



**HAL**  
open science

# Un test d'indépendance mutuelle entre un grand nombre de signaux

Pascal Vallet, Philippe Loubaton

► **To cite this version:**

Pascal Vallet, Philippe Loubaton. Un test d'indépendance mutuelle entre un grand nombre de signaux. XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images GRETSI 2023, Aug 2023, Grenoble, France. hal-04322313

**HAL Id: hal-04322313**

**<https://hal.science/hal-04322313v1>**

Submitted on 4 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Un test d'indépendance mutuelle entre un grand nombre de signaux.

Pascal VALLET<sup>1</sup> Philippe LOUBATON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire IMS (CNRS, Université de Bordeaux, Bordeaux INP)  
351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

<sup>2</sup>LIGM, Université Gustave Eiffel, CNRS UMR 8049, 5 Bd Descartes, 77454 Marne la Vallée Cedex 2

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons un nouveau test permettant de vérifier l'indépendance mutuelle d'un grand nombre de signaux dans le cas où le nombre d'observations disponible est limité. Le test utilise des statistiques linéaires des valeurs propres de la matrice de cohérence spectrale estimée, évaluées sur une grille de fréquence bien choisie. Nous montrons que sous l'hypothèse d'indépendance, la statistique de test bien recentrée et normalisée converge en loi vers une gaussienne standard. Cela permet d'évaluer l'erreur de première espèce asymptotique du test.

**Abstract** – In this paper, we propose a statistics that allow to test whether a large number of signals are independent or not when the sample size is not unlimited. The statistics depends on linear spectral statistics of the eigenvalues of the estimated spectral coherence matrix evaluated on a certain frequency grid. We establish that, after relevant centering and normalization, the test statistics converges in distribution towards a standard Gaussian random variable. This allows to evaluate the asymptotic type I error of the test.

## 1 Introduction

Le développement de méthodes d'inférences statistiques permettant de tester l'indépendance de  $M$  signaux stationnaires conjointement gaussiens complexes circulaires  $(y_{1,n})_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (y_{M,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ , observés entre les instants 1 et  $N$ , est un problème important qui a été abondamment abordé dans la littérature statistique au sens large du fait du nombre de contextes applicatifs dans lesquels il apparaît. Dans le domaine du traitement des signaux multicapteurs, cela permet, en particulier, d'aborder le problème de la détection, via un réseau de capteurs, d'un signal corrélé spatialement. Les différents capteurs générant des bruits additifs indépendants entre eux, la détection du signal se ramène à tester l'existence d'une corrélation entre les composantes du signal multivariable reçu. La très grande majorité des travaux déjà effectués supposent que le nombre de signaux  $M$  est très petit devant le nombre d'observations  $N$  disponibles, ce qui permet de développer et d'analyser divers tests dans le régime asymptotique standard dans lequel  $N \rightarrow +\infty$  et  $M$  fixe. Lorsque le nombre de signaux  $M$  est conséquent et que le nombre d'observations  $N$  n'est pas illimité, les résultats fournis par le régime asymptotique traditionnel ne permettent pas toujours de prédire de manière fiable les performances des tests usuels, qui, de fait, peuvent ne plus fonctionner. Il est donc tout à fait pertinent de chercher à développer de nouveaux tests d'indépendance adaptés au cas où le nombre de signaux  $M$  est grand et où  $N$  n'est pas illimité. La plupart des travaux existants se situant dans cette mouvance utilisent des techniques permettant de tester qu'une suite stationnaire de vecteurs aléatoires de grande dimension est indépendante et identiquement distribuée, mais cela ne permet que de traiter les situations dans lesquelles les densités spectrales  $(s_m(\nu))_{m=1, \dots, M}$  des signaux  $(y_m)_{m=1, \dots, M}$  coïncident (voir par exemple [5] qui teste l'indépendance des  $M$  vecteurs de dimension  $N$   $(y_{m,1}, \dots, y_{m,N})^T$ ,  $m = 1, \dots, M$ , qui sont de même loi quand les  $(s_m)_{m=1, \dots, M}$  coïncident). A

notre connaissance, seuls nos travaux [3] et [4] permettent de couvrir le cas où les densités spectrales  $(s_m(\nu))_{m=1, \dots, M}$  sont différentes.

