s’arrête. L’idée est de montrer que notre méthode permet de détecter l’inconsistance et donc d’éviter de s’éloigner du bon modèle. Corriger ces erreurs est un sujet ultérieur de recherche.

Pour chaque simulation, nous avons généré un modèle WS avec 4 critères selon une loi de Dirichlet ayant pour hyperparamètres  $\alpha_{dirich} = (1/4, \dots, 1/4)$ . Nous avons aussi choisi un degré de confiance fixe. Nous supposons que l’agente répond toujours correctement 70% du temps et aléatoirement 30% du temps, soit un vrai  $\alpha = 0.7$ . Les simulations s’arrêtent après détection de l’inconsistance, quand 15 questions sont répondues, ou quand mEMR = 0. Nous déterminons  $x^* = \arg \text{mEMR}$  et calculons le regret réel de prendre  $x^*$  par rapport à la meilleure alternative  $y_\omega$  d’après le vrai modèle  $\omega$ . Le regret réel et l’inconsistance sont moyennés pour chaque degré.

À partir de la Figure 4, nous pouvons voir que

notre approche possibiliste propose une alternative qui est meilleure, ayant un plus faible regret réel, que celle proposée par l’approche robuste ( $\alpha = 1$ ) grâce à la détection de l’inconsistance. En effet, à chaque étape le mEMR calculé diminue, mais le regret réel peut augmenter, car la méthode s’éloigne du vrai modèle à cause des réponses incohérentes. De plus, plus le niveau de confiance est faible, plus le regret réel est faible, comme l’approche possibiliste devient de plus en plus précautionneuse.

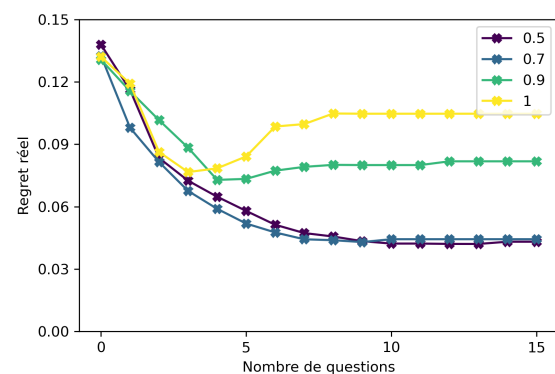


Figure 4 – Regret réel pour différents  $\alpha$

**Détection d’un mauvais modèle** La deuxième expérience montre que notre approche peut détecter un mauvais modèle, surtout si ce dernier est très distant du vrai modèle. Pour chaque simulation, le mauvais modèle de préférence est supposé être un modèle WS avec 4 critères. Nous utilisons aussi un niveau de confiance fixé  $\alpha = 0.7$ . De plus, l’agente répond toujours vrai 70% du temps et aléatoirement 30% du temps. Chaque simulation s’arrête quand 15 questions sont répondues, ou quand mEMR = 0. Nous supposons avoir un mauvais modèle quand  $K > 0$ . L’inconsistance est alors moyennée pour chaque simulation. Nous avons testé 3 types de « vrais » modèles, tout en cherchant dans l’espace des modèles WS :

- Modèles aléatoires : l’agente répond toujours aléatoirement.
- Modèles OWA équitables : les poids sont générés aléatoirement selon une distribution de Diri-



chlet ayant pour hyperparamètres  $\alpha_{dirich} = (0.85, 0.05, 0.05, 0.05)$ .

- Modèles OWA aléatoires : les poids sont générés aléatoirement selon une distribution de Dirichlet ayant pour hyperparamètres  $\alpha_{dirich} = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ . Ces modèles sont proches des moyennes arithmétiques et donc des modèles WS.

