



HAL
open science

Inférer à partir d'un modèle de Plackett-Luce imprécis : application au rangement d'étiquettes

Loïc Adam, Arthur van Camp, Sébastien Destercke, Benjamin Quost

► To cite this version:

Loïc Adam, Arthur van Camp, Sébastien Destercke, Benjamin Quost. Inférer à partir d'un modèle de Plackett-Luce imprécis : application au rangement d'étiquettes. 29èmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2020), Oct 2020, Sète, France. hal-04336818

HAL Id: hal-04336818

<https://hal.science/hal-04336818>

Submitted on 11 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Inférer à partir d'un modèle de Plackett–Luce imprécis : application au rangement d'étiquettes

Loïc Adam¹

Arthur Van Camp¹

Sébastien Destercke¹

Benjamin Quost¹

¹ UMR CNRS 7253 Heudiasyc, Sorbonne Université, Université de Technologie de Compiègne

CS 60319 - 60203 Compiègne cedex, France

{loic.adam, arthur.van-camp, sebastien.destercke, benjamin.quost}@hds.utc.fr

Résumé :

L'apprentissage de modèle de rangement est une tâche difficile, dans laquelle les données fournies peuvent être limitées, expliquant qu'une prédiction prudente soit désirable. Pour répondre à cette problématique, nous utilisons un modèle probabiliste paramétrique très populaire : le modèle de Plackett–Luce. Ce modèle est ici appliqué dans le cas imprécis où les paramètres estimés ont valeur dans des ensembles. En particulier, nous étudions comment faire une inférence prudente et sceptique à partir de ce modèle, et illustrons son application en apprentissage supervisé sur le problème de rangement d'étiquettes.

Mots-clés :

Apprentissage de préférences, inférence prudente, données médiocres.

Abstract:

Learning ranking models is a difficult task, in which data may be scarce and cautious predictions desirable. To address such issues, we explore the extension of the popular parametric probabilistic Plackett–Luce model, often used to model rankings, to the imprecise setting where estimated parameters are set-valued. In particular, we study how to achieve cautious or skeptic inference with it, and illustrate their application on label ranking problems, a specific supervised learning task.

Keywords:

Preference learning, cautious inference, poor data.

1 Introduction

Apprendre et estimer des modèles probabilistes de rangement d'objet est une problématique assez ancienne : les premiers travaux datent au moins des années 1920 [17]. Récemment, ce problème a connu un renouveau notamment grâce à l'intérêt grandissant pour le machine learning [8]. Les approches les plus courantes se basent sur l'association d'une utilité aléatoire à chaque objet devant être rangé, ce qui permet d'obtenir des lois de probabilité [2] pour directement définir une loi paramétrique sur l'ensemble des rangements [15].

Plusieurs raisons peuvent motiver une estimation prudente ou ensembliste d'un modèle de rangement. Par exemple, l'information disponible peut être incomplète, ce qui est typiquement le cas lors des débuts d'un système de recommandation ; ou quand des rangements partiels sont observés. De plus, comme les inférences d'un modèle de rangement sont difficiles à réaliser et sujettes à incertitude, il est potentiellement utile de donner des prédictions partielles, et donc de s'abstenir, quand l'information n'est pas fiable.

La théorie des probabilités imprécises est un cadre mathématique où les estimations partielles sont formalisées sous la forme d'ensembles de loi de probabilités. Dès lors, ce cadre est bien adapté pour donner des prédictions partielles et pour résoudre le problème précédent. À notre connaissance, il n'a pas été appliqué sur les modèles de rangement.

Dans ce papier, nous utilisons les probabilités imprécises pour inférer à partir de jeux de données un modèle paramétrique de rangement, celui de Plackett–Luce. Ce modèle est présenté dans la section 2. Nous étudions les inférences possibles dans la section 3, en montrant qu'il existe effectivement des méthodes pour faire des estimations précautionneuses basées sur des ensembles de paramètres. La section 4 présente une application à l'apprentissage supervisé de rangements d'étiquettes, à partir de fonctions de vraisemblance relative [7] (aussi nommée fonction de contour de vraisemblance en théorie des possibilités) avec des estimations imprécises.

