



HAL
open science

Des intégrateurs mécaniques à la prédiction des marées

Frédérique Plantevin

► **To cite this version:**

Frédérique Plantevin. Des intégrateurs mécaniques à la prédiction des marées. Jean-Pierre Escofier, Gérard Hamon. Actes de la Rencontre des IREM du Grand Ouest et de la réunion de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques., IREM de Rennes, pp. 129-144, 2009, 2-85728-073-4. hal-04317855

HAL Id: hal-04317855

<https://hal.science/hal-04317855>

Submitted on 1 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

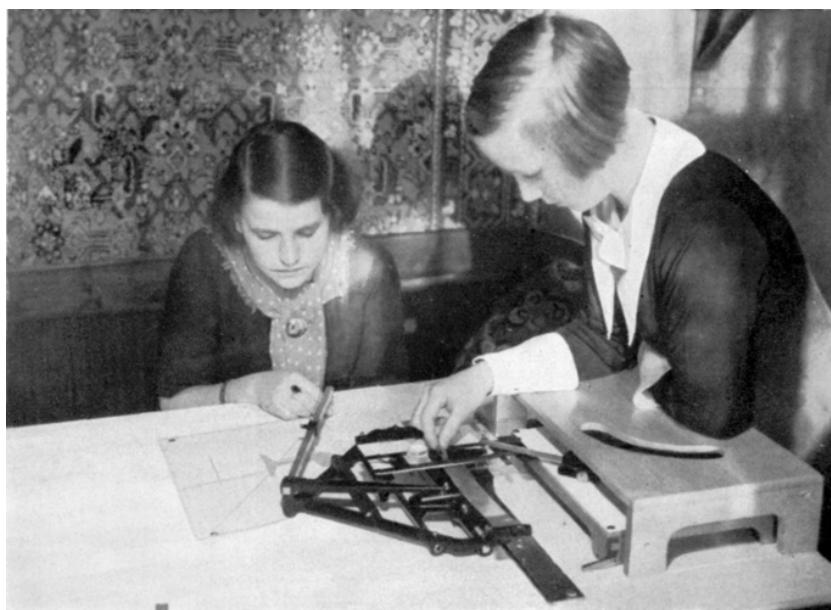
DES INTÉGRATEURS MÉCANIQUES À LA PRÉDICTION DES MARÉES

Frédérique Plantevin

*Laboratoire de Mathématiques et I.R.E.M., Université de Brest, UEB
6, avenue Victor Le Gorgeu, 29285 Brest, France*

30 Octobre 2009

Résumé : Décomposer des signaux périodiques en série de Fourier est une question commune à beaucoup de champs scientifiques très concrets dès le XIX^{me} siècle. En pleine apogée du calcul intégral mécanique, plusieurs instruments ont été conçus à cette fin : les analyseurs harmoniques. Le principe de ces machines sera exposé, un analyseur Mader-Ott sera présenté et mis en oeuvre sur quelques signaux précis. Le lien avec la prédiction des marées sera montré ainsi que le cadre général du travail initié à Brest entre l'I.R.E.M. et le S.H.O.M..



1. Introduction

Il s'agit de calculer les coefficients de Fourier d'une fonction, f , périodique de période T d'une variable - le temps pour ce qui nous intéresse ici - puis de considérer ensuite la série de Fourier de f associée. les coefficients sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$

$$\text{et} \quad a_0 = \frac{1}{2T} \int_0^T f(t)dt.$$

Ils existent dès que f est intégrable ce qui est en pratique toujours le cas. Ensuite la série de

Fourier de f , lorsqu'elle existe, est la somme trigonométrique infinie suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right).$$

Il se trouve que pour une très large classe de fonctions, cette somme infinie existe et coïncide pour chaque temps t avec la fonction $f : t \mapsto f(t)$. Ce résultat s'énonce en disant que toute fonction périodique se décompose en une somme de fonctions harmoniques élémentaires ($t \mapsto \cos(\frac{2\pi}{T} nt)$, $t \mapsto \sin(\frac{2\pi}{T} nt)$) $_{n \in \mathbb{N}^*}$. Lorsque la formule

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$$

est vraie, les coefficients de Fourier portent toute l'information contenue dans f . Le calcul des coefficients de Fourier constitue l'analyse de la fonction, la formule () est une formule de synthèse (de f à partir de ses coefficients) ou d'inversion (si l'on voit le calcul des coefficients comme une transformation qui, à f , associe $(a_0, a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$).

Les coefficients de Fourier ont la propriété remarquable de devenir de plus en plus petit (en module) au fur et à mesure que n croît, donc les premiers d'entre eux contiennent déjà une information importante, qui peut être suffisante pour décrire f au moins approximativement. Dès la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, le calcul des coefficients de Fourier de signaux périodiques¹ réels occupait un grand nombre d'ingénieurs et de scientifiques d'horizons très divers. Il ne s'agissait pas de calculs à partir de la formule analytique d'une fonction donnée mais plutôt de mesures à partir du graphe enregistré de cette fonction. Aujourd'hui ce calcul se fait très rapidement numériquement à partir des signaux discrétisés, mais jusque dans les années 1950, il était réalisé par des méthodes d'une variété et d'une ingéniosité incroyables : graphiques, mécaniques, optiques, acoustiques puis électrotechniques. Les instruments dont nous allons parler ici s'appellent des analyseurs harmoniques ; ils ont été conçus entre 1878 et 1909 pour mener à bien ces calculs ; ils seront utilisés jusqu'au milieu du vingtième siècle ; leur conception suit le développement des instruments de calcul intégral de manière naturelle.

