



**HAL**  
open science

# Commentaire sur “Excitation Spectrum and Superfluid Gap of an Ultracold Fermi Gas”

Yvan Castin

► **To cite this version:**

Yvan Castin. Commentaire sur “Excitation Spectrum and Superfluid Gap of an Ultracold Fermi Gas”. 2023. hal-04336110v1

**HAL Id: hal-04336110**

**<https://hal.science/hal-04336110v1>**

Preprint submitted on 11 Dec 2023 (v1), last revised 5 Sep 2024 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

## Commentaire sur “Excitation Spectrum and Superfluid Gap of an Ultracold Fermi Gas”

Les auteurs de la référence [1] mesurent entre autres la branche d’excitation acoustique d’un gaz superfluide d’atomes froids fermioniques appariés et déterminent selon la force des interactions si cette branche est concave ou convexe à faible nombre d’onde  $q$ . Ils franchissent ainsi une étape décisive dans l’étude expérimentale de ce système car ceci renseigne sur la nature des mécanismes de retour à l’équilibre du gaz à basse température, et pas seulement sur son état stationnaire. Il est donc important de savoir si les résultats annoncés sur la concavité de la branche acoustique sont fiables et définitifs, ou s’ils doivent être confirmés par des études ultérieures. Tel est l’objectif du présent commentaire.

Rappelons qu’à température nulle, la branche acoustique du gaz de fermions admet, comme dans tout système tridimensionnel ( $d = 3$ ) entièrement superfluide siège d’interactions à courte portée, le développement limité  $\omega_q = cq[1 + \zeta q^2/k_F^2 + O(q^4 \ln q)]$  où  $\omega_q$  est la pulsation propre,  $c$  la vitesse du son et  $\zeta$  le paramètre de courbure (adimensionné par le nombre d’onde de Fermi  $k_F$ ). Le signe de  $\zeta$  détermine, dans le régime faiblement collisionnel, le mécanisme d’amortissement des phonons  $\phi$  à basse température. Si  $\zeta > 0$ , c’est celui à trois phonons de Belyaev et Landau, bien étudié dans différents systèmes. Si  $\zeta < 0$ , c’est celui à quatre phonons de Landau et Khalatnikov, dont la théorie originale [2] a été rectifiée [3], mais qui n’a encore été vu dans aucun système; savoir que  $\zeta < 0$  dans le gaz de fermions est donc crucial pour une première observation.

Pour fixer les idées, restreignons-nous à la limite unitaire  $1/k_F a = 0$  avec  $a$  la longueur de diffusion dans l’onde  $s$ , où les interactions sont les plus fortes. Le problème est alors non trivial et nous ne connaissons pas d’argument théorique solide fixant le signe de  $\zeta$ .

Qualitativement, la relation de dispersion des quasi-particules fermioniques  $\gamma$  (une autre branche d’excitation du gaz) atteint son minimum  $\Delta \simeq 0,44E_F$  à un nombre d’onde non nul  $k_0 \simeq 0,92k_F$  [4], si bien que le continuum de paire brisée admet un bord plat de valeur  $2\Delta$  jusqu’à  $q = 2k_0$  ( $E_F = \hbar^2 k_F^2/2m = k_B T_F$  est l’énergie de Fermi); ce bord repousse la branche acoustique et tend à la rendre concave. Rien n’interdit cependant que la branche acoustique reste convexe (comme elle l’est naturellement dans la limite  $1/k_F a \rightarrow +\infty$ ) sur un voisinage de  $q = 0$ , là où l’effet de répulsion par le continuum est le plus faible (l’effet de répulsion l’emporte partout dans la limite  $1/k_F a \rightarrow -\infty$ ).