Dans cet article, nous continuons le travail engagé dans [3] et [4]. Comme dans [3] et [4], les statistiques de test proposées ici sont construites à partir de la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$  de cohérence spectrale estimée à chaque fréquence  $\nu$ , qui est la matrice hermitienne  $M \times M$  dont les éléments  $\hat{c}_{ij,N}(\nu)$  sont donnés par

$$\hat{c}_{ij,N}(\nu) = \frac{\hat{s}_{ij,N}(\nu)}{(\hat{s}_{ii,N}(\nu)\hat{s}_{jj,N}(\nu))^{1/2}}$$

où  $\hat{s}_{ij,N}(\nu)$  représente l'estimateur lissé en fréquence de la densité interspectrale  $s_{ij,N}(\nu)$  entre  $y_i$  et  $y_j$  défini par

$$\hat{s}_{ij,N}(\nu) = \frac{1}{B+1} \sum_{b=-B/2}^{B/2} \xi_i(\nu + b/N) \xi_j(\nu + b/N)^*$$

où le facteur de lissage fréquentiel  $B$  est un entier pair suffisamment grand et en même temps très petit devant  $N$  (pour réduire la variance et le biais de  $\hat{s}_{ij,N}(\nu)$  respectivement), et où  $\xi_j(\nu)$  représente pour chaque  $j = 1, \dots, M$  la transformée de Fourier renormalisée de la séquence  $(y_{j,n})_{n=1, \dots, N}$ , i.e.

$$\xi_j(\nu) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N y_{j,n} e^{-2i\pi(n-1)\nu}$$

Lorsque  $M$  est fini et que  $N \rightarrow +\infty$ , il est bien connu que  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$  converge pour tout  $\nu$  vers la vraie matrice de cohérence spectrale  $\mathbf{C}(\nu)$  définie par  $\mathbf{C}_{ij}(\nu) = \frac{s_{ij}(\nu)}{(s_i(\nu)s_j(\nu))^{1/2}}$  dès que  $B = B(N)$  est choisi de telle sorte que  $B \rightarrow +\infty$  et  $\frac{B}{N} \rightarrow 0$ <sup>1</sup>. Dès lors, sous l'hypothèse, notée  $\mathcal{H}_0$  dans la suite, que les  $M$  signaux sont indépendants entre eux, la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$  converge vers  $\mathbf{I}_M$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , et cela permet

<sup>1</sup>il faut également ajouter quelques hypothèses techniques supplémentaires

de mettre en évidence divers tests adaptés au contexte  $M$  fixe (voir par exemple [2]).

Les travaux antérieurs [3] et [4] considèrent le cas où

$$M = \mathcal{O}(N^\alpha), \alpha < 1, c_N = \frac{M}{B} \rightarrow c, 0 < c < 1 \quad (1.1)$$

et proposent des statistiques de test basées sur  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$ . Ce régime asymptotique est censé représenter des situations d'intérêt pratique dans lesquelles  $M$  et  $N$  sont grands, où le rapport  $\frac{M}{N}$  est petit, mais pas suffisamment pour que le régime asymptotique traditionnel  $M$  fixe soit pertinent. De plus, le paramètre de lissage fréquentiel  $B$ , qui est au choix du statisticien, est ici choisi du même ordre de grandeur que  $M$ . Dans ces conditions, la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$  ne converge pas vers  $\mathbf{I}_M$ . [4] établit en particulier que  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$  se comporte pour chaque fréquence  $\nu$ , à des termes d'erreurs près, comme une matrice  $\frac{\mathbf{X}_N(\nu)\mathbf{X}_N(\nu)^*}{B+1}$  où  $\mathbf{X}_N(\nu)$  représente une matrice  $M \times (B+1)$  à entrées i.i.d. distribuées selon la loi gaussienne complexe standard  $\mathcal{N}_c(0, 1)$ . Dès lors, [4] a pu établir que sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , la statistique  $\sup_{\nu \in \mathcal{G}_N, i \neq j} |\hat{c}_{ij,N}(\nu)|^2$  converge en loi, après recentrage et normalisation appropriée, vers une distribution de Gumbel. L'ensemble  $\mathcal{G}_N$  est défini comme le sous ensemble des fréquences de Fourier  $\mathcal{F}_N = \{\frac{k}{N}, k = 0, \dots, N-1\}$  donné par