2. Contexte - L'apogée des instruments mécaniques d'intégration

Dès le début du XIX^{me} siècle, une grande variété d'instruments mécaniques d'intégration sont élaborés en Europe². On peut les ranger dans trois catégories : les planimètres (qui mesurent l'aire de domaines - plus ou moins - quelconques du plan), les intégromètres (qui mesurent l'intégrale d'une fonction donnée par son graphe ainsi que ses premiers moments), les intégraphes (qui tracent le graphe d'une primitive d'une fonction donnée par son graphe). Tous ces instruments sont analogiques : leur principe est exact. Leur mécanisme réalise l'intégration de la courbe donnée (avec le sens qui convient à ce mot). Il n'est pas question de décrire ici le développement historique de ces instruments mais juste d'en présenter deux aspects et de donner quelques indications sur la genèse des analyseurs harmoniques et plus particulièrement sur celui de Mader-Ott.

1. ou supposés tels

2. Pour avoir une idée précise de cette diversité : Tournès, D., *Instruments grapho-mécaniques d'intégration* in *Histoire du calcul graphique et grapho-mécanique*, à paraître - en attendant, on peut consulter le site du R.E.H.S.E.I.S. - Les instruments de calcul savant.

Il nous faut revenir un peu en arrière, en 1854 précisément pour présenter l'invention décisive³ de Amsler⁴ : le planimètre polaire. Un instrument ingénieux, précis et relativement facile d'usage, et surtout susceptible de tenir dans la poche de l'ingénieur - un atout définitif si l'on pense aux instruments prédécesseurs. Il emporte un succès immédiat, un très grand nombre d'exemplaires en seront produits.

Il est obtenu comme une simplification des planimètres à cône et à disque plus anciens⁵.

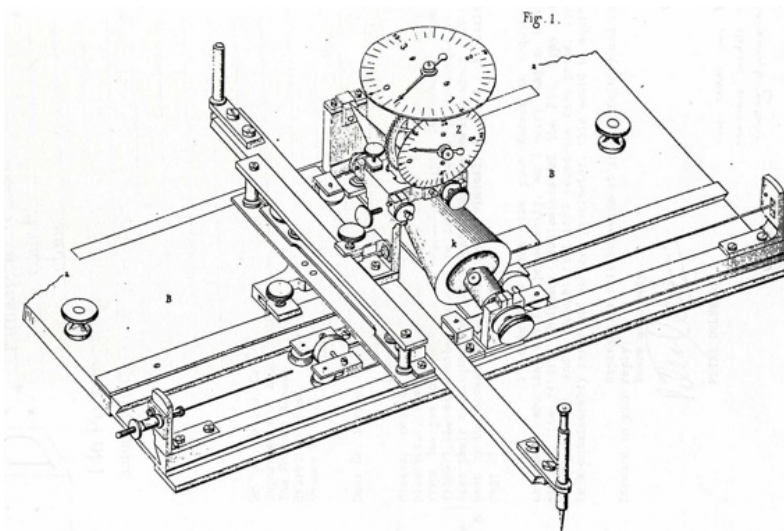


Figure 1 : Schéma du planimètre à cône de Ernst.

Ces planimètres calculent l'aire sous le graphe d'une fonction donnée (par son graphe) ; leur principe est relativement simple : le pointeur suit le graphe de la fonction dont on veut connaître l'intégrale sur un intervalle ; son mouvement infinitésimal le long de cette courbe d'équation $y = f(x)$ entraîne une roulette (posée sur un cône ou un disque selon l'instrument) dont l'axe de rotation est parallèle à l'axe des ordonnées et qui roule sans glisser. Les instruments sont construits⁶ de sorte que l'angle de rotation produit par un mouvement infinitésimal du pointeur le long de la courbe entre x et $x + dx$ soit proportionnel à l'aire du rectangle infinitésimal sous la portion de courbe parcourue c'est-à-dire $f(x)dx$. La roulette (qui est graduée) totalise les contributions au fur et à mesure du déplacement du pointeur le long de la courbe, réalisant ainsi mécaniquement la somme de Riemann de f sur l'intervalle considéré. Tous ces instruments fonctionnent avec une direction fixée comme axe des abscisses, le pointeur suit le graphe en partant d'une origine puis y revient en suivant l'axe des abscisses. Ils calculent donc l'aire algébrique du domaine du plan entre le graphe d'une fonction et l'axe des abscisses.

L'idée géniale d'Amsler est de s'affranchir de l'axe de référence : son planimètre se pose directement sur la feuille où est dessinée une courbe fermée, le pôle est planté dans le support

3. pour en savoir plus sur le contexte historique, le lecteur peut consulter Durand-Richard, M.-J., *Planimètres et intégraphes en Angleterre*, site du R.E.H.S.E.I.S. - Les instruments du calcul savant, 2008.

4. Jakob Amsler (1823-1912), ingénieur mathématicien et physicien suisse.

5. le premier planimètre à cône est dû à Tito Gonella (Florence) en 1825

6. pour voir les planimètres en question, le lecteur pourra regarder visiter le site du Musée des Arts et Métiers ou celui du R.E.H.S.E.I.S., pour une analyse de leur fonctionnement, le lecteur pourra aussi se reporter au site de l'I.R.E.M. de Brest

et le pointeur suit la courbe. Au final, la roulette donne l'aire du domaine borné par la courbe, réalisant mécaniquement le théorème de Green-Riemann. Un très grand nombre de travaux concernent cet instrument fascinant, y compris contemporains.