2 Modèle de Plackett–Luce

Dans ce papier est étudié le problème d'estimation d'un modèle probabiliste de rangement d'un ensemble d'objets ou d'étiquettes $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Ce modèle prend en compte des *ordres totaux d'étiquettes*, c'est-à-dire des relations \succ dans Λ qui sont complètes, transitives et asymétriques. Tout ordre complet \succ d'étiquettes peut être identifié par sa permutation induite, aussi appelé *rangement d'étiquettes*, τ étant la permutation de la forme :

$$\lambda_{\tau(1)} \succ \lambda_{\tau(2)} \succ \dots \succ \lambda_{\tau(n)}.$$

Nous utiliserons les termes d'ordre sur les étiquettes, de rangement et de permutation de manière interchangeables. $\mathcal{L}(\Lambda)$ représente toutes les $n!$ permutations dans Λ , et τ représente une permutation générique.

2.1 Plackett–Luce (PL)

Ce papier s'intéresse à un modèle probabiliste particulier $P: 2^{\mathcal{L}(\Lambda)} \rightarrow [0, 1]$: le modèle de Plackett–Luce (PL) [3, 9]. C'est un modèle à n paramètres, appelés *forces* : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, v_i \in \mathbb{R}_{>0}$ (réels strictement positifs).

Le *vecteur de force* $v = (v_1, \dots, v_n)$ permet de définir complètement le modèle PL. Pour n'importe quel vecteur de la sorte, une probabilité est attribuée à un rangement τ dans \mathcal{L} :

$$P_v(\tau) := \prod_{k=1}^n \frac{v_{\tau(k)}}{\sum_{\ell=k}^n v_{\tau(\ell)}}. \quad (1)$$

Les paramètres v_1, \dots, v_n sont définis à une constante multiplicative près. Il est commun de supposer $\sum_{k=1}^n v_k = 1$. Par conséquent, le paramètre $v = (v_1, \dots, v_n)$ peut être vu comme un élément à l'intérieur du n -simplexe $\Sigma := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \sum_{k=1}^n x_k = 1\}$ dénoté $\text{int}(\Sigma)$.

Ce modèle a une interprétation assez intéressante : plus une force v_i est élevée, plus l'étiquette λ_i est préférée. La probabilité

que λ_i soit rangée en premier est alors :

$$\sum_{\tau \in \mathcal{L}(\Lambda), \tau(1)=i} P_v(\tau) = v_i.$$

Sachant que λ_i est la première étiquette, la probabilité que λ_j soit la seconde dans le rangement (ou autrement dit la première choisie parmi les étiquettes restantes), est égale à $v_j / \sum_{k=1, k \neq i}^n v_k$. Ce raisonnement peut être répété pour chaque étiquette. Par conséquent, pour un modèle PL défini par v , trouver le « meilleur » (le plus probable) rangement requiert simplement de trouver la permutation τ_v^* qui range les forces dans un ordre décroissant :

$$\tau_v^* \in \arg \max_{\tau \in \mathcal{L}(\Lambda)} P_v(\tau') \Leftrightarrow v_{\tau(1)} \geq \dots \geq v_{\tau(n)}. \quad (2)$$

2.2 Plackett–Luce imprécis (IPL)

Un modèle de Plackett–Luce *imprécis* est obtenu lorsque les forces prennent valeur dans un sous-ensemble Θ de $\text{int}(\Sigma)$ ¹. À partir de ce dernier, il est possible de calculer les probabilités *inférieures* et *supérieures* d'un rangement τ :

$$\begin{aligned} \underline{P}_\Theta(\tau) &:= \inf_{v \in \Theta} P_v(\tau), \\ \overline{P}_\Theta(\tau) &:= \sup_{v \in \Theta} P_v(\tau), \forall \tau \in \mathcal{L}(\Lambda). \end{aligned}$$

La notion de « meilleur » rangement pour un modèle IPL est ambiguë, comme deux vecteurs $v \neq u \in \Theta$ peuvent être associés à différents « meilleurs » rangements $\tau_v^* \neq \tau_u^*$. Deux manières communes d'étendre (2) sont alors considérées :

Maximalité de Walley–Sen. La maximalité de Walley–Sen [18, 19] considère que τ_1 domine τ_2 (notée $\tau_1 \succ_M \tau_2$) si et seulement s'il est plus probable pour n'importe quel $v \in \Theta$ que :

$$\tau_1 \succ_M \tau_2 \Leftrightarrow (\forall v \in \Theta), P_v(\tau_1) > P_v(\tau_2). \quad (3)$$

1. Prendre $\text{int}(\Sigma)$ plutôt que Σ assure que toutes les probabilités sont positives et que l'équation (1) est bien définie.

L'ensemble \mathcal{M}_Θ des rangements maximaux est composé de tous les rangements non-dominés en ce sens :

$$\mathcal{M}_\Theta := \{\tau \in \mathcal{L}(\Lambda) : \nexists \tau' \text{ tel que } \tau' \succ_M \tau\}. \quad (4)$$

Il est possible d'avoir $|\mathcal{M}_\Theta| > 1$ quand Θ est imprécis.