$$\mathcal{G}_N = \{k \frac{B+1}{N}, k = 0, \dots, \frac{N}{B+1} - 1\}$$

Le choix de  $\mathcal{G}_N$  repose sur le fait que  $\mathbb{E}(\xi_{i_1}(\nu_1)\xi_{i_2}^*(\nu_2)) = \delta_{i_1, i_2} \mathcal{O}(\frac{1}{N})$  si  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{F}_N, \nu_1 \neq \nu_2$  (voir par exemple le théorème 4.3.1 de [1]). Dans ces conditions, les estimateurs  $\hat{c}_{ij,N}(\nu)$  et  $\hat{c}_{i'j',N}(\nu')$  mettent en jeu des variables aléatoires très peu corrélées entre elles quelque soient  $i, j, i', j'$  dès que  $\nu$  et  $\nu'$  sont deux fréquences distinctes de  $\mathcal{G}_N$ . Cette propriété a pour conséquence que ces estimateurs se comportent presque comme des variables aléatoires indépendantes, ce qui est à l'origine de la convergence vers une distribution de Gumbel.

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , [3] s'est intéressé au comportement des statistiques linéaires des valeurs propres de la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$ , c'est-à-dire à des termes du type

$$\hat{\phi}_N(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \phi(\hat{\lambda}_m(\nu)) = \frac{1}{M} \text{Tr} \phi(\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)) \quad (1.2)$$

où les  $(\hat{\lambda}_m(\nu))_{m=1, \dots, M}$  représentent les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$  et où  $\phi$  est une fonction. Puisque  $\hat{\mathbf{C}}_N(\nu)$  se comporte comme une matrice  $\frac{\mathbf{X}_N(\nu)\mathbf{X}_N(\nu)^*}{B+1}$  avec  $\mathbf{X}_N(\nu)$  à entrées i.i.d.  $\mathcal{N}_c(0, 1)$ , dont la distribution empirique des valeurs propres converge vers la distribution de Marcenko-Pastur de paramètre  $c \mu_c$ , [3] établit que presque sûrement

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\phi}_N(\nu) - \int \phi(\lambda) d\mu_{c_N}(\lambda) = 0 \quad (1.3)$$

Nous rappelons que pour  $c < 1$ , la distribution de Marcenko-Pastur  $\mu_c$  est absolument continue de densité

$$d\mu_c(\lambda) = \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{2\pi c\lambda} \mathbb{1}_{[\lambda_-, \lambda_+]}(\lambda) d\lambda$$

avec  $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{c})^2$ . De plus, une quantification précise de l'erreur

$$\Delta = \sup_{\nu \in [0,1]} \left| \hat{\phi}_N(\nu) - \int \phi(\lambda) d\mu_{c_N}(\lambda) \right|$$