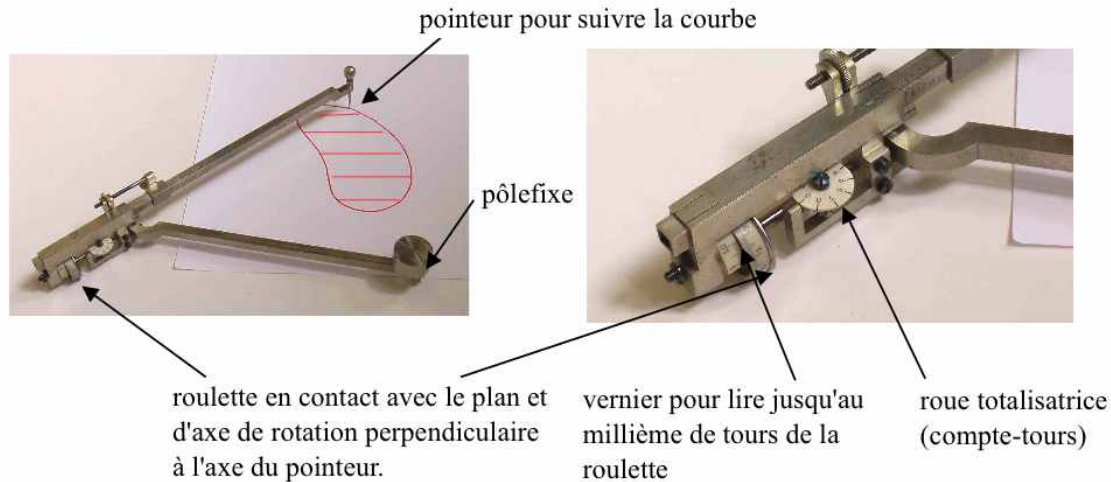


Figure 1 : Planimètre polaire⁷ d'Amsler en position pour mesurer l'aire hachurée.

Parallèlement à l'évolution de ce type d'intégrateurs, d'autres instruments sont inventés et développés en Grande-Bretagne sous l'impulsion de Thomson⁸. A la place de la roulette intégrante qui roule sans glisser, il utilise un système disque-sphère-cylindre inventé par son frère (James Thomson) pour mettre au point le calcul mécanique de l'intégrale du produit de deux fonctions données par leur graphe respectif⁹. Ce système permet à Thomson d'inventer le premier analyseur harmonique¹⁰ (ce qui était certainement son but). Il en fait fabriquer plusieurs versions, dont le plus imposant est visible au British Science Museum de nos jours. Il mesure plusieurs mètres de long et permet, grâce à ses sept sphères, de calculer simultanément les trois premières harmoniques du signal à analyser. Il a été construit pour l'Office Météorologique britannique et était utilisé pour analyser les variations des différents éléments météorologiques et y trouver des composantes périodiques. Cette machine n'a pas eu vraiment de successeur dans le domaine du calcul intégral, mais elle revêt une importance toute particulière dans le sujet qui nous intéresse car elle fait partie d'un projet plus vaste autour de l'analyse et de la prédiction de la marée comme on le verra plus loin. Outre le fait qu'elle soit la première de cette sorte.

Quatre des cinq autres analyseurs harmoniques mécaniques existants ont été mis au point entre 1894 et 1895, en Grande-Bretagne, en Suisse, en France, aux Etats-Unis, deux années d'effervescence sur ce sujet, qu'il faudrait compléter des travaux de Michelson sur les analyseurs harmoniques optiques pour en avoir une vision complète. Ils se répartissent en deux familles : ceux qui utilisent un planimètre polaire - et que l'on pourrait donc appeler plani-

7. collection privée mise à disposition de l'I.R.E.M.

8. William Thomson (1824-1912), physicien anglais connu sous le nom de Lord Kelvin

9. Thomson, W., An instrument for calculating the integral of the product of two given functions, *Proc. Roy. Soc.* 24,266, 1876

10. Thomson, W., Harmonic Analyser, *Proc. Roy. Soc.*, 27, 371-373, 1878

métriques - et les autres. Dans les premiers, le plus important est sans doute celui de Yule¹¹. A partir du graphe à analyser, son instrument construit une courbe auxiliaire fermée dont l'aire est proportionnelle à un coefficient de Fourier de la fonction étudiée (le type a_n ou b_n et l'ordre dépendant du réglage de l'instrument). Il ne reste plus qu'à placer le pointeur d'un planimètre polaire au bon endroit pour pouvoir lire la valeur du coefficient sur la roulette graduée. Cet instrument a été fabriqué et montré, une version améliorée en a été réalisée aux Etats-Unis (Le Conte¹²) mais il est difficile de dire s'il a été produit, commercialisé et utilisé finalement. De même, celui de Boucherot, un autre analyseur harmonique planimétrique ou celui de Scharp¹³, qui lui, fonctionnait selon un principe différent. Par contre, celui d'Henrici¹⁴ a laissé des traces encore visibles dans différents laboratoires, comme par exemple dans le laboratoire de D. Miller, «Department of Speech Pathology and Audiology of the University of Iowa» où il a été utilisé pour étudier le son musical¹⁵.

Tous ces instruments sont décrits et dessinés dans l'ouvrage de Morin¹⁶ qui consacre quarante pages à ce sujet.