E-admissibilité. Un rangement τ est *E-admissible* [14] si et seulement s'il est le « meilleur » selon l'équation (2), pour certains $v \in \Theta$. Dès lors, l'ensemble \mathcal{E}_Θ de tous les rangements E-admissibles est :

$$\mathcal{E}_\Theta := \bigcup_{v \in \Theta} \arg \max_{\tau \in \mathcal{L}(\Lambda)} P_v(\tau) = \{\tau : (\exists v \in \Theta) \text{ tel que } (\forall \tau' \in \mathcal{L}(\Lambda)), P_v(\tau) \geq P_v(\tau')\}. \quad (5)$$

En comparant les équations (4) et (5), il est possible de remarquer que $\mathcal{E}_\Theta \subseteq \mathcal{M}_\Theta$.

3 Décision à partir d'un Plackett-Luce imprécis

Dans cet article est présenté une méthode pour inférer sur les modèles IPL, sans hypothèse sur Θ , se basant sur l'approximation de l'ensemble des rangements maximaux. En effet, appliquer exactement l'équation (3) aux $n!(n-1)$ paires de rangements est tout bonnement impossible même pour de petites valeurs de n . D'autres approches sont possibles pour inférer, notamment en obtenant l'ensemble des rangements E-admissibles, mais nous ne l'aborderons pas ici.

Nous allons donc montrer que la vérification de la maximalité peut être simplifiée. En effet, le numérateur de l'équation (1) ne dépend pas de τ (les produits pouvant être réarrangés dans n'importe quel ordre). Par conséquent, quand deux permutations τ et τ' sont comparées avec l'équation (3), uniquement les dénominateurs jouent un rôle : $\tau \succ_M \tau'$ si et seulement si pour

tout $v \in \Theta$:

$$\frac{P_v(\tau)}{P_v(\tau')} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sum_{j=i}^n v_{\tau'(j)}}{\sum_{j=i}^n v_{\tau(j)}}. \quad (6)$$

Supposons que les forces sont connues avec précision, que τ et τ' ont pour unique différence une paire d'éléments échangée : $\tau(k) = \tau'(k) \forall k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$ où $i \neq j$ et $\tau(j) = \tau'(i)$, $\tau(i) = \tau'(j)$, et que, sans perte de généralité, $i < j$. Alors, le produit des termes dans l'équation (6) ne diffère que pour les ratios ayant le rang j , mais pas le rang i . De plus, en utilisant $\tau(i) = \tau'(j)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (6) &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i+1, \dots, j\}}}^n \underbrace{\frac{\sum_{\ell=k}^n v_{\tau'(\ell)}}{\sum_{\ell=k}^n v_{\tau(\ell)}}}_{=1} \cdot \prod_{k=i+1}^j \frac{\sum_{\ell=k}^n v_{\tau'(\ell)}}{\sum_{\ell=k}^n v_{\tau(\ell)}} \\ &= \prod_{k=i+1}^j \frac{v_{\tau(i)} + \sum_{\ell=k, \ell \neq j}^n v_{\tau'(\ell)}}{v_{\tau(j)} + \sum_{\ell=k, \ell \neq j}^n v_{\tau(\ell)}}. \end{aligned}$$

Dans ce dernier ratio est introduit pour tout $k \in \{i+1, \dots, j\}$ la somme des forces $C_k := \sum_{\ell=k, \ell \neq j}^n v_{\tau(\ell)} = \sum_{\ell=k, \ell \neq j}^n v_{\tau'(\ell)}$. Ces termes étant positifs, cela a pour conséquence :

$$\begin{aligned} \tau \succ_M \tau' &\Leftrightarrow (\forall v \in \Theta), \frac{P_v(\tau)}{P_v(\tau')} > 1 \\ &\Leftrightarrow (\forall v \in \Theta), v_{\tau(i)} > v_{\tau(j)}. \end{aligned}$$

Dans le cas où les forces ne sont pas connues avec précision, la dernière inégalité est valide tant que la condition suivante (suffisante, mais pas nécessaire) est respectée :

$$\underline{v}_{\tau(i)} := \inf_{v \in \Theta} v_{\tau(i)} > \bar{v}_{\tau(j)} := \sup_{v \in \Theta} v_{\tau(j)}.$$

Pour clore le raisonnement, si on suppose un rangement τ où λ_ℓ est préféré à λ_k , alors que $\underline{v}_{\tau(k)} > \bar{v}_{\tau(\ell)}$ pour certains $k \neq \ell$, alors il est possible de trouver un « meilleur » rangement τ' (c'est-à-dire un rangement qui domine τ selon l'équation (3)) en changeant simplement les étiquettes λ_ℓ et λ_k . En d'autres termes, dès que

$\underline{v}_k \geq \bar{v}_\ell$, tous les rangements admissibles maximums satisfont $\lambda_k \succ \lambda_\ell$.