est effectuée dans le cas où le paramètre  $\alpha$  défini par (1.1) est plus grand que  $\frac{1}{2}$ . La condition  $\alpha > \frac{1}{2}$  est justifiée par le fait que dans le cas contraire, la convergence de  $\frac{M}{N}$  vers 0 est suffisamment rapide pour qu'en pratique, il soit possible de choisir  $B$  de telle sorte que  $B \ll N$  et  $M \ll B$ , situation pouvant être bien modélisée par le régime asymptotique  $\frac{M}{B} \rightarrow 0$  qui est d'une nature bien différente de (1.1). Nous renvoyons le lecteur à [3] pour plus de précisions. Dès lors, il semble potentiellement possible de tester l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  en comparant  $\Delta$  à un seuil bien choisi. Cependant, la mise en évidence de la loi limite de cette statistique sous  $\mathcal{H}_0$  est un problème qui semble très difficile, et le fait de remplacer  $[0, 1]$  par un sous-ensemble discret dont le cardinal tend vers l'infini avec  $N$  (par exemple l'ensemble  $\mathcal{G}_N$  ou l'ensemble  $\mathcal{E}_N$  défini plus bas) ne rend pas le problème plus solvable. [3] n'a donc pas proposé de statistique de test possédant une loi limite permettant d'évaluer l'erreur de première espèce asymptotique. Le but du présent article est de combler ce manque en étudiant les propriétés d'une statistique alternative. Afin de la définir, nous définissons  $\mathcal{E}_N$  comme le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_N$  donné par

$$\mathcal{E}_N = \{k \frac{(B'+1)}{N}, k = 0, \dots, \frac{N}{B'+1} - 1\} \quad (1.4)$$

où  $B' = \lfloor N^\delta \rfloor B$  où  $\delta > 0$  est suffisamment petit. Nous considérons alors la statistique

$$\sqrt{\frac{(B'+1)}{N}} \sum_{\nu \in \mathcal{E}_N} M \hat{\phi}_N(\nu) \quad (1.5)$$

Nous montrons que, convenablement recentré par un terme déterministe pouvant être estimé de manière consistante, ce terme, qui peut être interprété comme la moyenne des  $\frac{N}{B'+1}$  variables aléatoires  $(M \hat{\phi}_N(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_N}$  renormalisée par  $\sqrt{\frac{N}{(B'+1)}}$ , converge en loi vers une gaussienne centrée dont la variance est donnée de façon explicite. Ce résultat permet d'évaluer l'erreur de première espèce asymptotique du test consistant à comparer la statistique bien recentrée à un seuil. Il convient de noter que cet article est valide si  $\alpha < \frac{7}{9}$ . Cette restriction permet de simplifier très substantiellement l'évaluation du terme permettant de bien recentrer la statistique de test, et représente un bon compromis entre le domaine d'applicabilité et la technicité des résultats.

## 2 Hypothèses et résultats.

Puisque  $M$  est censé être un paramètre convergeant vers  $+\infty$ , il est nécessaire de se donner des signaux  $((y_{m,n})_{n \in \mathbb{Z}})_{m \geq 1}$  complexes circulaires gaussiens mutuellement indépendants. Nous supposons que les signaux sont centrés et que leurs densités spectrales  $(s_m)_{m \geq 1}$  vérifient

$$\inf_{m \geq 1, \nu \in [0,1]} s_m(\nu) > 0$$

et

$$\sup_{m \geq 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^\gamma |c_m(n)| < +\infty \quad (2.1)$$

pour tout  $\gamma > 0$ , où  $c_m(n) = \mathbb{E}(y_{m,n+k} y_{m,k}^*)$ . Notons que (2.1) implique que les  $(s_m)_{m \geq 1}$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}_\infty$ . Afin d'introduire le résultat principal de cet article, nous définissons les quantités  $v_N$  et  $r_N(\nu)$  suivantes :

$$v_N = \frac{1}{B+1} \sum_{b=0}^B \left(\frac{b}{N}\right)^2, \quad r_N(\nu) = \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{s'_m(\nu)}{s_m(\nu)}\right)^2 \quad (2.2)$$

où  $s'_m$  représente la dérivée de  $s_m$ . Par ailleurs, nous notons  $\kappa_N(\phi, \nu)$  le terme déterministe donné par

$$\kappa_N(\phi, \nu) = \int \phi(\lambda) d\mu_{c_N}(\lambda) + D_N(\phi) (r_N(\nu)v_N - (c_N B)^{-1}) \quad (2.3)$$