3. L'analyseur harmonique de Mader-Ott

On le voit, le calcul des coefficients de Fourier occupe beaucoup de scientifiques à cette époque. Ainsi Clifford¹⁷ et plus tard, Finsterwalder¹⁸ apparemment indépendamment l'un de l'autre, ont travaillé sur une représentation graphique des «composantes harmoniques d'un mouvement périodique». Ils proposent de construire par une méthode géométrique des courbes fermées dont l'aire est proportionnelle aux différents coefficients a_n et b_n . La courbe périodique de période T à analyser est enroulée sur un cylindre de rayon $\frac{T}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; la courbe gauche résultante (qui est fermée) est projetée sur deux plans perpendiculaires contenant l'axe du cylindre; les deux courbes planes fermées entourent un domaine dont l'aire est proportionnelle à a_n si le plan contient l'axe des abscisses, à b_n si le plan contient l'axe des ordonnées. Le calcul des coefficients a_n et b_n pour chaque n se ramène donc à un calcul d'aire que l'on peut mener de plusieurs façons. Cette méthode a été mise en oeuvre de différentes façons et en particulier a été utilisée pour construire des analyseurs harmoniques mécaniques.

Mader¹⁹, un ingénieur berlinois, s'en inspire très directement pour concevoir son analyseur, qui présente par ailleurs une certaine analogie avec celui de Yule : comme ce dernier, il utilise un planimètre polaire pour réaliser l'intégration proprement dite. Les instruments construisent, pour un réglage donné, une courbe auxiliaire fermée dont l'aire est proportion-

11. Yule, G.U., On a simple form of Harmonic Analyser, *Proc. Phys. Soc* (London), 13,403-412, 1895

12. Le Conte, J.N., An harmonic analyser, *Phys. Rev.*, 7, 27, 1898

13.

14. Olaus Henrici (1842-1918), mathématicien anglais, succède à Clifford au département de mathématiques appliquées et mécanique au "University College of London" - Henrici, O., On a new Harmonic Analyser, *Philosophical Magazine*, 38,110, 1894

15. Miller, D., *The science of musical sound*, 1916

16. Morin, H. de, *Les appareils d'intégration*, Gauthiers-Villars, Paris, 1912

17. Clifford, W.K., *Graphic representation of the Harmonic Components of a Periodic Motion*, Proceedings of the London Mathematical Society, s1-5, 11-14, 1873

18. Finsterwalder, S., *Harmonische Analyse mittelst des Polarplanimeters*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 43, 85-92, 1898

19. Mader, O., Ein einfacher harmonischer Analysator mit beliebiger Basis, *Elek. Zeit.*, 30, 847,1909

nelle à l'un des coefficients de Fourier de la courbe à analyser. L'analyseur sera produit en un nombre assez important d'exemplaires qui sont disséminés dans le monde²⁰.

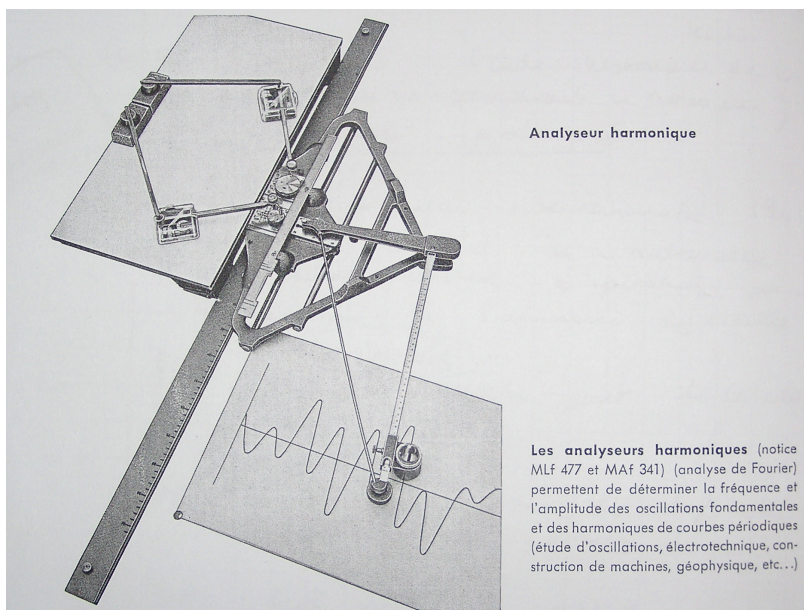


Figure 2 : Schéma de l'analyseur harmonique double par le constructeur Ott.

La brochure de l'analyseur fournit le graphe de la fonction :

$$f(x) = \sin x + \cos 2x - 3 \sin 3x + 2 \cos 8x - 3 \sin 8x - \cos 9x + 2 \sin 9x,$$

il est représenté en fonction d'angles en degrés et l'échelle est indiquée. Cela permet de l'utiliser pour l'apprentissage direct de l'instrument : on va chercher les coefficients $b_1, a_2, b_3, a_8, b_8, a_9,$ et b_9 et pouvoir comparer directement la valeur obtenue à la formule. On cherchera également les autres coefficients d'ordre inférieur à 9, a_0, a_1, b_2, a_3 et a_n, b_n pour $n = 4, 5, 6, 7$ pour vérifier que l'instrument les donne bien nuls. L'instrument est en deux parties : une partie de transformation du graphe, équerre-pointeur-chariot-roues, et une partie intégration avec le planimètre.

