



**HAL**  
open science

## Le facteur est bien passé

Karim Zayana, Nathalie Braun

► **To cite this version:**

| Karim Zayana, Nathalie Braun. Le facteur est bien passé. 2023. hal-04319360

**HAL Id: hal-04319360**

**<https://hal.science/hal-04319360>**

Submitted on 2 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le facteur est bien passé

Karim ZAYANA et Nathalie BRAUN



Développer ou factoriser une expression algébrique est une compétence de base en mathématiques. Les programmes du premier degré y préparent tandis que ceux du second la renforcent et l'automatisent. Récapitulons ici les formules à connaître et visualisons-les grâce à quelques images...

La compétence « Développer – Factoriser » est ancrée dès l'école primaire [1] sur des exemples numériques au moment de poser la multiplication. Les stratégies mentales sont expliquées aux élèves avec des cas génériques, que ce soit pour calculer le produit  $45 \times 21 = 45 \times (20 + 1)$ , d'abord décomposé en la somme

$$45 \times 20 + 45 \times 1; \quad (1)$$

ou pour calculer le produit  $6 \times 18 = 6 \times (20 - 2)$ , d'abord transformé en la différence

$$6 \times 20 - 6 \times 2;$$

ou encore pour calculer la somme  $23 \times 7 + 23 \times 3$ , d'abord ramassée en le produit

$$23 \times (7 + 3) = 23 \times 10.$$

Cependant, aucune théorie n'est exposée à ce stade. C'est véritablement au collège [2] que des premières propriétés sont édifiées dans le registre littéral, à travers la formule, à lire dans les deux sens,

$$k(a \pm b) = ka \pm kb$$

où  $a$  et  $b$  sont initialement positifs ; puis l'identité

$$k(a + b) = ka + kb \quad (2)$$

où  $a$  et  $b$  sont cette fois-ci signés.

Des codes couleur ont ici été utilisés afin de mieux suivre les rôles de chaque terme. On notera aussi que, dans un souci de place, les symboles  $\times$  de multiplication sont ici omis ; on veillera à ce que ce raccourci ne brouille pas les calculs pratiques. Ainsi ne confondra-t-on pas l'écriture  $45 \times 20 + 45 \times 1$  issue de (1) avec la somme  $4520 + 451$  !

La formule (2) sera étendue au lycée [3]. D'une part, on y verra le paquet délimité par les parenthèses contenir des vecteurs. La réciproque du théorème de Thalès sera ainsi merveilleusement compilée dans cette phrase essentielle,

$$k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b},$$

qu'illustre la figure 1.

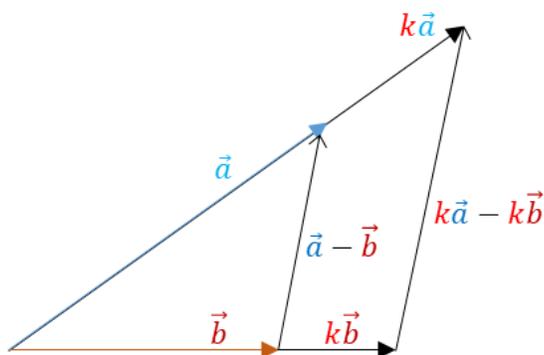


FIGURE 1 – La formule  $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$  fait écho au théorème de Thalès (dans sa version réciproque) en vertu duquel le vecteur  $k\vec{a} - k\vec{b}$  est parallèle à  $\vec{a} - \vec{b}$  et coefficienté par le facteur  $k$ .

D'autre part, plusieurs facteurs pourront faire somme, ce qui donnera naissance à un paquet de tête dans le membre de gauche, et à la formule connue sous le nom de double distributivité :

$$(k + \ell)(a + b) = ka + kb + \ell a + \ell b. \quad (3)$$

L'usage veut qu'on présente le résultat de droite du (3) dans l'ordre lexicographique (comme dans un dictionnaire, le « mot »  $ka$  est situé avant  $kb$ , lui-même avant  $la$ , etc.) et qu'on ne joue pas immédiatement de la commutativité du produit (on ne remplace pas tout de suite  $ka$  par  $ak$  par exemple). Ceci permet de bien lister les combinaisons de lettres sans en oublier, surtout quand il y a davantage de paquets, comme sur les égalités plus générales  $(k + \ell + \dots)(a + b + \dots) = ka + kb + \dots + la + lb + \dots$  voire  $(\alpha + \beta + \dots)(k + \ell + \dots)(a + b + \dots) = \alpha ka + \alpha kb + \dots$ .

Nous allons maintenant réinterpréter les relations (2) et (3) en nous aidant d'un facteur, au sens d'un postier, qui ferait sa tournée.

Le facteur a d'abord besoin d'une carte routière pour planifier son trajet. Celle de la figure 2, au format  $(k + \ell) \times (a + b)$  est déjà prédécoupée en quatre petits rectangles issus de son dépliage (selon les traits). Leurs aires, qui valent respectivement à  $ka$ ,  $la$ ,  $kb$ ,  $lb$ , s'assemblent en l'aire totale de valeur  $(k + \ell) \times (a + b)$ . Ainsi,

$$(k + \ell) \times (a + b) = ka + la + kb + lb$$

ce qui rend bien compte de l'identité (3).