où  $D_N$  représente une distribution (au sens fonction généralisée de L. Schwartz) ne dépendant que de la distribution de Marcenko-Pastur  $\mu_{c_N}$ , et où  $D_N(\phi)$  est l'action de la fonction  $\phi$  sur  $D_N$ .  $D_N$  est donnée par sa transformée de Stieltjes, définie pour tout  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  comme l'action de la fonction  $\lambda \rightarrow (\lambda - z)^{-1}$  sur  $D_N$ . L'expression de cette transformée de Stieltjes n'est pas utile à la compréhension de cet article, et nous renvoyons le lecteur à [3] pour plus de détails. Le principal résultat de cet article est le théorème suivant.

**Théorème 2.1** *Supposons que  $\phi$  soit une fonction de classe  $\mathcal{C}_\infty$ . Alors, sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , si  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{7}{9}$ , pour tout  $\nu \in [0, 1]$ , la suite de variables aléatoires  $M(\hat{\phi}_N(\nu) - \kappa_N(\phi, \nu))$  converge en loi vers une gaussienne centrée de variance  $\sigma^2(\phi)$  où  $\sigma^2(\phi)$  ne dépend que de la fonction  $\phi$  et pas de la fréquence  $\nu$ , et peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale double mettant en jeu  $\phi$  et la distribution de Marcenko-Pastur  $\mu_c$ . Enfin, soit  $\zeta_N(\phi)$  la statistique définie par*

$$\zeta_N(\phi) = \left(\frac{B'+1}{N}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma(\phi)} \sum_{\nu \in \mathcal{E}_N} M(\hat{\phi}_N(\nu) - \kappa_N(\phi, \nu))$$

Alors,  $\zeta_N(\phi)$  converge en loi vers la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

L'expression précise de  $\sigma^2(\phi)$  n'apportant rien à la compréhension du théorème 2.1, elle est omise. D'autre part, le théorème 2.1 n'est évidemment valide que dans la mesure où  $\sigma^2(\phi)$  est strictement positif. Nous préférons omettre les conditions suffisantes (très peu restrictives) sur  $\phi$  dont nous disposons sous lesquelles  $\sigma^2(\phi) > 0$ .

Il convient de noter que le théorème 2.1 ne peut pas être utilisé tel quel en pratique pour tester l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  car le terme de recentrage  $\kappa_N(\phi, \nu)$  dépend de  $r_N(\nu)$  défini par (2.2), qui lui-même dépend des  $(s_m(\nu))_{m=1, \dots, M}$  qui sont évidemment inconnus. Dans ces conditions, il est nécessaire d'estimer  $r_N(\nu)$  par une quantité  $\hat{r}_N(\nu)$  et de remplacer  $\zeta_N(\phi)$  par la quantité  $\hat{\zeta}_N(\phi)$  obtenue en changeant  $r_N(\nu)$  en  $\hat{r}_N(\nu)$  dans l'expression de  $\kappa_N(\phi, \nu)$  et de  $\zeta_N(\phi)$ . Il faut bien entendu vérifier que les erreurs d'estimation sur  $r_N(\nu)$  ne remettent pas en cause le théorème 2.1. Pour cela, nous utilisons pour chaque  $m$  le classique estimateur "lag window"  $\hat{s}_{m,L}(\nu)$  de  $s_m(\nu)$  utilisé dans [3], section 4.5,