20. L'I.R.E.M. en a un à sa disposition (prêt) ; le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine en a acquis un en mars 1944, qui semble égaré depuis une dizaine d'années mais dont l'existence est avérée par les archives et des témoignages directs. L'exemplaire du S.H.O.M. est un double, avec deux planimètres qui permet le calcul de deux coefficients à la fois pour chaque mesure

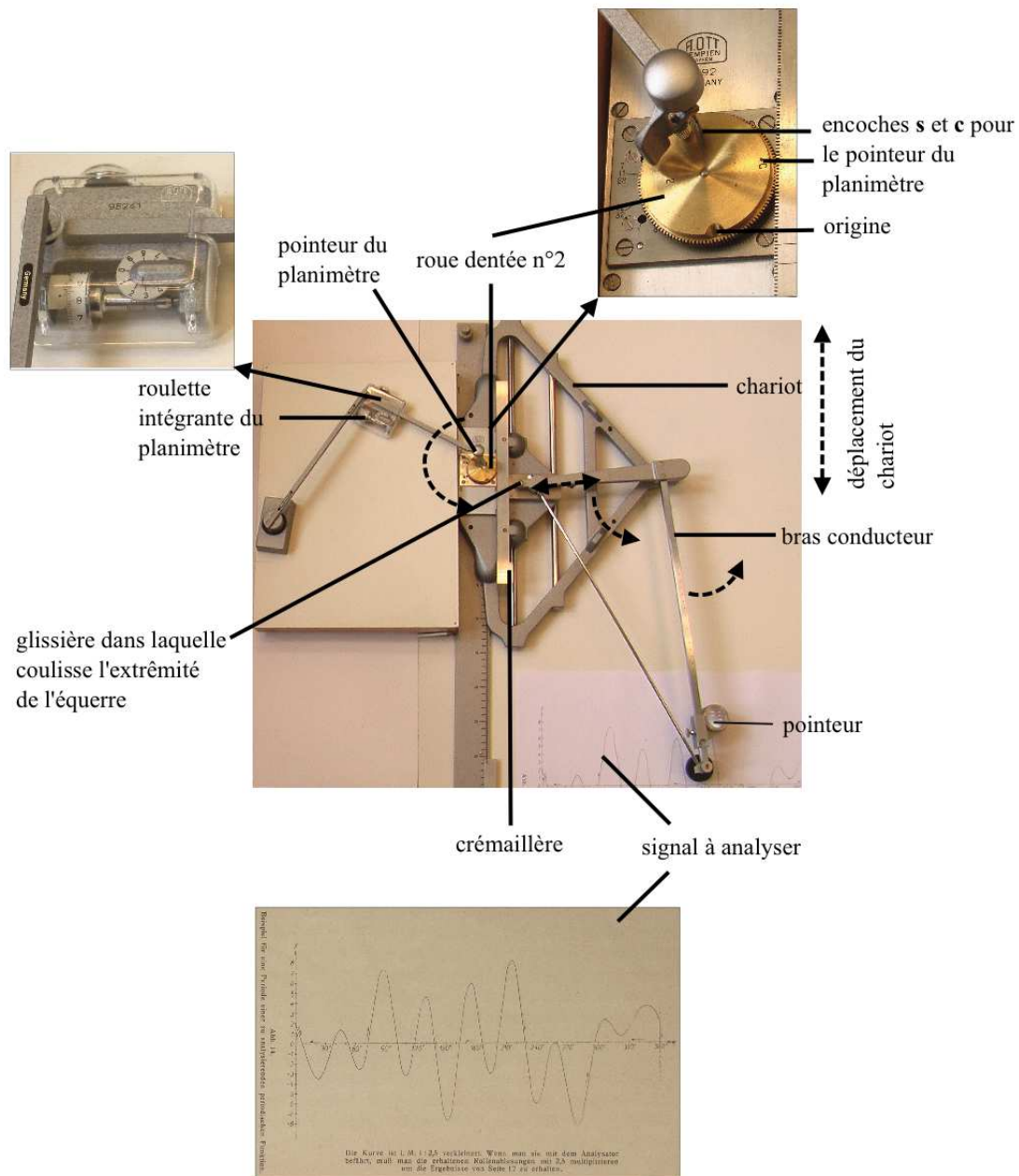


Figure 2 : L'analyseur harmonique de Mader-Ott en place pour mesurer le coefficient de Fourier b_2 du graphe extrait de la notice de l'appareil²¹

L'instrument est en premier lieu réglé en fonction de la longueur du signal à analyser (qui est assimilé à T , sa période) : deux règles graduées, l'une verticale, l'autre horizontale (voir figure 2) au fur et à mesure que l'on suit le graphe netre deux butées portées par le chariot. La hauteur du pointeur sur le bras est réglée de sorte que les extrémités de l'intervalle d'étude coïncident avec les angles maximaux de rotation du bras (et donc de l'équerre).

21. Brochure Ad. 341 *Der harmonische Analysator Mader-Ott*, 1931

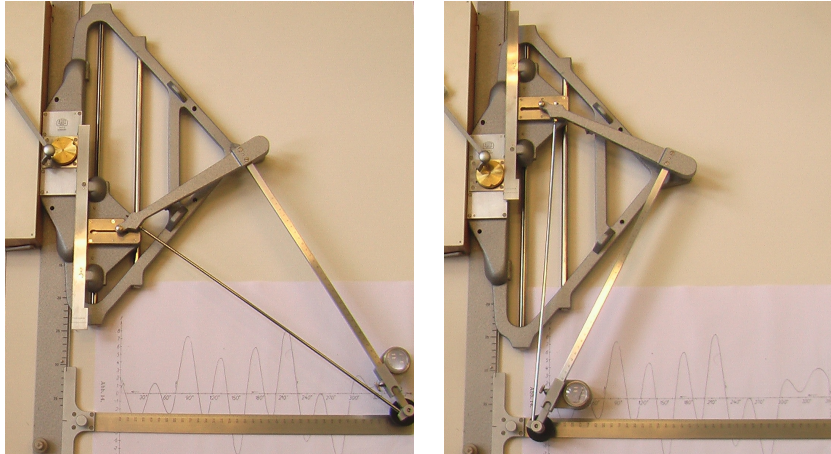


Figure 3 : Course angulaire maximale du bras conducteur lors de la mesure.