Dès lors, étant donné un modèle IPL avec comme forces $\Theta \subseteq \text{int}(\Sigma)$, il est possible de déduire un ordre partiel à partir des comparaisons paire par paire des forces bornées : plus particulièrement, il est possible d'inférer que $\lambda_k \succ \lambda_\ell$ quand $\underline{v}_k \geq \bar{v}_\ell$. Cet ordre partiel peut être obtenu facilement : il peut contenir des solutions non optimales selon le critère de maximalité, mais il contient à coup sûr toutes les solutions maximales.

4 Application au rangement d'étiquettes

Dans cette section nous étudions l'application du modèle IPL à l'apprentissage supervisé de rangements. Dans le cas usuel multi-classes, l'apprentissage supervisé consiste à associer une instance $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ à une étiquette $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ représentant sa classe. Dans le cas de l'ordonnement d'étiquettes, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ est associée, au moins théoriquement, à un ordre total \hat{y} sur les étiquettes $\succ_{\mathbf{x}}$ dans Λ .

Les jeux d'apprentissage sont constitués de plusieurs instances associées à des rangements (\mathbf{x}_i, τ_i) , avec $i \in \{1, \dots, m\}$, dans le but d'estimer la probabilité conditionnelle théorique $P_{\mathbf{x}}: 2^{\mathcal{L}(\Lambda)} \rightarrow [0, 1]$ associée à une instance $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Bien qu'idéalement les rangements τ_i devraient être totaux, il est possible de considérer des rangements partiels τ_i , correspondant à des observations incomplètes.

4.1 Estimation et prédiction

Cas précis. [4] a proposé une approche locale basée sur les instances $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ les plus proches pour faire des prédictions.

Soit $\mathcal{N}_K(\mathbf{x})$ l'ensemble des instances les plus proches, chaque voisin $\mathbf{x}_i \in \mathcal{N}_K(\mathbf{x})$ étant associé avec un rangement (potentiellement partiel) τ_i ; et soit M_i le nombre d'étiquettes rangées dans τ_i . En adoptant l'hypothèse classique d'une

approche basée sur les instances voisines qui suppose les distributions localement constantes (par exemple, dans le voisinage de \mathbf{x}), alors la probabilité d'observer τ_1, \dots, τ_K sachant un paramètre de valeur v est :

$$P(\tau_1, \dots, \tau_K | v) = \prod_{i=1}^K \prod_{m=1}^{M_i} \frac{v_{\tau_i(m)}}{\sum_{j=m}^{M_i} v_{\tau_i(j)}}. \quad (7)$$

Il est dès lors possible d'utiliser le maximum de vraisemblance pour déterminer v à partir de τ_1, \dots, τ_K en maximisant (7) — ou par équivalence son logarithme :

$$l(v) = \sum_{i=1}^K \sum_{m=1}^{M_i} \left[\log(v_{\tau_i(m)}) - \log \sum_{j=m}^{M_i} v_{\tau_i(j)} \right].$$

Plusieurs méthodes ont été étudiées pour obtenir ce maximum, notamment l'algorithme de Minoration-Maximisation (MM) [12], une génération de l'algorithme d'Espérance-Maximisation (EM). C'est un algorithme itératif dont le but est, pour chaque itération, de maximiser une fonction $Q_k(v)$ minorant le logarithme de vraisemblance, la fonction étant :

$$\sum_{i=1}^K \sum_{m=1}^{M_i} \left[\log(v_{\tau_i(m)}) - \frac{\log \sum_{j=m}^{M_i} v_{\tau_i(j)}}{\log \sum_{j=m}^{M_i} v_{\tau_i(j)}^{(k)}} \right];$$

où $v^{(k)}$ est une estimation de v durant la $k^{\text{ème}}$ itération. Quand les paramètres sont fixés, la maximisation de Q_k est solvable analytiquement et l'algorithme converge vers l'estimation du maximum de vraisemblance v^* de v . Le meilleur rangement τ^* est alors :

$$\tau^* \in \arg \max_{\tau \in \mathcal{L}(\Lambda)} P(\tau | v^*);$$

obtenu simplement en ordonnant les étiquettes selon v^* (voir l'équation (2)).