Quantitativement, on dispose de l’écriture  $\zeta = -\pi^2 (2\xi_B)^{1/2} [c_1 + (3/2)c_2]$  où le paramètre de Bertsch donne le potentiel chimique  $\mu = \xi_B E_F$  et les paramètres  $c_{1,2}$  quantifient les corrections de gradient à l’hydrodynamique quantique [5]. Seul  $\xi_B$  est bien connu,  $\xi_B \simeq 3/8$  [6]. Un développement dimensionnel en puissances de  $\epsilon = 4 - d$  donne  $c_1 \simeq -0,0624[1 - 2\epsilon/3 + O(\epsilon^2)]$  et  $c_2 = O(\epsilon^2)$  [7] donc  $\zeta > 0$  à l’ordre sous-dominant. La RPA d’Anderson, spectralement équivalente à l’approximation des fluctuations gaussiennes de [8], prédit de manière non contrôlée une valeur positive,  $\zeta_{\text{RPA}} \simeq 0,0838$  [9] (ceci correspond à  $c_2 \simeq 0,0073$  si l’on croit à la valeur  $c_1 \simeq -0,021$  donnée dans [7], ce qui est effectivement  $\ll |c_1|$ ). Mais la valeur expérimentale [1] est de signe opposé,  $\zeta_{\text{exp}} = -0,085(8)$ , donc ne conduit a priori pas au même mécanisme d’amortissement des phonons. L’enjeu est qualitatif et fondamental.

Cependant, comme nous allons le voir, on peut parfaitement supposer que la RPA soit correcte sans qu’il y ait d’incompatibilité nette avec la courbure négative vue dans l’expérience. L’analyse faite dans [1] souffre en effet de deux limitations.

(i) La valeur de  $\zeta_{\text{exp}}$  est obtenue par ajustement cubique de  $\omega_q$  [1]. Elle pourrait dépendre fortement de l’intervalle d’ajustement si celui-ci est trop étendu. Ainsi, dans la RPA, l’ajustement de  $\omega_q$  sur l’intervalle  $0,22 \leq q/k_F \leq 1,08$  de la figure 1 dans [1] donnerait  $\zeta_{\text{RPA}}^{\text{fit}} \simeq -0,026$ , ce qui est faux, même en signe (en revanche, le biais serait  $< 2\%$  sur la vitesse du son  $c$ ). En effet,  $\omega_q^{\text{RPA}}$  admet un point d’inflexion en  $q/k_F \simeq 0,5$  [9] si bien que l’ajustement mélange aveuglément des parties convexe et concave. Cet effet de mélange explique la valeur erronée ( $< 0$ ) de  $\zeta_{\text{RPA}}$  dans [10].

(ii) La température assez élevée,  $T/T_F \simeq 0,13$  [1], pourrait modifier la courbure de la branche acoustique d’une quantité non négligeable  $\delta\zeta^{\phi\phi}$  via l’interaction avec les phonons thermiques. En traitant le couplage phonon-phonon cubique  $H_3^{\phi\phi}$  au second ordre et le couplage quartique  $H_4^{\phi\phi}$  au premier ordre de la théorie des perturbations, puis en prenant la limite  $k_B T/mc^2 \rightarrow 0$ , la référence [11] obtient une expression analytique du déplacement thermique de  $\omega_q$ . Un développement à l’ordre  $q^3$  donne alors l’équivalent exact

$$\delta\zeta^{\phi\phi} \sim -[\pi^2/(3\xi_B)^{3/2}](T/T_F)^2,$$

soit  $\delta\zeta^{\phi\phi} \simeq -0,140$  à la température expérimentale (la correction à la vitesse du son, en  $O(T^4)$ , est  $\approx 1\%$ ). Comme le petit paramètre utilisé  $k_B T/mc^2 \simeq 0,5$  n’est pas  $\ll 1$ , repartons du résultat perturbatif de [11] sans prendre la limite  $T \rightarrow 0$  et ajoutons des facteurs correctifs de courbure  $(1 \pm \alpha q^2/k_F^2)$  aux amplitudes  $\rho_q$  et  $\phi_q$  des fluctuations quantiques de densité et de phase du superfluide dans le mode  $\mathbf{q}$ , avec  $\alpha = \pi^2(\xi_B/2)^{1/2}[c_1 - (3/2)c_2] \simeq -0,136$  [3]. On trouve alors plutôt  $\delta\zeta^{\phi\phi} \simeq -0,110$ , ce qui reste assez négatif pour changer le signe de la courbure dans la RPA. De plus, la dissociation thermique des paires liées n’est pas négligeable dans l’expérience, le facteur de suppression  $2 \exp(-\Delta/k_B T)$  valant quand même 0,07. Or, les phonons interagissent avec les quasi-particules fermioniques qui en résultent. En traitant au second ordre le couplage cubique  $H_3^{\phi\gamma}$  et au premier ordre le couplage quartique  $H_4^{\phi\gamma}$  donnés