Le chariot se déplace verticalement au fur et à mesure que l'on avance sur le graphe ; ce mouvement vertical est transmis à une roue dentée par l'intermédiaire d'un engrenage. Sur la roue dentée est plantée la pointe d'un planimètre polaire. Le mouvement le long du graphe produit le mouvement de la pointe du planimètre qui trace une courbe virtuelle et le planimètre calcule l'aire du domaine qu'elle enferme (car c'est bien une courbe fermée). On revient à cet aspect plus loin. Si l'on décompose le mouvement le long de l'axe des abscisses, on constate que chacune produit un déplacement du chariot et donc la rotation de la roue dentée ; sans entrer dans les détails, la partie horizontale est annulée par le trajet de retour (de la droite vers la gauche donc) qui se fait le long de l'axe des abscisses. La justification de ce fait ainsi qu'une description plus détaillée de l'instrument, fait l'objet d'une note en préparation avec Rannou²².

La pointe du planimètre est posée dans une des deux encoches sur la roue dentée (fig. 3) ; l'encoche *c* (*c* pour cosinus) permet de mesurer un coefficient de type a_n , l'encoche *s* (*s* pour sinus) permet de mesurer un coefficient de type b_n . Le choix de la roue dentée détermine l'ordre du coefficient de Fourier calculé, l'ordre est inversement proportionnel au rayon de la roue.

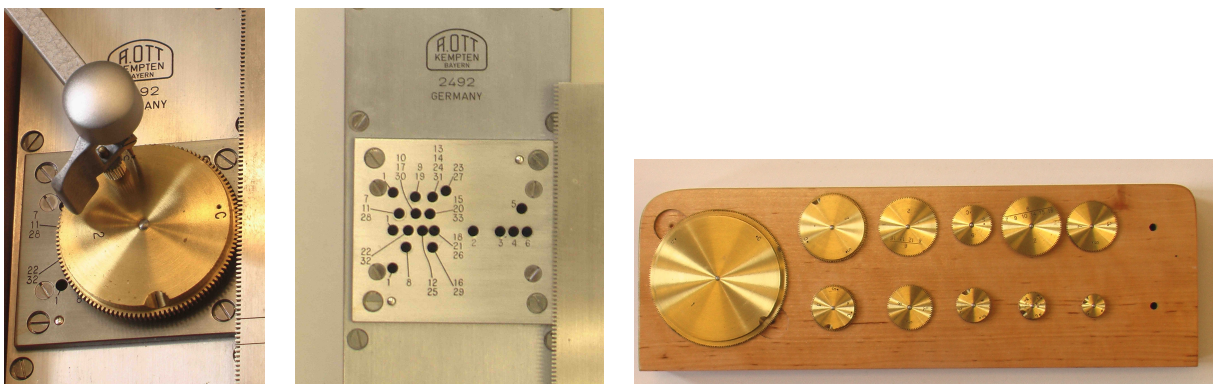


Figure 4 : Détails de l'analyseur harmonique de Mader-Ott : pointe du planimètre sur roue dentée pour le calcul de b_2 ; emplacements des différentes roues pour le calcul des coefficients d'ordre 1 à 33²³ ; jeu de roues

22. P., F., Rannou, E., *L'analyseur harmonique de Mader-Ott*, en préparation

23. l'exemplaire présenté ne possède que les roues pour le calcul des coefficients jusqu'à l'ordre 9.

pour le calcul des 18 premiers coefficients de Fourier a_n et b_n

Pour les coefficients d'ordre supérieur à 7, il y a deux roues intermédiaires qui présentent deux engrenages : un bas pour s'adapter à la crémaillère, l'autre haut (le seul que l'on voit) pour s'adapter aux roues d'index plus grand que 7.

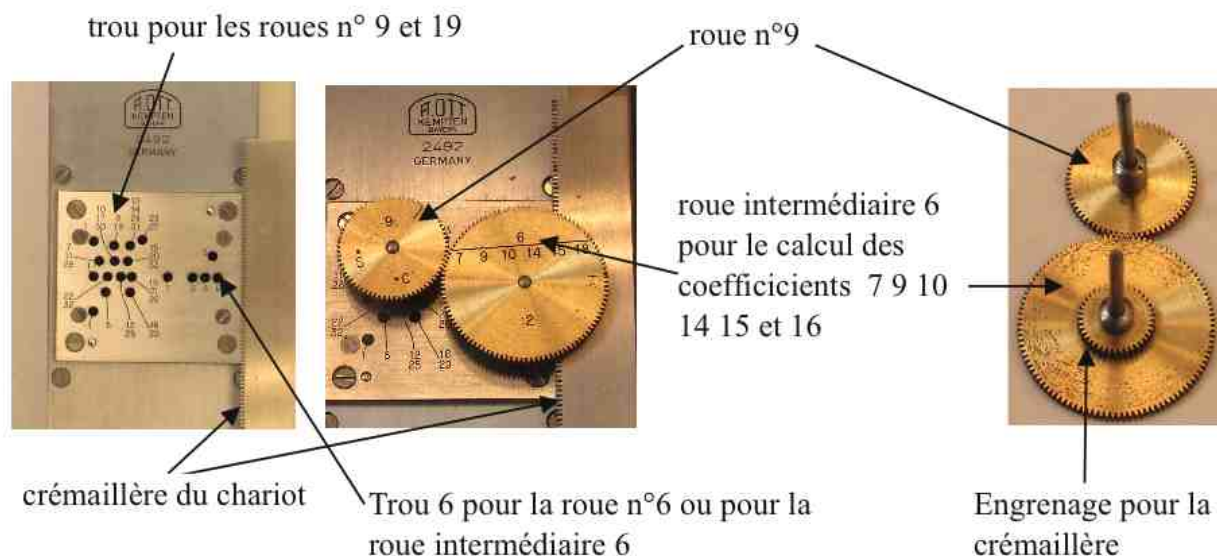


Figure 5 : Calcul des coefficients b_9 et a_9 avec la roue intermédiaire $\frac{6}{7910141518}$ placée dans le trou 6 pour s'engrener sur la roue 9.