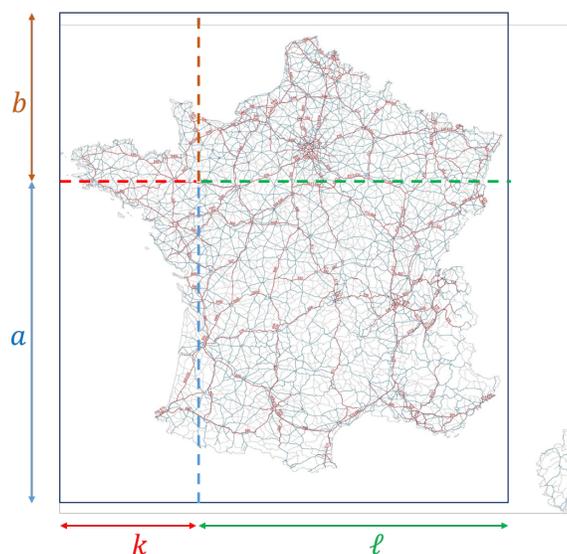


FIGURE 2 – Une carte routière avant pliage.

Jouons ensuite sur les mots : après les cartes routières, faisons place aux cartes postales et exploitons le lexique décrivant (2) et (3), qui ne doit certainement rien au hasard. Ceci va nous permettre quelques analogies, et nous offrir de nouvelles images. En effet, dans la formule (2) lue de gauche à droite, le *facteur*  $k$  se distribue **tour à tour** sur les nombres  $a$  et  $b$ . Dans ce processus de DÉVELOPPEMENT, la parenthèse – l’enveloppe donc – est décachetée. On passe alors insensiblement du registre mathématique au registre postal. Un peu comme si le *facteur* (appelons ce messenger  $K$ ) distribuait au gré de sa **tourné**e et après les avoir extraites de sa sacoche – une grande ENVELOPPE donc – des cartes postales aux adresses d’un premier destinataire (appelons-le  $A$ ) puis d’un second (appelons-le  $B$ ) :  $a$  cartes pour  $A$ ,  $b$  cartes pour  $B$ , chacune affranchie au tarif de  $k$  euros, figure 3.

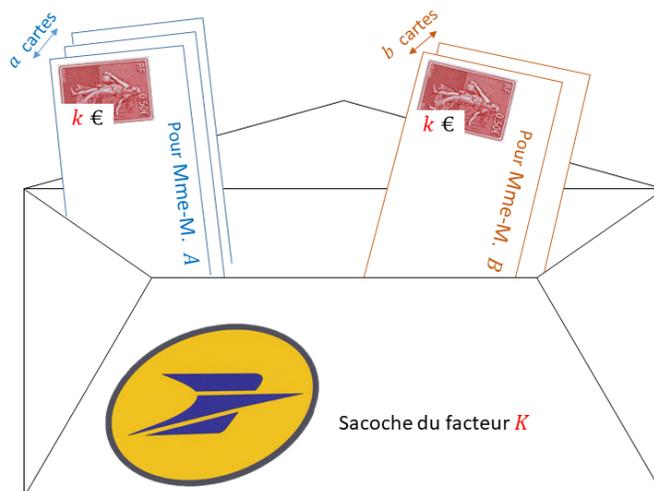


FIGURE 3 – « Ding, ding, dong le facteur n'est pas passé ... » [4]. Le cartable du facteur  $K$  contient  $a$  cartes postales pour le destinataire  $A$  et  $b$  cartes postales pour le destinataire  $B$ . Le timbre coûte  $k$  euros pour que l'entreprise rémunère  $K$ . « Ding, ding, dong, lundi ; mardi ; mercredi... le facteur est bien passé... ».

Mais La Poste peut organiser deux tournées quotidiennes au lieu d'une (ce fut le cas jusqu'en 1983). Le service est (était ?) meilleur. Ceci justifie une majoration, mettons de  $\ell$  euros, figure 4, qui débouche sur le calcul de

$$(k + \ell)(a + b)$$

égal à

$$(k + \ell)a + (k + \ell)b$$

et donc, en revenant aux achats effectués par chaque expéditeur,

$$ka + \ell a + kb + \ell b.$$

La commutativité de l'addition réordonne cette somme comme en (3).



FIGURE 4 – À double tournée, double distributivité. Changeons alors la comptine : « Ding, ding, dong, lundi, lundi ; mardi, mardi ; mercredi, mercredi, jeudi... le facteur passe plus souvent ». Donc le tarif est plus cher. Il faut maintenant deux timbres par carte postale, un de  $k$  € et un de  $\ell$  €.

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et Nathalie BRAUN est professeure au lycée Rosa Parks (Thionville).

## Références

- [1] « Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3) ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : <https://www.education.gouv.fr/media/70282/download>.
- [2] « Programmes du cycle 4 du collège ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : <https://eduscol.education.fr/document/621/download>.
- [3] « Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special11/MENE1901631A.htm>.
- [4] Georges MOUSTAKI. « Le Facteur ». In : *Le Métèque* (1969).