Cas imprécis. Un modèle IPL est en correspondance une à une avec une estimation imprécise d'un paramètre, pouvant être obtenu ici en prolongeant la vraisemblance traditionnelle par la fonction de contour de vraisemblance [7].

Soit un espace de paramètres Σ et une fonction de vraisemblance positive L . La fonction de contour de vraisemblance est alors :

$$L^*(v) = \frac{L(v)}{\max_{v \in \Sigma} L(v)};$$

par définition, L^* prend valeur dans $]0, 1]$: plus $L^*(v)$ est proche de 1, plus v est probable. Naturellement, il est possible d'obtenir des estimations imprécises en considérant des « coupes » de la fonction. Soit β dans $[0, 1]$, les coupes- β de la fonction de contour de vraisemblance, notées B_β^* , sont définies par :

$$B_\beta^* = \{v \in \Sigma : L^*(v) \geq \beta\}.$$

Quand B_β^* est déterminée, il est facile d'obtenir une prédiction imprécise \hat{y} en tant que rangement partiel, en utilisant les résultats de la section 3 : on retrouve \hat{y} tel que $\lambda_i \succ \lambda_j \Leftrightarrow \lambda_i \succ_k \lambda_j, \forall v_k \in B_\beta^*$. Il est nécessaire de mettre en avant que le choix de β influence directement la précision (et donc la robustesse) du modèle : $B_1^* = v^*$ donne en général lieu à une prédiction précise ; quand β décroît, le modèle IPL est de moins en moins précis, pouvant donner des prédictions partielles (voire vides).

Dans nos expériences, la fonction de contour de vraisemblance est modélisée par génération de plusieurs forces v selon des lois de Dirichlet ayant pour paramètre $\beta = \gamma v^*$, où v^* est l'estimation du maximum de vraisemblance obtenu avec le meilleur modèle PL (ou par équivalence, la meilleure force v) et $\gamma > 0$ un coefficient qui permet de contrôler la concentration des paramètres générés autour de v^* .

Exemple. Il est possible d'illustrer le fonctionnement de cette méthode sur un cas simple, par exemple un jeu de données comportant des rangements de trois étiquettes λ_1, λ_2 et λ_3 . Nous souhaitons estimer de manière robuste le rangement τ à partir de ses 5 voisins les plus proches.

Supposons que les rangements les plus proches soient $\tau_1 = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$, $\tau_2 = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$, $\tau_3 = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$, $\tau_4 = (\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2)$ et $\tau_5 =$

$(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2)$. On obtient dans le cas précis $v_{\text{opt}} = [0.53, 0.32, 0.15]$ et il est donc possible de conclure que $\tau = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

En partant dans le cas imprécis, on commence par générer K forces artificielles v_k et à calculer leur vraisemblance L_k pour modéliser la fonction de contour de vraisemblance L^* . Dans cet exemple, le coefficient α de la loi est égal à $5 v_{\text{opt}}$, ce qui est suffisant pour obtenir des forces centrées autour de v_{opt} .

Sur la figure 1 montrant la fonction de contour de vraisemblance, il est possible de remarquer du premier coup d'oeil que seuls deux degrés de liberté existent : $v_3 = 1 - v_1 - v_2$. Cette observation est cohérente avec la définition du modèle de Plackett-Luce vu dans la section 2.

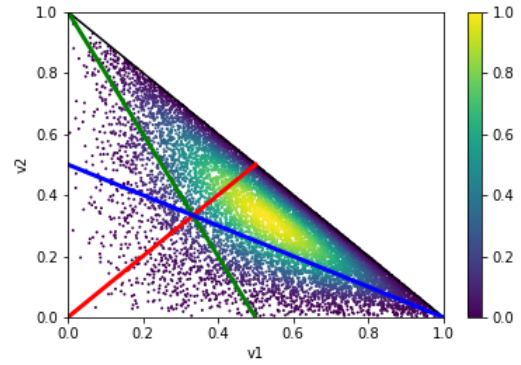


Figure 1 – Fonction de contour de vraisemblance

La fonction varie de 0 à 1 et sa valeur diminue dès que les forces générées v_k sont éloignées de la force optimale v_{opt} . De plus, une interprétation des préférences entre objets est possible directement sur la figure, via les trois médianes :

- La médiane rouge délimite la préférence entre λ_1 et λ_2 .
- La médiane verte délimite la préférence entre λ_1 et λ_3 .
- La médiane bleue délimite la préférence entre λ_2 et λ_3 .