pour  $L = O(N^{1/2-\epsilon/2})$ , et estimons  $s'_m(\nu)$  par la dérivée de  $\hat{s}_{m,L}(\nu)$ . Ceci aboutit à un estimateur  $\hat{r}_N(\nu)$  de  $r_N(\nu)$  suffisamment performant pour que  $\hat{\zeta}_N(\phi)$  converge en loi vers une variable aléatoire  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Nous indiquons finalement la démarche générale employée pour établir le théorème 2.1. Nous avons déjà mentionné qu'intuitivement, les matrices  $(\hat{C}_N(\nu))_{\nu \in \mathcal{G}_N}$  devaient être proches d'être indépendantes. Par conséquent, les variables aléatoires  $(\hat{\phi}_N(\nu) - \kappa_N(\phi, \nu))_{\nu \in \mathcal{E}_N}$  devraient posséder le même genre de propriété. Afin de formaliser cette intuition, nous utilisons l'approximation de Bartlett. Plus précisément,  $s_m(\nu) > 0$  pour tout  $\nu$  et  $m$  implique que  $y_m$  est la sortie d'un filtre causal et d'inverse causal de fonction de transfert  $h_m(\nu)$  excité par son processus d'innovation normalisé  $(i_{m,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ . Dans ces conditions, la transformée de Fourier normalisée  $\xi_m(\nu)$  peut être écrite sous la forme

$$\xi_m(\nu) = h_m(\nu)\xi_{i_m}(\nu) + \gamma_m(\nu)$$

où  $\xi_{i_m}(\nu)$  est la transformée de Fourier renormalisée de la suite  $(i_{m,n})_{n=1, \dots, N}$  et où  $\gamma_m(\nu)$  est un terme d'erreur. L'approximation de Bartlett consiste à remplacer  $\xi_m(\nu)$  par  $h_m(\nu)\xi_{i_m}(\nu)$  dans tout ce qui précède :  $\hat{C}_N(\nu)$  et  $\hat{\phi}_N(\nu)$  sont en particulier remplacés par des quantités notées  $\hat{C}_{b,N}(\nu)$  et  $\hat{\phi}_{b,N}(\nu)$ . L'intérêt de cette approximation repose sur l'observation bien connue que, du fait de la blancheur de l'innovation  $i_m$ , si  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{F}_N$ ,  $\nu_1 \neq \nu_2$ , alors  $\xi_{i_m}(\nu_1)$  et  $\xi_{i_m}(\nu_2)$  sont indépendantes. Par conséquent, si  $\nu_1$  et  $\nu_2$  appartiennent à  $\mathcal{G}_N$ , alors  $\hat{\phi}_{b,N}(\nu_1)$  et  $\hat{\phi}_{b,N}(\nu_2)$  sont aussi indépendantes. On peut établir que pour tout  $\epsilon > 0$

$$\hat{\phi}_N(\nu) - \hat{\phi}_{b,N}(\nu) = O_P\left(\frac{N^\epsilon}{\sqrt{NB}}\right) \quad (2.4)$$

En choisissant  $\epsilon < \delta/2$ , on obtient immédiatement que

$$\hat{\phi}_N(\nu) - \hat{\phi}_{b,N}(\nu) = o_P\left(\left(\frac{B}{B'}\right)^{1/2} \frac{N^\epsilon}{\sqrt{NB}}\right),$$

ainsi que

$$\begin{aligned} M(\hat{\phi}_N(\nu) - \kappa_N(\phi, \nu)) - M(\hat{\phi}_{b,N}(\nu) - \kappa_N(\phi, \nu)) \\ = o_P\left(N^\epsilon \left(\frac{B}{B'}\right)^{1/2} \frac{B^{1/2}}{N^{1/2}}\right), \end{aligned}$$

et

$$\zeta_N(\phi) - \zeta_{N,b}(\phi) = O_P\left(N^\epsilon \frac{B}{B'}\right) = o_P(1),$$