dans [12] avec inclusion des facteurs de courbure dans  $\omega_q$ ,  $\rho_q$  et  $\phi_q$ , nous trouvons la contribution  $\delta\zeta^{\phi\gamma} \simeq -0,052$ . Cette estimation est grossière et incomplète: la référence [12] utilise l'approximation d'homogénéité locale sans correction de gradient et son petit paramètre  $(k_B T/m_* c^2)^{1/2}$  (rapport des longueurs de cohérence de  $\gamma$  et de  $\phi$ ) est ici proche de un car la masse effective de  $\gamma$  vaut  $m_* \simeq 0,56m$  (nous utilisons la relation de dispersion de [13]). La somme des corrections thermiques conduit à  $\zeta_{\text{RPA}}^{\text{th}} \simeq -0,078$  à comparer à  $\zeta_{\text{exp}} = -0,085(8)$ .

En résumé, le travail expérimental [1], aussi novateur soit-il, pourrait affirmer un peu vite avoir mesuré le coefficient de  $q^3$  dans le développement limité de la branche acoustique  $\omega_q$  du gaz unitaire de fermions à température nulle. Des études complémentaires semblent souhaitables. Nous remercions Alice Sinatra pour ses commentaires sur le texte.

Y. Castin, Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France.

- 
- [1] H. Biss, L. Sobirey, N. Luick, M. Bohlen, J.J. Kinnunen, G.M. Bruun, T. Lompe, H. Moritz, “Excitation Spectrum and Superfluid Gap of an Ultracold Fermi Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 100401 (2022).
  - [2] L. Landau, I. Khalatnikov, “Teoriya vyzkostki Geliya-II”, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **19**, 637 (1949).
  - [3] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, “Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas”, *Annalen der Physik* **529**, 1600352 (2017).
  - [4] A. Schirotzek, Y.I. Shin, C.H. Schunck, W. Ketterle, “Determination of the superfluid gap in atomic Fermi gases by quasiparticle spectroscopy”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 140403 (2008).
  - [5] D.T. Son, M. Wingate, “General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics: Unitary Fermi gas”, *Ann. Physics* **321**, 197–224 (2006).
  - [6] Mark J.H. Ku, A. T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, “Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas”, *Science* **335**, 563–567 (2012).
  - [7] G. Rupak, T. Schäfer, “Density functional theory for non-relativistic fermions in the unitarity limit”, *Nuclear Physics A* **816**, 52–64 (2009).
  - [8] R.B. Diener, R. Sensarma, M. Randeria, “Quantum fluctuations in the superfluid state of the BCS-BEC crossover”, *Phys. Rev. A* **77**, 023626 (2008).
  - [9] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, “Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover”, *Phys. Rev. A* **93**, 013623 (2016).
  - [10] R. Haussmann, M. Punk, W. Zwerger, “Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms”, *Phys. Rev. A* **80**, 063612 (2009).
  - [11] Y. Castin, A. Serafin, A. Sinatra “Amortissement des phonons dans un superfluide 2D : insuffisance de la règle d’or de Fermi à basse température”, prépublication hal-04168815 (2023), à paraître aux *Comptes Rendus Physique*.
  - [12] Y. Castin, A. Sinatra, H. Kurkjian, “Landau phonon-roton theory revisited for superfluid  $^4\text{He}$  and Fermi gases”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 260402 (2017).
  - [13] Y. Nishida, D.T. Son, “ $\epsilon$  Expansion for a Fermi gas at infinite scattering length”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 050403 (2006).