L'intersection des médianes correspond à la situation $v = [1/3, 1/3, 1/3]$ où il est impossible de dire qu'une étiquette est préférée à une autre, donnant un rangement vide.

Pour faire une prédiction imprécise sur le rangement τ , il faut « couper » la fonction de contour de vraisemblance à partir d'une coupe-bêta B_β^* . Dans cet exemple, en prenant $\beta = 0.9$, soit une robustesse relativement faible, aucun changement n'est obtenu sur le rangement final. En effet, comme il est possible d'observer sur la figure 2, l'ensemble des forces générées v_k respectant $L_k^* \geq 0.9$ ne coupe aucune médiane. Par conséquent, toutes les forces donnent le même ordonnancement d'étiquettes et le rangement final reste $\tau = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

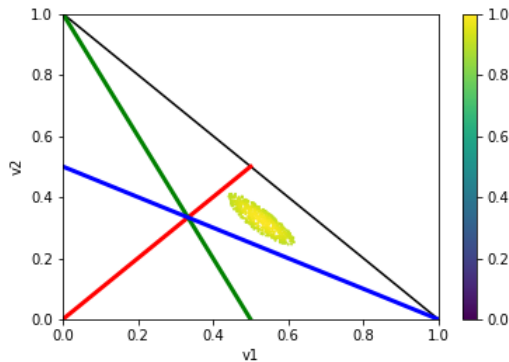


Figure 2 – $B_{0.9}^*$

En passant sur une coupe-bêta B_β^* avec un coefficient $\beta = 0.5$, la prédiction est différente. D'une part, on voit sur la figure 3 qu'une majorité de forces sont dans la même zone que dans la figure 2, ce qui indique que le rangement $\tau = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est toujours valide. D'autre part, certaines forces générées sont en dehors de la zone ce qui fait changer les ordres prédits :

- Au-dessus de la médiane rouge, on obtient $\lambda_2 \succ \lambda_1$.
- En-dessous de la médiane bleue, on obtient $\lambda_3 \succ \lambda_2$

Dans notre approche, un ordre \succ_x entre deux étiquettes est retenu s'il est commun à toutes les forces générées. Ainsi, comme les deux cas précédents sont spécifiques qu'à certaines forces, la procédure s'abstient de prédire une relation sur ces étiquettes. Par contre, $\lambda_1 \succ \lambda_3$ est toujours valide et c'est donc la seule relation prédite.

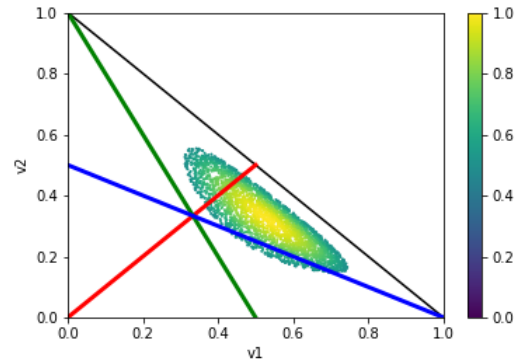


Figure 3 – $B_{0.5}^*$

4.2 Évaluation

Quand les rangements observés et prédits sont complets, plusieurs mesures de précision proposées par [11] permettent de mesurer la distance entre ceux-ci. Ici, le tau de Kendall est utilisé :

$$A_\tau(y, \hat{y}) = \frac{C - D}{n(n-1)/2}; \quad (8)$$

où C et D sont respectivement le nombre de paires concordantes et le nombre de paires discordantes dans y et \hat{y} .

Pour les prédictions imprécises \hat{y} , la mesure de la précision est divisée en deux composants [6] : l'exactitude (CR), mesurant la précision de la comparaison, et la complétude (CP) :

$$\begin{aligned} CR(y, \hat{y}) &= \frac{C - D}{C + D}, \\ CP(y, \hat{y}) &= \frac{C + D}{n(n-1)/2}; \end{aligned} \quad (9)$$

où C and D sont les mêmes que dans l'équation (8). Si \hat{y} est complet, alors $CP(y, \hat{y}) = 1$ et $CR(y, \hat{y}) = A_\tau(y, \hat{y})$; tandis que $CR(y, \hat{y}) = 1$ et $CP(y, \hat{y}) = 0$ si \hat{y} est vide (aucune comparaison possible).