où  $\zeta_{N,b}$  est défini comme  $\zeta_N$ , mais en remplaçant  $\hat{\phi}_N(\nu)$  par  $\hat{\phi}_{b,N}(\nu)$  pour chaque  $\nu \in \mathcal{E}_N$ . Dès lors, pour prouver le théorème 2.1, il suffit d'établir son énoncé lorsque l'on remplace  $\hat{\phi}_N(\nu)$  par  $\hat{\phi}_{b,N}(\nu)$  et  $\zeta_N(\phi)$  par  $\zeta_{N,b}(\phi)$ . Une fois vérifié que  $M(\hat{\phi}_{b,N}(\nu) - \kappa_N(\phi, \nu))$  converge en loi vers une gaussienne centrée de variance  $\sigma^2(\phi)$ , la convergence en loi de  $\zeta_{N,b}(\phi)$  se déduit assez directement de l'indépendance des variables aléatoires  $(\hat{\phi}_{b,N}(\nu))_{\nu \in \mathcal{G}_N}$ , et donc des  $(\hat{\phi}_{b,N}(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_N}$ , liée à l'usage de l'approximation de Bartlett.

Nous remarquons finalement que la statistique  $\zeta_N(\phi)$  est définie via une somme sur les fréquences de  $\mathcal{E}_N$ . Il est légitime

de se demander pourquoi ne pas utiliser toutes les fréquences de  $\mathcal{G}_N$ . L'évaluation (2.4) n'est en effet pas suffisamment fine pour établir que les statistiques  $\zeta_N(\phi)$  et  $\zeta_{b,N}(\phi)$  obtenues en considérant toutes les fréquences de  $\mathcal{G}_N$  diffèrent d'un terme  $o_P(1)$ . Il faudrait pour cela que le terme de droite de (2.4) soit remplacé par un terme  $o_P\left(\frac{1}{\sqrt{BN}}\right)$ . Il nous semble probable que cela soit vrai (diverses expérimentations vont dans ce sens, voir plus bas), mais la preuve de ce résultat est nettement plus difficile que celle de (2.4), qui, pourtant, n'est pas simple du tout.

### 3 Résultats numériques

Dans cette section, nous nous contentons d'illustrer numériquement le comportement de la statistique  $\zeta_N(\phi)$  et n'évoquons pas celui de  $\hat{\zeta}_N(\phi)$  qui nécessite plus de développements méthodologiques et pratiques.

Nous considérons un scénario où les  $M$  séries temporelles  $(y_{m,n})_{n \in \mathbb{Z}}$  suivent des modèles AR(1) indépendants, i.e.

$$y_{m,n} = \theta_m y_{m,n-1} + \epsilon_{m,n}$$

avec  $(\epsilon_{m,n})_{n \in \mathbb{Z}, m=1, \dots, M} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ . On choisira pour la suite

$$\theta_1 = \dots = \theta_{\frac{M}{2}} = 0.7$$

$$\theta_{\frac{M}{2}+1} = \dots = \theta_M = 0.5.$$

Concernant le choix de  $M, B, N$ , nous considérons  $B = 2M - 1$  (i.e.  $c = 0.5$ ) et  $N = \lfloor M^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor$  avec  $\alpha = 0.6$ .

Même si les hypothèses du théorème 2.1 impliquent que le paramètre  $B'$  défini en (1.4) doit croître plus lentement que  $B$ , nous choisissons  $B' = B$  pour les expérimentations. Nous prenons également pour exemple deux fonctions test  $\phi(x) = (x-1)^2$  et  $\phi(x) = \log(x)$  pour lesquelles nous pouvons montrer (voir par exemple [6] pour les techniques de calcul) que les termes de la quantité définie en (2.3) sont donnés, pour le terme de moyenne, par

$$\int \phi(\lambda) d\mu_{c_N}(\lambda) = \begin{cases} c & \text{si } \phi(x) = (x-1)^2 \\ (1 - \frac{c}{e}) \log(1-c) - 1 & \text{si } \phi(x) = \log(x) \end{cases},$$

pour le terme de variance par

$$\sigma^2(\phi) = \begin{cases} 2c^2 & \text{si } \phi(x) = (x-1)^2 \\ -(c + \log(1-c)) & \text{si } \phi(x) = \log(x) \end{cases},$$

et pour le terme de biais par

$$D_N(\phi) = \begin{cases} c & \text{si } \phi(x) = (x-1)^2 \\ -\frac{c}{2} & \text{si } \phi(x) = \log(x) \end{cases}.$$

En FIGURE 1, nous représentons la fonction de répartition (f.d.r) empirique (calculées sur 5000 réalisations) de  $\zeta_N(\phi)$  pour  $M = 100$ . On peut alors constater une bonne adéquation avec la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , comme prédit par le théorème 2.1.