Quelques unes des mesures effectuées avec l'analyseur pour le graphe de f donnent :

Coefficient	Index départ	Index arrivée	Coefficient calculé en unités de vernier	Coefficient calculé en cm	Coefficient exact en cm
a_0	1123	1121	-2	-0.02	0
a_1	2384	2381	-3	0.03	0
b_1	2349	2449	100	1.00	1
a_2	2223	2319	96	0.96	1
b_3	2287	1983	-304	-3.04	-3
b_9	2203	2406	203	2.03	2

Le tracé des courbes auxiliaires n'est pas réalisé par l'instrument ; la pointe du planimètre calée dans la roue dentée la trace et son mouvement entraîne la roulette intégrante du planimètre qui totalise simultanément l'aire du domaine virtuel qu'elle entoure. Rannou a réalisé un analyseur harmonique virtuel dans le langage de Maple. Il permet de la construire effectivement pour des exemples donnés analytiquement. Ainsi, on peut travailler sur les signaux de la notice d'emploi de l'instrument qui fournit le graphe du signal à analyser et sa formule analytique et faire simultanément la mesure réelle avec l'analyseur réel et soumettre la formule de la fonction analysée à l'analyseur virtuel et voir ainsi se créer la courbe auxiliaire (figure 6) ; on peut même ensuite suivre la courbe auxiliaire avec un planimètre polaire et retrouver le résultat de l'analyseur.

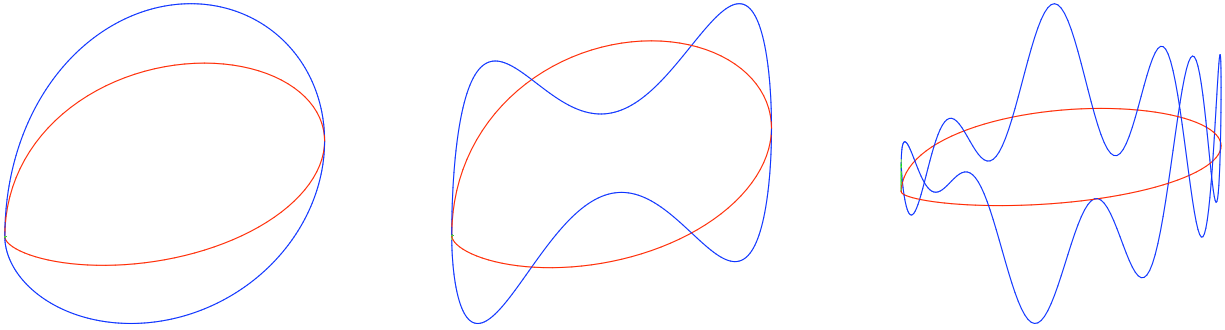


Figure 6 : Courbes auxiliaires construites par l'analyseur virtuel de Rannou calculant b_1 pour $\sin(\cdot)$, $\sin(3\cdot)$ et le signal de la figure 2.

4. Et la marée ?

Prédire la marée, c'est en fait prédire les hauteurs d'eau dans un port donné. Il y a plusieurs aspects dans cette question : connaître à l'avance les hauteurs d'eau extrémales et les moments où elles sont atteintes, être capable de donner la hauteur d'eau à tout moment de la journée. L'expérience immédiate que nous en avons est qu'il s'agit d'un phénomène périodique : si l'on vit à Brest, on constate qu'il y a deux hautes mers par jour toute l'année. On constate aussi que l'amplitude des variations de hauteur d'eau est différente selon les phases de la lune mais aussi selon les saisons. Une observation un peu plus attentive montre que ces deux données ne suffisent pas pour connaître la hauteur d'eau dans le port même s'il suffit pour justifier le régime de marées semi-diurne de la mer d'Iroise. en fait, la marée n'est pas périodique. Elle est produite par des phénomènes astronomiques qui le sont cependant, et on peut considérer dans une première approximation, que l'océan réagit d'une façon linéaire²⁴ à ces différentes forces et que, pour cette raison, la marée est quasiment périodique. On dit qu'elle est presque périodique, c'est-à-dire qu'elle est la superposition (la somme) de composantes harmoniques simples de fréquences *a priori* incommensurables entre elles :

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \dots, \text{ avec } h_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

où les ω_i n'ont pas de sous-multiple commun. Les pulsations - ou vitesses - des composantes, ω_i , sont reliées à celles des phénomènes astronomiques concernés²⁵ et déterminés par une étude théorique du système Terre-Lune-Soleil selon la méthode semi-empirique de Laplace. Il reste à déterminer l'amplitude A_i et la phase ϕ_i de chaque composante. Ce qui est fait par

24. hypothèse formulée par P. S. de Laplace en 1790 et largement utilisée par la suite; Laplace, P. S. de, Mémoire sur le flus et le reflux de la mer, *Mém. Acad. Sciences*, 45-181, 1790