4.3 Résultats

Nous avons réalisés nos expériences sur différents jeux de données, adaptés par [4]. Les résultats affichés sont sur le jeu de données

Bodyfat. Plusieurs nombres de voisins sont testés, $K \in \{5, 10, 15, 20\}$, (pour l'estimation du maximum de vraisemblance et en utilisation l'équation (8)), et le meilleur est choisi par validation croisée à 10 plis et répétée 3 fois. Les ensembles des paramètres B_β^* sont obtenus comme expliqué précédemment, en générant 200 forces avec $\gamma \in \{1, 10\}$, les meilleures valeurs étant choisies par validation croisée à 10 plis et répétée 3 fois.

Nous avons aussi comparée notre approche avec celle de [5], basée sur un rejet selon un seuil de probabilité de paires de préférences, selon trois configurations :

- avec les jeux de données originaux ;
- en supprimant quelques étiquettes avec une probabilité $p \in [0, 1]$;
- en introduisant du bruit, en échangeant des étiquettes avec une probabilité $p \in [0, 1]$, les étiquettes choisies au hasard.

La figure 4 montre les résultats de chaque méthode pour le jeu de données Bodyfat ($m = 252$, $n = 7$) quand les rangements ne sont pas perturbés, avec un intervalle de confiance de 95% (± 2 écart types de l'exactitude mesurée). La variation du coefficient β dans les coupes bêta permet de faire varier la robustesse du modèle. Notre approche basée sur la fonction de contour de vraisemblance donne des résultats semblables, quelque soit le jeu de données, que la méthode basée sur l'abstention.

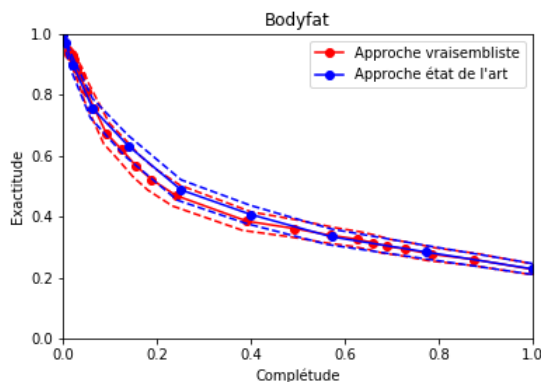


Figure 4 – Comparaison des méthodes sans perturbation

La figure 5 montre que les deux méthodes sont aussi semblables quand les jeux de données possèdent des étiquettes manquantes. Il est aussi possible de voir que pour un niveau de complétude donné, l'exactitude est plus basse que dans le cas non perturbé. En moyenne, plus la perturbation est grande, plus l'exactitude moyenne est basse. Les résultats sont similaires quand les jeux de données sont bruités comme il est possible de le voir dans la figure 6.

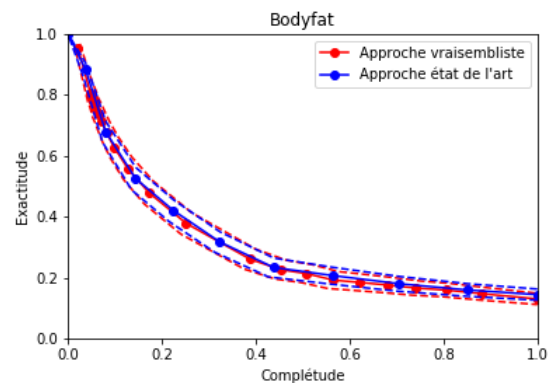


Figure 5 – Comparaison des méthodes avec 60% d'étiquettes manquantes

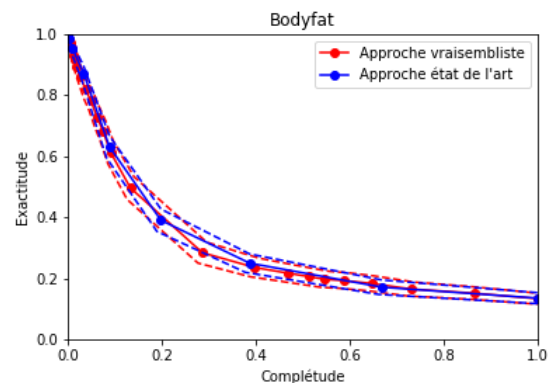


Figure 6 – Comparaison des méthodes avec 60% d'étiquettes échangées

Ces résultats sont encourageants, car ils montrent qu'il est possible d'obtenir au moins des résultats semblables aux approches de l'état de l'art. Néanmoins, il reste à identifier les cas où les deux approches donnent des résultats différents.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons fait une recherche préliminaire pour faire de l'inférence robuste et des prédictions prudentes avec le modèle de Plackett–Luce, un modèle de rangement populaire en statistiques. Nous avons fourni des méthodes efficaces quand les données disponibles sont pauvres, soit de mauvaise qualité (bruitées, partielles) ou incomplètes. Nous avons démontré l'intérêt de notre approche dans le rangement d'étiquettes, en présence de données manquantes ou bruitées.