En TABLE 1, nous représentons l'évolution de  $\mathbb{P}(\zeta_N(\phi) > q_\beta)$  avec  $q_\beta$  le quantile d'ordre  $1 - \beta$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , où nous avons fixé  $\beta = 0.05$ . On constate que les valeurs du quantile empirique de  $\zeta_N(\phi)$  sont effectivement proche du niveau fixé  $\alpha$  à partir d'une dimension de l'ordre de  $M = 100$ .

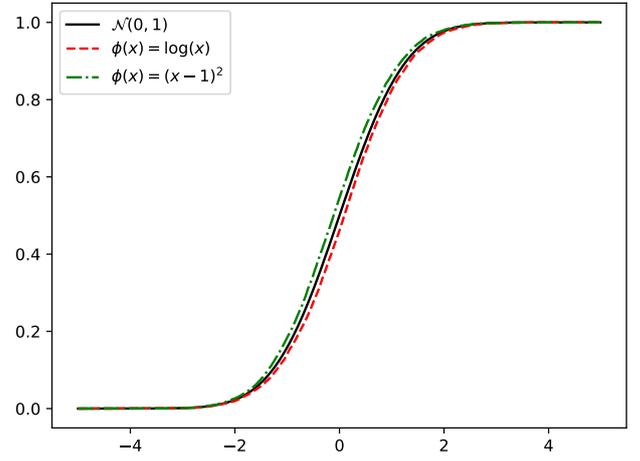


FIGURE 1 : F.d.r de  $\zeta_N(\phi)$  et comparaison avec la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$

$M$	$\phi(x) = \log(x)$	$\phi(x) = (x-1)^2$
20	0.0046	0.4328
50	0.0184	0.1526
70	0.0842	0.037
100	0.0436	0.059
200	0.049	0.05

TABLE 1 : Approximation du niveau asymptotique  $\alpha = 0.05$  de  $\zeta_N(\phi)$  pour différentes dimensions  $M$

### 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié les performances de statistiques linéaires des valeurs propres de la matrice de cohérence spectrale empirique, calculée à partir d'un nombre  $M$  de séries temporelles. Sous l'hypothèse où les  $M$  séries sont mutuellement indépendantes, un théorème central limite a été étudié dans un régime asymptotique des grandes dimensions où en particulier  $M \rightarrow \infty$ . Les résultats numériques obtenus montrent que l'approximation gaussienne obtenue est relativement précise pour des dimensions modérées.

### Références

- [1] D. Brillinger, "Time Series : Data Analysis and Theory", SIAM Classics in Applied Mathematics, 2001.
- [2] M. Eichler, "Testing non parametric and semiparametric hypotheses in vector stationary processes", J. Multivariate Anal. 99.5 (2008), pp. 968-1009.
- [3] P. Loubaton, A. Rosuel, "Properties of linear spectral statistics of frequency-smoothed estimated spectral coherence matrix of high-dimensional Gaussian time series", Electronic J. of Statistics, vol. 15, no. 2, pp. 5380-5454, 2021.
- [4] P. Loubaton, A. Rosuel, P. Vallet, "On the asymptotic distribution of the maximum sample spectral coherence of Gaussian time series in the high dimensional regime", J. Multivariate Anal. 194 (2023), Paper No. 105124, 22 pp., arXiv :2107.02891.
- [5] G. Pan, J. Gao, Y. Yang, "Testing independence among a large number of high-dimensional random vectors", J. of American Stat. Asso. of America, 109.506 (2014), pp. 600-612.
- [6] X. Mestre, P. Vallet, "Correlation tests and linear spectral statistics of the sample correlation matrix", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 63, No. 7, 2017