25. par exemple la vitesse de rotation de la Terre sur son axe par rapport au Soleil, notée T , $T = 15^\circ/h$, la vitesse de rotation de la Lune autour de la Terre, notée h , $h = 0.04106864^\circ/h$, la précession de la Lune, notée p , $p = 0.00464183^\circ/h$, la précession du plan de l'orbite de la Lune, notée N , $N = 0.00220641^\circ/h$. Avec les trois premières, on peut donner les vitesses des composantes M_2 et S_2 . LA première, M_2 , est marée lunaire que l'on observerait si le Soleil pouvait être négligé et que la Lune était sur une orbite circulaire dans le plan de l'équateur, sa vitesse est $2T - 2s + 2h$. La deuxième est la marée solaire que l'on observerait seule si le Soleil était toujours dans le plan de l'équateur de la Terre, que l'orbite de la Terre était un cercle, et bien sûr si la Lune pouvait être négligée, sa vitesse est $2T$.

l'analyse des marégrammes²⁶, c'est-à-dire le calcul des coefficients de Fourier des enregistrements de $h(t)$.

On commence à comprendre comment la question de l'analyse harmonique des hauteurs d'eau en un lieu, Brest par exemple - un lieu très connu pour cela puisque Laplace y a élaboré sa théorie et l'a testée sur l'analyse des enregistrements des hauteurs d'eau de 1771 à 1776 - est liée à la question de la prédiction des marées. C'est en fait une question de synthèse, un processus de reconstruction, familier au traiteur de signaux, moins naturel peut-être pour le mathématicien. Si l'on sait engendrer des composantes périodiques de fréquences prescrites et d'amplitude réglable, si l'on connaît les «bonnes» amplitudes, alors on sait reproduire le signal de départ et donc le connaître pour des temps ultérieurs. Des machines de ce genre ont été inventées pour prédire les hauteurs d'eau, en même temps que les analyseurs harmoniques en fait : la première est due à Thomson²⁷, elle est connue sous le nom de Tide Predictor. L'entreprise Kelvin & Bottomley construira une dizaine de ces machines pour les services hydrographiques de plusieurs pays - en plus de la Grande Bretagne - dont la France, le Brésil, l'Argentine, le Portugal, le Japon. Le S.H.O.M. a acquis le Tide Predictor n°3 (après qu'il eut servi une vingtaine d'années au Liverpool Tide Institute) en 1900 pour déterminer les hauteurs d'eau des ports des colonies françaises, puis en 1947, le TP n°6 dans les mêmes conditions. On peut voir ce dernier dans le hall d'entrée du S.H.O.M. à Brest ; quant au premier, après avoir été donné au Musée des Arts et Métiers et exposé longtemps, il a rejoint les réserves lors de la rénovation du musée.



Figure 7 : Le prédicteur de marée du S.H.O.M. à Brest, construit par Kelvin-Bottomley en 1924 sous le nom de TP n°6.

26. pour avoir une idée des méthodes utilisées pour déterminer les constantes harmoniques à partir des marégrammes, puis pour les utiliser pour la prédiction, on peut consulter les ouvrages suivants : Cartwright, D.E., *Tides - A scientific history*, Cambridge University Press, 1989 et Simon, B., *La marée océanique côtière*, Institut Océanographique éditeur, 2007

27. Thomson, W., The tide-gauge, tidal harmonic analyser and tide predictor, *Proceedings of the Institution of the Civil Engineer*, Londres, 65, 4-74, 1881

Il ne reste plus qu'à connaître les bonnes amplitudes - et les bonnes phases - pour les bonnes composantes périodiques (car on n'en considère toujours qu'un nombre limité). Ces quantités sont appelées constantes harmoniques et l'analyse des marégrammes d'un lieu les fournit effectivement pour ce lieu, pour peu que l'enregistrement soit suffisamment long. Il nous reste à comprendre pourquoi, car $t \mapsto h(t)$ n'est pas périodique, le résultat de Fourier ne s'applique pas à h . Par contre, chaque composante h_i est périodique et peut-être approchée par un polynôme trigonométrique d'un certain degré N que l'on note P_N . On a

$$h_i(t) \approx P_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^N B_n \sin(\omega_n t)$$

où les ω_n sont pris parmi les fréquences toutes distinctes $m\omega_i$. Alors, il est remarquable que pour tout nombre réel S et tout entier n , $0 \leq n \leq N$, on ait

$$\frac{2}{T} \int_S^{S+T} P_N(t) \cos(\omega_n t) dt \rightarrow A_n, \quad \frac{2}{T} \int_S^{S+T} P_N(t) \sin(\omega_n t) dt \rightarrow B_n, \quad \frac{1}{T} \int_S^{S+T} P_N(t) dt \rightarrow A_0$$

quand $T \rightarrow \infty$.

Ainsi, si les hauteurs d'eau sont enregistrées sur des périodes suffisamment longues, on peut déterminer les constantes harmoniques qui permettent de prédire la marée pour l'année à venir. L'histoire des prédicteurs de marée est très riche et on le comprend mieux, complémentaire de celle des instruments mécaniques d'intégration tels que les analyseurs harmoniques. Ces deux thèmes se développent au sein de l'I.R.E.M. de Brest autour de l'auteur et de Rannou, et en collaboration avec Durand-Richard du R.E.H.S.E.I.S.. En juillet 2009, une convention a été signée entre l'I.R.E.M. (pour l'U.B.O.) et le S.H.O.M. pour exploiter ses archives disponibles sur l'histoire de la prédiction des hauteurs d'eau à Brest (et dans le monde) et l'analyse harmonique des marées, et mettre en valeur l'histoire de son TP. C'est dans le cadre de cette convention que se placeront les travaux à venir sur ce sujet.