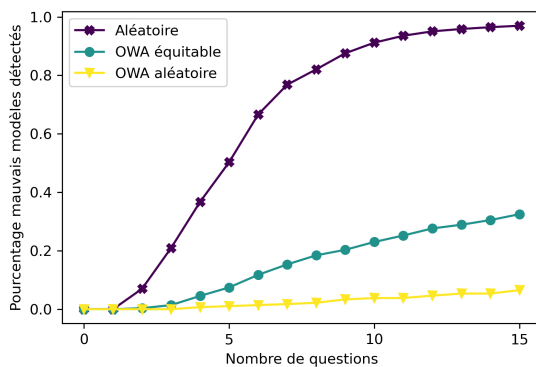


Figure 5 – Détection mauvais modèle,  $\alpha = 0.7$

La Figure 5 montre que quand le vrai modèle est très éloigné du modèle supposé (modèle aléatoire et OWA équitable), nous pouvons efficacement détecter le mauvais choix de modèle. Quand les modèles sont proches (OWA aléatoire), la détection est plus lente.

## 5 Conclusion

Nous avons introduit une extension possibiliste de l’approche robuste pour l’élitication incrémentale de préférences, démontrant que cet outil permet de résoudre les problèmes de l’approche robuste tout en restant consistant avec celle-ci. Les expériences sur des données simulées ont montré que notre approche a de meilleures performances quand l’agente donne de mauvaises informations.

Nos futurs travaux reposent sur deux problèmes :

- Réparer l’inconsistance observée, soit en supprimant des informations, soit en choisissant une autre famille de modèles.
- Étendre l’approche à d’autres modèles ayant des structures très différentes,

comme les modèles lexicographiques[2] qui ne sont pas basés sur des évaluations numériques. Elles nécessitent en effet d’adapter les notions de regret ou de choisir une notion différente pour les questions et les recommandations.

### Remerciements :

Ce travail a bénéficié du support financier du projet PreServe ANR-18-CE23-0008 et de l’agence nationale de la recherche (ANR).

## Références

- [1] N. Benabbou, P. Perny, and P. Viappiani. Incremental elicitation of choquet capacities for multicriteria choice, ranking and sorting problems. *Artificial Intelligence*, 246 :152–180, 2017.
- [2] R. Booth, Y. Chevaleyre, J. Lang, J. Mengin, and C. Sombattheera. Learning conditionally lexicographic preference relations. In *ECAI*, volume 10, pages 269–274, 2010.
- [3] N. Bourdache and P. Perny. Anytime algorithms for adaptive robust optimization with owa and wowa. In *International Conference on Algorithmic Decision Theory*, pages 93–107. Springer, 2017.
- [4] C. Boutilier. Computational decision support : Regret-based models for optimization and preference elicitation. *Comparative Decision Making : Analysis and Support Across Disciplines and Applications*, pages 423–453, 2013.
- [5] C. Boutilier, R. Patrascu, P. Poupard, and D. Schuurmans. Constraint-based optimization and utility elicitation using the minimax decision criterion. *Artificial Intelligence*, 170(8-9) :686–713, 2006.
- [6] T. Denœux, D. Dubois, and H. Prade. Representations of uncertainty in ai : Beyond probability and possibility. In *A Guided Tour of Artificial Intelligence Research*, pages 119–150. Springer, 2020.
- [7] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory and data fusion in poorly informed environments. *Control Engineering Practice*, 2(5) :811–823, 1994.
- [8] P.-L. Guillot and S. Destercke. Preference elicitation with uncertainty : Extending regret based methods with belief functions. In *International Conference on Scalable Uncertainty Management*, pages 289–309. Springer, 2019.
- [9] E. Hüllermeier. Learning from imprecise and fuzzy observations : Data disambiguation through generalized loss minimization. *International Journal of Approximate Reasoning*, 55(7) :1519–1534, 2014.
- [10] L. J. Savage. The theory of statistical decision. *Journal of the American Statistical association*, 46(253) :55–67, 1951.
- [11] L. Schläfli and H. Wild. *Theorie der vielfachen Kontinuität*, volume 38. Springer-Verlag, 2013.
- [12] R. R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 18(1) :183–190, 1988.