Des recherches ultérieures pourraient se baser sur le problème d'estimation afin de l'améliorer, par exemple en se basant sur une extension des approches bayésiennes [10] en considérant des ensembles à priori. Une autre piste serait de développer des méthodes nativement imprécises d'estimation de la vraisemblance, par exemple en couplant des algorithmes utilisant la loi stationnaire d'une chaîne de Markov [16] avec les travaux récents sur les chaînes de Markov imprécises [13].

De plus, comme le modèle de Plackett–Luce est connu pour être fortement lié avec les modèles RUM [1, 20], il serait intéressant d'étudier le lien quand le modèle RUM devient imprécis (par exemple, dans notre cas, en considérant des lois de Gumbel avec des paramètres imprécis).

Remerciements :

Ce travail a obtenu le soutien financier des projets Pre-Serve ANR-18-CE23-0008 et LABEX MS2T ANR-11-IDEX-0004-02 de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR).

Références

- [1] H. Azari, D. Parks, and L. Xia. Random utility theory for social choice. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 126–134, 2012.
- [2] G. Baltas and P. Doyle. Random utility models in marketing research : a survey. *Journal of Business Research*, 51(2) :115–125, 2001.
- [3] W. Cheng, K. Dembczynski, and E. Hüllermeier. Label ranking methods based on the Plackett–Luce model. In *Proceedings of the 27th Annual International Conference on Machine Learning - ICML*, 2010.
- [4] W. Cheng, E. Hüllermeier, and K. J. Dembczynski. Label ranking methods based on the Plackett–Luce model. In *Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning (ICML-10)*, pages 215–222, 2010.
- [5] W. Cheng, E. Hüllermeier, W. Waegeman, and V. Welker. Label ranking with partial abstention based on thresholded probabilistic models. In *Advances in Neural Information Processing Systems 25 (NIPS-12)*, pages 2510–2518, 2012.
- [6] W. Cheng, M. Rademaker, B. De Baets, and E. Hüllermeier. Predicting partial orders : ranking with abstention. *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, pages 215–230, 2010.
- [7] A. W. F. Edwards. *Likelihood (expanded edition)*. The John Hopkins University Press, Baltimore, USA, 1992.
- [8] J. Fürnkranz and E. Hüllermeier, editors. *Preference Learning*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [9] J. Gu and G. Yin. Fast algorithm for generalized multinomial models with ranking data. In K. Chaudhuri and R. Salakhutdinov, editors, *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning*, volume 97 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 2445–2453, Long Beach, California, USA, 09–15 Jun 2019. PMLR.
- [10] J. Guiver and E. Snelson. Bayesian inference for Plackett–Luce ranking models. In *Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning*, pages 377–384. ACM, 2009.
- [11] E. Hüllermeier, J. Fürnkranz, W. Cheng, and K. Brinker. Label ranking by learning pairwise preferences. *Artificial Intelligence*, 172 :1897–1916, 2008.
- [12] D. R. Hunter. MM algorithms for generalized Bradley–Terry models. *The annals of statistics*, 32(1) :384–406, 2004.
- [13] T. Krak, J. De Bock, and A. Siebes. Imprecise continuous-time Markov chains. *International Journal of Approximate Reasoning*, 88 :452–528, 2017.
- [14] I. Levi. *The Enterprise of Knowledge*. MIT Press, London, 1980.
- [15] J. Marden. *Analyzing and modeling rank data*, volume 64. Chapman & Hall/CRC, 1996.
- [16] L. Maystre and M. Grossglauser. Fast and accurate inference of Plackett–Luce models. In *Advances in neural information processing systems*, pages 172–180, 2015.
- [17] L. Thurstone. A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 34 :273–286, 1927.
- [18] M. Troffaes. Generalising the conjunction rule for aggregating conflicting expert opinions. *I. J. of Intelligent Systems*, 21(3) :361–380, March 2006.
- [19] P. Walley. *Statistical reasoning with imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, New York, 1991.
- [20] J. I. Yellott Jr. The relationship between Luce's choice axiom, thurstone's theory of comparative judgment, and the double exponential distribution. *Journal of Mathematical Psychology*, 15(2) :109–144, 1977.